

**本科生毕业论文（设计）**



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题目 | : | 基于压缩感知的磁共振成像 | | | |
|  |  | 欠采样恢复方法对比与分析 | | | |
| 姓名 | : |  | | | |
| 学院 | : | 基础医学院 | | | |
| 专业 | : | 生物医学工程 | | | |
| 班级学号 | : | 生物医学工程 | | | |
| 指导教师 | : |  | 职称 | : | 实验师 |

|  |
| --- |
| 2014 年 6月 10日  南京医科大学教务处制 |

# 摘要

磁共振成像（MRI）技术属无创伤、无射线检查，具有对比分辨率高，多方位、多参数采集及功能成像等优势，然而，MRI技术是一种速度相对较慢的成像模式，数据采集的时间过长是其最大缺点。

压缩感知（Compressed Sensing，CS）理论是近年来新兴的研究方向，它指出，只要信号是可压缩的或在某个变换域是稀疏的，那么就可以用一个与变换基不相关的观测矩阵将变换所得高维信号投影到一个低维空间上，然后通过求解一个优化问题就可以从这些少量的投影中以高概率重构出原信号，可以证明这样的投影包含了重构信号的足够信息。在该理论框架下，采样速率不决定于信号的带宽，而决定于信息在信号中的结构和内容。

目前，基于CS理论的MRI技术尚处于理论研究阶段，很多关键问题需要解决，主要包括：k空间部分采样方式的确定，不同类型成像的稀疏性表达，相关的快速优化算法，以及从医学临床的角度对重建图像质量进行评价。

本文首先简要介绍了MRI技术的基本原理和CS理论的基本概念。从k空间重建原理、k空间的欠采样填充轨迹、MRI图像的稀疏化方法、相关的恢复重建算法的角度对基于CS理论的MRI技术的发展过程进行了详细说明；之后选取脑部断层MR图像进行仿真，对k空间分别进行矩形FOV、放射状、螺旋状和Propeller轨迹欠采样，并通过5种恢复算法进行恢复重建，并从均方误差、峰值信噪比、结构化相似度和运算时间等客观指标方面进行比较分析，最终得出k空间欠采样选择放射状欠采样轨迹、稀疏化方法选择6层haar小波变换，恢复算法选择线性Bregman法可以在较短恢复时间内取得较优恢复效果的结论；最后针对较低欠采样率下恢复重建容易产生干涉条纹的问题，提出淡化、消除螺旋状欠采样轨迹产生干涉条纹的方法，即通过在原有的螺旋状欠采样轨迹下进行随机震荡采样，使得最终恢复图像更为准确。

**关键词**：压缩感知，磁共振成像，k空间欠采样，恢复算法

# 

# Abstract

II

Magnetic resonance imaging (MRI)inspection has no trauma and no X-ray.With high contrast and resolution, it possesses the advantages of multiparameter, comprehensive and functional imaging.However, magnetic resonance imaging (MRI) technology is a kind of relatively slow imaging mode.Its biggest drawback is the long scan time.

Theory of Compressed Sensing (CS) is proposed in recent years. It pointed out that as long as the signal is compressible or in a transform domain is sparse, a observation matrix unrelated to transform bases can project high dimensional signal to a low dimensional space, and then solving an optimization problem can reconstruct the original signal from these few projection with high probability. It can be proved that the projection contains enough information to reconstruct signal.Under the theoretical framework, the sampling rate is determined by the structure and content of information in the signal, instead of the bandwidth of the signal.

So far, the MRI technology based on the theory of the CS was still in the stage of theoretical research. A lot of key problems need to be solved,including: the k-space undersampling way, sparse representation of different image, the relevant fast optimization algorithm and the clinical evaluation of reconstruction image quality.

This paper first briefly introduces magnetic resonance imaging (MRI) technology and the CS theory.From the aspects of k-space reconstruction, k-space undersampling, sparse methods and reconstruction algorithms of MRI, this paper reviews the development of MRI techniques based on the theory of the CS. After performing brain MR image simulation, using the FOV,radial,spiral,Propeller undersampling trajectory of k-space and 5 recovery algorithms, the reconstructed images are compared each other and analysed from mean square error, peak signal-to-noise ratio and structural similarity and computing time to concluded that choosing radial undersampling trajectory of k space, haar wavelet transform, linear Bregman recovery algorithm can recover images well in a shorter recovery time. Finally, the research and application of MRI technology based on the theory of CS is also prospected.

**Key words:** Compressed Sensing, magnetic resonance imaging, k-space undersa-mpling, reconstruction algorithm

**目 录**

[摘要 I](#_Toc399256668)

[Abstract II](#_Toc399256669)

[第 1 章 绪论 1](#_Toc399256670)

[1.1 磁共振成像技术与压缩感知理论 1](#_Toc399256671)

[1.1.1 磁共振成像技术 1](#_Toc399256672)

[1.1.2 压缩感知理论 1](#_Toc399256673)

[1.1.3 基于压缩感知理论的磁共振成像 2](#_Toc399256674)

[1.2 主要研究内容和章节安排 3](#_Toc399256675)

[第 2 章 磁共振成像原理 5](#_Toc399256676)

[2.1 核磁共振理论 5](#_Toc399256677)

[2.1.1 原子核的磁性 5](#_Toc399256678)

[2.1.2 磁共振的基本原理 6](#_Toc399256679)

[2.1.3 弛豫和弛豫时间 7](#_Toc399256680)

[2.2 磁共振成像 8](#_Toc399256681)

[2.2.1 磁共振成像的空间定位 8](#_Toc399256682)

[2.2.2 k空间与磁共振图像重建 9](#_Toc399256683)

[2.3 本章小结 10](#_Toc399256684)

[第 3 章 压缩感知基本理论 11](#_Toc399256685)

[3.1 信号的稀疏表示 11](#_Toc399256686)

[3.2 压缩观测 14](#_Toc399256687)

[3.2.1 随机矩阵 15](#_Toc399256688)

[3.2.2 确定性矩阵 16](#_Toc399256689)

[3.2.3 结构随机矩阵 16](#_Toc399256690)

[3.3 重建算法 17](#_Toc399256691)

[3.3.1 基追踪法 17](#_Toc399256692)

[3.3.2 匹配追踪法 18](#_Toc399256693)

[3.3.3 正交匹配追踪法 19](#_Toc399256694)

[3.4 本章小结 22](#_Toc399256695)

[第 4 章 基于CS理论的MRI技术 23](#_Toc399256696)

[4.1 K空间的欠采样填充轨迹 23](#_Toc399256697)

[4.2 MRI图像常用稀疏化方法 25](#_Toc399256698)

[4.3 MRI欠采样恢复算法 25](#_Toc399256699)

[4.3.1 直接填零法 26](#_Toc399256700)

[4.3.2 二维OMP法 26](#_Toc399256701)

[4.3.3 快速收缩阈值法 26](#_Toc399256702)

[4.3.4 线性Bregman法 29](#_Toc399256703)

[4.3.5 共轭梯度法 31](#_Toc399256704)

[4.4 本章小结 32](#_Toc399256705)

[第 5 章 压缩感知效果对比 33](#_Toc399256706)

[5.1 图像重建质量的客观评价方法 33](#_Toc399256707)

[5.1.1 均方误差（mean square error，MSE） 33](#_Toc399256708)

[5.1.2 峰值信噪比(peak signal-to-noise ratio，PSNR) 33](#_Toc399256709)

[5.1.3 结构化相似度（structural similarity，SSIM） 33](#_Toc399256710)

[5.1.4 运算时间 34](#_Toc399256711)

[5.2 实验与分析 34](#_Toc399256712)

[5.3 本章小结 42](#_Toc399256713)

[第 6 章 干涉条纹改善方法 43](#_Toc399256714)

[6.1 随机震荡法 43](#_Toc399256715)

[6.2 结果分析 45](#_Toc399256716)

[6.3 本章小结 49](#_Toc399256717)

[第 7 章 结论和展望 51](#_Toc399256718)

[附录 A 图表索引 53](#_Toc399256719)

[附录 B 评价数据 55](#_Toc399256720)

[参考文献 61](#_Toc399256721)

[综 述 65](#_Toc399256722)

[致 谢 71](#_Toc399256723)

# 绪论

## 磁共振成像技术与压缩感知理论

### 磁共振成像技术

磁共振成像（MRI，magnetic resonance imaging）是根据生物体磁性核（氢核）在磁场中表现出的共振特性成像的高新技术[1]。MRI是以核磁共振（Nuclear Magnetic Resonance，NMR）这一物理现象为理论基础的，之所以省去“核”字，是为了突出这一检查技术不存在对人体有害的电离辐射的优点，使之区别于要使用X射线的放射科检查以及要使用放射性核素的核医学检查。

从NMR的发现到MRI设备的诞生，这中间经历了几代物理学家及医学家长达数十年的辛勤努力。1946年美国物理学家布洛赫（Felix Bloch）和珀赛尔（Edward Purcell）分别独立地发现核磁共振现象，并荣获1952年诺贝尔物理学奖。1972年美国内科医生达玛迪安（Raymond Damadian）提出利用磁共振原理测定活体组织的纵向弛豫时间T1和横向弛豫时间T2的方法，以及用于医学诊断的设想。1973年，美国州立大学教授劳特伯（Paul Lauterbur）首次使用梯度磁场进行空间编码，产生了第一幅磁共振图像。从此，成像概念发生了质的飞跃。尤其近年来，随着超导技术、低温技术、电子技术、成像技术和计算机等相关技术的进步，MRI技术得到了飞速的发展。MRI系统已经成为当今医学影像领域最先进、最昂贵的诊断设备之一。目前以分子探针和谱成像为标志的MRI分子影响学使成像进入一个新的层次。

然而，数据采集时间较长仍然是磁共振成像技术的最大缺点，由于成像速度慢，使该项检查的适用范围大为减少，例如不适合运动器官和危重病人的检查；对于躁动或者丧失自制能力的患者，如不使用镇静剂，也是难以成像；儿科的某些应用同样受到限制。缩短成像时间不仅可以提高效率和病人的舒适度、减少时间依赖性伪影，还是实现心血管检查、功能信息获取、实时温度检测与介入手术成像等动态成像的关键。因此缩短成像时间一直以来都是磁共振成像技术发展的重要目标之一。

现在的研究者致力于通过分析k空间图像数据的冗余性，从而减少成像所需的采集数据，达到缩短成像时间的目的。本文论述的部分k空间重建就是针对部分k空间采集技术的重建方法。部分k空间采集技术就是在k空间数据时，只采集k空间数据，以达到缩短扫描时间的一种应用广泛的扫描采集技术。

### 压缩感知理论

近几年来出现的一种新颖的理论——Compressed sensing（也称为Compressive sampling)[2-7]使得采样速率低于信号带宽两倍时精确恢复信号成为可能。它指出，只要信号是可压缩的或在某个变换域是稀疏的，那么就可以用一个与变换基不相关的观测矩阵将变换所得高维信号投影到一个低维空间上，然后通过求解一个优化问题就可以从这些少量的投影中以高概率重构出原信号，可以证明这样的投影包含了重构信号的足够信息。在该理论框架下，采样速率不决定于信号的带宽，而决定于信息在信号中的结构和内容。事实上，压缩感知理论的某些抽象结论源于Kashin创立的范函分析和逼近论[8]，最近由Candes，Romberg[4]，Tao[9]和Donoho[5]等人构造了具体的算法并且通过研究表明了这一理论的巨大应用前景。

压缩感知理论是应用数学与信号处理领域中一个非常新的研究方向，自从2006年有了正式的论文发表之后，迅速引起了国内外相关领域研究者的高度重视，在医疗成像[10]、光学/遥感成像[11,12]、无线通信[13,14]、目标识别[15]、雷达探测[16~19]、地震数据重建[20]、图像融合[21]、冷链物流检测[22]、声音信号的采集与压缩[23,24]等领域均受到高度关注，并被美国科技评论评为“2007年度十大科技进展”，D Donoho因此还获得了“2008年IEEE IT学会最佳论文奖”。

该领域的先驱者有加州大学洛杉矶分校的Terence Tao、加州理工大学的Emmanuel Candes、斯坦福大学的David Donoho、以及莱斯大学的Richard Baranink等。国内关于这方面的研究则刚刚起步，发表的论文甚少，但中科院电子所、西安电子科技大学、燕山大学、西南交通大学、华南理工大学、北京交通大学等单位的一些研究所已经着手开始研究。

在硬件实现上，Rice大学的Baranink教授等研制出单像素相机[25]和A/I转换器[26]，吸引了国内外众多媒体的眼球。随后也有一些硬件方面的相继报道，例如，麻省理工学院Wald教授等人研制出MRIRF脉冲设备[27]，麻省理工学院Freeman教授等人研制出编码孔径相机[28]，伊利诺伊州立大学Milenkovic等人研制出DNA微阵列传感器[29]等等，然而，由于缺乏有效的压缩感知矩阵判别理论，除Rice大学的单像素相机（硬件成本昂贵，重建算法效率低下）外，其他硬件均缺乏严格的理论分析。经过近两年的发展，压缩感知在理论方面已经取得了许多重要的成果，许多研究者已经将之投入到实际应用当中，如信息、医学等学科。

### 基于压缩感知理论的磁共振成像

如今，成像在医疗诊断方面起到了着非常重要的作用。现在临床MRI的几个研究热点是加速MR功能成像、卡尔曼滤波重建磁共振实时动态成像、插值法加速二维多层面成像、分割算法快速成像、加速超极化3D MR波谱成像、加速MR电影成像、高空间分辨率并行采集成像等[30]。

在MRI领域，由于扫描仪器所采集的不是直接的图像像素，而是由图像经过全局傅里叶变换将原始采集的时域图像转化得到的频域图像。运用压缩感知理论可以大大减少采样数据量，从而为后续数据传输、处理和存储减小压力，降低对硬件的需求；此外，该技术创新地改变医学信息的获取方式，可以将速度提高到原来的几千倍，在能保证令人满意的空间分辨率的情况下，缩短扫描时间，减少病人在扫描过程中的不适；在保持原有采样时间的基础上，可以进一步提高现有设备的空间分辨率，使医生的诊断更为可靠，故其在临床MRI的应用备受关注。

磁共振成像应用范围广，对于不同成像部位以及成像的不同类型，可能会对k空间数据欠采样方法、图像稀疏化方法以及恢复重建算法的选择产生影响，因此，针对成像部位和类型的差异选择合适的压缩感知方案十分重要。

## 主要研究内容和章节安排

本文主要针对压缩感知理论在磁共振成像技术中的应用进行了研究，并且通过多种磁共振图像进行仿真。研究内容主要包括以下几个方面：

* 1. 从数据稀疏化、数据采样、数据恢复三个方面学习压缩感知理论的基本概念；
  2. 磁共振成像技术的基本原理以及数据采样方式；
  3. 分析磁共振成像数据的稀疏性并对比使用多种稀疏变换的成像效果；
  4. 磁共振成像数据k空间欠采样轨迹的选择；
  5. 基于压缩感知的磁共振成像的信号重构恢复算法；
  6. 从均方误差、峰值信噪比、结构化相似度和运算时间四个方面分析压缩感知应用于MRI的优越性，并得出最优的稀疏化方法、k空间欠采样轨迹以及恢复算法。

本文共分为六章，主要内容安排如下：

第1章是绪论，对磁共振成像技术与压缩感知理论的基本原理、发展历史与现状以及本课题的研究意义做了简要介绍；

第2章介绍了磁共振成像技术的基本原理，重点对空间编码技术、k空间的特性做了较为详细的介绍，为之后的k空间欠采样方法的研究做好必要准备；

第3章阐述了CS理论的基本要素，CS理论中常用的欠采样方法、稀疏化方法以及恢复重建算法，结合lena图像和批量离子浓度检测分别说明稀疏化方法和恢复算法的优劣；

第4章介绍基于CS理论的MRI技术的几种常用k空间欠采样方法、稀疏化方法以及恢复重建算法；

第5章介绍均方误差、峰值信噪比、结构化相似度和运算时间四个客观评价指标，将多种欠采样轨迹、稀疏表示和恢复算法相互结合，在四种欠采样率情况下恢复图像，并从上述评价指标方面进行对比，得出最优压缩感知方案；

第6章针对以上研究中欠采样轨迹造成的图像域混叠现象，提出通过在原有轨迹上进行随机震荡的方法，来淡化、消除图像的干涉条纹，并对最终效果进行对比分析，得出较优的随机震荡调整参数。

第7章对本文所做的工作进行总结和展望。

# 

# 磁共振成像原理

本章主要介绍了磁共振成像的基本原理[31]，主要包括核磁共振、磁共振信号的产生与检测、磁共振成像的空间编码与图像重建等内容。对k空间采样过程以及k空间的特性做了较为详细的介绍，为后面基于CS的MRI的K空间欠采样做好理论上的准备。

## 核磁共振理论

世界是物质的，物质是由分子构成的，分子又是由原子构成的。原子由原子核和核外电子组成，原子核由带正电荷的质子和不带电荷的中子组成。核磁共振所要研究的对象就是原子核，而且是具有磁性的原子核。磁共振成像是以核磁共振为理论基础的，为了突出这一检查技术不存在对人体有害的电离辐射的优点，使之区别于要使用X射线的放射科检查以及要使用放射性核素的核医学检查，因此将“核”字省去。

### 原子核的磁性

在微观世界中，电子、中子、质子和原子核等微观粒子除了具有一定的大小、电荷、质量等属性外，还有一种固有属性-自旋，用自旋角动量（spin angular momentum）描述。为便于理解，微观粒子的自旋运动可以简单地看成微观粒子的自旋，虽然实际情况并非如此。微观粒子除了具有自旋角动量外，还具有轨道角动量（orbital angular momentum）。

原子核的自旋的取值是离散的、不连续的、也就是说是量子化的：

 (2‑1)

其中，为原子核的自旋量子数（spin quantum number），取整数和半整数：，为普朗克常数。大小取决于值，不同的原子核值不同。

处于静磁场中的原子核，它的自旋在空间所取的方向也是离散的、不连续的，具有空间量子化的性质，即在静磁场方向只能有若干个特定的取向，取向的数量取决于值的大小，为种，这也使得在静磁场方向（方向）的投影值有个不同的分量，分别为：

 (2‑2)

其中，为核自旋磁量子数（spin magnetic quantum number）。

原子核可看成是具有一定质量与体积的均匀带点球体，因此原子核的自旋运动会产生绕核心旋转的环形电流，继而会在其周围空间产生磁场，所以自旋不为零的原子核（简称自旋核）就会具有一定的磁性。

为描述自旋核在其周围空间所产生的磁场特性，引入一物理量——磁矩（magnetic moment）。自旋核的磁矩和自旋都是由原子核的自旋运动引起来的，它们之间存在着一定的比例关系：

 (2‑3)

