הסתברות - תרגול עצמי 2

שאלה 1

מטילים קוביה הוגנת שלוש פעמים, זו אחר זו.

א. מהו מרחב המדגם, ומהו גודלו?
ב. מהי ההסתברות שבהטלה האחרונה יתקבל 4?
ג. מהי ההסתברות שיתקבלו שלושה מספרים זהים (למשל 3,3,3)?
ד. מהי ההסתברות שבשתי ההטלות הראשונות יתקבל אותו המספר, ובשלישית, מספר שונה?
ה. מהי ההסתברות שיתקבלו שלושה מספרים שונים זה מזה (למשל 2,6,1)?

שאלה 2

חבילת קלפים מכילה 26 קלפים אדומים ו-26 קלפים שחורים. מקבלים 5 קלפים אקראיים שונים מתוך החבילה. חשבו את ההסתברות שכולם באותו צבע.

שאלה 3

בכד נמצאים 10 כדורים, הממוספרים 1-10.

מוציאים באקראי ללא החזרה 4 כדורים בזה אחר זה.

אם ידוע שעל הכדור הרביעי שהוצא כתוב מספר הגדול מהמספרים של שלושת הכדורים הראשונים, מהי ההסתברות שכתוב עליו 10?

שאלה 4

במשחק הלוטו מוגרלים אקראית 6 מספרים שונים מהקבוצה {1,2,…,40}.

בטופס של המשחק יש למלא 6 מספרים שונים.

חשבו את ההסתברות לניחוש נכון של לפחות 5 מספרים מבין אלו שהוגרלו.

שאלה 5

מטילים מטבע. אם התקבל H מטילים קובייה פעמיים, ואם התקבל T מטילים קובייה שלוש פעמים.

א. מהי ההסתברות שסכום המספרים שהתקבלו בהטלות הקובייה הוא 4 או פחות?
ב. אם ידוע שסכום המספרים שהתקבלו בהטלות הקובייה הוא 4 או פחות, מהי ההסתברות שבהטלת המטבע התקבל H?

פתרונות

שאלה 1

א. מרחב המדגם הוא כל שלישיות המספרים בין 1 ל-6, דהיינו

$$\Omega = \{(a,b,c) : a,b,c \in \{1,2,3,4,5,6\} \}$$

לכן, $|\Omega| = 6^3 = 216$.

ב. אם בהטלה האחרונה מתקבל 4, ייתכנו 6^2 תוצאות אפשריות לשתי ההטלות הראשונות, ולכן התשובה היא $6^2/6^3 = 1/6$.

ג. ייתכנו בדיוק 6 דרכים לקבל 3 מספרים זהים: או שכולם 1, או שכולם 2,..., או שכולם 6. לכן התשובה היא $6/6^3 = 1/36$.

ד. ייתכנו בדיוק 6 דרכים למספר המתקבל בשתי ההטלות הראשונות, ובהינתן שמספר זה נבחר, נותרו 5 אפשרויות להטלה השלישית. בסך הכל, יש $6{\cdot}5 = 30$ דרכים לקיים את המתואר בשאלה, ולכן התשובה היא $30/6^3 = 5/36$.

ה. למספר הראשון ייתכנו 6 אפשרויות; בהינתן הבחירה של המספר הראשון, לשני ייתכנו 5 אפשרויות, ואז לשלישי 4 אפשרויות. התשובה היא אם כך $(6{\cdot}5{\cdot}4)/6^3 = 20/36$.

שאלה 2

נשתמש בפתרון קומבינטורי.

מרחב המדגם מכיל את כל האפשרויות לבחור 5 קלפים שונים מתוך החבילה. גודלו הוא $\binom{52}{5}$. מאחר שכל הבחירות אקראיות, ההתפלגות על כל החמישיות היא אחידה.

המאורע המבוקש מכיל את כל הבחירות של חמישה קלפים אדומים או חמישה קלפים שחורים.

מספר האפשרויות לבחירת חמישה קלפים אדומים הוא $\binom{26}{5}$, וכנ"ל לגבי חמישה קלפים שחורים.

מכאן, ההסתברות לבחירת 5 קלפים שכולם באותו הצבע היא:

$$\frac{2\cdot\binom{26}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{2\cdot 26!\cdot 5!\cdot 47!}{52!\cdot 5!\cdot 21!} = \frac{2\cdot 26!\cdot 47!}{52!\cdot 21!} = \frac{52\cdot 25!\,47!}{52!\cdot 21!} = \frac{25!\,47!}{51!\cdot 21!} = \frac{25!}{21!}\cdot\frac{47!}{51!}$$

$$= \frac{22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{48\cdot 49\cdot 50\cdot 51} \approx 0.0506$$

הערה: זו לא חובה לכלול את הפישוט המלא שביצענו כאן.

שאלה 3

נגדיר מאורעות:

A – המספר על הכדור הרביעי גדול משלושת הראשונים.

B – על הכדור הרביעי כתוב 10.

