磁共振成像中数据空间与 k 空间转化的推导及讨论*

侯淑莲　王广新　赵　强　谢寰彤　李石玉

（河北联合大学　河北 唐山　063000）

（收稿日期：2011-08-01）

摘　要：在磁共振成像图像重建中，尝试利用普通物理学方法推导数据空间与 k 空间的转化过程，揭示 k 空间实质、特点及 MRI 采用傅里叶变换图像重建的优势与必要性.

关键词：MRI　数据空间　k 空间　傅里叶变换

磁共振成像（Magnetic Resonance Imaging，简称 MRI）与 X-CT、超声、SPECT 等成像的最大不同是没有外在的放射源，产生的信号强度没有与坐标的直接对应关系. MRI 利用处于磁场中具有磁矩的氢原子核受到射频脉冲的激励后，在接收线圈中产生感生电信号；通过一系列的物理手段使信号既带有生物组织信息又带有坐标（位置）信息，然后采集这些信号. 用射频脉冲激发，这涉及到射频脉冲的类型、幅度、宽度、施加的时刻、持续的时间. 如果把成像断层分成体素，各体素产生的信号强度依赖于体素内自旋核密度及环境，采集这些信号还原自旋核密度的空间分布就是实现图像重建. 为了使信号中带有坐标信息，目前通用的方法是通过施加梯度磁场用频率去标示这些体素的坐标. 这就涉及到梯度磁场施加的方向、时刻、顺序、持续的时间等. 其次是信号的采集，是直接采集 FID 信号还是采集回波，是梯度回波还是自旋回波，在哪一时刻采集，用什么方式采集，要采集反映生物组织哪一方面特征的信息，如何加快采集速度提高信噪比等等. 出现了各种各样的参数和各种各样的脉冲序列，使得磁共振成像原理变得异常复杂和难以理解. 为了更方便地处理以上问题，使采集到的时间域信号更快地实现模 - 数转换，更好地利用在频率域处理信号简单、快捷的优势，通过傅里叶变换实现图像重建引入“k 空间”的概念. 实际是用计算机存储数据的一个方法. 由于它不是一个物理空间，而与成像的物理空间又有非常密切的关系，所以对于初学者来说，k 空间既是一个很难理解的概念，又是一个很重要的空间. 它是为傅里叶变换图像重建提供数据、提供重要图像解释方式的基础. 有了它，不必采用复杂的数学演算就可以进行脉冲序列的信号强度、组织对比、优势、缺陷以及对应的伪像、分辨率、信噪比的讨论. 它也是 MRI 仪器制造过程中的关键技术之一.

现行教科书中，k 空间的引入大多数仅限于定性讨论，很难深入理解；有的推导虽然注意了科学性与严密性，但又太高深，使数理基础不太深厚的医学专业的学生理解起来有困难. 现尝试用普通物理学的方法引入 k 空间，并对其实质给予进一步的分析.

1　一维傅里叶变换图像重建与 k 空间的引入

傅里叶变换及逆变换如下

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{2}$$

时域信号与频域信号可通过傅里叶变换相互转化，MRI 中坐标是用频率与相位表示的，所以傅里叶变换图像重建是 MRI 的最佳选择. 图 1 给出了傅里叶变换图像重建用频率表示空间位置的原理.

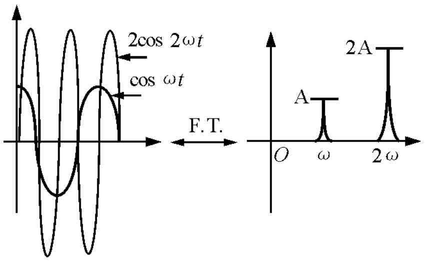
---

* 河北省科技厅资助项目“永磁微型磁共振成像仪的研制”，项目编号：08202133D

作者简介：侯淑莲（1946-　），女，教授，主要从事医学物理教学和 CT 与磁共振成像原理研究.