为比例系数，称为磁旋比（guromagnetic ratio）；为一个取决于原子核种类的无量纲的数，称为朗德因子；为电子的电荷数；为光速；为质子的质量。

与原子核的自旋一样，原子核的磁矩在静磁场中也存在种可能的取向，因此核磁矩在静磁场方向（方向）的投影值有个不同的分量：

 (2‑4)

自旋不为零的原子核都是磁性核，也只有磁性核才能和静磁场相互作用产生磁共振。在生物组织中，存在很多的磁性核，如H、C、N、F、Na、P但是由于氢原子占到生物组织原子数的2/3，氢核的磁化强度也是人体常见磁性核中最高的，所以目前能用于临床MRI的却只有氢核。

当人体被置于磁体内，人体内部的磁性核就会受到静磁场的作用，使得其运动状态发生改变。

在人体进入磁场之前，磁性核的磁矩所选择的方向（即所谓的取向）处于一种杂乱无章的状态，磁矩沿空间各方向等概率分布。当磁性核处于静磁场中时，就会在静磁场的作用下，只沿空间某几个特定方向分布，也就是所谓的空间量子化。例如，氢核的自旋，它在磁场中的取向就只有两种，一是顺着磁场方向，能量状态较低，为；另一是反着磁场方向，能量状态较高，为，它们之间的能量差为：

 (2‑5)

其中，为静磁场强度，为时氢核所具有的能量。

在静磁场的作用下，核磁矩会有特定的空间取向，使得核磁矩和静磁场存在特定的夹角，因此使得原子核的磁矩以夹角在以静磁场为轴做拉摩尔旋进（Larmor precession），旋进的角速度为：

 (2‑6)

其中，为拉摩尔旋进频率，为磁旋比，为静磁场强度。

### 磁共振的基本原理

共振是自然界普遍存在的一种物理现象，如音叉的共振，磁共振等。音叉的共振是在外来声波的激励下产生的，而磁共振则是在外来电磁波的激励下产生的。

处于静磁场中的氢核会有两种取向，取向不同，它们之前的能量差为。如果外界施加的电测波的能量（量子）正好等于不同取向的氢核之间的能量差，则处于低能态的氢核就会吸收电磁波能量跃迁到高能态（受激吸收），这就是所谓的核磁共振，即处于静磁场中的磁性核受电磁波的作用而产生的不同能级之间的共振跃迁现象。

磁共振中，所施加的电磁波又叫射频波（radio frequence wave），简称RF波。如果射频脉冲的频率与质子绕轴进动的频率相等，那么就会发生共振。共振会导致两个同时发生的作用：一是低能级的质子吸收了射频脉冲的能量后跃迁到了高能级，纵向磁化矢量变小；二是受射频脉冲磁场的磁化作用，进动的质子趋向于射频磁场方向而变为同步、同速运动，这样在平面上叠加起来，就形成了一个新的宏观磁化矢量，即横向磁化矢量，用表示。质子同时绕磁场以频率，又绕射频波的磁矢量进动，这导致净磁化矢量由轴到平面的螺旋形运动，即章动（nutation）。

在各种射频脉冲作用的情况下，的大小都不会变化，只是随着其偏离轴的程度加大，会在平面内产生越来越大的横向磁化分量。随着翻转角度的变化，逐渐增加，当到达平面后，达到在平面上的最大分量。当射频脉冲继续持续作用时，就会继续偏离平面向轴负方向翻转，其在平面上的分量又逐渐减少。

如果在平面设置一接收线圈，根据法拉第电磁感应原理，通过闭合回路的磁通量发生变化时，闭合回路内产生感应电压，感应电压的大小与磁通量的变化率成正比。于是在线圈两端就会感应出交流电动势，这个电动势就是线圈接收到的磁共振信号。

### 弛豫和弛豫时间

弛豫（relaxation）是指当射频脉冲消失后，质子由激发状态返回到平衡状态的过程。一旦关闭射频脉冲，质子将会重新沿静磁场方向排列，并释放出多余能量。因此，在关闭射频脉冲以后，将会发生两种情况：（1）自旋的质子将回复到最低能态；（2）自旋的质子彼此之间将出现相位差。这是由两种同时发生但互相独立的过程引起的：（1）纵向弛豫（longitudinal ralaxtion），是指纵向磁化逐渐恢复为的过程；（2）横向弛豫（transverse ralaxtion），是指横向磁化逐渐衰减恢复为零的过程。

Bloch从实验发现，弛豫过程中磁化强度偏离平衡状态的程度越大，则其恢复的速度就越快。这一规律在旋转坐标系中表述成如下形式：

 (2‑7)

 (2‑8)

考虑样品受到的是90°RF脉冲作用，且把90°RF脉冲过后的时间点作为弛豫过程开始的起点，因此时，，据此可推出和随时间的变化规律：

 (2‑9)

 (2‑10)

其中， 、为引入的两个系数，分别表示纵向弛豫时间常数和横向弛豫时间常数，简称为纵向弛豫时间和横向弛豫时间。

## 磁共振成像

### 磁共振成像的空间定位

在纵向磁场的全身MRI系统中，磁体的轴一般定义为磁体的轴向，之后通过右手法则定义轴、轴。MRI系统通过三个梯度子系统来实现成像层面的选择和空间编码。

1. 层面选择

若只考虑在方向选层，沿主磁场方向叠加一个线性梯度磁场，沿轴各层面上质子的进动频率可表示为：

 (2‑11)

若所施加的激励RF脉冲的角频率为：，则只有这一层的核受到激发产生自由感应衰减（FID）信号，这样就选出了一层。由于激励脉冲RF的频率有一定的范围，则选中的一层将有一定的厚度。若梯度一定，则RF脉冲频宽越大层越厚。

1. 相位编码

所谓相位编码（phase encoding），就是先利用相位编码梯度造成质子有规律的进动相位差，然后利用此相位差来标定体素空间位置的方法。

加入相位梯度磁场后，在的作用下，相位编码方向上各体素处于不同强度的磁场中，因此该方向上各磁化强度矢量将以不同频率进动，其进动频率为：

 (2‑12)

进动频率的不同必然导致进动相位的不同。设相位编码梯度的持续时间为，则时间后相位编码方向上个体素的进动相位为：

 (2‑13)

不同的坐标处，磁化矢量旋过角度不同，其相位差为：

 (2‑14)

与成正比，也就是说可以通过相位差来确定自旋核所处的空间位置，这就是空间坐标用相位进行了编码。

1. 频率编码

通过选层及相位编码确定了体素的坐标和坐标，但相同的体素还不能区分。经时间撤销后，加入沿方向的梯度场，磁化矢量旋进角频率为：

 (2‑15)

不同处旋进角频率不同。实际上频率编码与相位编码没有本质的不同，不过各体素的坐标通过频率差别来确定。

采集到的MR信号是断层内所有体素自旋核产生信号的总和，要实现重建必须把信号重新按不同的频率和相位分解开，才能得到断层的每一位置自旋核所产生信号的强度。在MRI中普遍使用的方法是傅立叶变换成像图像重建。

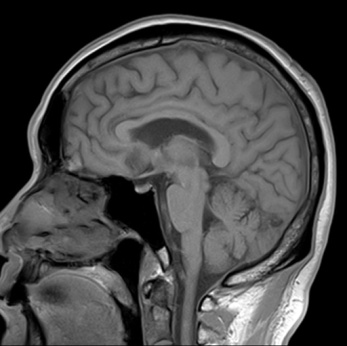
### k空间与磁共振图像重建

k空间填充技术是MRI仪生产过程中的关键技术之一，也是做成像分析的重要手段。在MRI中，相位和频率标记了位置，隐含了时间。每次信号采集的都是总信号，为了更快更方便对采集的的时域信号进行变换，人为地建立一个抽象的二维k空间。以自旋回波为例讨论，序列开始与90°脉冲同时，启动选层梯度场后启动相位编码梯度场，持续时间为，90°脉冲后间隔时间加180°脉冲，重聚后产生回波，此时加梯度脉冲，对坐标不同的体素频率编码，持续时间为，打开的同时进行数据采集，若图像矩阵为，在时间内以一定的时间间隔如，时间段进行采集，每次采集个信号，对应一次相位编码，这个数据形成以时间为变量的数据矩阵的一行。一次采集结束后再加RF脉冲重新开始，每次大小不变采集时间不变，所以相同坐标不同坐标的频率是相同的。而相同坐标的不同体素共振频率不同，经一维傅立叶变换后用频谱区分。

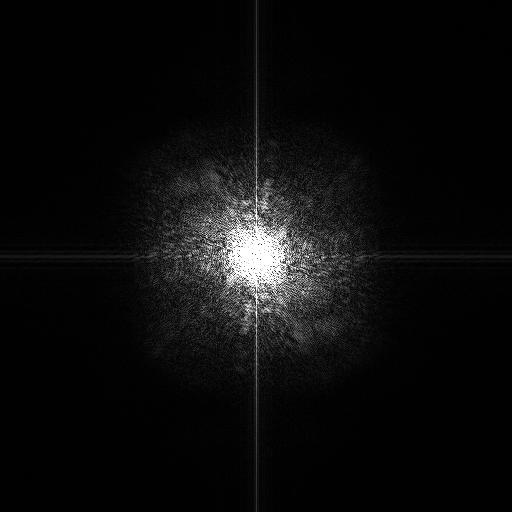
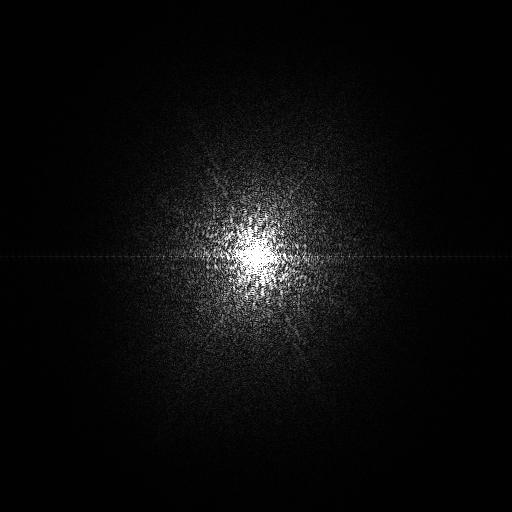
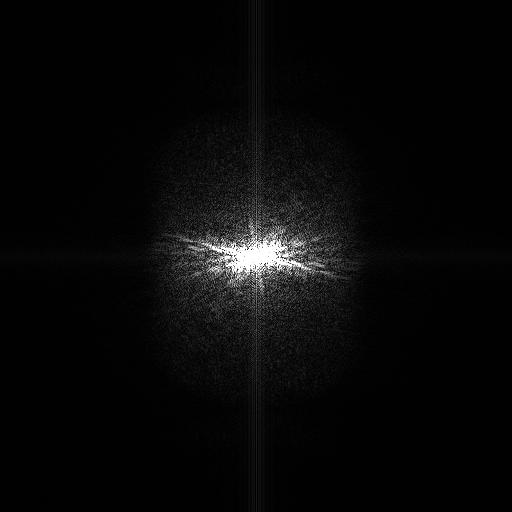
每次采集到的一行数据经一维傅立叶变换后，某点的频域信号等于对应该坐标点全部坐标所发出信号的总和即所有相位的叠加。把采集到的每个信号变换为以为自变量的数据填充到以一定顺序储存数据的k空间中去。可见k空间是以空间频率为坐标轴的空间。横轴代表频率编码，纵轴代表相位编码，列数等于取样点数，行数等于相位编码步数。

k空间内的空间频率分布是中心频率为零，距中心越远则频率越高。k空间内信号的幅度分布是k空间中心部分所对应的MR信号幅度大，主要形成图像的对比度。k空间外围部分所对应的MR信号幅度低，主要形成图像的分辨力。

由于MRI成像设备价格昂贵，没有亲自进行磁共振成像的实验条件，所以本课题通过对磁共振图像进行二维傅立叶变换，反推出相应k空间。如图2‑1所示，其中(a)、(b)、(c)分别为脑部断层MR图像、脑部血管造影MR图像、腿部断层MR图像，(d)、(e)、(f)分别为对应的k空间图像。从图中可以看出，大部分数据集中在k空间的中心处，而k空间的外围部分的幅值远低于k空间的中心处。

(a)脑部断层图像 (b)脑部血管造影图像 (c)腿部断层图像

(d)脑部断层k空间 (e)脑部血管造影k空间 (f)腿部断层k空间

图2‑1 MRI图像及相应k空间图像

## 本章小结

本章主要介绍了磁共振成像的基本原理，磁共振成像主要包括三个过程：激发过程、弛豫过程和成像过程，对于磁共振成像的空间编码、k空间采样过程以及k空间的特性做了更为详细的介绍，并提出通过对磁共振图像进行二维傅立叶变换，反推出相应k空间，实现基于CS的MRI的k空间欠采样软件仿真模拟的方案，为后续研究做好准备工作。

# 

# 压缩感知基本理论

压缩感知（CS）理论主要包括三个方面——信号的稀疏表示、观测方法以及重建算法[32]。所谓信号的稀疏表示，指的是当我们把原始信号根据特定变换基投影变换之后,变换后的系数中大多数的绝对值很小, 也就是说变换向量是稀疏的, 则可以认为变换向量是原始信号的另一种更简洁的表现形式[33]，这是压缩感知的先验条件。观测矩阵在选取时，要求所选矩阵必须满足约束等距性（RIP）条件[34]，再通过原始信号与该矩阵的乘积得到线性投影测量。最后，选择合适的重建算法恢复原始信号。本章首先介绍压缩感知的理论框架，对稀疏表示、观测矩阵以及几类重建算法作简要介绍。

## 信号的稀疏表示

稀疏表示作为一种有效的信号表示模型，能够用尽可能简洁稀疏的方式表示信号。表示系数中较少的非零分量揭示了信号的主要结构和本质属性，从而为信号的后续处理带来了很大的便利。

假设信号可由某一组原子线性表示为：

 (3‑1)

将式(3‑1)改写成矩阵形式，可以得到：

 (3‑2)

其中，为稀疏矩阵，是在一个稀疏变换域中的投影系数，展开稀疏系数向量。

若系数向量中只有个非零分量，其余分量均为零，则称信号在变换下是-稀疏（-sparse）的。其中，称为信号的稀疏度（sparsity）。

然而，实际的自然信号或图像往往都不是严格稀疏的，在信号的表示系数中，大部分的分量都接近于零，只有少部分的分量幅值较大，这时信号被称为是可压缩的（compressible）。

由上述内容可知，信号的稀疏性或可压缩性依赖于所选择的变换，不同的变换对某一特定信号的稀疏表示能力通常是不同的。到目前为止，信号的稀疏变换发展大体经历了傅立叶变换、小波变换[35,36]、多尺度几何分析[37]和过完备冗余字典[38-40]等几个主要阶段。

傅立叶变换是信号和数字图像处理的理论基础，揭示了时间函数与频谱函数之间的内在联系，反映了信号和图像在“整个”时间范围内的“全部”频谱成分。然而虽然有很强的频域局部化能力，但是却不具有时域局部化的能力，只适合于平稳信号或图像的表示和分析。

小波分析将信号和数字图像处理带入到一个崭新的领域，是处理非平稳信号和图像的有力工具。它通过牺牲一定的频域定位性以获得时—频局部性的折中，对一维有界变差函数表现出良好的逼近性能。但是小波变换在一维情形下所具有的优异性能并不能简单地推广到二维或高维信号，不能最优表示含线或者面奇异的高维函数。

多尺度几何分析是继小波变换之后的新一代信号分析工具，具有多分辨、局部化和多方向性等优良特性，较好地克服了小波变换不能有效表示含线或面奇异的高维函数的不足，能更加有效地表示和处理图像等高维空间数据。

近年来，学者们又提出了以过完备冗余字典为基础的稀疏表示理论，旨在实现图像的自适应稀疏表示[38-40]。在这种理论框架下，传统的基函数由“原子”所取代，表示基则更名为冗余字典。由于字典的构造具有一定的灵活性，正交基可以视为特殊的字典，多个正交基的联合也可以构成字典，甚至不同类型的函数族也可以存在于同一字典中，此外还可由某一生成函数通过参数离散化的方式构造字典，因此图像的自适应稀疏表示成为可能。

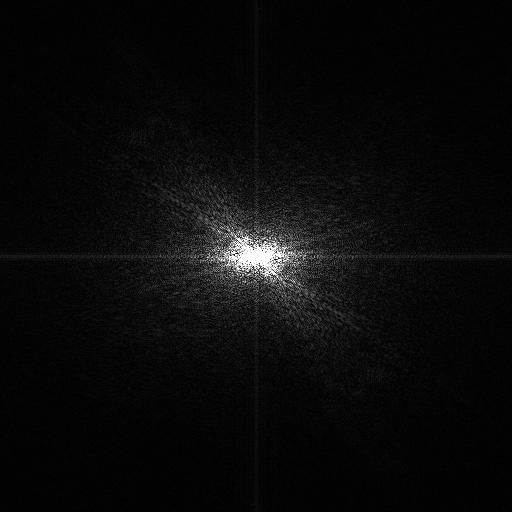
信号的稀疏表示是压缩感知的理论基础，在一定程度上影响着测量值个数的选取和重建结果的精度。具体地，当重建精度一定的情况下，信号越稀疏，需要的测量值个数就越少；而当测量个数一定时，信号越稀疏，重建的精度就越高。因此在压缩感知重建过程中，信号稀疏变换的选择对重建结果的精度至关重要。

图像稀疏性是变换系数满足诊断要求重建的百分比，然而诊断质量是主观的[10]，为了能够较客观地评价图像稀疏性，本文选取具有代表性的512×512像素点的lena图像，如图3‑1所示，分别通过离散傅立叶变换、离散余弦变换、3层离散haar小波变换和x方向有限差分变换进行稀疏表示，结果如图3‑2所示。之后将稀疏域系数由大到小排序，分别选择前2%、5%、10%和20%的系数进行重建，重建效果对比图如图3‑3所示，由观察可得，离散傅立叶变换、离散余弦变换和3层离散haar小波变换在利用前10%的系数恢复时已经可以获得较好的图像，而x方向有限差分变换在利用前20%的系数恢复时效果仍不理想，会产生明显的条纹状干扰，因此，x方向有限差分变换与另外三种变换相比稀疏效果较差。

此外，稀疏变换原理不同对图像恢复造成的影响也不相同，离散傅立叶变换与离散余弦变换将图像域变换到由正弦函数为基底的稀疏域中，在使用较少系数恢复后，会产生较为明显的模糊，这是由于数值较小的高频被过滤的缘故；而3层离散haar小波变换是将图像利用相邻像素反复求和求差，对图像进行压缩，如图3‑2中(c)所示，图像信息被集中在左上角的分辨率较小的低频区域内，因此在使用较少系数恢复时，会产生类似马赛克的干扰，即图像分辨率的降低；x方向有限差分可视为小波变换的高频分量，由于缺少低频分量，使用较少系数恢复时会产生明显的条纹状干扰。



