Machine Learning
Homework (2)

Student Name 杨亿酬
Student ID 3230105697

December, 2025

---

1. 已知正例点 $x_1 = (1,2)^T, x_2 = (2,3)^T, x_3 = (3,3)^T$，负例点 $x_4 = (2,1)^T, x_5 = (3,2)^T$，试求最大间隔分离超平面和分类决策函数，并在图上画出分离超平面、间隔边界及支持向量。

解:设超平面为 $w_1x_1+w_2x_2+b=0$, 最大间隔分类器的优化目标为 $min_{w,b}\frac{1}{2}\|w\|^2, s.t. y_i(w^Tx_i+b) \geq 1$, 代入五个给定点，有:

、

$$\begin{cases} w_1 + 2w_2 + b \geq 1 \\ 2w_1 + 3w_2 + b \geq 1 \\ 3w_1 + 3w_2 + b \geq 1 \\ -(2w_1 + w_2 + b) \geq 1 \\ -(3w_1 + 2w_2 + b) \geq 1 \end{cases}$$

欧氏距离: $d(x_2, x_5) = \sqrt{2}, d(x_3, x_5) = 1, d(x_1, x_4) = 1$

假设 x_2, x_5 是支持向量:

$$\begin{cases} 2w_1 + 3w_2 + b = 1 \\ -(3w_1 + 2w_2 + b) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_2 = w_1 + 2 \\ 5w_1 + b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3w_1 + 4 + b \geq 1 \\ 6w_1 + 6 + b \geq 1 \\ 3w_1 + 2 + b \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 + \frac{1}{3}b = -1 \\ w_1 + \frac{1}{6}b \geq -\frac{5}{6} \\ 5w_1 + b = -5 \end{cases}$$

上式无解，x_2, x_5 不是支持向量。

类似的，假设 x_3, x_5 是支持向量:

$$\begin{cases} 3w_1 + 3w_2 + b = 1 \\ 3w_1 + 2w_2 + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_2 = 2 \\ 3w_1 + b - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 + b \geq -3 \\ -5 \leq 2w_1 + b \leq -3 \\ 3w_1 + b = -5 \end{cases} \Rightarrow w_1 \in [-2, -1]$$

$$min_{w,b}\frac{1}{2}\|w\|^2 = min_{w,b}\frac{1}{2}w_1^2 = \frac{1}{2}$$

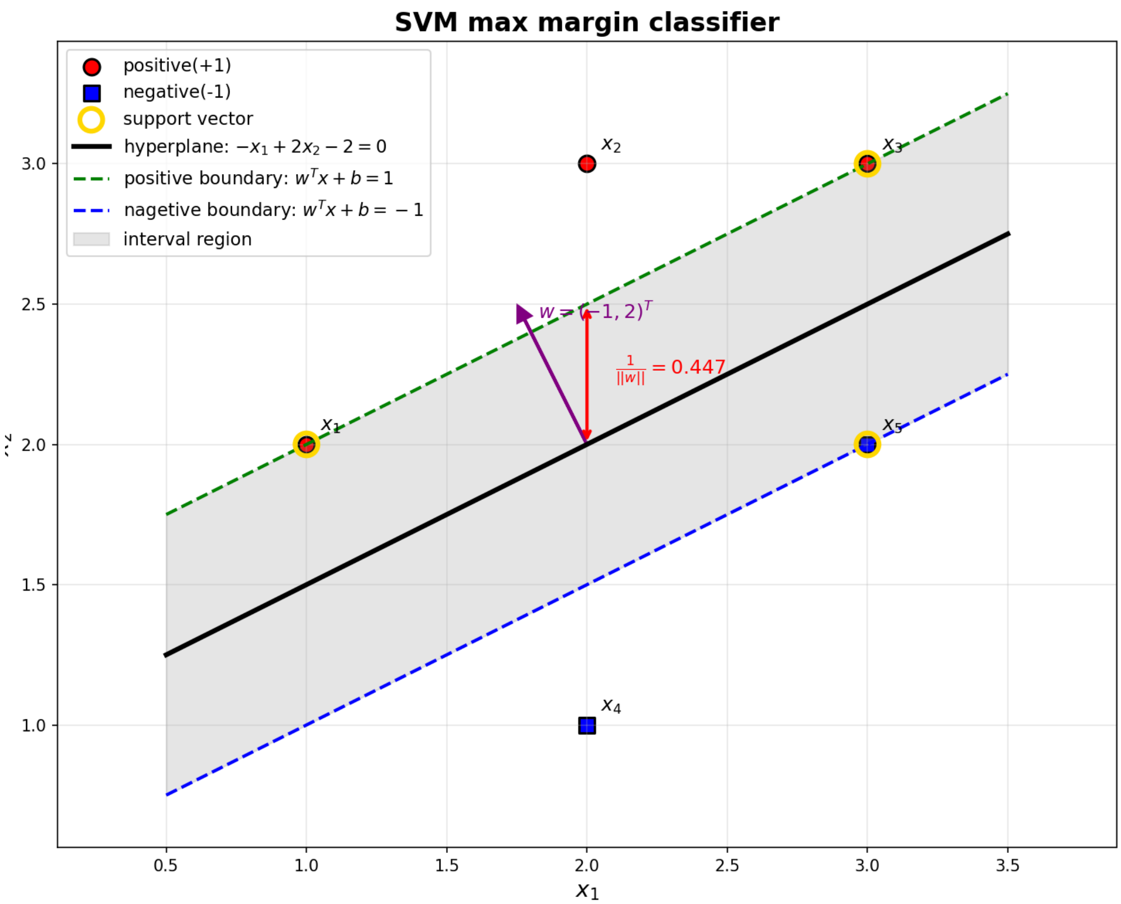
$$w_1 = -1, b = -2, w = (-1, 2)^T$$

从而有最佳间隔分离超平面:

$$-x_1 + 2x_2 - 2 = 0$$

验证其满足 $y_i f(x_i) \geq 1$, 注意到此时 x_1 也是支持向量
对应的分类决策函数:

$$f(x) = w^T x + b = -x_1 + 2x_2 - 2$$



2. 已知二维空间的 3 个点 $x_1=(1,1)^T, x_2=(5,1)^T, x_3=(4,4)^T$，试求在 p 取不同值时，L_p 距离下 x_1 的最近邻点。

