הסתברות להנדסת תוכנה – תרגול 2

שאלה 1

מטבע הוגנת היא מטבע הנופלת על "ראש" בהסתברות 1/2 ו"זנב" בהסתברות 1/2.

קבעו אלו ממרחבי המאורעות הבאים מתפלגים בהתפלגות אחידה:

א. איה מטילה מטבע הוגנת 3 פעמים.
מרחב המאורעות: כל הסדרות האפשריות של ראשים וזנבות בהטלה הראשונה, השניה והשלישית.

ב. איה, בועז וגיל מטילים 3 מטבעות הוגנות בו זמנית.
מרחב המאורעות: כל הסדרות האפשריות של ראשים וזנבות בהטלה של איה, של בועז ושל גיל.

ג. מטילים מטבע הוגנת פעמים.
מרחב המאורעות = מספר ה"ראשים" = {0, 1, 2}

שאלה 2

מטילים מטבע הוגנת 3 פעמים. חשבו את ההסתברות שהמטבע תיפול על אותו הצד בכל ההטלות.

שאלה 3

במשפחה יש שני ילדים. נניח כי ההסתברות ללידת בת היא חצי בכל אחת מהלידות.

א. נניח כי הילד הראשון הוא בן. מהי ההסתברות שבלידה הבאה תוולד בת?

ב. נניח כי פגשנו את אחד מילדי המשפחה, והוא בן בשם בוב. מה ההסתברות שלבוב יש אחות?

שאלה 4

לבוב יש מגירה עם n כובעים שונים זה מזה. בכל יום, במשך k ימים, הוא דוגם כובע אקראי, לובש אותו, ומחזיר למגירה.

א. מהי ההסתברות שכל הכובעים שבוב לבש שונים זה מזה?

ב. עבור אלו ערכים של k ניתן לקבוע כי הסתברות זו אינה עולה על 0.5?

שאלה 5

לאליס יש n זוגות גרבים שונים זה מזה, אך הגרבים אינן מסודרות בזוגות. כל הגרבים הימניות נמצאות במגירה הימנית וכל הגרבים השמאליות נמצאות במגירה השמאלית. מדי יום אליס דוגמת גרב אקראית מכל מגירה, לובשת את שתי הגרבים וזורקת למכונת הכביסה.

הוכיחו כי לכל $i = 1, \dots, n$, ההסתברות שביום ה-i אליס לבשה גרבים תואמות היא $\frac{1}{n}$.

שאלה 6

א. לאליס יש קוביות משחק שבץ-נא, עם האותיות A, E, L, M, P, S. אליס מערבבת את הקוביות בסדר אקראי (או לחילופין: שולפת בכל שלב קוביה אקראית). מה ההסתברות שאליס תרכיב את המילה SAMPLE?

ב. הפעם לאליס יש 11 קוביות: A, B, B, I, I, L, O, P, R, T, Y. מה ההסתברות שאליס תרכיב את המילה PROBABILITY?

שאלה 7

בקופסה יש 2 כדורים אדומים, 2 כדורים כחולים ו-3 כדורים לבנים.

מוציאים מהקופסה באופן אקראי כדור אחרי כדור, ומסדרים אותם בשורה על פי סדר ההוצאה. מה ההסתברות שהתקבלו 3 רצפים של כדורים באותו צבע?

שאלה 8

אליס ובוב משחקים פוקר. כל אחד מהם קיבל 5 קלפים אקראיים מתוך אותה חבילה בת 52 קלפים. בוב קיבל את הקלפים הבאים:

2♠ 7♦ 7♠ A♣ A♥

בוב מציץ ורואה כי אחד הקלפים של אליס הוא A♦.

א. מהי ההסתברות שלאליס יש עוד אס נוסף?

ב. מהי ההסתברות שלאליס שלושה קלפים בדיוק מאותו סוג?

ג. מהי ההסתברות שלאליס יש שני אסים, שני קלפים מסוג אחר כלשהו וקלף חמישי מסוג שלישי? ("זוגיים אס", בדומה לבוב).

פתרונות

שאלה 1

א. כן. זהו מרחב מדגם המייצג 3 דגימות ללא חזרות, כאשר בכל דגימה ההתפלגות היא אחידה. לכן, על פי מה שלמדנו, מספר השלשות המייצגות את 3 ההטלות הוא מרחב מדגם אחיד (בגודל $2^3 = 8$).

ב. כן – באופן שקול ל-ב, כאשר שלשת התוצאות מייצגת את ההטלות של איה, בועז וגיל.

ג. נתבונן בזוגות האפשריים בשני המטבעות. נסמן ראש ב-H וזנב ב-T.