图3‑1 512×512像素的lena图像

(a)离散傅立叶稀疏变换 (b)离散余弦稀疏变换

(c)3层haar小波稀疏变换 (d)x方向有限差分稀疏变换

图3‑2 lena图的四种稀疏变换系数图像

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2% | 5% | 10% | 20% |
| 离散傅立叶变换 | E:\Compressed sensing\论文素材\第三章\3.1\dft_0.02.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第三章\3.1\dft_0.05.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第三章\3.1\dft_0.10.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第三章\3.1\dft_0.20.jpg |
| 离散余弦变换 | E:\Compressed sensing\论文素材\第三章\3.1\dct_0.02.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第三章\3.1\dct_0.05.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第三章\3.1\dct_0.10.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第三章\3.1\dct_0.20.jpg |
| 离散小波变换 | E:\Compressed sensing\论文素材\第三章\3.1\dwt_0.02.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第三章\3.1\dwt_0.05.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第三章\3.1\dwt_0.10.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第三章\3.1\dwt_0.20.jpg |
| 有限差分变换 | E:\Compressed sensing\论文素材\第三章\3.1\ddt_0.02.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第三章\3.1\ddt_0.05.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第三章\3.1\ddt_0.10.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第三章\3.1\ddt_0.20.jpg |

图3‑3 lena图由四种稀疏变换的最大2%、5%、10%和20%系数恢复效果对比

## 压缩观测

设向量空间中的一维离散实值信号在变换下是稀疏的或是可压缩的，则可通过压缩感知测量过程表示为：

 (3‑3)

其中，为个非自适应的测量向量，为相应的测量值，且满足。零测量矩阵，测量值向量，则压缩感知过程可表示为如下矩阵形式：

 (3‑4)

由于，则式(3‑4)可等价表示为：

 (3‑5)

其中，CS信息算子为，压缩感知观测向量的矩阵表示如。

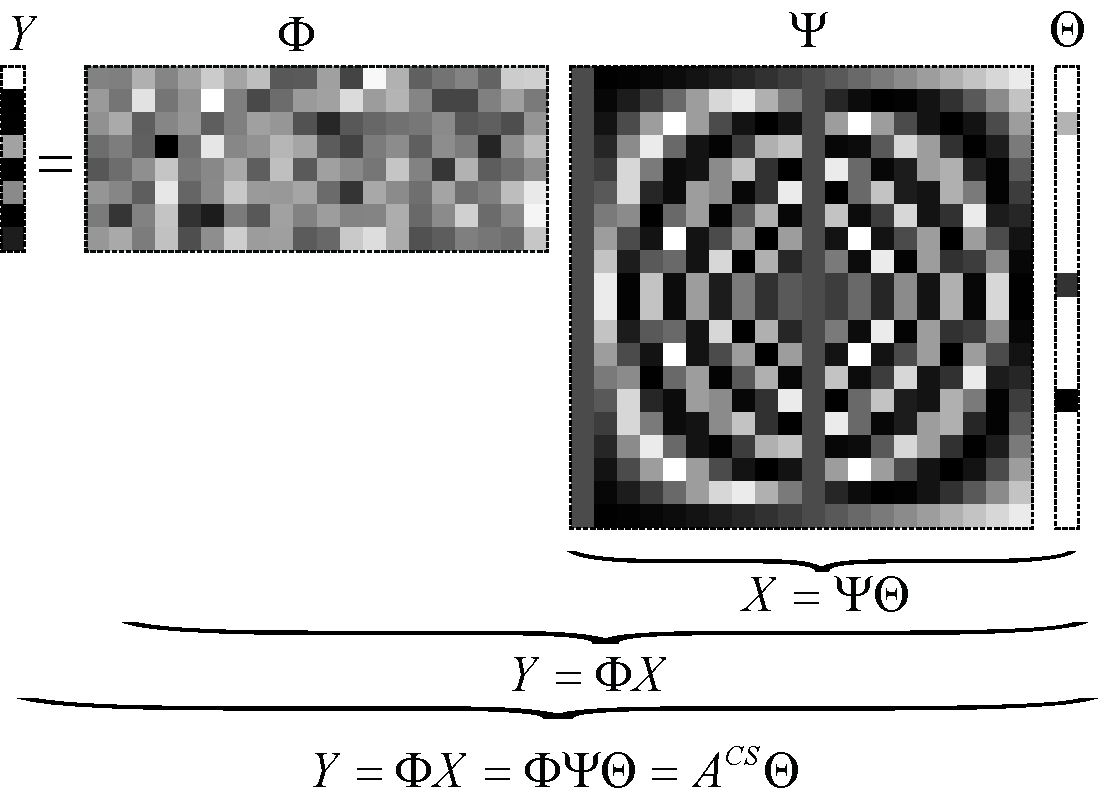


图3‑4 压缩感知观测向量的矩阵表示示意图

测量值向量包含了稀疏信号在变换下的个线性测量值，能否通过无失真地重建原始信号取决于测量矩阵是否能够保持的原始结构信息。显然，如果测量过程破坏或丢失了中的必要信息，精确重建是不可行的。要想使原始信号完全重建，必须保证测量矩阵不会把两个不同的K-稀疏信号映射到同一个测量值向量上，这就要求从测量矩阵中抽取的任意K个列向量构成的子矩阵是近似正交的。Candes和Tao[2,41,42]等指出如果测量矩阵满足限制等距性条件（Restricted Isometry Property，RIP），则原始信号可由相应的测量值向量精确重建。

然而，直接构造一个满足RIP条件的测量矩阵是一个组合复杂度问题，当前的主要构造方法有：随机矩阵、确定性矩阵和结构随机矩阵[43]。

### 随机矩阵

测量矩阵构造常用的方法是通过随机的方式按照某种特定的概率分布选取测量矩阵的元素。当测量值个数与信号的稀疏度K之间满足一定的不等式关系时，相应的随机测量矩阵可高概率地满足RIP条件。此类测量矩阵主要包括随机高斯矩阵和随机伯努力矩阵。

随机高斯矩阵，的每个元素均独立地采样于正态分布，如果满足，则以较高概率满足RIP条件；随机伯努力矩阵，的每个元素均独立地采样于对称伯努力（Bernoulli）分布，即，其中三者应满足的关系与高斯测量矩阵相同。

这类随机测量矩阵的优点是完全重建所需的测量值个数达到了理论最优值，且几乎与任意的稀疏变换矩阵都不相关，具有一定的普适性。但缺点是矩阵是稠密的，所需的存储空间很大，并且由于其非结构化的特点导致实际的计算复杂度很高，在对图像等含有大量数据的高维信号进行测量和重建时，实际的存储和运算几乎不可能实现。

### 确定性矩阵

为了克服随机高斯/伯努利矩阵的相关缺点，一些学者提出了确定性矩阵。

其中一类测量矩阵是以随机托普利兹和随机循环结构矩阵（Random Toeplitz and Circulant structured Matrices）作为测量矩阵。该类矩阵可表示为：

 (3‑6)

或

 (3‑7)

其中的元素为独立地选自与某同一概率分布，为随机托普利兹矩阵，为随机循环矩阵。这类矩阵的特点是：（1）只需产生个独立的随机变量，相对于随机高斯/伯努力矩阵，所需的存储空间大大减少；（2）矩阵向量乘法可通过快速傅里叶变换高效实现，从而降低了相应测量和重建过程的时间复杂度。

### 结构随机矩阵

由于Gauss矩阵与Bernoulli矩阵随机性较强，确定性矩阵难以证明具有阶数较好的RIP性质。我们将介绍介于确定与随机矩阵之间的一种矩阵：结构随机矩阵。与确定性矩阵相比，结构随机矩阵多了些随机性，因而可以证明其具有较好的RIP性质，同时，结构随机矩阵的随机性较弱，一般仅具有行随机。更为重要的是，在很多实际应用中，观测矩阵为一结构随机矩阵。

三类压缩感知观测矩阵效果对比如表3‑1。

表3‑1 压缩感知观测矩阵效果对比

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 压缩感知观测矩阵 | 随机矩阵 | 确定性矩阵 | 结构随机矩阵 |
| RIP特性 | 强 | 弱 | 中 |
| 普适性 | 强 | 弱 | 中 |
| 存储空间 | 很大 | 大大减少 | 中 |
| 构造复杂度 | 高 | 低 | 中 |

## 重建算法

要精确重建原始信号，首先要保证观测矩阵满足RIP条件，在此前提下，我们可以先通过求解范数下的最优化问题，得到原始信号在变换域的稀疏表示系数，得到稀疏系数之后，将其变换为原始信号，完成数据重建。

对原始信号的重建过程可以视作是范数下的最优化问题：

 (3‑8)

由于观测值的维数远小于稀疏系数的维数，所以这是一个NP-Hard问题，想要求解该问题，则必须将稀疏系数中非零值的种可能一一列举，即使用穷举法求解，然而这种方式会耗费大量的时间，换言之，我们在实际应用中不能直接根据上式来求解[44]。但是可以证明，最小范数和最小范数能够在一定条件下互相转化，具有等价性[45]。那么式(3‑8)可转化为最小范数下的最优化问题：

 (3‑9)

以下将介绍几种典型的重建算法：

### 基追踪法

由于最小范数问题为NP-hard问题，可将问题转换为范数问题[46]：

 (3‑10)

这个问题是一个凸优化问题，我们可以把这个凸优化问题转化为一个线性规划（LP）问题加以求解，称为基追踪（Basis Pursuit，BP）[47]方法。

线性规划问题求解思路如下[48]：

将式(3‑8)进行如下变换：

 (3‑11)

其中为线性规划的初始参数，为线性规划的系统函数，为测量值。该算法将待恢复数据分为正负两部分进行重建，重建完成后将结果相加得到恢复的稀疏系数。

BP算法是一种全局最优化算法，它能够很稳定的分解信号，需要的测度最少，但缺点是复杂性高，复杂性高意味着在进行重建时需要大的计算量从而会影响重建速度，这个缺点使得BP算法在很多场合并不适用。如果考虑误差，我们可以将上述问题进一步转化如下：

 (3‑12)

转化后的问题可以用二阶圆锥规划解决[41]。

### 匹配追踪法

匹配追踪（MP）算法属于贪婪算法，其基本思想是在每一次的迭代过程中，先从观测矩阵中选取与信号最匹配的列向量进行稀疏逼近，同时计算出信号余量，接着继续选取与余量最为匹配的列向量进行稀疏，亦计算余量。反复迭代之后，信号便可以由这些选中的列向量进行线性表示，如此便可得到重建结果。虽然MP算法可以重建出原始信号，但是由于这种挑选原子（观测矩阵列向量）的方式有其不足之处，信号在已选定原子集合上的投影并不具有正交性，这种非正交性带来的影响是无法保证每次迭代结果都最优，因而有时要经历多次迭代才能获得好的重建质量。

该算法解决的是范数下的最优化问题：

 (3‑13)

若考虑重建误差，并将观测矩阵与稀疏化矩阵的乘积看作压缩感知的恢复算子（即）可将式(3‑13)转化为如下的近似形式：

 (3‑14)

其基本思想是：采用贪婪迭代的方法选择恢复算子的列向量（原子），对所选原子的要求是：每次选中的原子都要与当前的冗余向量具有最大相关性，按此方式进行反复迭代处理，当迭代次数达到稀疏度K时，终止迭代。

算法具体步骤如下：

已知条件：采样向量，观测矩阵，稀疏化矩阵，恢复算子，稀疏度；

初始化：残差，索引集，重建原子集合，；

（1）计算残差和恢复算子列向量的内积，找出内积最大时对应的索引，即；

（2）更新索引集，将找到的原子（恢复算子列向量）添加至重建原子集合；

（3）更新残差，迭代次数累加；

（4）判断迭代终止条件，如果，结束迭代；否则，继续回到执行步骤（1）；

输出：信号的K-稀疏系数。

### 正交匹配追踪法

正交匹配追踪（Orthogonal Matching Pursuit，OMP）[49]算法是在MP算法的基础上发展起来的，该算法有效解决了MP算法中信号在选定原子集合上的投影非正交性的问题。OMP算法依然使用MP算法挑选原子的方式，即在每次迭代时得到一个原子，不过该算法还会对选定原子集合通过递归保证正交化，通过正交化可以保证单次迭代的最优性，这样可以减少迭代次数，且性能优于MP算法。

由于具有正交性，可根据选出的原子从观测矩阵的向量中去掉相关部分，按此方式进行反复迭代处理，当迭代次数达到稀疏度K时，终止迭代。

算法具体步骤如下：

已知条件：采样向量，观测矩阵，稀疏化矩阵，恢复算子，稀疏度；

初始化：残差，索引集，重建原子集合，；

（1）计算残差和恢复算子列向量的内积，找出内积最大时对应的索引，即；

（2）更新索引集，将找到的原子（恢复算子列向量）添加至重建原子集合；

（3）利用最小二乘得到；

（4）更新残差，迭代次数累加；

（5）判断迭代终止条件，如果，结束迭代；否则，继续回到执行步骤（1）；

输出：信号的K-稀疏系数。

为了进一步说明上述三种恢复算法在不同欠采样率时恢复效果的优劣，本节将以基于压缩感知理论的溶液氟离子浓度批量检测作为实例，对其进行一维信号的重建仿真并对重建结果进行分析。

取个含有氟离子溶液，使用高斯随机矩阵对其进行压缩观测，为了对比不同欠采样率对恢复效果的影响，压缩观测组数分别取，即欠采样率为10%、20%、30%、40%、50%。

由于在实际样品检测中，样品量有限，为防止在检测尚未完成时样品已耗尽，需对上述生成矩阵进行转化：



上式为压缩观测组数，为了对比不同欠采样率对恢复效果的影响，分别取，为待测样本的最大容量，本实例取值为1ml。

根据物质的量计算公式：（其中：为离子物质的量、为离子物质的量浓度、为液体总容量），将压缩观测所得的氟离子浓度值乘以转换为适用于恢复算法的压缩观测向量后分别使用匹配追踪法（MP）、正交匹配追踪（OMP）和 基追踪（BP）对其进行恢复。

图3‑5为MP、OMP和BP恢复算法在10%、20%、30%、40%和50%欠采样率下的恢复数据，图中蓝色点为实际氟离子浓度，红色点为通过压缩观测和恢复算法得到的氟离子浓度。观察可知，在欠采样率较低时，恢复数据有很大波动，随着欠采样率增大，恢复数据逐渐收敛于实际氟离子浓度。当欠采样率达到30%时，三种恢复算法均可恢复出较为准确的数据。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | MP | OMP | BP |
| 10% | C:\Users\zzh\Desktop\新建文件夹\MP_1000.jpg | C:\Users\zzh\Desktop\新建文件夹\OMP_1000.jpg | C:\Users\zzh\Desktop\新建文件夹\BP_1000.jpg |
| 20% | C:\Users\zzh\Desktop\新建文件夹\MP_2000.jpg | C:\Users\zzh\Desktop\新建文件夹\OMP_2000.jpg | C:\Users\zzh\Desktop\新建文件夹\BP_2000.jpg |
| 30% | C:\Users\zzh\Desktop\新建文件夹\MP_3000.jpg | C:\Users\zzh\Desktop\新建文件夹\OMP_3000.jpg | C:\Users\zzh\Desktop\新建文件夹\BP_3000.jpg |
| 40% | C:\Users\zzh\Desktop\新建文件夹\MP_4000.jpg | C:\Users\zzh\Desktop\新建文件夹\OMP_4000.jpg | C:\Users\zzh\Desktop\新建文件夹\BP_4000.jpg |
| 50% | C:\Users\zzh\Desktop\新建文件夹\MP_5000.jpg | C:\Users\zzh\Desktop\新建文件夹\OMP_5000.jpg | C:\Users\zzh\Desktop\新建文件夹\BP_5000.jpg |

图3‑5 MP、OMP和BP在10%、20%、30%、40%和50%欠采样率下的恢复数据

MP、OMP、BP恢复算法均方根误差如图3‑6所示，在欠采样率较低时，均方根误差随欠采样率升高而迅速下降，在欠采样率较高时，均方根误差随欠采样率的变化趋于平缓，三种恢复算法在10%、20%、30%、40%和50%的欠采样率时恢复效果没有明显差异。

恢复实验选取了MATLAB2011b版本，实验计算机型号为联想Y460；处理器Intel CoreTM i5 CPU，M 480 @ 2.67Ghz，内存为4.00GB。MP、OMP、BP恢复算法运算时间如图3‑7所示，三种恢复算法的运算时间均随着欠采样率的升高而变长，利用BP算法恢复10%、20%、30%、40%和50%欠采样率数据的运算时间均大于MP和OMP算法的运算时间，且BP算法的运算时间随欠采样率升高的变化量明显大于MP和OMP算法。

图3‑6 MP、OMP、BP恢复算法均方根误差

图3‑7 MP、OMP、BP恢复算法运算时间

## 本章小结

本章主要介绍了压缩感知理论的基本框架：稀疏表示、压缩观测和恢复算法，并结合lena图像和批量检测溶液氟离子浓度实例进一步说明四种稀疏变换的效果和三种恢复算法的性能，结论如下：（1）离散傅立叶变换、离散余弦变换和3层haar小波变换对于二维图像具有较好的稀疏性，而x方向的有限差分变换稀疏效果较差；（2）BP、MP和OMP三种恢复算法的恢复效果没有明显差异，BP算法运算时间多于MP和OMP算法。

# 基于CS理论的MRI技术

MRI技术具有无辐射危害，对比分辨率高、多方位、多参数采集及功能成像等优势，但MRI技术也是一种成像速度相对较慢的医学检测技术，因此如何快速获取数据一直是该领域的热门问题。一些研究者致力于通过提高硬件来缩短扫描时间。近年来，利用压缩感知理论，研究者证明了利用图像的稀疏性先验知识，通过求解相应的优化问题能够有效地缩短扫描时间，进而加快成像速度[50]。