כיוון שכל הבחירות הן בהתפלגות אחידה, לכל אחד מארבעת הכדורים הסתברות של רבע להיות הכדור בעל המספר הגדול ביותר, ולכן:

$$\Pr[A] = 1/4$$

כיוון שכל הבחירות הן בהתפלגות אחידה, לכל אחד מהמספרים 1,...,10 יש הסתברות 1/10 להופיע על כל כדור, בדומה למה שראינו בהגרלת הגרביים של אליס.

$$\Pr[B] = 1/10$$

אפשר גם לחשב באופן מפורש:

מרחב המדגם יכיל את כל הסדרות של 4 איברים שונים זה מזה מבין {1,...,10}.

גודל מרחב המדגם הוא $P(10,4) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

המאורע B מכיל את כל הרביעיות שבהן הכדור הרביעי הוא 10. לכן לכדור הראשון יש 9 אפשרויות, לשני 8, לשלישי 7 ולרביעי אפשרות אחת.

מכאן:

$$\Pr[B] = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{10}$$

נשים לב כי $B \subseteq A$ ולכן $A \cap B = B$.

לכן, בהנתן שהמספר על הכדור הרביעי גדול משלושת הראשונים, ההסתברות שכתוב עליו 10 היא:

$$\Pr[B \mid A] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[A]} = \frac{\Pr[B]}{\Pr[A]} = \frac{1/10}{1/4} = 0.4$$

שאלה 4

כל טופס לוטו וכל תוצאה אפשרית בהגרלה היא תת-קבוצה בגודל 6. אין משמעות לסדר בין האיברים: לא חשוב איזה מספר רשמנו קודם בטופס או באיזה סדר הוגרלו הכדורים.

מספר תתי-הקבוצות של 6 מספרים מתוך הקבוצה {1,2,...,40} הוא $\binom{40}{6}$. זהו מרחב כל התוצאות האפשריות בהגרלה. מאחר וההגרלה אקראית, לכל תת-קבוצה אותה אפשרות להבחר. לכן ההתפלגות על התוצאות אחידה, וניתן להשתמש בפתרון קומבינטורי.

עלינו לחשב את מספר השישיות שבהן לפחות 5 מ-6 המספרים שניחשנו (וזה לא משנה מה המספרים שניחשנו – בכל מקרה ההסתברות זהה לכל הניחושים האפשריים).

מספר השישיות שבהן 6 מהמספרים שניחשנו הוא כמובן 1.

נחשב את מספר השישיות שבהן בדיוק 5 מהמספרים שניחשנו.

בכל שישיה כזו יהיו 5 מהמספרים מהקבוצה שניחשנו, ומספר אחר, שלא ניחשנו.

מספר האפשרויות עבור 5 המספרים שניחשנו הוא: $\binom{6}{5} = 6$.

עבור כל חמישיה כזו, מספר האפשרויות למספר השישי שיוגרל הוא 34 = 1 – 5 – 40 (המספר הכולל פחות מספר המספרים התואמים פחות המספר הנוסף שניחשנו, בכדי לא לכלול את הניחוש שבו שש המספרים תואמים).

לכן, לכל אפשרויות של 5 המספרים התואמים, קיימות 34 תוצאות שתואמות ב-5 מספרים בדיוק. בסך הכל, מספר השישיות עם 5 מספרים תואמים הוא 34 · 6. נשים לב כי לא ספרנו כאן אף שישיה יותר מפעם אחת, כי וידאנו ש"המספר הנוסף" לא יהיה מקבוצת המספרים שלנו.

מכאן, בסך הכל, מספר התוצאות האפשריות שבהן לפחות 5 מספרים תואמים לאלו שניחשנו הוא· 6 $34 + 1 = 205$. לחילופין ניתן לומר שזהו מספר הניחושים האפשריים שלנו שבהם 5 מספרים לפחות תואמים לאלו שעלו בהגרלה. יש רק לזכור שההגרלה היא החלק האקראי, ולא הניחוש שלנו.

מכאן, ההסתברות של המאורע המבוקש היא:

$$\frac{205}{\binom{40}{6}} = \frac{205 \cdot 34! \cdot 6!}{40!} += \frac{205 \cdot 24}{35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39 \cdot 40} \approx 1.78 \cdot 10^{-6} = 0.00000178$$

שאלה 5

א. כשמטילים קובייה פעמיים, ההסתברות שסכום המספרים שהתקבלו הוא 4 או פחות היא $6/6^2$ (האפשרויות הן $(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (1,3), (3,1)$). כשמטילים קובייה 3 פעמים, ההסתברות הנ"ל היא $4/6^3$ (האפשרויות הן $(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1)$). לכן, מנוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(\text{הסכום} \le 4) = P(\text{הסכום} \le 4 \mid \mathrm{H})P(\mathrm{H}) + P(\text{הסכום} \le 4 \mid \mathrm{T})P(\mathrm{T}) = \frac{6}{6^2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6^3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{20}{216}$$

ב. מנוסחת בייס ומתוצאת הסעיף הקודם מתקבל

$$P(\mathrm{H} \mid \text{הסכום} \le 4) = \frac{P(\text{הסכום} \le 4 \mid H)P(H)}{P(\text{הסכום} \le 4)} = \frac{(6/6^2)\cdot(1/2)}{20/216} = 0.9$$