HH, HT, TH, TT.

זהו מרחב מדגם בגודל $2^2 = 4$ המייצג את כל סדרות ההטלות = דגימה עם חזרות.

כיוון שבכל הטלה ההסתברות לראש שווה להסתברות לזנב (מרחב מדגם אחיד), ההסתברות של כל הזוגות היא אחידה – לפי מה שלמדנו על דגימה עם חזרות.

מכאן ניתן לראות כי ההסתברות לקבלת ראש אחד היא 2/4 = 1/2, כאשר ההסתברויות ל-0 ראשים וההסתברות ל-2 ראשים שוות ל-1/4.

לכן מספר הראשים אינו מרחב מדגם בעל התפלגות אחידה.

<u>שאלה 2</u>

בדומה לדוגמאות הראשונות בשאלה 1, מדובר במדגם מאורעות אחיד המייצג את תוצאות 3 ההטלות וגודלו הוא 8.

קיימות 2 שלשות שבהן שלוש התוצאות שוות: HHH, TTT.

לכן ההסתברות שהמטבע תיפול על אותו צד בכל ההטלות היא 4 = 2/8.

<u>שאלה 3</u>

א. ההסתברות היא 1/2 על פי נתוני השאלה.

ב. בכדי לפתור את השאלה עלינו להתבונן בכל הזוגות האפשריים של בנים ובנות:

(בת, בת), (בת, בן), (בן, בת), (בן, בן).

זהו מרחב מדגם אחיד בגודל 4.

נגדיר מאורעות:

A – במשפחה יש בת

B – במשפחה יש בן.

ידוע לנו כי B מתקים. אזי למעשה עלינו לחשב את ההסתברות:

$$Pr[A|B] = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{2/4}{3/4} = \frac{2}{3}$$

לחלופין, יכולנו להתבונן בתחילה במרחב המדגם המכיל את כל הזוגות בהם קיים בן (בוב). כולם מתרחשים באותה הסתברות, וב-2 מתוכן יש גם בת.

<u>שאלה 4</u>

זוהי הכללה של בעיית ימי ההולדת שלמדנו בכיתה. מדובר בדגימה של k איברים עם חזרות מתוך קבוצה בגודל n. לכן מספר הסדרות של הכובעים הוא מרחב מדגם אחיד בגודל n^k.

א.

עלינו לספור את מספר הסדרות שבהם כל הכובעים שונים זה מזה. כפי שלמדנו זהו:

P(n, k) = n(n-1)….(n-k+1)

מכאן, ההסתברות שכל הכובעים שבוב לבש שונים זה מזה היא:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = \prod_{i=1}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)$$

ב. נשתמש בקירוב שלמדנו בכיתה. נדרש כי ההסתברות הנ"ל תהיה קטנה/שווה ל-0.5. מאי-השוויון $1-x<e^{-x}$ נקבל:

$$\prod_{i=1}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right) < \prod_{i=1}^{k-1} e^{-i/n} = e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k-1} i} = e^{-\frac{1}{n}\frac{k(k-1)}{2}} < e^{-\frac{(k-1)^2}{2n}}$$

נציב:

$$e^{-\frac{(k-1)^2}{2n}} < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{(k-1)^2}{2n} < \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

$$\frac{(k-1)^2}{2n} > \ln 2$$

$$(k-1)^2 > \ln 2 \cdot 2n$$

$$k > \sqrt{\ln 2 \cdot 2n} + 1$$

באופן כללי, עבור n גדול וקבוע כלשהו $p \in (0,1)$, ההסתברות תהיה לכל היותר p עבור $k = \Omega(\sqrt{n})$.

<u>שאלה 5</u>

התהליך שאליס מבצעת שקול להגרלת סדר אקראי על פני הגרביים במגירה השמאלית, וגם סדר אקראי על פני הגרביים במגירה הימנית.

<u>דרך א'</u>:

כפי שלמדנו, כל הגרלה של סדר אקראי היא מרחב מדגם אחיד בגודל $n!$.

לכן זוג של סדרים אקראיים כאלה הוא מרחב מדגם אחיד בגודל $(n!)^2$.

עלינו לספור את מספר זוגות הסידורים שבהם ביום i נבחרו גרבים זהות.

קיימים n זוגות גרבים. <u>לכל זוג כזה</u>, נספור את מספר זוגות הסדרים שבהם הזוג הזה נבחר ביום ה-i.

					*(ימין)				
					*(שמאל)				
1					*i*				*n*

במגירה הימנית יש $n-1$ גרביים שיכולים להופיע בסדר כלשהו בכל הימים פרט ליום ה-i.
לכן יש $(n-1)!$ אפשרויות לסדר אותן. כנ"ל במגירה השמאלית.

