理论作业一　量子比特与量子门

杨亿酬　3230105697

2025 年 10 月 27 日

---

1. 已知双量子比特系统的量子态如下 $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & x & 3x & \frac{i}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{\intercal} \in \mathbb{C}^4$ ，求该系统处于 $|01\rangle$ 态的概率。

解：由归一化条件，$\langle\psi|\psi\rangle = (\frac{1}{2})^2 + |x|^2 + (|3x|)^2 + |\frac{i}{2\sqrt{2}}|^2 = 10|x|^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 \Rightarrow |x| = \frac{1}{4}$
$P(|\psi\rangle = |01\rangle) = |x|^2 = \frac{1}{16}$

2. 已知单量子比特的态矢量为 $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$ ，求该量子比特的 Bloch 球坐标。

解：Bloch 球:$|\psi\rangle = cos(\theta/2)\,|0\rangle + e^{i\phi}sin(\theta/2)\,|1\rangle = \frac{3}{5}\,|0\rangle + \frac{4}{5}\,|1\rangle$

$$\begin{cases} cos(\frac{\theta}{2}) = \frac{3}{5} \\ e^{i\phi}sin(\frac{\theta}{2}) = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = arccos(-\frac{7}{25}) \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Bloch 球坐标:$(sin\theta cos\phi, sin\theta sin\phi, cos\theta) = (\frac{24}{25}, 0, -\frac{7}{25})$

3. Bell 态指双量子比特系统的四个特殊量子态，他们是双量子比特系统中纠缠度最高的量子态，因此也称为最大纠缠态，在量子隐形传态、量子算法中有着广泛的应用。一般而言，Bell 态定义如下：

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|0y\rangle + (-1)^x|1\bar{y}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad x, y \in \{0,1\}, \quad \bar{y} = 1 - y \tag{1}$$

a. 证明 Bell 态是纠缠态。

b. 用 H、X、Z 和 CNOT 门设计四个量子电路，使得初态为 $|00\rangle$ 的双量子比特系统经这些量子电路作用后分别演化为四个 Bell 态。

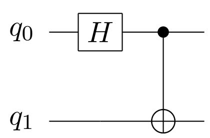
解：a. 假设 Bell 态可以分解为两个量子态的张量积，即 $|\beta_{xy}\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$
不失一般性，取 $x = 0, y = 0, \bar{y} = 1$
$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} ac = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ ad = 0 \\ bc = 0 \\ bd = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

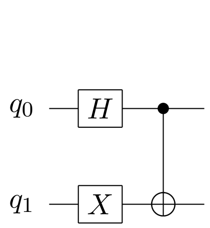
矛盾，假设不成立，所以 Bell 态是纠缠态
b.H,X,Z,CNOT 门分别由以下矩阵表示

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

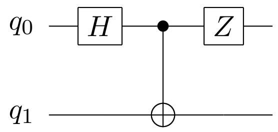
$q = q_0 \otimes q_1 = |00\rangle$
作用 H 在 q_0,$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes |0\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$
再作用 CNOT 门 (q_0 控制 q_1 受控)
$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = |\beta_{00}\rangle$
对应电路图如下:



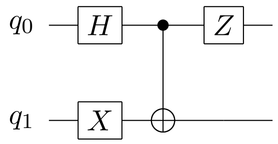
类似地，要生成 $|\beta_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$，需要在 CNOT 门输入 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle) = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |1\rangle$, 对应电路图如下:



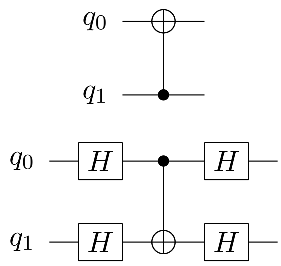
要生成 $|\beta_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$，只需要将 $|\beta_{00}\rangle$ 的结果上对 q_0 作用 Z 门即可，对应电路图如下:



同理，要生成 $|\beta_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$，只需要将 $|\beta_{01}\rangle$ 的结果上对 q_0 作用 Z 门即可，对应电路图如下:



4. 证明下图中的两个量子电路等价。（提示：计算两个量子电路对应的酉矩阵）



证：上图是 q_1 为控制比特，q_0 为受控比特的 CNOT 门，对应酉矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$

而下图表示的是 $(H\otimes H)CNOT(q_0,q_1)(H\otimes H)$

$$H\otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

从而下图对应的酉矩阵为:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix} * \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

5. 证明厄米算符 A 的任一本征值均为实数，且不同本征值对应的本征态正交。

证：$\because A$ 是厄米算符（自伴算符）$\therefore A=\bar{A}^T$

设 λ 是 A 的本征值，对应的本征态为 $v(\langle v|v\rangle=1)$, 则 $A|v\rangle=\lambda|v\rangle$

$\lambda\|v\|^2=\lambda\langle v|v\rangle=\langle v|\lambda|v\rangle=\langle v|A|v\rangle=\langle v|\bar{A}^T|v\rangle=\langle v|\bar{\lambda}|v\rangle=\bar{\lambda}\langle v|v\rangle\Rightarrow\lambda=\bar{\lambda}$