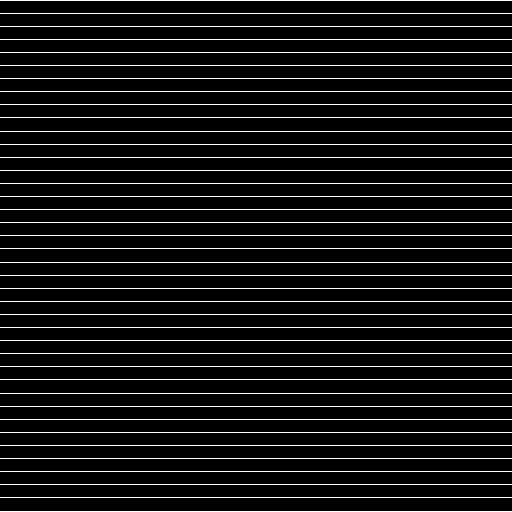
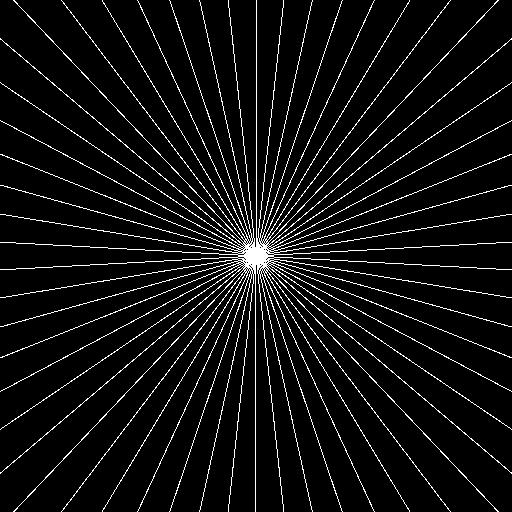
## K空间的欠采样填充轨迹

对于加速成像，有多种实现方法，其中主要分为基于快速成像序列的加速和基于K空间欠采样填充的加速。

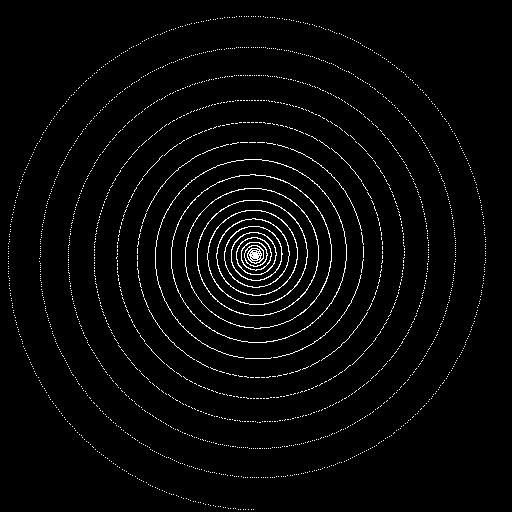
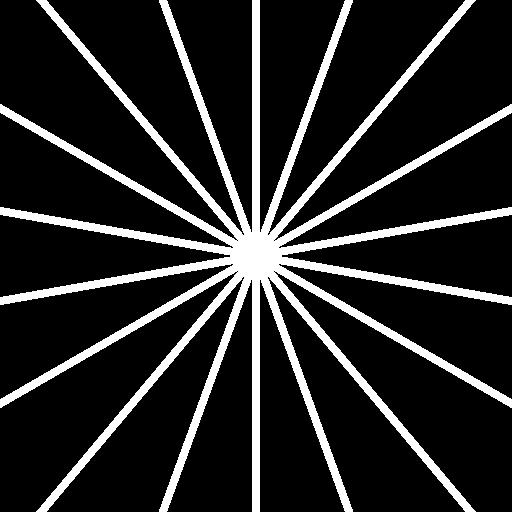
基于快速成像序列的多回波SE序列和快速自旋回波序列（fast spin echo，FSE）是在一个周期中，一次RF激发后施加多次180°脉冲。但是，多回波SE序列对应的是同一个相位编码，不能用于同一幅图像，而FSE的每个回波对应不同的相位编码梯度，所以采集的信号对应的是一幅图像。之后，结合半傅立叶数据采集技术，对FSE采样方法进行了拓展，出现了半傅立叶采集单次激励快速自旋回波序列，使一幅256×256矩阵图像在一秒内便可采集完毕。迂回平行轨迹称为回波平面成像（echo planar imaging，EPI）属于笛卡尔采样轨迹，可以在极短时间内（30-100ms）采集一幅完整的图像，该技术通过在频率编码方向施加快速反复震荡的梯度场形成梯度回波，并对每个回波进行相位编码，EPI技术具有极高的时间分辨率和可观的信噪比，但是时间分辨率却由于人体内的衰减非常迅速而不太理想。在20世纪80年代中期开始发展起来的梯度回波（gradient echo，GRE或GE）使用小角（＜90°）RF激发，采用较短的时间，用反转梯度取代180°重聚脉冲，从而大大缩短成像时间，是目前MR快速扫描序列中临床应用最为广泛最为成熟的方法[31]。

基于k空间欠采样填充的加速包括半傅立叶填充[51]，螺旋轨迹填充[52]，放射状轨迹填充[50]，矩形FOV填充[53]和Propeller/Blade[54]轨迹。半傅立叶填充成像技术利用k空间的共轭对称性，在扫描中，只需采集正向、零和少量负相位编码，另一半的数据将在扫描结束后利用重建算法进行填充，因为采集点数减少了近一半[55]，所以大大缩短了扫描时间。螺旋轨迹欠采样技术（spiral MR imaging）是采用放射状的曲线式采集轨迹，数据的采集从k空间的中心开始，通过2个线性增长的正弦共振梯度组成，螺旋式MR是以圆形的螺旋轨迹覆盖k空间，抛开了对k空间4个角落数据的采集，图像的空间分辨率是各向同性的，同时，螺旋式MR扫描的k空间范围大约只相当于笛卡尔式采样的78.5%，从而缩短了扫描时间。放射状欠采样轨迹对于k空间的中心具有较高的采样密度，利用此种方法成像具有较高的空间分辨率和时间分辨率，并且对于运动产生的伪影不敏感[56]，但是在图像中会产生放射状条纹，尤其是接近视野边缘。矩形FOV填充通过减少相位编码步数来加快成像速度，其数据采集主要表现为k空间的扫描线的行距增大，而覆盖面积不变，矩形FOV技术在四肢、脊柱等部分成像应用广泛，其造成的信噪比（SNR）的下降是主要缺点，同时可能会在相位编码方向上出现折叠伪影。Propeller/Blade轨迹是将k空间放射状轨迹与FSE或FIR序列的笛卡尔轨迹相结合，以辐射状的“叶片”旋转方式采集数据，一个回波链构成一个叶片，叶片内为笛卡尔轨迹，多个叶片旋转构成螺旋桨，叶片间为放射状轨迹，k空间中心被重复采集，与常规的FSE或FIR采集序列相比，运动伪影明显减轻，但是与单纯放射状轨迹相似，图像视野区仍有放射状条纹。上述的基于k空间填充轨迹的加速方式实质上是一种数据读出模式，就是改进了FID，IR，SE或GRE等脉冲序列的读出方式。

如图4‑1所示，其中(a)、(b)、(c)、(d)、(e)分别为半傅立叶填充、矩形FOV填充、放射状填充、螺旋状填充和Propeller/Blade轨迹填充，由观察可得，除半傅立叶轨迹填充与矩形FOV轨迹填充对k空间中心与外围采样较为均匀外，另外三种常用k空间欠采样填充轨迹对k空间中心区域采用多次采样，结合图2‑1中的k空间图像，可以认为此三种填充轨迹相比另外两种填充轨迹采集了k空间数据更为主要的信息。

(a)半傅立叶填充轨迹 (b)矩形FOV填充轨迹 (c)放射状填充轨迹

(d)螺旋状填充轨迹 (e) Propeller填充轨迹

图4‑1 常用k空间欠采样填充轨迹

由于磁共振检测仪器造价昂贵，无法在MRI检测仪器上亲自进行欠采样实验，因此本课题借助本校医学平台，从江苏省人民医院获取了大量的MRI临床成像，之后为了仿真模拟MRI的实际操作过程，利用二维傅立叶变换将图像反推到扫描所得的k空间中，即进行运算，其中，是MRI的临床图像，为二维傅立叶变换算子，其运算结果为MRI的k空间数据。在进行MRI的欠采样仿真模拟实验中，欠采样过程可用表示，其中，是需要被重建的磁共振图像，是从扫描中测量所得的k空间数据，是傅立叶变换所形成的k空间的欠采样变换。

## MRI图像常用稀疏化方法

稀疏变换是一个从图像数据到稀疏变换域的映射操作符，最近几年，研究表明当前有多种稀疏变换集，能稀疏化多种不同类型的图像。离散余弦变换（discrete cosine transform，DCT）和离散小波变换（discrete wavelet transform，DWT）已经应用于现实图像稀疏化压缩中。DCT是JPEG图像压缩标准和MPEG视频压缩标准的核心，而DWT是用于JPEG-2000的图像压缩标准。小波变换是一个多尺度的图像表示方法，大尺度的小波系数代表图像的低分辨率部分，小尺度的小波系数代表图像的高分辨率部分，小波系数同时具有空间位置信息和空间频率信息。图像的有限差分表示是一个高通滤波操作，通常被认为是仅仅具有小尺度系数的小波变换（不计算大尺度系数）。

对图像进行的稀疏化过程可用如下形式来表示：

 (4‑1)

其中，为已经获得的MRI的临床图像，为稀疏化线性变换算子，为图像稀疏域的系数。

## MRI欠采样恢复算法

MRI欠采样必然会引起k空间采集数据的丢失，进而造成图像域的伪影和模糊，为了能够在较少采样的情况下，获得同完全采样相近的成像效果，压缩感知理论的恢复算法起到至关重要的作用。

设待恢复的图像信号为，通过式(4‑1)对其进行稀疏变换，是图像信号在变换域中的稀疏系数。之后利用部分二维傅立叶变换k空间的欠采样算子对其进行欠采样，即，获得从扫描中测量所得的k空间数据，从观测值即可恢复重构图像信号。信号的重构属于逆问题求解，理论上可以通过求解最小范数来恢复信号，且考虑到信号采集时的噪声干扰，可表示为：

 (4‑2)

### 直接填零法

直接填零法[57]是恢复MRI欠采样数据的最为简单的重构方法。利用欠采样掩膜进行数据采集，所采集的k空间数据的位置一定是在欠采样掩膜中为1的区域，这自然会造成k空间剩余区域（即欠采样掩膜中为0的区域）的数据采集不到，未解决上述问题，直接填零法规定将k空间所采集到的数据保留，而将未采集到的数据全部填充数值0，进而使k空间填充完整。之后进行二维傅立叶反变换，重建出幅值图像。

直接填零法操作简单，便于实现，运行速度较快，对于成像要求不高的场合，且k空间数据缺少的部分很少，即大部分的数据是完整的，那么这个方法是可以接受的，可以大幅加快MRI的成像速度。直接填零重建会由于k空间数据的截断造成震荡截断伪影，导致了空间的模糊，并给图像带来了虚部，这样的图像在临床上是不被接受的，故在该论文中对该方法不做深入探讨。

### 二维OMP法

在第2章第3节已经简要介绍了一维OMP，二维OMP恢复算法的本质与一维OMP恢复算法相同，只是由于图像为二维矩阵，其稀疏变换与欠采样方式也应为二维的矩阵运算，即需进行前后两次稀疏变换和欠采样。以二维MRI图像为例，为待恢复的二维图像，为k空间二维数据矩阵，稀疏变换采用正交变换矩阵，因此二维稀疏变换可表示为，其中，与分别为一维正交变换和一维正交变换的转置，为图像二维稀疏域的稀疏系数，同理对于部分傅立叶k空间欠采样，由于傅立叶变换本身就是正交变换，所以也可写做，其中为欠采样矩阵，与分别为一维傅立叶变换与一维傅立叶变换的转置。因此可将式(4‑2)转换为矩阵形式表示，则重建问题为：

 (4‑5)

将上式写为满足OMP算法的形式：

 (4‑6)

之后同一维OMP算法步骤相同，使二维稀疏系数逐列恢复，在对其反稀疏化求得二维图像。

### 快速收缩阈值法

贪婪追踪算法对于低维的小尺度信号来说重构质量较好、速度快，对于高维的大尺度信号（如图像）则重构效果较差，占用内存空间大，且速度较慢。凸松弛法在重构时所需要的观测次数相对较少，但是传统方法（BP算法、迭代收缩阈值法（Iterative Shrinkage-Thresholding，IST）等）往往计算复杂度较高，文献[58,59]提出一种快速迭代收缩阈值算法（Fast Iterative Shrinkage-thresholding Algorithm，FISTA），该算法属于凸松弛法，与迭代收缩阈值算法相比，具有较快的收敛速度。这种算法保留了原先的简洁的优势，但是提高了最优化梯度的速率为。之后基于FISTA，又有研究提出双收缩快速迭代算法（Double Shrinkage Fast Iterative Algorithm，DSFIA）[60]，通过阈值收缩和正则化参数收缩提高图像恢复质量，减少计算复杂度。

快速迭代收缩阈值算法主要是利用前两次迭代的值和不断更新的参数来获得新的迭代值，为重构MRI二维图像，需求解范数最小化：

 (4‑7)

在实际计算时，为简化问题，利用拉普拉斯乘子法将上式转换为：

 (4‑8)

其中，为正则化参数，用来平衡前后两部分所占的比重，设，则上式可转换为：

 (4‑9)

令，

 (4‑10)

 (4‑11)

求解式(4‑10)的一个简单的方法就是引入梯度法，通过梯度法在每一次迭代中，不断修正，具体如下（）：

 (4‑12)

这等价于：

 (4‑13)

用同样的方法求解式(4‑9)，迭代计算式如下：

 (4‑14)

省略掉常数项后，上式可化为：

 (4‑15)

由于范数是可分离的，为它的所有元素的绝对值之和，式(4‑11)的求解可以简化为求的每一个最小化问题，这可以通过阈值收缩求得，则式(4‑15)可转化为：

 (4‑16)

其中，是软阈值算子，即：

 (4‑17)

为加快收敛速度，引入参数，结合前2次的迭代值对其进行更新：

 (4‑18)

其中，、为前2次的迭代值，为在迭代过程中是公式简明，不易混淆，方便后续计算，引入（实际上是的更新值），此外，的更新公式为：

 (4‑19)

由式(4‑16)求得，计算过程如下：

 (4‑20)

迭代的终止条件是通过相邻2次迭代值的相对误差来设定的，终止函数定义为：

 (4‑21)

终止阈值设为，如果时，则停止迭代。

其中正则化参数在(4‑9)中的作用是平衡数据与的比重。当取值较大时，在式(4‑9)中所占比重较小，而所占比重就较大。设定迭代初始值，即在初始阶段的较小时，应选取比较大的值，通常取（其中为大于0的常数）作为初值，之后在迭代时，为使恢复快速，对进行适当的收缩，令（其中为收缩因子，），以平衡与在式(4‑9)中所占的比重。

算法具体步骤如下：

（1）初始化，图像稀疏系数值为，迭代次数，，。

（2）利用公式(4‑20)计算。

（3）更新，利用式(4‑19)计算，根据式(4‑18)计算。

（4）按式(4‑21)计算迭代终止函数，如果，令，停止迭代；如果，则继续往下进行。

（5）收缩正则化参数，。

（6）更新迭代次数，令，返回到步骤（2）。

迭代结束后，为MRI磁共振欠采样恢复图像的稀疏变换系数，对其进行稀疏反变换即得恢复图像。

### 线性Bregman法

Bregman迭代正则化方法是Osher等人[61]于2005年在研究全变分图像去噪时提出的一种新型迭代正则化方法，最近，它成为求解范数最优化问题及与范数相关最优化问题的最有效的方法之一。线性Bregman迭代，可理解为求解范数相关最优化问题时Bregman迭代正则化的线性近似，由Darbon和Osher在[62]中求解图像去卷积问题时提出。另外，Cai等人[63]以基追踪问题为研究背景，结合向前向后算子分裂方法与Bregman迭代，也推导出了线性Bregman迭代。该迭代只涉及到矩阵向量乘法和取阈值的操作，十分便于编程实现，并且有很好的去噪性能。

为重构MRI二维图像，需求解范数最小化：

 (4‑22)

在实际计算时，为简化问题，利用拉普拉斯乘子法将上式转换为：

 (4‑23)

设，则上式可转换为：

 (4‑24)

用范数近似逼近范数，可以克服以往求解问题的计算复杂性的问题，由于范数具有光滑性，使得模型可采用Bregman迭代正则化方法进行求解[Bregman]：

 (4‑25)

其中,，为正则化参数，通常很小，可选择最小的正机器数字。

令，基于凸函数的，之间的Bregman距离定义为：

 (4‑26)

是在点的次微分中的某一个次梯度。

因为通常意义下，并不是通常意义下的距离，然而，Bregman离可以满足且，其中是指连接线段上的任意一点。

可通过求解：

 (4‑27)

来替代对式(4‑25)的求解。

具体步骤如下：



设为符号函数，即当时，；当时，，则阈值算子定义为：

 (4‑28)

其中，设，则向量阈值算子定义为：

 (4‑29)

求解基追踪问题的线性Bregman迭代算法可以简化为：

 (4‑30)

其中为正则化参数，为步长参数。因为当时，，所以，从而式(4‑30)可化简为：

 (4‑31)

线性Bregman迭代算法具体步骤如下：



迭代结束后，为MRI磁共振欠采样恢复图像的稀疏变换系数，对其进行稀疏反变换即得恢复图像。

### 共轭梯度法

共轭梯度（Conjunction Gradient，CG）算法是方向追踪算法的一种，该算法利用目标函数的共轭方向作为搜索方向，其基本的想法是与最速下降法结合，得到目标函数的最小解，从而增强了算法的有效性和可靠性。CG算法是各类优化算法中性能非常突出的一种，该方法的优点是不需要任何的外来参数，因而所需要的存储空间小，而且具有步收敛性的特性，重建信号的稳定性高。由于共轭梯度（CG）法不需要矩阵存储，而且收敛速度很快，并具有二次终止性等，这些特点使得共轭梯度（CG）法被越来越多的应用于实际问题的处理中。

为重构MRI二维图像，需求解范数最小化：

 (4‑32)

在实际计算时，为简化问题，将上式转换拉格朗日形式：

 (4‑33)

其中，为正则化参数，用来平衡稀疏性和相关性两部分所占的比重。

共轭梯度算法具体步骤如下[10]：



其中为对目标函数求梯度的运算，即：

 (4‑34)

范数是矩阵中所有元素的绝对值的和。绝对值函数是一个非平滑的函数，但可以通过平滑表达式近似代替绝对值函数，其中是正的平滑参数。在这种近似下，对绝对值的求导可近似为：

 (4‑35)

是一个对角矩阵，其对角元素。式(4‑34)能近似表示为：

 (4‑36)

实际运算中，式(4‑36)中的平滑参数通常选为。

## 本章小结

本章主要介绍了基于压缩感知理论的磁共振成像技术，包括k空间欠采样填充轨迹、图像稀疏表示和恢复算法三个方面。提出k空间欠采样常用的几种填充轨迹，并详细说明了五种图像恢复算法的基本原理和实施步骤。