$\cos\omega t$	$2\cos 2\omega t$

(a) 二体素样本及信号



(b) 采集的信号及傅里叶变换

$\cos\omega t$	$2\cos 2\omega t$

(c) 得到函数的实部作为幅度频谱显示图像强度或灰度，虚部作为相位频谱确定坐标

图 1

设在 xOy 平面磁场矢量 B 以角速度 ω 旋转，接收线圈轴线（或平面线圈法线）方向沿 y 轴，面积为 S，平面线圈内将产生感生电动势 ε（图 2）．如果旋转的磁场是均匀的（当空间距离小于 $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ 时可忽略空间变化，1 T 时真空中对应电磁波波长 $\lambda = 7$ m）[1]，$t = 0$ 时线圈法线与磁场垂直，则根据法拉第电磁感应定律[2] 有

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = BS\omega\cos\omega t \tag{3}$$

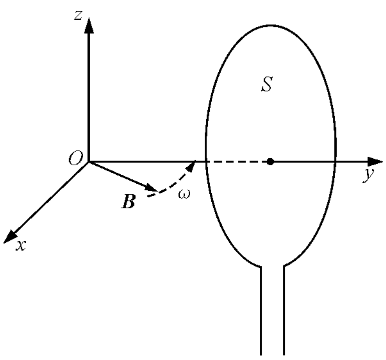
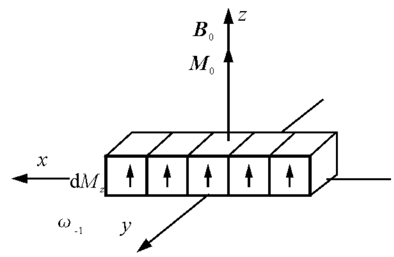
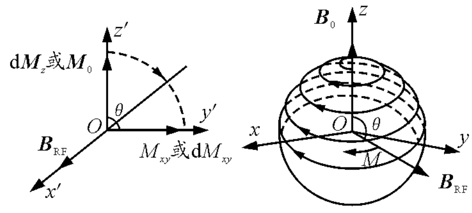


图 2　旋转磁场在静止线圈中产生感生电动势

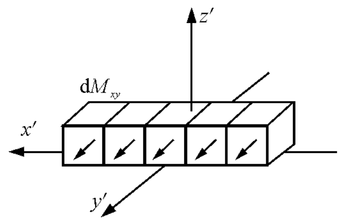
由此出发考查一个自旋核一维分布的样本．设体素沿 x 方向，自旋核密度为 $\rho(x)$，设主磁场 B_0 方向为 z 方向．由于氢核自旋对于外磁场的取向作用使氢核的基态能级发生分裂，使样本中每一个体素产生沿主磁场方向的磁矩 $\mathrm{d}M_z$，整个样本沿主磁场产生的总磁矩为 M_0，如图 3(a)．设沿 x 方向施加 $90°$ 射频（RF）脉冲，则各 $\mathrm{d}M_z$ 或 M_0 一方面绕主磁场