从而 A 的本征值是实数。

设 A 对应于两个不同本征值 $\lambda_1,\lambda_2(\lambda_1\neq\lambda_2)$ 的本征态分别为 $|v\rangle,|w\rangle$，则有 $A|v\rangle=\lambda_1|v\rangle,A|w\rangle=\lambda_2|w\rangle$, 下证 $\langle w|v\rangle=0$

$\langle w|A|v\rangle=\langle w|\lambda_1|v\rangle=\lambda_1\langle w|v\rangle=\overline{\langle v|\bar{A}^T|w\rangle}=\overline{\langle v|A|w\rangle}=\overline{\langle v|\lambda_2|w\rangle}=\bar{\lambda}_2\overline{\langle v|w\rangle}=\lambda_2\langle w|v\rangle$

即 $\lambda_1\langle w|v\rangle=\lambda_2\langle w|v\rangle$

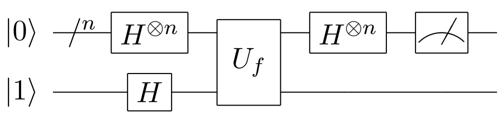
又 $\because\lambda_1\neq\lambda_2\therefore\langle w|v\rangle=0$

即不同本征值对应的本征态正交。

6. Deutsch 算法展示了量子计算机强大的并行计算能力。Deutsch-Jozsa 算法是其推广形式，将可分类的函数推广至多比特情形。

已知函数 $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$，该函数是常数函数（对所有输入均输出 0 ，或对所有输入均输出 1）或平衡函数 (对恰好一半的输入输出 0 ，对另一半输入输出 1)。Deutsch-Jozsa 算法只需对实现函数 f 的结构进行一次查询，即可判断 f 是常数函数还是平衡函数。

下图是实现 Deutsch-Jozsa 算法的量子线路。其中，$U_f:|x,y\rangle\to|x,y\oplus f(x)\rangle$ 是实现函数 f 的 $n+1$ 比特的量子门。



推导该量子电路中量子态的演化过程，并说明如何基于测量结果判断 f 是常数函数还是平衡函数。(提示：计算 f 为常数函数或平衡函数时的测量结果)

解：$/^n$ 表示 n 比特输入，初态 $|\phi_0\rangle=|0\rangle^{\otimes n}\otimes|1\rangle$

对每一个比特经过一个 H 门 $|\phi_1\rangle=H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n}\otimes H|1\rangle$

$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix},H|1\rangle=\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$

$H^{\otimes 2}|0\rangle^{\otimes 2}=\frac{1}{2}(|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle+|11\rangle)$

$H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n}=2^{-\frac{n}{2}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle$

$|\phi_1\rangle=2^{-\frac{n}{2}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle\otimes\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$

$U_f : |x, y\rangle \rightarrow |x, y \oplus f(x)\rangle$
$|x\rangle |y\rangle \rightarrow |x\rangle |y \oplus f(x)\rangle = |x\rangle (-1)^{f(x)} |y\rangle$
$|\phi_2\rangle = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} |x\rangle \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$
再对 n 个比特作用 H:
$|\phi_3\rangle = (H^{\otimes n} 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} |x\rangle) \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = 2^{-n} \sum_{x=0}^{2^n-1} \sum_{z=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)+x \cdot z} |z\rangle \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$
其中 $x \cdot z = x_1 z_1 \oplus x_2 z_2 \oplus ... \oplus x_n z_n$
下面分析 f 为常数函数和平衡函数不同情况下的测量结果:
$|\phi_3\rangle = 2^{-n} \sum_{x=0}^{2^n-1} \sum_{z=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)+x \cdot z} |z\rangle \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$
若 f 为常数函数 $f(x) = c$:
振幅 $A_{|\phi_f\rangle} = 2^{-n} \sum_{x=1}^{2^n-1} (-1)^{c+x \cdot z}$
$\sum_{x=1}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot z} = \begin{cases} 0, z \neq 0 \\ 2^n, z = 0 \end{cases}$
所以如果 f 是常数函数，n 比特的测量结果必然为全 0
若 f 为平衡函数:（$f(x)$ 一半为 0，一半为 1）
$z = 0$ 时，$A_{|\phi_f\rangle} = 2^{-n} \sum_{x=1}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} = 0$
即测得全 0 串的概率为 0，必然测到某个非全 0 串。
综上，经过一次 U_f 调用，观察测量结果（前 n 比特），如果全为 0，则为常数函数，如果不全为 0，则为平衡函数。只需要一次测量，而传统计算机需要至多 $2^{n-1} + 1$ 次测量。