# 

# 压缩感知效果对比

## 图像重建质量的客观评价方法

为了客观评价图像重建质量，本文采用了四种客观评价方法[65]。

### 均方误差（mean square error，MSE）

设原MRI图像的大小为M×N，这里用来表示原始图像，来表示重建图像，则MSE定义为：

 (5‑1)

均方误差表明重建图像与原图像相似程度，其值越小，表明图像恢复效果越好。

### 峰值信噪比(peak signal-to-noise ratio，PSNR)

峰值信噪比定义如下：

 (5‑2)

### 结构化相似度（structural similarity，SSIM）

结构化相似度是一种衡量两幅图像相似度的新指标，其值越大越好，最大为1。用来表示原始图像，来表示重建图像，则SSIM定义为：

 (5‑3)

其中，分别用来调整亮度、对比度以及结构信息的权重；为亮度比较函数，为对比度比较函数，为结构比较函数，它们的定义分别为

 (5‑4)

 (5‑5)

 (5‑6)

其中，、分别为、的亮度均值，、分别为 、的标准差；为协方差，、、是为了防止当分母接近零时产生不稳定现象所添加的常数。

### 运算时间

运算时间是指从欠采样数据根据一定算法恢复出最终图像这一过程所耗费的时间。本恢复实验选取了MATLAB 2011b版本，实验计算机型号为联想Y460；处理器Intel CoreTM i5 CPU，M 480 @ 2.67Ghz，内存为4.00GB。恢复时间的单位采用秒（s）。

## 实验与分析

本文选择脑部断层MR图像进行实验，如图5‑1所示，图像的分辨率为512×512像素点，该图像来自江苏省人民医院磁共振成像检测部门。将其通过二维离散傅立叶变换，反推出k空间数据，分别利用矩形FOV欠采样轨迹、放射状欠采样轨迹、螺旋状欠采样轨迹和Propeller欠采样轨迹对k空间进行欠采样，由于欠采样率过高时压缩感知理论的优越性无法较好体现，因此分别采用5%、15%、30%和50%的欠采样率，图像稀疏化方法分别采用离散余弦变换和6层haar小波变换，恢复算法分别选择直接填零法、二维OMP法、快速阈值收缩法、线性Bregman法和共轭梯度法。



图5‑1 脑部断层MR图像

由于5%欠采样率恢复图像过于模糊，无法满足临床诊断的需要，而30%和50%欠采样率恢复效果均较好，无法很好的区分不同欠采样轨迹和恢复算法的优劣，因此本研究选取15%欠采样率恢复图像做效果对比，如图5‑2所示，可得如下结论：（1）矩形FOV欠采样轨迹会造成明显的图像域信号混叠且图像灰度和对比度明显低于原图像，放射状欠采样轨迹会造成图像域线状干扰，螺旋状欠采样轨迹会造成图像域螺旋状干扰，Propeller欠采样轨迹会造成图像域方向性模糊；（2）在欠采样率为15%情况下，二维OMP法恢复效果明显较差，直接填零法、快速阈值收缩法、Bregman法与共轭梯度法恢复效果均较好，且无明显差异。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 矩形FOV | 放射状轨迹 | 螺旋状轨迹 | Propeller |
| 直接填零 | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_rect1504_zero.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_radial1501_zero.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_spiral1498_zero.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_8prope1512_zero.jpg |
| 二维OMP | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_rect1504_dct_omp.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_radial1501_dct_omp.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_spiral1498_dct_omp.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_8prope1512_dct_omp.jpg |
| 快速阈值收缩 | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_rect1504_dct_FISTA.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_radial1501_dct_FISTA.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_spiral1498_dct_FISTA.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_8prope1512_dct_FISTA.jpg |
| 线性Bregman | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_rect1504_dct_bregman.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_radial1501_dct_bregman.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_spiral1498_dct_bregman.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_8prope1512_dct_bregman.jpg |
| 共轭梯度 | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_rect1504_dct_cg.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_radial1501_dct_cg.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_spiral1498_dct_cg.jpg | E:\Compressed sensing\论文素材\第四章\4.3\brain_8prope1512_dct_cg.jpg |

图5‑2 15%欠采样率恢复图像

15%欠采样率恢复图像均方误差对比如图5‑3所示，其中矩形FOV欠采样轨迹恢复图像的均方误差远高于另外三种欠采样轨迹恢复图像，采用二维OMP算法恢复图像的均方误差与另外四种恢复算法相比较高，且在配合使用Propeller欠采样轨迹时相差更为明显。因此，矩形FOV欠采样轨迹和二维OMP恢复算法对图像恢复效果较差。

图5‑3 15%欠采样率恢复图像均方误差对比

放射状欠采样轨迹恢复图像均方误差对比如图5‑4所示，五种恢复算法所恢复图像的均方误差均随欠采样率升高而大幅下降，且下降趋势逐步趋于平缓，即恢复效果随欠采样率升高而提高；通过均方误差对比可以发现，二维OMP算法恢复效果最差，直接填零法和快速阈值收缩法恢复效果较好，线性Bregman算法与共轭梯度算法恢复效果最佳，且无明显差异；Propeller欠采样轨迹结合二维OMP算法恢复图像的均方误差远大于其结合另外四种恢复算法，可见Propeller欠采样轨迹的恢复效果受恢复算法的影响较大，而放射状欠采样轨迹的恢复效果受恢复算法的影响最小。

图5‑4 放射状欠采样轨迹恢复图像均方误差对比

共轭梯度算法恢复图像均方误差对比如图5‑5所示，四种欠采样轨迹恢复图像的均方误差均随欠采样率升高而下降，且下降趋势逐步趋于平缓，即恢复效果随欠采样率升高而提高。通过均方误差对比可以发现，矩形FOV欠采样轨迹恢复效果最差，其次为Propeller欠采样轨迹，放射状欠采样轨迹和螺旋状欠采样轨迹恢复效果最好，且无明显差异。

图5‑5 共轭梯度算法恢复图像均方误差对比

放射状欠采样轨迹结合共轭梯度算法恢复图像均方误差对比如图5‑6所示，离散余弦变换与6层haar小波变换的恢复效果没有明显差异。

图5‑6 放射状欠采样与共轭梯度算法恢复图像均方误差对比

15%欠采样率恢复图像峰值信噪比对比如图5‑7所示，矩形FOV欠采样轨迹结合五种恢复算法所恢复图像的峰值信噪比远小于另外三种欠采样轨迹，因此矩形FOV欠采样轨迹的恢复效果最差；Propeller欠采样轨迹结合二维OMP算法恢复图像的峰值信噪比远大于其结合另外四种恢复算法，可见Propeller欠采样轨迹的恢复效果受恢复算法的影响较大，而放射状欠采样轨迹的恢复效果受恢复算法的影响最小。由于峰值信噪比与均方误差的倒数对数成正比，因此对于峰值信噪比指标不再进一步分析。

图5‑7 15%欠采样率恢复图像峰值信噪比对比

15%欠采样率恢复图像结构化相似度对比如图5‑8所示，其中矩形FOV欠采样轨迹恢复图像结构化相似度远小于另外三种欠采样轨迹，恢复效果最差；另外三种欠采样轨迹恢复图像的结构化相似度均接近于1，恢复效果均较好；Propeller欠采样轨迹结合二维OMP算法恢复图像的图像结构化相似度稍低于其结合另外四种恢复算法，可见Propeller欠采样轨迹的恢复效果受恢复算法的影响较大，而放射状欠采样轨迹的恢复效果受恢复算法的影响最小。

图5‑8 15%欠采样率恢复图像结构化相似度对比

放射状欠采样轨迹恢复图像结构化相似度对比如图5‑9所示，整体趋势是随着欠采样率的升高，恢复图像的结构化相似度逐渐接近于1，其中，线性Bregman法和共轭梯度法的恢复效果更佳；直接填零法在5%欠采样率时的恢复图像的结构化相似度远低于另外四种恢复算法，但在大于5%欠采样率情况下结构化相似度与另外四种恢复算法无明显差异。

图5‑9 放射状欠采样轨迹恢复图像结构化相似度对比

共轭梯度算法恢复图像结构化相似度对比如图5‑10所示，采用欠采样率小于50%的矩形FOV欠采样轨迹时，恢复图像结构化相似度远小于另外3种欠采样轨迹，当欠采样率达到50%时，其结构化相似度与另外3种欠采样轨迹数值没有明显差异；50%欠采样率的矩形FOV欠采样轨迹的图像虽然灰度与对比度相比较少欠采样率时有了明显改善，但是仍有明显的信号混叠，这导致均方误差和结构化相似度均较大，因为结构化相似度主要受图像灰度影响。

图5‑10 共轭梯度算法恢复图像结构化相似度对比

15%欠采样率恢复图像运算时间对比如图5‑11所示，一般情况下，二维OMP算法花费时间明显较长；矩形FOV欠采样轨迹与共轭梯度法相结合的运算时间远高于其他轨迹与恢复算法， 而其他恢复算法的运算时间基本不受欠采样轨迹的影响。

图5‑11 15%欠采样率恢复图像运算时间对比

螺旋状欠采样轨迹恢复图像运算时间对比如图5‑12所示，从对比图中可以看出，二维OMP算法花费时间总体明显长于其他恢复算法，且随着欠采样率升高而快速上升；另外4种恢复算法受欠采样率影响较小；一般情况下，恢复算法运算时间由短到长排序为：直接填零法<快速阈值收缩法<线性Bregman法<共轭梯度法<二维OMP法。

图5‑12 螺旋状欠采样轨迹恢复图像运算时间对比

共轭梯度算法恢复图像运算时间对比如图5‑13所示，在欠采样率较低时，共轭梯度算法结合矩形FOV欠采样轨迹恢复图像所花费的时间明显长于其他恢复算法，在达到50%欠采样率时，其运算时间与另外三种欠采样轨迹没有明显差异。

图5‑13 共轭梯度算法恢复图像运算时间对比

综上所述，k空间欠采样选择放射状欠采样轨迹、稀疏化方法选择6层haar小波变换，恢复算法选择线性Bregman法可以在较短恢复时间内取得较优恢复效果。

## 本章小结

本章主要介绍了四种评价恢复算法效果的客观指标，将多种欠采样轨迹、稀疏表示和恢复算法相互结合，在四种欠采样率情况下恢复图像，并从上述评价指标方面进行对比，欠采样轨迹方面，矩形FOV轨迹会造成明显的图像域信号混叠且图像灰度较低，放射状轨迹会造成图像域线状干扰，螺旋状轨迹会造成图像域螺旋状干扰，Propeller轨迹会造成图像域方向性模糊，但放射状轨迹和螺旋状轨迹效果远优于矩形FOV；恢复算法方面，二维OMP恢复效果较差，其次为直接填零法，快速阈值收缩法、Bregman法与共轭梯度法恢复效果均较好，运算时间由短到长排序为：直接填零法<快速阈值收缩法<Bregman法<共轭梯度法<二维OMP法；稀疏表示方面，使用6层haar小波变换和离散余弦变换的恢复效果无明显差异。最终得出k空间欠采样选择放射状欠采样轨迹、稀疏化方法选择6层haar小波变换，恢复算法选择线性Bregman法可以在较短恢复时间内取得较优恢复效果的结论。

# 干涉条纹改善方法

在欠采样率较低的情况下，使用放射状与螺旋状前采样后利用重建算法恢复的图像会产生较为明显的干涉条纹，该现象是由于欠采样导致的频率混叠所造成的[66,67,68]。干涉条纹会严重影响MRI成像质量，产生伪影，为临床诊断工作带来干扰。干涉条纹的形状与欠采样轨迹相关，放射状轨迹产生放射状干涉条纹，螺旋状轨迹产生螺旋状干涉条纹。干涉条纹随着欠采样率的提升逐渐淡化，直至消失。

本研究针对上述问题，提出一种在较低欠采样率下淡化、消除螺旋状欠采样轨迹产生干涉条纹的方法，通过在原有的螺旋状欠采样轨迹下进行小幅度的随机震荡，使得最终恢复图像更为准确。

## 随机震荡法

对于螺旋状欠采样轨迹，在极坐标系中的构造方法如式(6‑1)，之后可通过式(6‑2)转到笛卡尔直角坐标中：

 (6‑1)

 (6‑2)

其中，为螺旋状欠采样轨迹的旋转圈数，为螺旋状欠采样轨迹上对应角度的欠采样点到圆心的距离，为半径-角度系数，，分别为极坐标生成的螺旋状欠采样轨迹对应的笛卡尔直角坐标。为了满足螺旋形状，与应成正比，但是考虑到图像稀疏变换后大部分信息集中于二维变换域的中心，如果采用关系构造均匀分布的曲线，必然造成中心区域大量数据丢失，因此本研究采用简单变密度螺旋状采样轨迹[69]，通过构造采样轨迹，使得集中了大量信息的中心区域的采样轨迹排布更为紧密，而外围区域的排布较为疏散，简单变密度螺旋状欠采样轨迹的构造方法如式(6‑3)：

 (6‑3)

虽然上述方法生成的螺旋状欠采样轨迹能够采样较为丰富的数据，但是在数据恢复后仍然无法避免欠采样所造成的干涉条纹，根据Jun Miao[70]，Lin Chen[71]， Jing Liu[72]等人的研究，可以发现使用随机变密度采样可以大幅减少频率混叠，从而淡化图像域产生的干涉条纹。因此本研究在原有基础的螺旋状欠采样轨迹延径向进行微小随机震荡，优化构造方法如下：

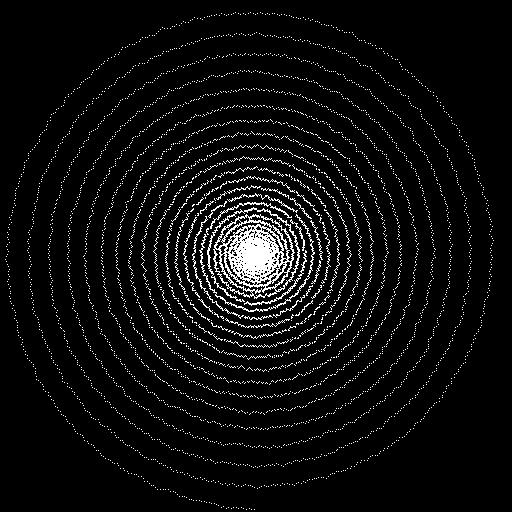
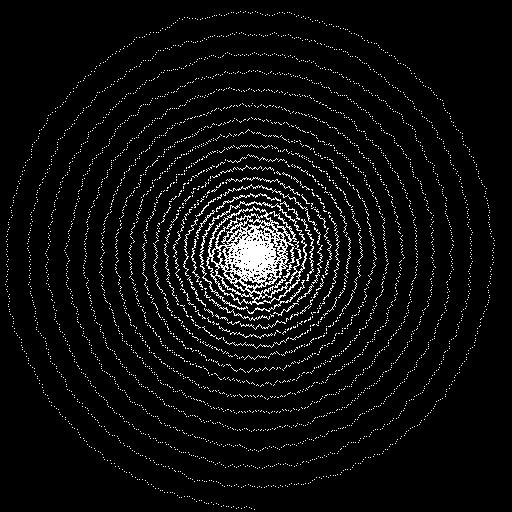
 (6‑4)

其中为优化后的距离，为对应的调整距离，调整公式如下：

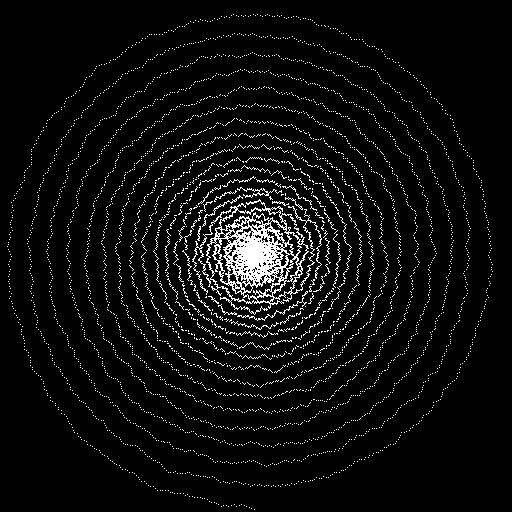
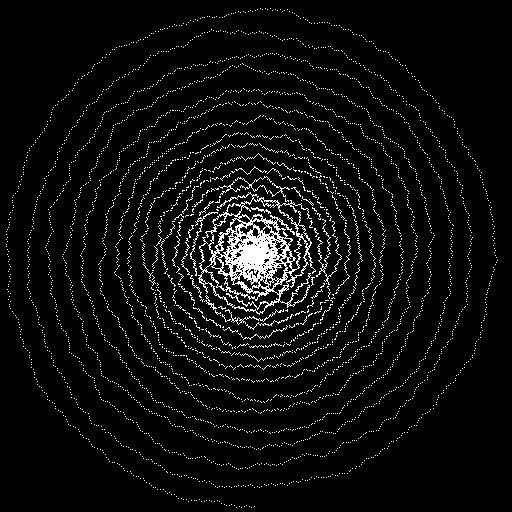
 (6‑5)

其中为对应的序号，，之后均与的正负有关，为满足高斯分布的一个随机数，为上一次的调整量，为高斯分布的标准差，其决定震荡幅度。

使用上述优化算法构造欠采样率5%的螺旋状欠采样轨迹对比如图6‑1所示。其中，使用优化算法时，高斯分布标准差分别为。从图像可以明显看出，在原有螺旋状欠采样轨迹的震荡幅度随着增大而增大。

(a)  (b) 

(c)  (d) 

图6‑1 欠采样率5%的螺旋状欠采样轨迹，

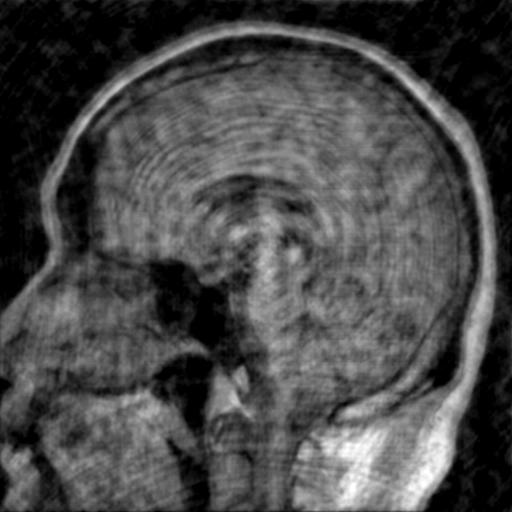
使用基础方法和上述优化算法（）构造欠采样率5%，15%，30%的螺旋状欠采样轨迹对比如图6‑2所示。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 5% | 15% | 30% |
| 基础方法 | C:\Users\zzh\Desktop\毕业实习内容\毕业论文代码\论文素材\第六章\rand_spiral0500_0.jpg | C:\Users\zzh\Desktop\毕业实习内容\毕业论文代码\论文素材\第六章\rand_spiral1500_0.jpg | C:\Users\zzh\Desktop\毕业实习内容\毕业论文代码\论文素材\第六章\rand_spiral3000_0.jpg |
| 随机震荡算法 | C:\Users\zzh\Desktop\毕业实习内容\毕业论文代码\论文素材\第六章\rand_spiral0500_4.jpg | C:\Users\zzh\Desktop\毕业实习内容\毕业论文代码\论文素材\第六章\rand_spiral1500_1.jpg | C:\Users\zzh\Desktop\毕业实习内容\毕业论文代码\论文素材\第六章\rand_spiral3000_1.jpg |

