شبیه‌سازی کامپیوتری — تمرین‌های فصل ۸

۸-۱

$$f(x)=\begin{cases} e^{2x} & -\infty<x\le 0 \\ e^{-2x} & 0<x<\infty \end{cases}$$

محاسبه تابع توزیع تجمعی با انتگرال گیری

$$F(x)=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x} e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{2}e^{2x} & x\le 0 \\ \int_{-\infty}^{x} e^{-2x}\,dx=\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx+\int_{0}^{x} e^{-2x}\,dx=\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}e^{-2x}\Big|_{0}^{x} & x\ge 0 \end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$R=f(x)$ و x را بر حسب R محاسبه می‌کنیم

$x\le 0$: $R=\frac{1}{2}e^{2x}\Rightarrow 2R=e^{2x}\xRightarrow[\text{می‌گیریم}]{\ln}\ln(2R)=2x$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ln(2R)$ که این برای $R\le\frac{1}{2}$ می‌باشد.

$x\ge 0$: $R=1-\frac{1}{2}e^{-2x}\Rightarrow\frac{1}{2}e^{-2x}=1-R\Rightarrow e^{-2x}=2(1-R)$

$\xRightarrow[\text{می‌گیریم}]{\ln}-2x=\ln(2(1-R))\Rightarrow x=\frac{-1}{2}\ln(2(1-R))$

که این برای $R>\frac{1}{2}$ می‌باشد.

۸-۲

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(x-2) & 2\le x\le 3 \\ \frac{1}{2}(2-\frac{x}{3}) & 3<x\le 6 \\ 0 & \text{وگرنه} \end{cases}$$

انتگرال گیری

$$F(x)=\begin{cases} \int_{2}^{x}\frac{1}{2}(x-2)\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{2}^{x}=\frac{1}{4}(x-2)^2 & 2\le x\le 3 \\ F(3)+\int_{3}^{x}\frac{1}{2}(2-\frac{x}{3})\,dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(2x-\frac{x^2}{6}\right)\Big|_{3}^{x} & 3<x\le 6 \\ =1-\frac{1}{12}(6-x)^2 & \\ \int 0\,dx=0 & \text{وگرنه} \end{cases}$$

$R=F(x)$

$$\Longrightarrow R=\frac{1}{4}(x-2)^2 \Rightarrow 4R=(x-2)^2 \Rightarrow 2\sqrt{R}=x-2 \Rightarrow 2\sqrt{R}+2=x$$

وقتی که $0\leq R\leq\frac{1}{4}$ باشد.

$$R=1-\frac{1}{12}(6-x)^2 \Rightarrow 12(1-R)=(6-x)^2 \Rightarrow \sqrt{12(1-R)}=6-x \Rightarrow x=6-\sqrt{12(1-R)}$$

وقتی که $\frac{1}{4}<R\leq 1$ باشد.

فرمول ①

محاسبه میانگین واقعی:

$$\mu=\int_2^6 x f(x)dx=\underbrace{\int_2^3 x\frac{1}{2}(x-2)dx}+\underbrace{\int_3^6 x\frac{1}{2}\left(2-\frac{x}{3}\right)dx}$$

$$\frac{1}{2}\int_2^3 x^2-2x\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_2^3=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2}\int_3^6 2x-\frac{x^2}{3}=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^3}{9}\right)\Big|_3^6=3$$

$$=\frac{2}{3}+3=\frac{11}{3}\approx 3.67$$

① محاسبه براساس فرمول

$R=0.12$	2.69
$R=0.65$	3.95
$R=0.33$	3.16
$R=0.87$	4.75
$R=0.23$	2.94
$R=0.45$	3.43
$R=0.91$	4.96
$R=0.08$	2.57
$R=0.51$	3.58
$R=0.76$	4.30

محاسبه میانگین با استفاده از تولید Rها:

$\Longrightarrow$ میانگین: 3.633

۸-۵

پایین هم ساخته توسط دو حالت می‌شن.

