הסתברות – תרגול עצמי 1

שאלה 1

הוכיחו באינדוקציה את ההכללה להסתברות לאיחוד של מאורעות זרים. כלומר, הראו כי לכל $n \geq 2$ מתקיים:

- אם $A_1, \dots, A_n$ מאורעות זרים אזי $\Pr[\cup_{i=1}^{n} A_i] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]$

שאלה 2

נתונות שתי מניות, א' ו-ב'.

ההסתברות שמניה א' תעלה בערכה ביום מסויים היא 0.6, ההסתברות שמניה ב' תעלה בערכה ביום מסויים הוא 0.55, וההסתברות ששתינן תעלינה בערכן היא 0.5.

א. מהי ההסתברות שמניה א' **לא** תעלה?

ב. מהי ההסתברות שלפחות אחת מהמניות תעלה?

ג. מהי ההסתברות שבדיוק אחת מהמניות תעלה?

שאלה 3

ההסתברות של תינוקות בני יומם להגיע לגיל 80 היא 0.5.

ההסתברות של בני 70 להגיע לגיל 80 היא 0.6.

חשבו את ההסתברות של תינוקות בני יומם להגיע לגיל 70.

שאלה 4

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $P(A) = P(B) = p$, אז ייתכן כי $P(A \cup B) > 2p$.

ב. אם $P(A) = P(B)$, אז $P(A - B) = P(B - A)$.

ג. אם $A \subseteq B$ וגם $A \subseteq C$, אז $P(B \cup C) \geq 2P(A)$.

ד. אם $A \cap B \cap C = \varnothing$, אז לפחות אחד מהמאורעות A,B,C הוא בעל הסתברות 0.

שאלה 5

ההסתברות ללקות במחלת הסתוברוזיס היא 0.001.

קיימת בדיקה הקובעת האם אדם הוא בריא או חולה. תוצאת הבדיקה היא נכונה בהסתברות 0.99 בדיוק (גם עבור בריא וגם עבור חולה).

לאחר שבדיקה קבעה כי בוב חולה, הוא חזר וביצע בדיקה נוספת. מה ההסתברות שהבדיקה השניה קבעה כי בוב חולה?

פתרונות

שאלה 1

נוכיח באינדוקציה על מספר המאורעות n.

בסיס: $n = 2$ מההגדרה של פונקציית הסתברות, עבור מאורעות זרים A_1, A_2 מתקיים:

$$Pr[A_1 \cup A_2] = Pr[A_1] + Pr[A_2]$$

צעד: יהי n טבעי כלשהו. נניח כי הוכחנו את נכונות הטענה עבור n ונוכיח אותה עבור $n + 1$.

יהיו $A_1, \dots, A_{n+1}$ מאורעות זרים. אזי:

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right] = \Pr\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right]$$

נשים לב כי $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i), A_{n+1}$ הם מאורעות זרים, ולכן ניתן להשתמש עבורם בנוסחה להסתברות של איחוד שני מאורעות זרים:

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right] = \Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] + \Pr[A_{n+1}]$$

ומהנחת האינדוקציה:

$$= \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] + \Pr[A_{n+1}] = \sum_{i=1}^{n+1} \Pr[A_i]$$

שאלה 2

נגדיר שני מאורעות: A = "מניה א' עלתה"; B = "מניה ב' עלתה".

א.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$$

ב. המאורע "לפחות אחת מהמניות תעלה" הוא בדיוק המאורע "מניה א' תעלה, או ב', או שתיהן", כלומר זהו האיחוד של המאורעות A ו-B. התשובה היא לכן

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.55 - 0.5 = 0.65$$

ג. נפריד לשני מקרים זרים: רק מניה א' עולה, ורק מניה ב' עולה. המאורע המבוקש הוא איחוד שני מאורעות אלה, ולכן התשובה היא

$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) = (0.6 - 0.5) + (0.55 - 0.5) = 0.15$$

שאלה 3

נסמן מאורעות:

A – הגעה לגיל 70 (המאורע המבוקש)

B – הגעה לגיל 80

מהנתונים:

$$\Pr[B] = 0.5, \quad \Pr[B|A] = 0.6.$$

ידוע כי:

$$\Pr[B] = \Pr[B|A] \cdot \Pr[A]$$

ולכן:

$$\Pr[A] = \frac{\Pr[B]}{\Pr[B|A]} = \frac{0.5}{0.6} = 0.83$$

שאלה 4

א. הטענה אינה נכונה: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B) = 2p$.

ב. הטענה נכונה:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(B) - P(B \cap A) = P(B - A).$$

ג. הטענה אינה נכונה. דוגמא נגדית אחת היא כאשר

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\},\ \ A = \{2,3,4,5\}, B = \{1,2,3,4,5\}, C = \{2,3,4,5,6\},$$

וההסתברות של כל מאורע פשוט היא $1/6$. במקרה זה מתקבל

$$P(B \cup C) = P(\Omega) = 1 < 4/3 = 2P(A).$$

דוגמא נגדית אחרת, הרבה יותר פשוטה, היא לקחת $A = B = C$, כאשר A הוא מאורע בעל הסתברות חיובית.

ד. הטענה אינה נכונה. דוגמא נגדית אחת היא כאשר

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\},\ \ A = \{1,2\}, B = \{3,4\}, C = \{5,6\},$$

וההסתברות של כל מאורע פשוט היא $1/6$. במקרה זה מתקיים כי $A \cap B \cap C = \emptyset$, אבל לאף אחד מהמאורעות A,B,C אין הסתברות 0.

שאלה 5

נסמן מאורעות:

C – בוב חולה

D – הבדיקה השניה קבעה שבוב חולה

נתון כי הבדיקה הראשונה קבעה כי בוב חולה. מכאן, לפי תרגיל שהוכחנו בהרצאה 1, ההסתברות שבוב אכן חולה היא:

$$\Pr[\mathrm{C}] = 0.090164$$

וההסתברות כי בוב בריא היא:

$$\Pr[\bar{\mathrm{C}}] = 1 - 0.090164 = 0.90836$$

כעת, מנוסחת ההסתברות השלמה, ההסתברות שהבדיקה השניה תקבע שבוב חולה היא:

$$\Pr[D] = \Pr[D \mid \mathrm{C}] \cdot \Pr[C] + \Pr[D \mid \bar{\mathrm{C}}] \cdot \Pr[\bar{C}]$$

מאחר ותוצאת הבדיקה מדוייקת בהסתברות 0.99 עבור שני המקרים, נקבל:

$$\Pr[D] = 0.99 \cdot 0.090164 + 0.01 \cdot 0.90836 \approx 0.0983$$