图6‑2 欠采样率5%，15%，30%的螺旋状欠采样轨迹，

## 结果分析

为了进一步说明上述构造螺旋状欠采样轨迹方法的淡化干涉条纹的效果，本研究依然选取脑部断层MR图像进行实验，图像的分辨率为512×512像素点，图像稀疏化方法和恢复算法分别采用第五章恢复效果较优的6层haar小波变换和线性Bregman法，利用螺旋状欠采样轨迹对k空间进行欠采样。当欠采样率为50%时，恢复图像已无法看出明显的干涉条纹，因此分别采用5%、15%和30%的欠采样率进行欠采样。为了探究不同震荡幅度对干涉条纹淡化效果的差异，分别选取 。实验仿真结果如图6‑3、图6‑4和图6‑5所示。可得如下结论：（1）在欠采样率为5%和15%时，使用基础方法构造的螺旋状欠采样轨迹对k空间欠采样恢复会产生明显的螺旋状干涉条纹，利用随机震荡方法构造的欠采样轨迹能够明显淡化干涉条纹；（2）在欠采样率为30%时，使用基础方法和随机震荡法构造的欠采样轨迹均会产生轻微螺旋状干涉条纹，且无明显差异；（3）直接观察恢复图像，震荡幅度对干涉条纹的淡化效果无明显差异。



(a)基础方法



(a)  (b) 

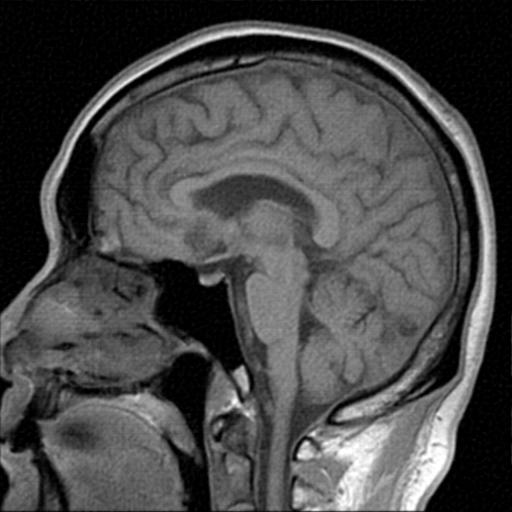


(a)  (b) 

图6‑3 欠采样率5%的螺旋状欠采样轨迹恢复图像



(a)基础方法



(a)  (b) 



(a)  (b) 

图6‑4 欠采样率15%的螺旋状欠采样轨迹恢复图像



(a)基础方法



(a)  (b) 



(a)  (b) 

图6‑5 欠采样率30%的螺旋状欠采样轨迹恢复图像

螺旋状欠采样轨迹多种构造方法恢复图像均方误差和峰值信噪比对比分别如图6‑6和图6‑7所示，其中，（1）欠采样率为5%时，使用随机震荡法构造的螺旋状欠采样轨迹恢复图像的均方误差与基础方法构造的欠采样轨迹相比大幅减少，峰值信噪比大幅上升，而在欠采样率为15%和30%时，两种构造方法恢复图像的均方误差和峰值信噪比无明显差异；（2）三种欠采样率下，恢复图像的均方误差随着震荡幅度增加而先上升达到最大值后下降，峰值信噪比则与之相反；（3）欠采样率为5%，15%，30%时，恢复图像均方误差最小值对应的构造方法分别为随机震荡法，随机震荡法和基础方法（即无震荡），因此，随着欠采样率的提高，恢复效果最佳时所对应的震荡幅度会降低。

图6‑6螺旋状欠采样轨迹多种构造方法恢复图像均方误差

图6‑7螺旋状欠采样轨迹多种构造方法恢复图像峰值信噪比

## 本章小结

本章主要针对在较低欠采样率下，通过在原有的螺旋状欠采样轨迹下沿径向进行随机震荡，使得之后恢复图像的干涉条纹淡化、甚至消除。在欠采样率较低时，该方法可以明显改善由于欠采样引起的干涉条纹，但随着欠采样率的升高，本身图像恢复效果逐渐提升，该方法的改善效果也相应下降；仅直接观察图像，震荡幅度对图像干涉条纹的改善效果无明显差异，但从均方误差和峰值信噪比方面分析，该方法的改善效果随着震荡幅度增加而先上升，在达到最佳效果后下降，且随着欠采样率的提高，改善效果最佳时所对应的震荡幅度会降低。

# 结论和展望

压缩感知理论作为一种新型的信号采样方式，突破了传统的奈奎斯特采样定理的限制，一经提出便引起了国内外广大学者的普遍关注，本课题主要研究了压缩感知理论在磁共振成像技术中的应用。

在压缩感知基本理论部分，本文阐述了其基本框架：稀疏变换、压缩观测和恢复算法，并结合lena图像和批量检测溶液氟离子浓度实例进一步说明四种稀疏变换的效果和三种恢复算法的性能。得到如下结论：（1）离散傅立叶变换、离散余弦变换和3层haar小波变换对于二维图像具有较好的稀疏性，即使仅使用很少稀疏系数也可恢复出较为准确的图像，而x方向的有限差分变换稀疏效果较差；（2）使用较少离散傅立叶变换和离散余弦变换系数恢复二维图像时，会产生模糊噪点，使用3层haar小波变换时，会产生马赛克状模糊，使用x方向有限差分变换时，会产生x方向条纹状干扰；（3）BP、MP和OMP三种恢复算法的恢复效果随着欠采样率增大而提高，且三种恢复算法的恢复效果没有明显差异；（4）BP算法运算时间多于MP和OMP算法，且随着欠采样率增大BP算法运算时间的增加量大于MP和OMP算法的时间增加量。

在压缩感知理论在磁共振成像中的应用部分，本文着重介绍了四种k空间欠采样填充轨迹和五种恢复算法，并结合脑部断层MR图像对比说明不同k空间欠采样填充轨迹、稀疏化方法和恢复算法的效果。得到如下结论：（1）矩形FOV轨迹会造成明显的图像域信号混叠且图像灰度较低，放射状轨迹会造成图像域线状干扰，螺旋状轨迹会造成图像域螺旋状干扰，Propeller轨迹会造成图像域方向性模糊；（2）一般情况下，二维OMP恢复效果较差，其次为直接填零法，快速阈值收缩法、Bregman法与共轭梯度法恢复效果均较好；（3）放射状轨迹和螺旋状轨迹效果最好，远优于矩形FOV轨迹；（4）Propeller欠采样轨迹的恢复效果受恢复算法的影响较大，其结合二维OMP恢复算法恢复效果较差，而放射状欠采样轨迹的恢复效果受恢复算法的影响最小。（5）使用相同欠采样轨迹和恢复算法时，6层haar小波变换和离散余弦变换的恢复效果无明显差异；（5）一般情况下，恢复算法运算时间由短到长排序为：直接填零法<快速阈值收缩法<Bregman法<共轭梯度法<二维OMP法；（6）综上所述，k空间欠采样选择放射状欠采样轨迹、稀疏化方法选择6层haar小波变换，恢复算法选择线性Bregman法可以在较短恢复时间内取得较优恢复效果。

最后针对较低欠采样率下恢复重建容易产生干涉条纹的问题，基于原有的螺旋状欠采样轨迹下进行随机震荡采样确实可以淡化、消除螺旋状欠采样轨迹产生的干涉条纹，使得最终恢复图像更为准确。

压缩感知（CS）理论于06年刚刚起步，该领域的很多相关理论的研究尚不成熟。在论文的最后，我们说明一些本课题今后可以进一步探索的问题：

（1）构建更为高效的欠采样填充轨迹，使得k空间欠采样能够更好地平衡中心低频大幅数据和外围高频小幅数据的比例关系；

（2）构建更为高效的恢复算法，使得重建图像具有更高精度的同时，恢复算法运算时间降低；

（3）不同的欠采样轨迹、稀疏化方法和恢复算法对于不同类型的MR图像效果不同，可在此问题上进一步探究，选出相应最优的压缩感知方案。

# 

# 图表索引

[图2‑1 MRI图像及相应k空间图像 10](#_Toc399334920)

[图3‑1 512×512像素的lena图像 13](#_Toc399334921)

[图3‑2 lena图的四种稀疏变换系数图像 14](#_Toc399334922)

[图3‑3 lena图由四种稀疏变换的最大2%、5%、10%和20%系数恢复效果对比 14](#_Toc399334923)

[图3‑4 压缩感知观测向量的矩阵表示示意图 15](#_Toc399334924)

[图3‑5 MP、OMP和BP在10%、20%、30%、40%和50%欠采样率下的恢复数据 21](#_Toc399334925)

[图3‑6 MP、OMP、BP恢复算法均方根误差 21](#_Toc399334926)

[图3‑7 MP、OMP、BP恢复算法运算时间 22](#_Toc399334927)

[图4‑1 常用k空间欠采样填充轨迹 24](#_Toc399334928)

[图5‑1 脑部断层MR图像 34](#_Toc399334929)

[图5‑2 15%欠采样率恢复图像 36](#_Toc399334930)

[图5‑3 15%欠采样率恢复图像均方误差对比 36](#_Toc399334931)

[图5‑4 放射状欠采样轨迹恢复图像均方误差对比 37](#_Toc399334932)

[图5‑5 共轭梯度算法恢复图像均方误差对比 37](#_Toc399334933)

[图5‑6 放射状欠采样与共轭梯度算法恢复图像均方误差对比 38](#_Toc399334934)

[图5‑7 15%欠采样率恢复图像峰值信噪比对比 38](#_Toc399334935)

[图5‑8 15%欠采样率恢复图像结构化相似度对比 39](#_Toc399334936)

[图5‑9 放射状欠采样轨迹恢复图像结构化相似度对比 40](#_Toc399334937)

[图5‑10 共轭梯度算法恢复图像结构化相似度对比 40](#_Toc399334938)

[图5‑11 15%欠采样率恢复图像运算时间对比 41](#_Toc399334939)

[图5‑12 螺旋状欠采样轨迹恢复图像运算时间对比 41](#_Toc399334940)

[图5‑13 共轭梯度算法恢复图像运算时间对比 42](#_Toc399334941)

[图6‑1 欠采样率5%的螺旋状欠采样轨迹， 44](#_Toc399334942)

[图6‑2 欠采样率5%，15%，30%的螺旋状欠采样轨迹， 45](#_Toc399334943)

[图6‑3 欠采样率5%的螺旋状欠采样轨迹恢复图像 46](#_Toc399334944)

[图6‑4 欠采样率15%的螺旋状欠采样轨迹恢复图像 47](#_Toc399334945)

[图6‑5 欠采样率30%的螺旋状欠采样轨迹恢复图像 48](#_Toc399334946)

[图6‑6螺旋状欠采样轨迹多种构造方法恢复图像均方误差 49](#_Toc399334947)

[图6‑7螺旋状欠采样轨迹多种构造方法恢复图像峰值信噪比 49](#_Toc399334948)

[表3‑1 压缩感知观测矩阵效果对比 16](#_Toc390933761)

[表B‑1 脑部断层5%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像运算时间 (单位:s） 47](#_Toc390933762)

[表B‑2 脑部断层5%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像运算时间(单位:s） 47](#_Toc390933763)

[表B‑3 脑部断层15%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像运算时间(单位:s） 47](#_Toc390933764)

[表B‑4 脑部断层15%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像运算时间(单位:s） 47](#_Toc390933765)

[表B‑5 脑部断层30%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像运算时间(单位:s） 47](#_Toc390933766)

[表B‑6 脑部断层30%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像运算时间(单位:s） 47](#_Toc390933767)

[表B‑7 脑部断层50%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像运算时间(单位:s） 48](#_Toc390933768)

[表B‑8 脑部断层50%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像运算时间 (单位:s） 48](#_Toc390933769)

[表B‑9 脑部断层5%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像均方误差 48](#_Toc390933770)

[表B‑10 脑部断层5%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像均方误差 48](#_Toc390933771)

[表B‑11 脑部断层15%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像均方误差 48](#_Toc390933772)

[表B‑12 脑部断层15%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像均方误差 48](#_Toc390933773)

[表B‑13 脑部断层30%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像均方误差 49](#_Toc390933774)

[表B‑14 脑部断层30%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像均方误差 49](#_Toc390933775)

[表B‑15 脑部断层50%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像均方误差 49](#_Toc390933776)

[表B‑16 脑部断层50%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像均方误差 49](#_Toc390933777)

[表B‑17 脑部断层5%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像峰值信噪比 49](#_Toc390933778)

[表B‑18 脑部断层5%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像峰值信噪比 50](#_Toc390933779)

[表B‑19 脑部断层15%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像峰值信噪比 50](#_Toc390933780)

[表B‑20 脑部断层15%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像峰值信噪比 50](#_Toc390933781)

[表B‑21 脑部断层30%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像峰值信噪比 50](#_Toc390933782)

[表B‑22 脑部断层30%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像峰值信噪比 50](#_Toc390933783)

[表B‑23 脑部断层50%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像峰值信噪比 50](#_Toc390933784)

[表B‑24 脑部断层50%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像峰值信噪比 51](#_Toc390933785)

[表B‑25 脑部断层5%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像结构化相似度 51](#_Toc390933786)

[表B‑26 脑部断层5%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像结构化相似度 51](#_Toc390933787)

[表B‑27 脑部断层15%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像结构化相似度 51](#_Toc390933788)

[表B‑28 脑部断层15%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像结构化相似度 51](#_Toc390933789)

[表B‑29 脑部断层30%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像结构化相似度 51](#_Toc390933790)

[表B‑30 脑部断层30%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像结构化相似度 52](#_Toc390933791)

[表B‑31 脑部断层50%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像结构化相似度 52](#_Toc390933792)

[表B‑32 脑部断层50%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像结构化相似度 52](#_Toc390933793)

# 评价数据

表B‑1 脑部断层5%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像运算时间 (单位:s）

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 5.08% | 0.021792 | 18.48274 | 9.474735 | 24.59611 | 118.5975 |
| 放射状 | 5.05% | 0.020656 | 19.43159 | 9.546339 | 26.27474 | 62.82771 |
| 螺旋状 | 5.02% | 0.021634 | 20.19653 | 9.553548 | 26.90243 | 58.43493 |
| Propeller | 5.11% | 0.020286 | 17.97879 | 9.545133 | 26.45361 | 54.31402 |

表B‑2 脑部断层5%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像运算时间(单位:s）

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 5.08% | 0.021792 | 19.36598 | 7.406632 | 27.13735 | 179.7937 |
| 放射状 | 5.05% | 0.020656 | 20.03841 | 7.453844 | 27.20376 | 58.24574 |
| 螺旋状 | 5.02% | 0.021634 | 21.07182 | 7.432995 | 27.7235 | 62.36704 |
| Propeller | 5.11% | 0.020286 | 20.30988 | 7.187855 | 27.36541 | 54.30361 |

表B‑3 脑部断层15%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像运算时间(单位:s）

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 15.04% | 0.037764 | 125.7742 | 10.24917 | 28.56082 | 250.5862 |
| 放射状 | 15.01% | 0.025704 | 108.1589 | 9.838573 | 30.73673 | 53.48841 |
| 螺旋状 | 14.98% | 0.041817 | 80.79127 | 10.13417 | 29.33143 | 63.00023 |
| Propeller | 15.12% | 0.031049 | 108.902 | 9.561757 | 30.6168 | 57.83471 |

表B‑4 脑部断层15%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像运算时间 (单位:s）

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 15.04% | 0.037764 | 70.10045 | 7.720141 | 27.42277 | 164.6069 |
| 放射状 | 15.01% | 0.025704 | 87.64605 | 7.494837 | 31.93695 | 61.23008 |
| 螺旋状 | 14.98% | 0.041817 | 92.49269 | 9.771824 | 28.08055 | 78.9418 |
| Propeller | 15.12% | 0.031049 | 98.56068 | 8.526693 | 25.54884 | 69.15744 |

表B‑5 脑部断层30%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像运算时间(单位:s）

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 30.08% | 0.021086 | 204.4025 | 9.887128 | 47.14762 | 322.2189 |
| 放射状 | 30.07% | 0.020887 | 263.6776 | 9.890364 | 48.65086 | 78.5587 |
| 螺旋状 | 30.04% | 0.026599 | 300.5727 | 9.695489 | 51.38381 | 131.786 |
| Propeller | 30.51% | 0.02205 | 382.3067 | 11.70106 | 51.37868 | 106.699 |

表B‑6 脑部断层30%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像运算时间 (单位:s）

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 30.08% | 0.021086 | 427.6402 | 14.16951 | 58.41734 | 292.4921 |
| 放射状 | 30.07% | 0.020887 | 403.8215 | 15.52361 | 58.12311 | 117.4937 |
| 螺旋状 | 30.04% | 0.026599 | 392.7587 | 15.8787 | 54.83768 | 103.6778 |
| Propeller | 30.51% | 0.02205 | 402.3265 | 15.92467 | 59.48674 | 123.1318 |

表B‑7 脑部断层50%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像运算时间(单位:s）

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 50.00% | 0.044585 | 1268.25 | 9.480455 | 28.87988 | 70.71397 |
| 放射状 | 49.96% | 0.039567 | 685.3249 | 9.492294 | 30.03204 | 66.0237 |
| 螺旋状 | 50.03% | 0.043174 | 551.1247 | 9.475874 | 29.92431 | 67.21316 |
| Propeller | 50.59% | 0.046675 | 623.5784 | 9.470427 | 27.04459 | 57.84411 |

表B‑8 脑部断层50%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像运算时间 (单位:s）

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 50.00% | 0.044585 | 674.4195 | 7.353137 | 28.33095 | 63.00599 |
| 放射状 | 49.96% | 0.039567 | 694.612 | 7.648592 | 29.86034 | 76.29593 |
| 螺旋状 | 50.03% | 0.043174 | 737.855 | 7.653074 | 25.44572 | 82.03807 |
| Propeller | 50.59% | 0.046675 | 735.4717 | 7.468467 | 26.90768 | 64.06281 |

表B‑9 脑部断层5%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像均方误差

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 5.08% | 7955.60 | 7920.80 | 7535.10 | 7601.30 | 7593.30 |
| 放射状 | 5.05% | 483.62 | 566.31 | 397.97 | 343.76 | 343.05 |
| 螺旋状 | 5.02% | 518.39 | 907.05 | 424.92 | 372.64 | 380.90 |
| Propeller | 5.11% | 551.84 | 2524.20 | 538.54 | 525.95 | 523.22 |