$R = F(x) \to x = -3$ وقتی که $R = 0$ باشد.

$x = 4$ وقتی که $R = 1$ باشد.

$R = \frac{1}{2} + \frac{x}{6} \Rightarrow (R - \frac{1}{2})6 = x \Rightarrow x = 6R - 3$

وقتی که $0 \le R \le \frac{1}{2}$ باشد

$R = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{32} \Rightarrow \sqrt{(R - \frac{1}{2})32} = x$

$\Downarrow$

$x = \sqrt{32(R - \frac{1}{2})}$ وقتی که $\frac{1}{2} < R \le 1$

۸-۹

$$F(x) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{x(x+1)(2x+1)}{180}$$

$n = 4$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \;)1 \\ x = 1 \Rightarrow F(1) = \frac{1 \times 2 \times 3}{180} \approx 0{,}0333 \\ )2 \\ x = 2 \Rightarrow F(2) = \frac{2 \times 3 \times 5}{180} \approx 0{,}1667 \\ )3 \\ x = 3 \Rightarrow F(3) = \frac{3 \times 4 \times 7}{180} \approx 0{,}4667 \\ )4 \\ x = 4 \Rightarrow F(4) = \frac{4 \times 5 \times 9}{180} = 1 \end{array}\right\}$$

$R_1 = 0{,}83 \Rightarrow x_1 = 4$ هم‌ت در بازه‌ی ۴ قرار می‌گیرد.

$R_2 = 0{,}24 \Rightarrow x_2 = 3$ در بازه‌ی ۳ است.

$R_3 = 0{,}57 \Rightarrow x_3 = 4$ در بازه‌ی ۴ است.

۸-۱۱

		احتمال‌ها	احتمال‌های تجمعی
۱۵-۳۰	۱۰	$10/150 = 0{,}0667$	$0{,}0667$
۳۰-۴۵	۲۰	$20/150 = 0{,}1333$	$0{,}2000$
۴۵-۶۰	۲۵	$25/150 = 0{,}1667$	$0{,}3667$
۶۰-۹۰	۳۵	$35/150 = 0{,}2333$	$0{,}6000$
۹۰-۱۲۰	۳۰	$30/150 = 0{,}2000$	$0{,}8000$
۱۲۰-۱۸۰	۲۰	$20/150 = 0{,}1333$	$0{,}9333$
۱۸۰-۳۰۰	۱۰	$10/150 = 0{,}0667$	$1{,}0000$

جمع اینها = ۱۵۰

$$R_1 = ۳۴۲۱ \Rightarrow \left(\frac{۳۴۲۱-۲۰۰۱}{۳۴۴۷-۲۰۰۱}\right)(۶۰-۴۵)+۴۵ = ۵۷,۸۲$$

$$R_2 = ۷۸۶۵ \Rightarrow \left(\frac{۷۸۶۵-۶۰۰۱}{۸۰۰۰-۶۰۰۱}\right)(۱۲۰-۹۰)+۹۰ = ۱۱۸,۰۳$$

$$R_3 = ۵۵۱۲ \Rightarrow \left(\frac{۵۵۱۲-۵۰۰۱}{۵۴۴۷-۵۰۰۱}\right)(۳۵-۱۵)+۱۵ = ۳۶,۴۸$$

$$R_4 = ۹۱۰۵ \Rightarrow \left(\frac{۹۱۰۵-۸۰۰۱}{۹۴۴۴-۸۰۰۱}\right)(۱۸۰-۱۲۰)+۱۲۰ = ۱۶۹,۶۹$$

$$R_5 = ۴۸۷۲ \Rightarrow \left(\frac{۴۸۷۲-۳۶۶۸}{۶۰۰۰-۳۶۶۸}\right)(۹۰-۶۰)+۶۰ = ۷۵,۴۷$$