注:$L_p(x_i,x_j)=(\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(l)}-x_j^{(l)}|^p)^{\frac{1}{p}}$

解：$p=1: L_p(x_1,x_2)=4, L_p(x_1,x_3)=3+3=6$,$x_1$ 的最近邻点为 x_2

$p=2: L_p(x_1,x_2)=4, L_p(x_1,x_3)=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}>4$,$x_1$ 的最近邻点为 x_2

$p=\infty: L_p(x_i,x_j)=max|x_i^{(l)}-x_j^{(l)}|$

$L_p(x_1,x_2)=max\{4,0\}=4, L_p(x_1,x_3)=max\{3,3\}=3$,$x_1$ 的最近邻点为 x_3

对某一固定的正整数 p,$L_p(x_1,x_2)=(4^p+0^p)^{\frac{1}{p}}=4$

$L_p(x_1,x_3)=(2\cdot 3^p)^{\frac{1}{p}}=3\cdot 2^{\frac{1}{p}}\triangleq f(p)$, 显然 $f(p)$ 是关于 p 的严格减函数

令 $3\cdot 2^{\frac{1}{p}}=4\Rightarrow p=\log_{\frac{4}{3}}2\approx 2.409$

综上，L_p 距离下 x_1 的最近邻点为 $(p\in\mathbb{N}^+\cup\{+\infty\})$

$$\begin{cases} x_2, if\ p\le 2 \\ x_3, if\ p\ge 3 \end{cases}$$

3. 设计感知机实现逻辑与、或、非运算，并验证感知机为什么不能表示异或。

解：感知机输入 $\mathbf{x}$，x_0 的权重为 w_0

与：$f(x) = x_1 + x_2 + 0.5$

x_1	x_2	**output**
-1	-1	-1
-1	1	1
-1	1	1
1	1	1

或：$f(x) = x_1 + x_2 - 1.5$

x_1	x_2	**output**
-1	-1	-1
-1	1	-1
-1	1	-1
1	1	1

非：$f(x) = -x + 0$

x	**output**
-1	1
1	-1

异或：线性不可分，无法用感知机表示

x_1	x_2	**output**
-1	-1	-1
-1	1	1
1	-1	1
1	1	-1

假设存在 $f(x) = w_1x_1 + w_2x_2 + w_0$ 可以实现异或，则

$$\begin{cases} -w_1 - w_2 + w_0 = -1 \\ -w_1 + w_2 + w_0 = 1 \\ w_1 - w_2 + w_0 = 1 \\ w_1 + w_2 + w_0 = -1 \end{cases}$$

由前三式可以解出

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_1 = 1 \\ w_2 = 1 \end{cases}$$

但显然该结果不符合第四式，上述方程组无解，即感知机无法表示异或。

4. 试由下表训练数据学习一个朴素贝叶斯分类器并确定 $x=(2,S)^T$ 的类标记 y. 表中 $X^{(1)},X^{(2)}$ 为特征，取值的集合分别为 $A_1=\{1,2,3\},A_2=\{S,M,L\}$，$Y$ 为类标记，Y$\in C=\{1,-1\}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$X^{(1)}$	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
$X^{(2)}$	S	M	M	S	S	S	M	M	L	L	L	M	M	L	L
Y	−1	−1	1	1	−1	−1	−1	1	1	1	1	1	1	1	−1

解：先验概率为

$$P(Y=1)=\frac{9}{15}=0.6$$
$$P(Y=-1)=\frac{6}{15}=0.4$$

计算条件概率：

$$P(X^{(1)}=1|Y=1)=\frac{2}{9},P(X^{(1)}=2|Y=1)=\frac{3}{9},P(X^{(1)}=1|Y=1)=\frac{4}{9}$$
$$P(X^{(1)}=1|Y=-1)=\frac{3}{6},P(X^{(1)}=2|Y=-1)=\frac{2}{6},P(X^{(1)}=1|Y=-1)=\frac{1}{6}$$
$$P(X^{(2)}=S|Y=1)=\frac{1}{9},P(X^{(2)}=M|Y=1)=\frac{4}{9},P(X^{(2)}=L|Y=1)=\frac{4}{9}$$
$$P(X^{(2)}=S|Y=-1)=\frac{3}{6},P(X^{(2)}=M|Y=-1)=\frac{2}{6},P(X^{(2)}=L|Y=-1)=\frac{1}{6}$$

计算 x 的概率：

$$P(x|Y=-1)=P(X^{(1)}=2|Y=-1)\cdot P(X^{(2)}=S|Y=-1)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$$
$$P(x|Y=1)=P(X^{(1)}=2|Y=1)\cdot P(X^{(2)}=S|Y=1)=\frac{3}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$$

计算后验概率：

$$P(x|Y=-1)P(Y=-1)=\frac{1}{6}\times 0.4=\frac{1}{15}$$
$$P(x|Y=1)P(Y=1)=\frac{1}{27}\times 0.6=\frac{1}{45}$$

$\because P(x|Y=-1)P(Y=-1)>P(x|Y=1)P(Y=1)$
$\therefore P(Y=-1|x)>P(Y=1|x)$
从而 $x=(2,S)^T$ 的类标记 $y=-1$.