

הסתברות להנדסת תוכנה – תרגול 1

שאלה 1

נתונות שתי מניות, א' ו-ב'.

ההסתברות שמניה א' תעלה בערכה ביום מסוים היא 0.6.

ההסתברות שמניה ב' תעלה בערכה ביום מסוים הוא 0.55, וההסתברות ששתיהן תעלינה בערך היא 0.5.

א. מהי ההסתברות שמניה א' לא תעלה

ב. מהי ההסתברות שלפחות אחת מהמניות תעלה?

ג. מהי ההסתברות שבדיוק אחת מהמניות תעלה?

פתרון 1

1. נגדיר שני מאורעות: $A =$ "מניה א' עלתה"; $B =$ "מניה ב' עלתה".

א.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$$

ב. המאורע "לפחות אחת מהמניות תעלה" הוא בדיוק המאורע "מניה א' תעלה, או ב', או שתיהן", כלומר זהו האיחוד של המאורעות A ו-B. התשובה היא לכן

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.55 - 0.5 = 0.65$$

ג. נפריד לשני מקרים זרים: רק מניה א' עולה, ורק מניה ב' עולה. המאורע המבוקש הוא איחוד שני מאורעות אלה, ולכן התשובה היא

$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) = (0.6 - 0.5) + (0.55 - 0.5) = 0.15$$

שאלה 2

אליס ובוב לוקחים קורס בספרדית.

אליס עוברת את הקורס בספרדית בהסתברות 0.7 ובוב בהסתברות 0.5.

נסמן מאורעות:

A – אליס עוברת את הקורס

B – בוב עובר את הקורס

א. הוכיחו / הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם בוב עובר את הקורס אזי אליס עוברת את הקורס.

2. המאורעות A ו-B חופפים.

ב. מצאו חסם עליון וחסם תחתון להסתברות שאליס ובוב שניהם עברו את הקורס.

פתרון 2

א. 1. לא נכון. התנאי מתקיים אם $A \subseteq B$ (כלומר באופן כללי הטענה לא נכונה).

2. נכון. נניח בשלילה כי המאורעות זרים. אזי

$$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] = 0.5 + 0.7 = 1.2 > 1$$

ב. צריך למצוא חסם עליון וחסם תחתון עבור $\Pr[A \cap B]$. כידוע:

$$\Pr[A \cap B] \leq \Pr[A], \Pr[A \cap B] \leq \Pr[B] \text{ כלומר } \Pr[A \cap B] \leq 0.5$$

$$\Pr[A \cap B] = 0.5 \text{ במקרה שבו } A \subseteq B$$

חסם תחתון:

$$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B] = 0.5 + 0.7 - \Pr[A \cap B] \leq 1$$

$$\Pr[A \cap B] \geq 0.5 + 0.7 - 1 = 0.2 \text{ לכן}$$

$$\Pr[A \cap B] = 0.2 \text{ במקרה שבו } \Pr[A \setminus B] = 0.3, \Pr[B \setminus A] = 0.5$$

שאלה 3

ציון בבחינה מוגרל בהתפלגות אחידה מהקבוצה $\{0, \dots, 99\}$. מהי ההסתברות לעבור את הבחינה?

פתרון 3

מדובר בהתפלגות אחידה על מרחב מדגם בגודל 100 ציונים אפשריים.

מתוכם, 45 ציונים – 55, ..., 99 הם ציוני עובר.

$$\text{לכן, ההסתברות לעבור את הבחינה היא } 45/100 = 0.45$$

שאלה 4

אליס נוסעת למכללה. בדרכה שלושה רמזורים.

בהסתברות 0.2 כל הרמזורים יהיו ירוקים, ואז אליס תגיע להרצאה בזמן בהסתברות 0.9.

בהסתברות 0.4 רמזור אחד יהיה אדום, ואז אליס תגיע להרצאה בזמן בהסתברות 0.7.

בהסתברות 0.3 שני רמזורים יהיו אדומים, ואז אליס תגיע להרצאה בזמן בהסתברות 0.4.

בהסתברות 0.1 כל הרמזורים יהיו אדומים, ואז אליס תגיע להרצאה בזמן בהסתברות 0.2.

מהי ההסתברות שאליס תגיע להרצאה בזמן?

פתרון 4

נסמן מאורעות:

A – אליס תגיע להרצאה בזמן

B_0 – כל הרמזורים ירוקים

B_1 – רמזור אחד אדום

B_2 – 2 רמזורים אדומים

B_3 – 3 רמזורים אדומים

נשים לב כי המאורעות B_i זרים ומשלימים, ולכן ניתן להשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$\begin{aligned} Pr[A] &= \sum_{i=0}^3 Pr[A|B_i] \cdot Pr[B_i] = \\ &Pr[A|B_0] \cdot Pr[B_0] + Pr[A|B_1] \cdot Pr[B_1] + Pr[A|B_2] \cdot Pr[B_2] + Pr[A|B_3] \cdot Pr[B_3] \\ &= 0.9 \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.6 \end{aligned}$$

כעת נציב את הנתונים בשאלה:

שאלה 5

בבית מחסה לכלבים, 15% מהכלבים הם "גזעיים" והשאר הם "מעורבים".