表B‑10 脑部断层5%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像均方误差

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 5.08% | 7955.60 | 7588.90 | 7502.40 | 7601.10 | 7589.20 |
| 放射状 | 5.05% | 483.62 | 480.62 | 356.07 | 343.37 | 330.03 |
| 螺旋状 | 5.02% | 518.39 | 1567.40 | 301.64 | 371.70 | 335.59 |
| Propeller | 5.11% | 551.84 | 4392.20 | 666.26 | 525.58 | 538.78 |

表B‑11 脑部断层15%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像均方误差

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 15.04% | 7139.10 | 7095.10 | 6050.40 | 6176.80 | 6167.00 |
| 放射状 | 15.01% | 109.87 | 155.20 | 89.67 | 71.19 | 76.97 |
| 螺旋状 | 14.98% | 68.75 | 379.75 | 53.51 | 43.07 | 48.43 |
| Propeller | 15.12% | 131.85 | 1031.10 | 124.52 | 121.95 | 120.71 |

表B‑12 脑部断层15%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像均方误差

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 15.04% | 7139.10 | 6736.10 | 6032.50 | 6176.50 | 6164.90 |
| 放射状 | 15.01% | 109.87 | 129.19 | 62.50 | 70.46 | 57.60 |
| 螺旋状 | 14.98% | 68.75 | 241.14 | 45.34 | 42.47 | 39.76 |
| Propeller | 15.12% | 131.85 | 2067.10 | 188.26 | 121.44 | 138.27 |

表B‑13 脑部断层30%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像均方误差

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 30.08% | 6495.10 | 6208.40 | 5106.10 | 5092.70 | 5079.70 |
| 放射状 | 30.07% | 27.24 | 53.14 | 19.19 | 14.45 | 17.09 |
| 螺旋状 | 30.04% | 10.91 | 126.13 | 8.91 | 6.76 | 7.94 |
| Propeller | 30.51% | 30.87 | 385.04 | 28.01 | 27.21 | 27.16 |

表B‑14 脑部断层30%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像均方误差

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 30.08% | 6495.10 | 6141.30 | 4943.30 | 5092.60 | 5077.80 |
| 放射状 | 30.07% | 27.24 | 44.79 | 12.05 | 14.10 | 11.44 |
| 螺旋状 | 30.04% | 10.91 | 92.24 | 12.74 | 6.56 | 11.55 |
| Propeller | 30.51% | 30.87 | 162.93 | 49.02 | 26.93 | 36.49 |

表B‑15 脑部断层50%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像均方误差

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 50.00% | 1425.20 | 1982.30 | 1478.30 | 1425.10 | 1426.20 |
| 放射状 | 49.96% | 6.34 | 17.70 | 4.65 | 4.17 | 4.50 |
| 螺旋状 | 50.03% | 4.08 | 35.01 | 4.13 | 3.53 | 3.81 |
| Propeller | 50.59% | 5.83 | 70.67 | 5.58 | 5.14 | 5.47 |

表B‑16 脑部断层50%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像均方误差

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 50.00% | 1425.20 | 8048.70 | 1424.40 | 1424.80 | 1425.10 |
| 放射状 | 49.96% | 6.34 | 17.56 | 3.64 | 4.08 | 3.53 |
| 螺旋状 | 50.03% | 4.08 | 27.05 | 3.95 | 3.51 | 3.77 |
| Propeller | 50.59% | 5.83 | 35.15 | 11.94 | 5.03 | 10.23 |

表B‑17 脑部断层5%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像峰值信噪比

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 5.08% | 15.18 | 15.20 | 15.41 | 15.38 | 15.38 |
| 放射状 | 5.05% | 27.34 | 26.65 | 28.19 | 28.82 | 28.83 |
| 螺旋状 | 5.02% | 27.04 | 24.61 | 27.90 | 28.47 | 28.38 |
| Propeller | 5.11% | 26.77 | 20.16 | 26.87 | 26.98 | 27.00 |

表B‑18 脑部断层5%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像峰值信噪比

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 5.08% | 15.18 | 15.38 | 15.43 | 15.38 | 15.38 |
| 放射状 | 5.05% | 27.34 | 27.37 | 28.67 | 28.83 | 29.00 |
| 螺旋状 | 5.02% | 27.04 | 22.23 | 29.39 | 28.48 | 28.93 |
| Propeller | 5.11% | 26.77 | 17.76 | 25.95 | 26.98 | 26.87 |

表B‑19 脑部断层15%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像峰值信噪比

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 15.04% | 15.65 | 15.68 | 16.37 | 16.28 | 16.28 |
| 放射状 | 15.01% | 33.78 | 32.28 | 34.66 | 35.66 | 35.32 |
| 螺旋状 | 14.98% | 35.81 | 28.39 | 36.90 | 37.84 | 37.33 |
| Propeller | 15.12% | 32.98 | 24.05 | 33.23 | 33.32 | 33.37 |

表B‑20 脑部断层15%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像峰值信噪比

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 15.04% | 15.65 | 15.90 | 16.38 | 16.28 | 16.29 |
| 放射状 | 15.01% | 33.78 | 33.07 | 36.23 | 35.71 | 36.58 |
| 螺旋状 | 14.98% | 35.81 | 30.36 | 37.62 | 37.91 | 38.19 |
| Propeller | 15.12% | 32.98 | 21.03 | 31.44 | 33.34 | 32.78 |

表B‑21 脑部断层30%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像峰值信噪比

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 30.08% | 16.06 | 16.26 | 17.10 | 17.12 | 17.13 |
| 放射状 | 30.07% | 39.83 | 36.93 | 41.36 | 42.59 | 41.86 |
| 螺旋状 | 30.04% | 43.81 | 33.18 | 44.69 | 45.89 | 45.19 |
| Propeller | 30.51% | 39.29 | 28.33 | 39.71 | 39.84 | 39.85 |

表B‑22 脑部断层30%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像峰值信噪比

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 30.08% | 16.06 | 16.30 | 17.25 | 17.12 | 17.13 |
| 放射状 | 30.07% | 39.83 | 37.67 | 43.38 | 42.69 | 43.60 |
| 螺旋状 | 30.04% | 43.81 | 34.54 | 43.13 | 46.01 | 43.56 |
| Propeller | 30.51% | 39.29 | 32.07 | 37.28 | 39.88 | 38.56 |

表B‑23 脑部断层50%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像峰值信噪比

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 50.00% | 22.65 | 21.21 | 22.49 | 22.65 | 22.64 |
| 放射状 | 49.96% | 46.16 | 41.71 | 47.51 | 47.99 | 47.66 |
| 螺旋状 | 50.03% | 48.08 | 38.74 | 48.02 | 48.70 | 48.37 |
| Propeller | 50.59% | 46.53 | 35.69 | 46.72 | 47.07 | 46.81 |

表B‑24 脑部断层50%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像峰值信噪比

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 50.00% | 22.65 | 15.13 | 22.65 | 22.65 | 22.65 |
| 放射状 | 49.96% | 46.16 | 41.74 | 48.57 | 48.08 | 48.71 |
| 螺旋状 | 50.03% | 48.08 | 39.86 | 48.22 | 48.74 | 48.43 |
| Propeller | 50.59% | 46.53 | 38.73 | 43.42 | 47.17 | 44.09 |

表B‑25 脑部断层5%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像结构化相似度

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 5.08% | 0.0017 | 0.0017 | 0.0060 | 0.0069 | 0.0070 |
| 放射状 | 5.05% | 0.9909 | 0.9973 | 0.9974 | 0.9981 | 0.9981 |
| 螺旋状 | 5.02% | 0.9807 | 0.9795 | 0.9870 | 0.9837 | 0.9839 |
| Propeller | 5.11% | 0.9694 | 0.6360 | 0.9722 | 0.9697 | 0.9704 |

表B‑26 脑部断层5%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像结构化相似度

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 5.08% | 0.0017 | 0.0133 | 0.0099 | 0.0069 | 0.0070 |
| 放射状 | 5.05% | 0.9909 | 0.9992 | 0.9988 | 0.9981 | 0.9986 |
| 螺旋状 | 5.02% | 0.9807 | 0.8577 | 0.9905 | 0.9837 | 0.9863 |
| Propeller | 5.11% | 0.9694 | 0.5010 | 0.9721 | 0.9698 | 0.9708 |

表B‑27 脑部断层15%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像结构化相似度

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 15.04% | -0.0054 | -0.0046 | -0.0220 | -0.0205 | -0.0054 |
| 放射状 | 15.01% | 0.9990 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9990 |
| 螺旋状 | 14.98% | 0.9992 | 0.9915 | 0.9995 | 0.9994 | 0.9992 |
| Propeller | 15.12% | 0.9977 | 0.9668 | 0.9973 | 0.9977 | 0.9977 |

表B‑28 脑部断层15%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像结构化相似度

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 15.04% | -0.0054 | -0.0130 | -0.0177 | -0.0205 | -0.0208 |
| 放射状 | 15.01% | 0.9990 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9995 | 0.9998 |
| 螺旋状 | 14.98% | 0.9992 | 0.9957 | 0.9995 | 0.9994 | 0.9996 |
| Propeller | 15.12% | 0.9977 | 0.8168 | 0.9957 | 0.9977 | 0.9978 |

表B‑29 脑部断层30%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像结构化相似度

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 30.08% | 0.0018 | -0.0019 | -0.0068 | 0.0062 | 0.0060 |
| 放射状 | 30.07% | 0.9996 | 0.9997 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 螺旋状 | 30.04% | 0.9998 | 0.9987 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| Propeller | 30.51% | 0.9993 | 0.9834 | 0.9996 | 0.9993 | 0.9995 |

表B‑30 脑部断层30%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像结构化相似度

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 30.08% | 0.0018 | -0.0556 | -0.0051 | 0.0061 | 0.0060 |
| 放射状 | 30.07% | 0.9996 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 螺旋状 | 30.04% | 0.9998 | 0.9994 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| Propeller | 30.51% | 0.9993 | 0.9928 | 0.9987 | 0.9993 | 0.9991 |

表B‑31 脑部断层50%欠采样率离散余弦稀疏化恢复图像结构化相似度

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 50.00% | 1.0000 | 0.9983 | 0.9995 | 1.0000 | 1.0000 |
| 放射状 | 49.96% | 0.9999 | 0.9999 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 |
| 螺旋状 | 50.03% | 1.0000 | 0.9998 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| Propeller | 50.59% | 1.0000 | 0.9996 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

表B‑32 脑部断层50%欠采样率haar小波稀疏化稀疏化恢复图像结构化相似度

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 欠采样轨迹 | 欠采样率 | 直接填零 | 二维OMP | 快速阈值 | Bregman | 共轭梯度 |
| 矩形FOV | 50.00% | 1.0000 | 0.9805 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 放射状 | 49.96% | 0.9999 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 螺旋状 | 50.03% | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| Propeller | 50.59% | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

# 

# 参考文献

1. 赵喜平.磁共振成像[M]，北京：科学出版社，2004，1-3.
2. E Candès. Compressive sampling[A].Madrid,Spain,2006.1433-1452.
3. E Candès,J Romberg,Terence Tao. Robust uncertainty principles:Exact signal reconstru-ction from highly incomplete frequency information[J].IEEE Transactions on Information theory,2006,(02):489-509.
4. E Candès,J Romberg. Quantitative robust uncertainty principles and optimally sparse decompositions[J].Foundations of comout Math,2006,(02):227-254.
5. D L Donoho. Compressed sensing[J].IEEE Transactions on Information theory,2006,(04):1289-1306.
6. E J Candès,J Romberg. Practical signal recovery from random proections.
7. D L Donoho,Y Tsaig. Extensions of compressed sensing[J].Signal Processing,2006,(03):533-548.
8. B Kashin. The widths of certain finite dimensional sets and classes of smooth functions[J].Izv Akad Nauk SSSR,1977,(02):334-351.
9. E J Candès,T Tao. Near optimal signal recovery from ran dom projections:Universal encoding strategies[J].IEEE Transactions on Information theory,2006,(12):5406-5425.
10. Michael Lustig,David Donoho,John M. Pauly. Sparse MRI: The Application of Compressed Sensing for Rapid MR Imaging[J]. MAGNETIC RESONANCE IN MEDICINE.58(6):1182-1195.
11. 程涛,朱国宾,刘玉安等.基于二维压缩感知的定向遥感和变化检测[J].红外与毫米波学报,2013,32(5):456-461.
12. 肖龙龙,刘昆,韩大鹏等.压缩感知理论在光学成像中的应用[J].应用光学,2012,33(1):71-77.
13. 孟庆微,黄建国,何成兵等.采用时域测量矩阵的压缩感知稀疏信道估计方法[J].西安交通大学学报,2012,46(8):94-99.
14. 于华楠,郭树旭.基于压缩感知的超宽带信道估计方法的研究[J].电子与信息学报,2012,34(6):1452-1456.
15. 张汗灵,李红英,周敏等.融合多特征和压缩感知的手势识别[J].湖南大学学报（自然科学版）,2013,40(3):87-92.
16. 余慧敏,方广有.压缩感知理论在探地雷达三维成像中的应用[J].电子与信息学报,2010,32(1):12-16.
17. 徐建平,皮亦鸣,曹宗杰等.基于贝叶斯压缩感知的合成孔径雷达高分辨成像[J].电子与信息学报,2011,33(12):2863-2868.
18. 周琳,王怀军,粟毅等.基于压缩感知的GPR成像算法[J].系统工程与电子技术,2011,33(9):1995-2001.
19. 李少东,杨军,马晓岩等.基于压缩感知的ISAR高分辨成像算法[J].通信学报,2013,(9):152-159.
20. 孔丽云,于四伟,程琳等.压缩感知技术在地震数据重建中的应用[J].地震学报,2012,34(5):659-666.
21. 李新,秦世引.基于压缩感知原理的图像融合新方法[J].高技术通讯,2012,22(1):35-41.
22. 肖新清,齐林,傅泽田等.基于压缩感知的鲜食葡萄冷链物流监测方法[J].农业工程学报,2013,(22):259-266.
23. 余恺,李元实,王智等.基于压缩感知的新型声信号采集方法[J].仪器仪表学报,2012,33(1):105-112.
24. 罗武骏,陶文凤,左加阔等.自适应语音压缩感知方法[J].东南大学学报（自然科学版）,2012,42(6):1027-1030.
25. A Levin, R Fergus, F Durand and W. T. Freeman, Image and depth from a conventional camera with a coded aperture,Proc. of Intl. Conf. Comp. Graphics. And Inter. Tech.,2007
26. M Sheikh, O Milenkovic and R Baraniuk, Designing compressive sensing DNA microarrays. IEEE Workshop on computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP), St.Thomas, U.S. Virgin Islands, 2007.12
27. 宋琳，曹吉海，基于随机滤波的雷达信号采样和目标重建方法[J]，科技导报，2008，26（13）：64-67
28. C Hegde, M Wakin and R Baraniuk, Random projections for manifold learing. Neural Information Processing Systems(NIPS), Vancouver, Canada, 2007.12
29. J Wright, A Ganesh, A Yang and Y Ma, Robust face recognition via sparse representation. IEEE Trans.PAMI, 2008.4,31(2):210-217
30. 张桂珊,肖刚,戴卓智等.压缩感知技术及其在MRI上的应用[J].磁共振成像 ,2013,(4):314-320.
31. 吉强，洪洋.医学影像物理学[M]，北京：人民卫生出版社，2011.
32. 石光明,刘丹华,高大化等.压缩感知理论及其研究进展[J],电子学报,2009,(5):1070-1081.
33. Olshausen B A, Field D J. Emergence of simple-cell receptive eld properties by learning a sparse code for natural images.Nature,1996,381(6583):607-609.
34. Candés E,Romberg J,Sparsity and incoherence in compressive sampling[J].Inverse Problems,2007,23(3):969-985.
35. Stephane G.Mallat.A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation[J].IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intellignence,1989,11(7):674-693.
36. Stephane G.Mallat.Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models[J].IEEE Transacition in Acoustic Speech and Signal Processing,1989,37(12):2091-2110.
37. 焦李成，谭山.图像的多尺度几何分析:回顾和展望.电子学报,2004,31(B12):1975-1981.
38. Murray J.F.,Kreutz-Delgado K.Learning sparse overcomplete codes for images[J].Journal of VLSI Signal Processing,2006,45(1):97-110.
39. 孙玉宝.图像稀疏表示理论及其在图像处理反问题中的应用研究[D].南京理工大学,南京,2010.
40. Michal A,Elad M.,Alfred B.K-SVD:An algorithm for designing over-complete dictionaries for sparse representation[J].IEEE Transacition on Signal Processing,2006,54(11):4311-4322.
41. E Candès,Romberg J,Tao T.Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J].Communications on Pure and Applied Mathematics,2006,59(8):1207-1223.
42. Candes E.Tao T.Decoding by linear programming[J].IEEE Trans.Info.Th.,2005,51(12):4203-4215.
43. 许志强.压缩感知[J],中国科学:数学,2012,42(9):865-877.
44. Donoho D L.For most large junderdetermined systems of linear equations, the minimal l1 norm solution is also the sparsest solution.Communications on Pure and Applied Mathematics,2006,59(6):797-829.
45. Tsaing Y,Donoho D.Extensions of compressed sensing[J].Signal Processing,2006,86(3):549-571.
46. Candés E,Romberg J,Tao T.Robust uncertainty principles:Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J].IEEE Transactions on Information Theory,2006,52(2):489-509.
47. Chen S B,Donoho D L,Saunders M A.Atomic decomposition by basis pursuit. SIAM Journal on Scientic Computing,1998,20(1):33-61.
48. 管蓉.基于压缩感知的图像稀疏表示方法[D].中北大学,北京,2012.
49. Tropp J,Gilbert A,Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit.Transactions on Information Theory,2007,53(12):4655-4666.
50. 王郗雨,杨晓梅,胡雪妹.基于奇异值分解的压缩感知核磁共振图像重构算法[J].计算机应用研究,2013,30(4):1247-1252.
51. Willig-Onwuachi JD.Phase-constrained parallel MR image reconstruction using symmetry to increase acceleration and improve image quality[J],Proceeding of the 11th Annual Meeting of ISMRM,2003,19.
52. 李仰康，刘国瑞，Michael Amann.MR成像新技术——螺旋磁共振成像[J].中华放射学杂志,2004,38(12):1337-1340.
53. B.Sutton,D.Noll,J.Fessler.Fast,iterative,field-corrected image reconstruction for MRI in the presence of field inhomogeneities[J],IEEE Trans.Med.Imag.,2003,22:178-188.
54. 刘小武，陈武凡，冯衍秋.一种新的仿射参数估计方法在磁共振成像PROPELLER中的应用[J].北京生物医学工程,2010,29(2):111-115.
55. Douglas C.Noll,Jeffery A.Fessler,Bardley P.Sutton.Conjugate phase MRI reconstruction with spatially variant sample density correction[J],IEEE Trans.Med.Imag.,2005,24(3):325-336.
56. Amann M.Bock M.Floemer F,el al.Three-dimensional spiral MR imaging:application to renal multiphase contrast-enhanced angiography.Magn Reson Med,2002,48:290-296.
57. B.Desplanques,D.Cornelis,E.Achtem,R.Van de Walle,I.Lemahieu.Iterative reconstruction of magnetic resonance images from arbitrary samples in k-space[J],IEEE Transactions on Nuclear Science,2002,49:2268-2273.
58. Beck A.,Teboulle M.A Fast Iterative Shrinkage-thresholding Algorithm with Application to Wavelet-based Image Deblurring[C]//Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics,Speech and Signal Processing.Taipei,China:[s.n.],2009:693-696.
59. Beck A.,Teboulle M.A Fast Iterative Shrinkage-thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems[J].Society for Industral and Applied Mathematics,2009,2(1):183-202.
60. 段世芳,马社祥.图像压缩感知的双收缩快速迭代算法[J].计算机工程,2012,38(19):226-232.
61. Osher S.,Burger M.,et al.An iterated regularization method for total variation-based image restoration[J].Multiscale Model.Simul.,2005(4):460-489.
62. Darbon F.,Osher S.Fast discrete optimizations for sparse approximations and deconvolutions.to appear,2007.
63. Cai J F.Osher S,Shen Z W.Linearized Bregman Iterations for Compressed Sensing[J].Math.Comp.,2009(78,267):1515-1536.
64. 杨晓兰，朱永贵，丛佳等.基于压缩感知的核磁共振图像重建的Bregman方法[J].中国传媒大学学报自然科学版,2012,19(4):18-26.
65. 李国燕,侯向丹,周博君等.基于离散剪切波的压缩感知MRI图像重建[J].计算机应用研究,2013,30(6):1895-1898.
66. Stephen L.Keeling,Christian Clason,Michael Hintermüller.An image space approach to Cartesian based parallel MR imaging with total variation regularization[J].Medical Image Analysis,16,(2012):189–200.
67. Neelam Sinha,A.G.Ramakrishnan,Manojkumar Saranathan.Composite MR image reconstruction and unaliasing for general trajectories using neural networks[J].Magnetic Resonance Imaging,28,(2010):1468–1484.
68. Thomas Gaass,Grzegorz Bauman,Guillaume Potdevin.Rapid dynamic radial MRI via reference image enforced histogram constrained reconstruction[J].Journal of Magnetic Resonance,240,(2014):1–7.
69. Gary H. Glover.Spiral imaging in fMRI[J].NeuroImage,62,(2012):706–712.
70. Jun Miao,Weihong Guo,Sreenath Narayan.A simple application of compressed sensing to further accelerate partially parallel imaging[J].Magnetic Resonance Imaging,31,(2013):75–85.
71. Lin Chen,Lijun Bao,Jing Li.An aliasing artifacts reducing approach with random undersampling for spatiotemporally encoded single-shot MRI[J].Journal of Magnetic Resonance,237,(2013):115–124.
72. Jing Liu,Petter Dyverfeldt,Gabriel Acevedo-Bolton.Highly accelerated aortic 4Dflow MR imaging with variable-density random undersampling[J].Magnetic Resonance Imaging,xxx,(2014):xxx–xxx.