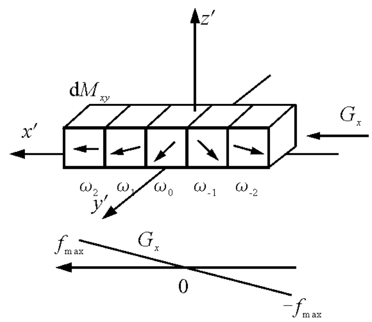
(a) 磁场中的一维样本



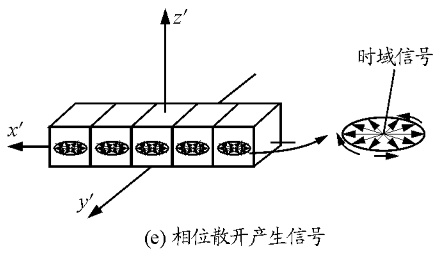
(b) 射频脉冲的作用，带撇号的为旋转坐标系



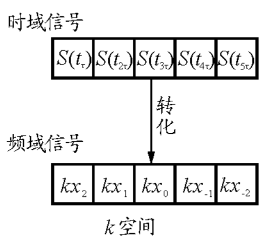
(c) 磁矩倾倒到 y 轴，设此时 y 轴与 y' 轴重合



(d) 施加频率编码梯度场 G_x 持续时间 t_2



(e) 相位散开产生信号



(f) 频率编码的同时采集时域信号，转化为 k 表示的频信号完成 k 空间填充

图 3　磁共振信号的产生

B_0 旋进，另一方面绕射频磁场 B_{RF} 旋进，如图 3(b)，总效果是旋转着倒向 xOy 平面（可设倒向 y 轴），一般忽略弛豫衰减有 $dM_{xy}=dM_0$，各体素磁矩同相位，如图 3(c)．此后 RF 结束横向磁化强度矢量失去射频脉冲的束缚，自由地在 xOy 平面旋进，由于局部磁场的差异很快散相即所谓弛豫，产生信号，如图 3(d)．为了建立信号的坐标，90°RF 后加线性梯度场 G_x 进行频率编码，如图 3(e)．频率编码的同时，采集时域信号，并把此信号转化为用 k 表示的频域信号数据，存贮到计算机的一个空间叫做 k 空间填充，后面有专门的介绍，见图 3(f)．设 90°RF 结束时，$t=0$，各体素有相同的初相位，且 $\varphi_0=0$，并假设主磁场均匀，不存在横向分量，则由

$$\omega=\gamma B \quad (4)$$

[3]

倾倒后的横向磁化强度矢量 dM_{xy} 进动频率为

$$\omega=\omega_0+\Delta\omega=\omega_0+\gamma G_x x \quad (5)$$

用频率标记坐标．设接收线圈法线沿 y 轴，将 dM_{xy} 用复数表示将更方便[3]

$$\begin{aligned}dM_{xy}&=(dM_y+idM_x)e^{-t/T_2}=\\&dM_0(\cos\omega t+i\sin\omega t)e^{-t/T_2}=\\&dM_0e^{i\omega t}e^{-t/T_2}\end{aligned} \quad (6)$$

其中 e^{-t/T_2} 为横向弛豫（衰减）项，$t=T_E$ 时采集信号．当 $T_E\ll T_2$ 时，可忽略弛豫衰减（也可归入等效自旋密度之中），所以有 $dM_{xy}=dM_0e^{i\omega t}$．由式(3) 可知，信号（感生电动势）的强度与旋转角频率 ω 成正比，与磁感应强度成正比；在本问题中也就是与磁化强度矢量 dM_0 成正比，而 $dM_0\propto$ 自旋核密度 $\rho(x)$，每个体素产生的信号

$$d\varepsilon\propto\rho(x)\omega(x)e^{i\omega t}dx$$

信号的强度还与弛豫时间、温度、电子线路、场及其他一些复杂因素有关，但自旋核密度是最基本的成像参数，不存在自旋核的地方不会有信号，其他因素依赖于自旋核密度，把上式写为等式

$$d\varepsilon=\Lambda\rho(x)\omega(x)e^{i\omega t}dx$$

为了研究方便，引入有效自旋密度概念．于是令 $\rho(x)=\Lambda\omega_x\rho$ 作为有效自旋密度，其中 Λ 为比例系数，包括了影响信号的一些因素，采集到的信号

$$S(t)=\int\rho(x)e^{i\omega t}dx \quad (7)$$

积分范围是自旋核密度不为零的区域．为了旋进的稳定性，射频脉冲是一个旋转磁场，其角频率与 dM_z 绕着主磁场旋进的角频率相同为 ω_0．建立旋转坐标系，与实验室坐标系 z 轴相同．若以旋转坐标系为参考系（相当于信号解调），由