כיוון שכל סידור של המגירה הימנית יכול להופיע עם כל סידור של המגירה השמאלית, מספר זוגות הסדרים האלה הוא $\left((n-1)!\right)^2$.

זהו מספר הסדרים עבור סוג גרביים ספציפי. מכיוון שקיימים n זוגות כאלה, מספר הסדרים שבהם אליס בוחרת גרבים תואמות ביום ה-i הוא $n\left((n-1)!\right)^2$.

לסיכום: ההסתברות שביום ה-i אליס לבשה גרבים תואמות היא:

$$\frac{n\left((n-1)!\right)^2}{(n!)^2}=\frac{n(n-1)!\cdot(n-1)!}{n!\cdot n!}=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$$

<u>דרך ב':</u> על פי מה שהוכחנו בכיתה לגבי סדר אקראי, לכל $i=1,\dots,n$, ההסתברות של כל גרב להדגם ביום ה-i מהמגירה הימנית היא $1/n$. בפרט, ההסתברות שזו תהיה הגרב התואמת לגרב המסויימת שנבחרה מהמגירה השמאלית (לא חשוב מהי) היא $1/n$.

<u>שאלה 6</u>

א. זוהי בעיה של הגרלת סדר אקראי על קבוצת האותיות. מספר הסידורים האפשריים הוא $6!=720$.

המאורע הנדרש מכיל סידור יחיד, ולכן ההסתברות היא 1/720.

ב. כאן מספר הסידורים האפשריים הוא $11!=39916800$. הפעם חלק מהקוביות מכילות אותיות זהות. לצורך הנוחות נסמן קוביות אלו כ- B_1, B_2, I_2, I_2.

הסידורים האפשריים הם כל אלו המרכיבים את המילה PROBABILITY. הקוביות B_i יכולות להופיע בשני סידורים שונים וכך גם הקוביות I_i. מספר האפשרויות הכולל הוא $2\cdot 2=4$.

לכן, ההסתברות לקבלת המילה PROBABILITY היא:

$$\frac{4}{39916800}=\frac{1}{9979200}\approx 10^{-7}$$

<u>שאלה 7</u>

בקופסה יש 2 כדורים אדומים, 2 כדורים כחולים ו-3 כדורים לבנים.

מוציאים מהקופסה באופן אקראי כדור אחרי כדור, ומסדרים אותם בשורה על פי סדר ההוצאה. מה ההסתברות שהתקבלו 3 רצפים של כדורים באותו צבע?

למעשה הגרלנו כאן סדר אקראי על הכדורים. מרחב המדגם כולל את כל !7 האפשרויות לסידור הכדורים. סידורים שונים של כדורים באותו צבע שייכים לסידורים שונים של 7 הכדורים, ולכן נצטרך להתחשב בהם.

כיוון שמרחב המדגם הוא אחיד (סדר אקראי), נשתמש בפתרון קומבינטורי – נספור בכמה סידורים אפשריים קיבלנו שלושה רצפים של כדורים באותו צבע.

ראשית, נשים לב כי קיימות !3 אפשרויות לסידור שלושת הצבעים (אדום כחול לבן, אדום לבן כחול וכו').

עבור כל סידור אפשרי של הצבעים, קיימות $2!$ אפשרויות לסידור הכדורים האדומים, $2!$ אפשרויות לסידור הכדורים הכחולים, ו-$3!$ אפשרויות לסידור הכדורים הלבנים.

מכאן, מספר הסידורים האפשריים של הכדורים שבהם מתקבלים 3 רצפים של כדורים באותו צבע הוא: $3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3!$.

לכן, ההסתברות לקבלת 3 רצפים באותו צבע היא:

$$\frac{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3!}{7!} = \frac{1}{35} \approx 0.0029$$

<u>שאלה 8</u>

בכל הסעיפים, מרחב המדגם מכיל את כל הרביעיות האפשריות של קלפים שעשויים להיות לאליס בנוסף לקלף הידוע. נשים לב כי קלפים אלו נבחרים מבין 46 קלפים – 52 הקלפים בחבילה פרט לקלפים שבידי בוב ולקלף A♦. כלומר, מספר הרביעיות האפשריות הוא $\binom{46}{4}$.

הקלפים נבחרים אקראית ולכן זהו מרחב מדגם בעל התפלגות אחידה. לכן בכל הסעיפים נשתמש בפתרון קומבינטורי: נספור כמה מתוך רביעיות קיימות במאורע המבוקש ונחלק ב-$\binom{46}{4}$.