# 

# 综 述

**压缩感知在MRI技术中的常用重建算法**

**摘要：**压缩感知是基于应用数学的一种创新的信号获取及处理理论，其原理是通过对所采集的信号进行适当域变换得到可压缩信号，直接采集压缩后的信号并利用重构算法实现快速优质信号重建。运用该技术成像不仅具有出色的时间分辨率优势，同时具有满意的空间分辨率，因此近年来其在医学成像领域的应用逐渐成为研究热点。本文着重介绍了近年来用于MRI技术中的常用压缩感知重建算法。

**关键词：**压缩感知；磁共振成像；重建算法

**Abstract：**Compressed sensing is an innovative theory of signal acquisition

and processing based on the areas of applied mathematics. It works by using the mathematical algorithm to make an appropriate domain transformation for the collected signals and changing them into sparse or compressible signals. Afterwards, gathering the compressed signals directly to reconstruct the original signals at speedy, high quality by the method of the reconstruction algorithm. Due to its excellent temporal resolution advantages and with satisfactory temporal resolution, compressed sensing has become a research focus in the field of medical imaging. This article introduces that the compression sensing reconstruction algorithms commomly used in the MRI technology in recent years.

**Key words:** Compressed Sensing; Magnetic resonance imaging; Recover algorithm

**1 前言**

信息技术的飞速发展使得人们对信息的需求量剧增。现实世界信号的模拟化和信号处理工具的数字化决定了信号采样是从模拟信源获取数字信息的必经之路。奈奎斯特采样定理则是指导如何采样的重要理论基础。它指出，采样速率必须达到信号带宽的两倍以上才能精确重构信号。

然而近几年来出现的一种新颖的理论——Compressed sensing（也称为Compressive sampling)[1-6]表明压缩重构信号是可能的。它指出，只要信号是可压缩的或在某个变换域是稀疏的，那么就可以用一个与变换基不相关的观测矩阵将变换所得高维信号投影到一个低维空间上，然后通过求解一个优化问题就可以从这些少量的投影中以高概率重构出原信号，可以证明这样的投影包含了重构信号的足够信息。在该理论框架下，采样速率不决定于信号的带宽，而决定于信息在信号中的结构和内容。事实上，压缩感知理论的某些抽象结论源于Kashin创立的范函分析和逼近论[7]，最近由Candes，Romberg[3]，Tao[8]和Donoho[4]等人构造了具体的算法并且通过研究表明了这一理论的巨大应用前景。

磁共振成像（MRI）是临床医学影像检查的重要手段之一[9]，但是MRI技术是一种速度相对较慢的成像模式，加快数据的获取一直是核磁共振成像领域的热门研究问题[10]。一些研究者致力于通过提高硬件来实现对核磁共振扫描时间的缩短。利用压缩感知理论可以大大加快成像速度，缩短扫描时间。结合压缩感知技术不仅具有显著的时间分辨率优势，同时具有令人满意的空间分辨率，因此其在临床MRI上的运用备受关注。

**2压缩感知基本理论**

压缩感知的主要思想是[4]：先对信号进行域变换，使其成为稀疏的或可压缩的信号[11]，再利用一个与变换基不相干的测量矩阵将变换所得的高维信号投影到一个低维空间上，并对所获取的少量测量值进行求解凸优化问题，从而实现对信号的精确重构。

**2.1 信号的稀疏表示**

稀疏表示作为一种有效的信号表示模型，能够用尽可能简洁稀疏的方式表示信号。表示系数中较少的非零分量揭示了信号的主要结构和本质属性，从而为信号的后续处理带来了很大的便利。

实际的自然信号或图像往往都不是严格稀疏的，在信号的表示系数中，大部分的分量都接近于零，只有少部分的分量幅值较大，这时信号被称为是可压缩的（compressible）。

由上述内容可知，信号的稀疏性或可压缩性依赖于所选择的变换，不同的变换对某一特定信号的稀疏表示能力通常是不同的。到目前为止，信号的稀疏变换发展大体经历了傅立叶变换、小波变换、多尺度几何分析和过完备冗余字典等几个主要阶段。

**2.2压缩观测**

能否通过测量值无失真地重建原始信号取决于观测矩阵是否能够保持的原始结构信息。显然，如果测量过程破坏或丢失了原始信号中的必要信息，精确重建是不可行的。要想使原始信号完全重建，必须保证测量矩阵不会把两个不同的K-稀疏信号映射到同一个测量值向量上，这就要求从测量矩阵中抽取的任意K个列向量构成的子矩阵是近似正交的。Candes和Tao[1,12,13]等指出如果测量矩阵满足限制等距性条件（Restricted Isometry Property，RIP），则原始信号可由相应的测量值精确重建。然而，直接构造一个满足RIP条件的测量矩阵是一个组合复杂度问题，当前的主要构造方法有：随机矩阵、确定性矩阵和结构随机矩阵[14]。

**2.3恢复算法**

要精确重建原始信号，首先要保证观测矩阵满足RIP条件，在此前提下，我们可以先通过求解范数下的最优化问题，得到原始信号在变换域的稀疏表示系数，得到稀疏系数之后，将其变换为原始信号，完成数据重建。

对原始信号的重建过程可以视作是范数下的最优化问题，是一个NP-Hard问题，想要求解该问题，则必须将稀疏系数中非零值的所有可能一一列举，即使用穷举法求解，然而这种方式会耗费大量的时间，换言之，我们在实际应用中不能直接根据上式来求解。但是可以证明，最小范数和最小范数能够在一定条件下互相转化，具有等价性[15]。最小范数法（基追踪），匹配追踪系列算法，最小全变分法，共轭梯度算法，迭代阈值系列法等算法是目前常用的恢复算法。

**3基于压缩感知MRI技术的常用重建算法**

近年来，利用压缩感知理论，研究者证明了利用图像的稀疏性先验知识，通过求解相应的优化问题能够有效地缩短扫描时间，进而加快成像速度[16]。

在k空间的欠采样中，螺旋轨迹，放射状轨迹和Propeller/Blade轨迹是常用的采样轨迹。在图像的稀疏化方法中，常用的是离散余弦变换（DCT）和离散小波变换（DWT）。

MRI欠采样必然会引起k空间采集数据的丢失，进而造成图像域的伪影和模糊，为了能够在较少采样的情况下，获得同完全采样相近的成像效果，压缩感知理论的恢复算法起到至关重要的作用。

杨晓兰等[17]提出用β范数近似逼近范数的思想并运用Bregman迭代正则化方法进行求解得到核磁共振图像可以从全部数据的40%抽样中几乎精确重构原始图像。它可以克服以往求解问题的计算复杂性。在采样率相对较小的情况下，使用不到一分钟的时间来恢复忠实于原图的正方形图像。另外，Cai等人[18]以基追踪问题为研究背景，结合向前向后算子分裂方法与Bregman迭代，也推导出了线性Bregman迭代。该迭代只涉及到矩阵向量乘法和取阈值的操作，十分便于编程实现，并且有很好的去噪性能。

Lusting等[19]提出的Sparse MRI图像重构算法使用了共轭梯度算法来恢复MRI的k空间欠采样数据。共轭梯度（Conjunction Gradient，CG）算法是方向追踪算法的一种，该算法利用目标函数的共轭方向作为搜索方向，其基本的想法是与最速下降法结合，得到目标函数的最小解，从而增强了算法的有效性和可靠性。此外，Lusting等提出了将共轭梯度算法与全变差结合的思想，全变差不仅仅应用于有限差分稀疏化中，还可以作为惩罚函数包含在其他稀疏表示中。

李青等[20]指出，Lusting等虽然将范数优化和全变差相结合，但是并没有提出如何设置正则化参数的有效解决方法。李青等提出在迭代程中使用全局正则化和局部正则化结合的方法自适应地改变正则化参数。这样就可以在局部噪声方差大的区域，采用数值较大的局部正则化参数来平滑噪声；而在局部噪声方差小的区域，采用数值较小的局部正则化参数以利于边缘的恢复，从而能较好地权衡图像边缘的恢复和噪声平滑两者的关系。

段世芳等[21]基于快速迭代收缩阈值法（FISTA）[22]提出了一种双收缩快速迭代算法（DSFIA），通过阈值收缩和正则化参数收缩提高图像恢复质量，减少计算复杂度。当采样率大于0.4时，DSFIA算法重构图像的峰值信噪比明显优于FISTA算法，而且随着采样率的增大，差距在加大。而在采样率比较低时，其时间复杂度也较低。

王郗雨等[10]指出DWT和DCT作为稀疏基底只能表示有限范围下的图像或图像特征的缺点[23]，他提出利用MR图像非满秩的特点，将MR图像使用奇异值分解（SVD）压缩大量数据，并使用Cooling算法对MR图像重建问题进行了优化。结果表明，奇异值方法在重构效果上能达到与小波稀疏变换法相近的峰值信噪比，且能有效缩短图像重构时间，达到加速磁共振成像的目的。

李国燕等[24]针对二维小波变换捕捉方向信息有限，不能稀疏地表示MRI图像中曲线状奇异特征的缺点，提出了一种基于离散剪切波变换的压缩感知MRI图像重建新方法。剪切波是多尺度几何分析的最新发展，是由Guo、Easley等人[25,26]采用具有合成膨胀的仿射系统构造的一种接近最优表示的多维函数。实验结果表明，与小波变换相比，基于离散剪切波的压缩感知MRI图像有更好的重建效果．更有利于保留纹理和边缘信息。

**4总结**

压缩感知MRI技术是一项在应用数学基础上发展起来的快速MRI新技术。由于它能实现快速高质量成像，因此其在医学MRI的应用上具有很好的发展潜力。目前，相应的应用研究还处于理论层面，即主要在测量矩阵和重构算法的性能分析和优化上，对压缩感知实现方法的研究仍处于起步阶段，许多相关问题有待解决。其主要有以下几个方面，快速有效的稀疏分解算法的研究，去噪声的重构算法的设计研究，图像的实际应用问题研究及软硬件要求和设计研究。今后，压缩感知MRI技术将会为临床医师和科研人员提供更多有价值的信息，此领域也会被更多人所关注。

**参考文献：**

[1] E Candès. Compressive sampling[A].Madrid,Spain,2006.1433-1452.

[2] E Candès,J Romberg,Terence Tao. Robust uncertainty principles:Exact signal reconstru-ction from highly incomplete frequency information[J].IEEE Transactions on Information theory,2006,(02):489-509.

[3] E Candès,J Romberg. Quantitative robust uncertainty principles and optimally sparse decompositions[J].Foundations of comout Math,2006,(02):227-254.

[4] D L Donoho. Compressed sensing[J].IEEE Transactions on Information theory,2006,(04):1289-1306.

[5] E J Candès,J Romberg. Practical signal recovery from random proections.

[6] D L Donoho,Y Tsaig. Extensions of compressed sensing[J].Signal Processing,2006,(03):533-548.

[7] B Kashin. The widths of certain finite dimensional sets and classes of smooth functions[J].Izv Akad Nauk SSSR,1977,(02):334-351.

[8] E J Candès,T Tao. Near optimal signal recovery from ran dom projections:Universal encoding strategies[J].IEEE Transactions on Information theory,2006,(12):5406-5425.

[9] 李国燕,侯向丹,周博君等.基于离散剪切波的压缩感知MRI图像重建[J].计算机应用研究,2013,30(6):1895-1898.

[10] 王郗雨,杨晓梅,胡学姝等.基于奇异值分解的压缩感知核磁共振图像重构算法[J].计算机应用研究,2013,30(4):1247-1249,1252.

[11]Baraniuk RG. Compressive sensing [lecture notes]. Signal Processing Magazine IEEE,2007,24(4): 118-121.

[12]E Candès,Romberg J,Tao T.Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J].Communications on Pure and Applied Mathematics,2006,59(8):1207-1223.

2006，59(8)：1207-1223．

[13]Candes E.Tao T.Decoding by linear programming[J].IEEE Trans.Info.Th.,2005,51(12):4203-4215.

[14]许志强.压缩感知[J],中国科学:数学,2012,42(9):865-877.

[15]Tsaing Y,Donoho D.Extensions of compressed sensing[J].Signal Processing,2006,86(3):549-571.

[16]王郗雨,杨晓梅,胡雪妹.基于奇异值分解的压缩感知核磁共振图像重构算法[J].计算机应用研究,2013,30(4):1247-1252.

[17]杨晓兰，朱永贵，丛佳等.基于压缩感知的核磁共振图像重建的Bregman方法[J].中国传媒大学学报自然科学版,2012,19(4):18-26.

[18]Cai J F.Osher S,Shen Z W.Linearized Bregman Iterations for Compressed Sensing[J].Math.Comp.,2009(78,267):1515-1536.

[19] Michael Lustig,David Donoho,John M. Pauly. Sparse MRI: The Application of Compressed Sensing for Rapid MR Imaging[J]. MAGNETIC RESONANCE IN MEDICINE.58(6):1182-1195.

[20]李青，杨晓梅，李红.基于压缩感知的自适应正则化磁共振图像重构[J].计算机应用,2012,32(2):541-544.

[21]段世芳,马社祥.图像压缩感知的双收缩快速迭代算法[J].计算机工程,2012,38(19):226-232.

[22]Beck A.,Teboulle M.A Fast Iterative Shrinkage-thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems[J].Society for Industral and Applied Mathematics,2009,2(1):183-202.

[23]HONG Ming-jian，YU Ye-yang,WANG Hua. Compressed sensing MRI with singular value decomposition-based sparsity basis[J].Physics in Medicine and Biology,2011,56(19):6311-6325.

[24]李国燕,侯向丹,周博君等.基于离散剪切波的压缩感知MRI图像重建[J].计算机应用研究,2013,30(6):1895-1898.

[25]GUO Kang-hui,LABATE D.Optimally sparse multidimensional representation using shearlets[J].SIAM Journal on Mathematical Analysis,2007,39(1):298-318.

[26]EASLEY G.,LIM W.,LABATE D.Sparse directional image representations using the discrete shearlet transform[J].Applied and Computational Harmonic Analysisl,2008,25(1):25-46.

# 

# 致 谢

四年的大学生涯已接近尾声，在此期间我得到了指导老师、同学朋友以及家人的鼓励和帮助，正是在他们的支持下我逐步提高自己并完成大学学业，现在谨以此文表达我诚挚的谢意。

首先，衷心感谢我的指导教师王伟老师，无论是在选题、开题、实验设计还是处理问题的方法上，给予我莫大的关心和帮助，此外，王老师同我一起探讨压缩感知理论，指导我撰写专利申报书、毕业论文以及最终的现场答辩。

感谢吴小玲老师、朱松盛老师、段磊老师和刘宾老师四年中在专业课方面的帮助与指导，感谢丁勇老师、吴静老师、屠小明老师在数学理论上的指导和启迪、感谢胡晓雯老师、华东老师、郁芸老师和王娟老师在计算机基础与程序编写方面的指导。

感谢对于我的研究工作一直给予帮助的前辈和同学。感谢班级全班同学在学习上的支持和生活上的帮助。

感谢我的家人和朋友，是他们无私的奉献和不懈的支持，使我勇于面对和战胜一切困难。

感谢江苏省人民医院提供的磁共振检测图像。

最后再次衷心感谢所有关心、帮助过我的老师和朋友们！祝愿他们在今后的工作生活中一切顺利！