$$\omega=\omega_0+\Delta\omega=\omega_0+\gamma G_x\cdot x$$

则在旋转坐标系中，dM_{xy} 旋转的角速度为 $\Delta\omega=\gamma xG_x$．把相位用角度表示，式(7) 变为

$$S(t)=\int\rho(x)e^{-i2\pi\gamma xG_xt}dx \quad (8)$$

负号表示横向矢量旋进角速度方向与确定相位角（逆时针为正）的方向相反．令 $k_x=\gamma G_x\cdot t$，量纲为 $Hz\cdot cm^{-1}$，称做空间频率，表示沿空间某一方向单位距离内波动的周期数，是一个矢量，又称为波数．这样就把时间 t 隐含到空间频率之中，式(8) 可写为

$$S(k_x)=\int\rho(x)e^{-i2\pi k_xx}dx \quad (9)$$

显然，(9) 式恰恰是等效自旋核密度 $\rho(x)$ 的傅里叶变换式．通过线性变换把用时域信号 $S(t)$ 表示的采集信号转化为用频域信号 $S(k_x)$ 表示出来，把信号与自旋密度联系起来．从傅里叶的逆变换则很容易得到自旋核的密度分布，重建图像

$$\rho(x)=\int S(k_x)e^{i2\pi k_xx}dk_x \quad (10)$$

由以上研究可见，用 k 标记的信号就是有效自旋核密度沿线性梯度方向的傅里叶变换，变换的变量是空间频率 k，随时间和梯度强度变化．所以一维空间成像通过频率编码用频率记录空间位置的信息，用这些以频率表示的数据组成新的结构 ——k 空间．具体形成过程如下：设一维样本含有 N_x 个体素，每次采集到的信号是所有体素信号的和，从数学原理上来说，需有 N_x 次采集才能解出各体素的信号强度（或密度）．在施加频率编码持续时间 t_2 内，在 $t=\tau,2\tau,3\tau,\cdots$ 以等间隔时间 τ 连续采集 N_x 次，形成 N_x 个以 k 表示的数据点，组成一行，形成一维的一个数据空间，由于用 k 作变量就称为 k 空间，相邻点间的频率差为 $\Delta\omega=\gamma G_x\Delta x$．显然以一定顺序储存数据 $S(k)$ 的空间就是 k 空间．以上是从理论上对傅里叶变换、k 空间的物理意义而作的简化推导，浅显易懂．在 MRI 实际制造中，直接把接收到的时域信号 $S(t)$ 通过傅里叶变换化为频域函数

$$S(k_x)=\int S(t)e^{-i2\pi k_xx}dx \quad (11)$$

进行傅里叶空间填充，然后作傅里叶逆变换实

现图像重建，式(11) 与式(9) 是等价的.

2　二维傅里叶变换及 k 空间的形成

对于二维样本假设由 $N_x \times N_y$ 个体素构成. 要想使每一个体素都具有用频率表示的坐标，除了在 x 方向施加线性梯度场 G_x 频率编码外，还要在 y 方向施加相位编码线性梯度场 G_y，使二维断面上的体素再获得用频率表征的纵坐标. 具体过程是 RF 脉冲后核磁矩倒向 y 轴，首先，施加相位编码梯度场持续时间 t_1，结束时不同 y 坐标的体素获得不同的相位，接着施加频率编码梯度场同时采集时间域信号 $S(t_1, t_2)$，转化成用 k_x，k_y 表示的一行数据，形成 k 空间的一行，将式(8) 应用到二维

$$S(k_x, k_y) = \iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\rho(x, y)\mathrm{e}^{-i2\pi(k_x x + k_y y)} \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned} k_y &= \gamma G_y \cdot t_1 \\ k_x &= \gamma G_x \cdot t_2 \end{aligned} \tag{13}$$

积分范围遍及自旋核存在的区域. 与一维一样，式(12) 是等效自旋核密度 $\rho(x)$ 的傅里叶变换式，所以对(12) 式进行二维傅里叶逆变换即得到有效自旋密度分布函数，实现图像重建

$$\rho(x, y) = \iint S(k_x, k_y)\mathrm{e}^{i2\pi(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y \tag{14}$$