ההסתברות של כלב גזעי ללקות במחלה היא 0.8, וההסתברות של כלב מעורב ללקות במחלה היא 0.1.

בוב בחר לאמץ את אחד הכלבים באופן אקראי, וקרא לו "גונזו".

א. מהי ההסתברות שגונזו הוא כלב גזעי וחולה?

ב. מהי ההסתברות שגונזו חולה?

ג. אם גונזו חולה, מהי ההסתברות שהוא גזעי?

פתרון 5

נגדיר מאורעות: G – גונזו גזעי, H – גונזו חולה

מנתוני השאלה:

$$Pr[G] = 0.15 \quad \text{ההסתברות שגונזו גזעי:}$$

$$Pr[\bar{G}] = 1 - 0.15 = 0.85 \quad \text{ההסתברות שגונזו מעורב:}$$

$$Pr[H|G] = 0.8 \quad \text{ההסתברות שגונזו חולה אם הוא גזעי:}$$

$$Pr[H|\bar{G}] = 0.1 \quad \text{ההסתברות שגונזו חולה אם הוא מעורב:}$$

א. מהנוסחה הכללית לחיתוך:

$$\Pr[G \cap H] = \Pr[H|G] \cdot \Pr[G] = 0.8 \cdot 0.15 = 0.12$$

ב. מנוסחת ההסתברות השלמה:

$$\Pr[H] = \Pr[H|G] \cdot \Pr[G] + \Pr[H|\bar{G}] \cdot \Pr[\bar{G}] \stackrel{\text{א}}{=} 0.12 + 0.1 \cdot 0.85 = 0.205$$

ג. מהגדרת הסתברות מותנית:

$$\Pr[G|H] = \frac{\Pr[G \cap H]}{\Pr[H]} \stackrel{\text{ב}}{=} \stackrel{\text{א}}{=} \frac{0.12}{0.205} \approx 0.585$$

שאלה 6 - בעיית מונטי הול

בשעשועון טלוויזיה מוצגות לשחקן שלוש דלתות: x, y, z . מאחורי אחת הדלתות מתחבא פרס יקר ערך, ומאחורי שתי הדלתות האחרות יש מטאטא. השחקן בוחר בדלת x . לאחר מכן, בכדי להגביר את המתח, המנחה פותח את דלת z , ומראה כי מאחוריה יש מטאטא. בשלב זה מוצעת לשחקן האפשרות להחליף את הבחירה שלו מ- x ל- y . האם כדאי לשחקן לנצל אפשרות זו?

פתרון

נסמן ב- X, Y, Z את המאורעות שבהן הדלת ה- x, y, z (בהתאמה) מכילה את הפרס.

$$\text{נניח כי } \Pr[X] = \Pr[Y] = \Pr[Z] = \frac{1}{3}$$

בנוסף נניח כי אם x היא דלת הפרס, המנחה בוחר לפתוח את אחת הדלתות האחרות באופן אקראי.

אם y או z היא דלת הפרס, המנחה פותח את זו מביניהן שאין מאחוריה פרס.

נסמן ב- E_z את המאורע שבו המנחה פתח את דלת z (כשמאחוריה מטאטא).

אזי עלינו לחשב את $\Pr[Y|E_z]$.

מההגדרה:

$$\Pr[Y|E_z] = \frac{\Pr[Y \cap E_z]}{\Pr[E_z]}$$

$$\Pr[Y \cap E_z] = \Pr[E_z|Y] \cdot \Pr[Y]$$

השחקן בחר בדלת x . אם y היא דלת הפרס, אז המנחה יבחר בדלת z בוודאות. לכן:

$$\Pr[E_z|Y] = 1$$

מכאן:

$$\Pr[Y \cap E_z] = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

לחישוב $Pr[E_z]$ נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה. נשים לב כי Z, Y, X הם מאורעות זרים ומשלימים.

$$Pr[E_z] = Pr[E_z|X] \cdot Pr[X] + Pr[E_z|Y] \cdot Pr[Y] + Pr[E_z|Z] \cdot Pr[Z]$$

אם דלת הפרס היא x , שהשחקן בחר, המנחה יפתח את דלת z בהסתברות $\frac{1}{2}$. לכן:

$$Pr[E_z|X] \cdot Pr[X] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

את המחובר השני כבר חישבנו:

$$Pr[E_z|Y] \cdot Pr[Y] = \frac{1}{3}$$

אם דלת הפרס היא z , ההסתברות שהמנחה יפתח אותה היא 0. לכן:

$$Pr[E_z|Z] \cdot Pr[Z] = 0$$

לסיכום:

ההסתברות שהמנחה יבחר בדלת z היא:

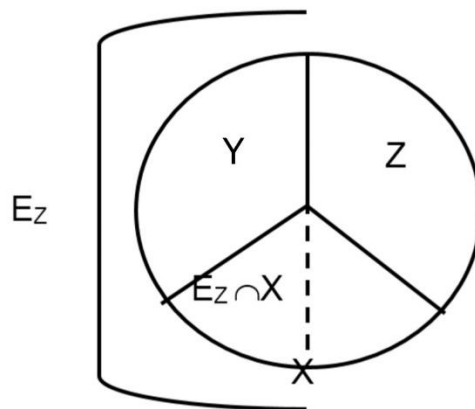
$$Pr[E_z] = Pr[E_z|X] \cdot Pr[X] + Pr[E_z|Y] \cdot Pr[Y] + Pr[E_z|Z] \cdot Pr[Z]$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{2}$$

בהנתן שהמנחה פתח את דלת z , ההסתברות שדלת הפרס היא y היא:

$$Pr[Y|E_z] = \frac{Pr[Y \cap E_z]}{Pr[E_z]} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

ולכן, אם השחקן רציונלי, עליו להחליף את בחירתו לדלת y .



פתרון חלופי קצר

יהי A המאורע שבו הפרס נמצא מאחורי דלת x (שבה השחקן בחר).

יהי B המאורע שבו הפרס נמצא מאחורי דלת y או דלת z.

ברור כי:

$$\Pr[A] = \frac{1}{3}, \quad \Pr[B] = \frac{2}{3}$$

נשים לב כי הסתברויות אלו לא משתנות לאחר שהמנחה פתח את אחת משתי הדלתות שהשחקן לא בחר, כיוון שתמיד ישנה דלת שלא מכילה את הפרס.

לכן, בהסתברות $1/3$ הפרס נמצא מאחורי דלת x ובהסתברות $2/3$ הפרס נמצא מאחורי דלת אחרת - הדלת שהמנחה לא פתח.

שאלה 7

חברת "אליס אקספרס" מתחייבת לספק כל מוצר תוך 48 שעות, אך עומדת בהתחייבות רק ב-80% מהמקרים.

בוב מזמין מוצר מהחברה. במידה והוא לא הגיע תוך 48 שעות, הוא מפרסם חוות דעת שלילית על חברה בהסתברות 0.4.

במידה והמוצר הגיע בזמן, בוב מזמין מוצר נוסף. אם גם המוצר השני הגיע בזמן, הוא מפרסם חוות דעת חיובית על החברה בהסתברות 0.1.

חשבו את ההסתברות שבוב יפרסם חוות דעת על החברה (חיובית או שלילית).

פתרון 7

המאורע הנדון הוא איחוד של שני מאורעות זרים: חוות דעת חיובית וחוות דעת שלילית.

נחשב את ההסתברות שבוב פרסם חוות דעת חיובית. נסמן מאורעות:

A – המוצר הראשון שבוב הזמין הגיע בזמן

B – המוצר השני הגיע בזמן

C – בוב החליט לפרסם חוות דעת חיובית.

אנחנו מתעניינים בהסתברות של C, אבל נשים לב כי $C = A \cap B \cap C$ ומנתוני השאלה ניתן להשתמש בנוסחה לחיתוך הסתברויות באמצעות כפל של הסתברויות מותנות, כלומר:

$$\Pr[A \cap B \cap C] = \Pr[A] \cdot \Pr[B | A] \cdot \Pr[C | A \cap B]$$

מנתוני השאלה:

$$\Pr[A] = 0.8$$

$$\Pr[B | A] = 0.8$$

מנתוני השאלה, ההסתברות להגעת מוצר בזמן היא תמיד 0.8, אבל היות שמאורע B מייצג את המוצר השני, זה יוכל להתקיים רק אם התקיים מאורע A – ולכן זוהי הסתברות מותנית.

$$\Pr[C \mid A \cap B] = 0.1$$

מכאן: ההסתברות שבוב יפרסם חוות דעת חיובית היא:

$$0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.1 = 0.064$$

כעת נחשב את ההסתברות שבוב יפרסם חוות דעת שלילית.

נפרסם מאורע זה ע"י D .

מנתוני השאלה, D מתקיים רק במקרה שבו המוצר שבוב הזמין לא הגיע בזמן. כלומר, התקיים מאורע A .

מכאן:

$$\Pr[D] = \Pr[\bar{A} \cap D] = \Pr[\bar{A}] \cdot \Pr[D \mid \bar{A}] = 0.2 \cdot 0.3 = 0.06$$

בסך הכל, ההסתברות שבוב יפרסם חוות דעת על החברה היא:

$$0.064 + 0.06 = 0.124$$