א. מהנתונים, קיימת רק אפשרות אחת לאס נוסף - A♠. קלף זה יכול להופיע עם עוד שלושה קלפים כלשהם מבין שאר 45 הקלפים. לכן מספר הרביעיות המכילות את A♠ הוא $\binom{45}{3}$.

מכאן, ההסתברות שלאליס קיים אס נוסף היא:

$$\frac{\binom{45}{3}}{\binom{46}{4}} = \frac{45!\,4!\,42!}{46!\,3!\,42!} = \frac{4}{46} = \frac{2}{23}$$

ב. נשים לב כי לא יתכן כי לאליס שלושה קלפים מסוג אס או 7. עבור כל אחד מ-11 סוגי הקלפים האחרים תתכן שלישיה, אך יש להבחין בין 2 לבין שאר הסוגים, כיוון שכבר ידוע לנו כי בוב מחזיק קלף מסוג 2.

עבור עשרת הסוגים שאינם 2, 7 או אס: קיימות $\binom{4}{3}$ אפשרויות עבור שלושת הקלפים בשלישיה. לכל אחד מהם צריך להצטרף קלף נוסף מסוג אחר. קיימים 42 קלפים כאלה, כיוון שמבין 46 הקלפים הלא ידועים יש להפחית את 4 הקלפים מהסוג של השלישיה. מכאן, לכל סוג כזה מספר האפשרויות הוא $42 \cdot \binom{4}{3}$, ובסה"כ עבור עשרת הסוגים קיימות $42 \cdot \binom{4}{3} 10$ אפשרויות.

עבור שלישיה מסוג 2: ישנה רק אפשרות אחת (או $\binom{3}{3}$) לקלפי השלישיה, כי אחד כבר קיים אצל בוב. הקלף הנוסף נבחר מבין 43 קלפים – כל הקלפים הלא ידועים

פרט לשלושת קלפי ה-2 (בניגוד למקרה הקודם, לא יתכן 2 נוסף). מכאן, קיימות בסה"כ 43 רביעיות שבהן שלישיה של 2.

לסיכום, ההסתברות שלאליס בדיוק שלושה קלפים מאותו סוג היא:

$$\frac{10\binom{4}{3}\cdot 42\ +43}{\binom{46}{4}}=\frac{(10\cdot 4\cdot 42\ +43)\cdot 42!\cdot 4!}{46!}$$

$$=\frac{1723\cdot 24}{46\cdot 45\cdot 44\cdot 43}\approx 0.01$$

ג. בכל האפשרויות הרביעיה הבלתי ידועה מכילה את הקלף ♠A, זוג נוסף (שלא יכול להיות אס), וקלף נוסף מסוג אחר. הזוג הנוסף יכול להיות מכל סוג שאינו אס, אבל המקרים של קלפים מסוג 7 או 2 הם שונים, כי ידוע שהם מופיעים כבר אצל בוב.

ראשית, עבור זוג אסים וזוג קלפים שאינם 7 או 2 (וכמובן לא אס), קיימות $\binom{4}{2}$ אפשרויות עבור הזוג. כל זוג כזה צריך להופיע יחד עם אחד מתוך 41 קלפים – 46 הקלפים הבלתי ידועים, פחות ארבעת הקלפים מהסוג של הזוג ופחות הקלף ♠A.

כלומר, לכל אחד מ-10 הסוגים קיימות $41\cdot\binom{4}{2}$ רביעיות רלבנטיות, ובסה"כ מספר הרביעיות מסוג זה הוא $10\binom{4}{2}\cdot 41$.

עבור זוג אסים וזוג 2 קיימות $\binom{3}{2}$ אפשרויות לבחירת שני קלפי הזוג. הקלף החמישי הוא אחד מתוך 42 קלפים – 46 הקלפים הבלתי ידועים, פחות שלושת הקלפים מסוג 2 שאינם אצל בוב פחות הקלף ♠A. לכן מספר הרביעיות מסוג זה הוא $\binom{3}{2}\cdot 42$.

עבור זוג אסים וזוג 7 ישנה אפשרות אחת לבחירת קלפי הזוגות. הקלף החמישי נבחר מתוך 43 קלפים: 46 הקלפים הבלתי ידועים פחות שני קלפי ה-7 פחות הקלף ♠A.

בסה"כ, ההסתברות שלאליס יש "זוגיים אס" היא:

$$\frac{10\binom{4}{2}\cdot 41\ +\binom{3}{2}\cdot 42+43}{\binom{46}{4}}=\frac{(10\cdot 6\cdot 41\ +3\cdot 42+43)\cdot 42!\cdot 4!}{46!}$$

$$=\frac{2629\cdot 24}{46\cdot 45\cdot 44\cdot 43}\approx 0.016$$