与一维情况一样，$S(k_x, k_y)$ 可通过采集的时域函数 $S(t_1, t_2)$ 的二维傅里叶变换得到

$$S(k_x, k_y) = \iint S(t_1, t_2)\mathrm{e}^{-2\pi i(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{15}$$

对 $N_x \times N_y$ 体素平面，需要采集到 $N_x \times N_y$ 个信号；所以相位编码需进行 N_y 次. 现在加相位编码梯度场的方法是由负向最大等间隔增加到正向最大，一次相位编码对应一次频率编码采集 N_x 个信号对应 k 空间的一行，$G_y = 0$ 对应 k 空间中央行. 相位编码进行 N_y 次后，填满 N_y 行，组成 $N_x \times N_y$ 的二维 k 空间. 最终图像重建信号经傅里叶逆变换实现，一般经计算机软件处理来完成. 二维傅里叶变换结果一般用复数表示，其实部作为幅度频谱表示强度或灰度，虚部为相位频谱表示坐标.

3　关于 k 空间

(1) k 空间与成像物理空间

k 空间每一个数据点都是断层上所有体素贡献的. 虽然二维空间是由二维数据点构成，但并不与物理空间直接对应. k 空间内的频率编码轴不直接对应最终图像的频率编码轴，频率编码轴的左右两极并不对应 MR 图像的左侧和右侧部分，而是对应此轴线上图像的细节. 但 k 空间与真实成像平面物理空间是有关系的，若以 $\Delta\omega_{\max}$ 表示成像物体两端对应的最大频率差有

$$\Delta\omega_{\max} = \gamma G_x N_x \Delta x = \gamma G_x \mathrm{FOV}_x \tag{16}$$

上式中，视野(Field of View，FOV) $\mathrm{FOV}_x = N_x \Delta x$. 设 k 空间一行中相邻点间频率差为 $\Delta\omega$，可见要得到同样 $\Delta\omega$，增加磁场梯度即可减小 Δx，就是提高了分辨力，增加采集次数可增大视野. 相位编码方向与 x 方向类似. 又由频率与周期的倒数关系可得到同一行中相邻点之间点距 Δk_x

$$\Delta k_x = \frac{1}{\mathrm{FOV}_x} \tag{17}$$

(2) k 空间数据在图像重建中的作用

在 $k_y = 0$ 的中央行，MR 信号是在 $G_y = 0$ 时获得的，不存在相位编码梯度磁场产生的散相，信号的幅度也就最大；随着 G_y 正负方向的增加，相位编码梯度磁场引起的散相也开始增加，信号的幅度也就降低了. 在 x 方向也是如此. $k_x = 0$ 时采集的信号正好是每个回波的中心，因而幅度最大；而在 k 空间的周围列，MR 信号采集时则是回波的旁边部分. 总之，越靠近 k 空间边缘，信号越弱. 所以 k 空间中心部分对应的 MR 信号幅度大，主要形成图像的对比度. 由 k 空间中的行距 Δk_y 和同一行 Δk_x 及 $\Delta\omega_x = \gamma G_x \Delta x$，$\Delta\omega_y = \gamma\Delta y G_y$ 表明，对于同样的空间两点间的距离 Δx 或 Δy 梯度场越大，对应的频率差别越大，则两点分得越开，分辨率越好. 所以对 k 空间的外围部分虽然信号幅度低，但能很好的分辨细节，用来产生图像的分辨率. 通过 k 空间分析磁共振成像已成为最方便最重要的手段. 所以 k 空间是 MRI 研究中非常重要的空间.

参 考 文 献

1　E. Mark Haacke，Robert W. Brown，et al 著. 曾晓庄，包尚联译. 核磁共振成像物理原理和脉冲序列设计. 北京：中国医药科技出版社，2007

2　赵凯华，陈熙谋. 电磁学. 北京：高等教育出版社，1985

3　俎栋林. 核磁共振成像学. 北京：高等教育出版社，2004