۱۳−۸

طبق فرمول گفته شده در جزوه استاد برای $U[۸,۲۴]$ داریم:

$$۸+\lfloor(۲۴-۸+۱)\times R\rfloor$$

چون خود ۸، ۲۴ هم می‌توانند ساخته شوند

$R_1 = ۰,۰۱۸۳ \Rightarrow ۸$

$R_2 = ۰,۷۲۶۴ \Rightarrow ۲۰$

$R_3 = ۰,۳۹۰۷ \Rightarrow ۱۴$

$R_4 = ۰,۸۱۵۳ \Rightarrow ۲۱$

$R_5 = ۰,۹۳۷۶ \Rightarrow ۲۳$

$R_6 = ۰,۲۹۳۴ \Rightarrow ۱۲$

$R_7 = ۰,۵۰۲۸ \Rightarrow ۱۶$

$R_8 = ۰,۶۴۹۲ \Rightarrow ۱۹$

$R_9 = ۰,۱۷۲۰ \Rightarrow ۱۰$

$R_{10} = ۰,۴۸۱۵ \Rightarrow ۱۶$

با جایگذاری Rها در فرمول مقادیر را برای آنها حساب می‌کنیم.

تعداد حالت ها

۱۵−۸

$$\boxed{\mu = ۲,۵ \;,\; q = ۰} \Rightarrow \mu = q + \frac{1-p}{p} \Rightarrow ۲,۵ = ۰ + \frac{1-p}{p}$$

$$p = \frac{۲}{۷} \approx ۰,۲۸۵۷$$

$$F(x) = 1-(1-p)^{x+1} \xRightarrow{R=F(x)} R = 1-(1-p)^{x+1} \Rightarrow 1-R = (1-p)^{x+1}$$

$$x = \left\lceil \frac{\ln(1-R)}{\ln(1-p)} - 1 \right\rceil \Leftarrow x = \frac{\ln(1-R)}{\ln(1-p)} - 1 \Leftarrow \ln(1-R) = (x+1)\ln(1-p)$$

چون گسسته است

$R_1 = ۰/۱۲۳۴ \Rightarrow x = ۰$ | $R_6 = ۰/۶۳۴۱ \Rightarrow x = ۱$
$R_2 = ۰/۸۷۶۵ \Rightarrow x = ۶$ | $R_7 = ۰/۷۶۵۴ \Rightarrow x = ۴$
$R_3 = ۰/۲۴۶۸ \Rightarrow x = ۰$ | $R_8 = ۰/۵۶۷۸ \Rightarrow x = ۲$
$R_4 = ۰/۳۵۷۹ \Rightarrow x = ۱$ | $R_9 = ۰/۶۷۸۹ \Rightarrow x = ۳$
$R_5 = ۰/۹۸۷۶ \Rightarrow x = ۱۳$ | $R_{10} = ۰/۰۹۸۷ \Rightarrow x = ۰$

۸-۱۸ با استفاده از فرمول های زیر در فصل جزوه داریم که :

$$Z_1 = (-۲\ln(R_1))^{\frac{1}{2}} \cos(۲\pi R_2) \quad ①$$

$$Z_2 = (-۲\ln(R_1))^{\frac{1}{2}} \sin(۲\pi R_2) \quad ② \quad \text{و} \quad x = \mu + \sigma Z \quad ③$$

$$= ۳۳ + ۲Z$$

$\begin{cases} R_2 = ۰/۷۶۳۱ \\ R_1 = ۰/۴۲۸۷ \end{cases} \xrightarrow{①} Z_1 = ۰/۱۰۴۸ \xRightarrow{③} x_1 = ۳۳/۲۱$

$\begin{cases} R_1 = ۰/۹۲۱۶ \\ R_2 = ۰/۱۸۳۴ \end{cases} \xrightarrow{②} Z_2 = ۰/۳۷۰۶ \xRightarrow{③} x_2 = ۳۳/۷۴$

$\begin{cases} R_1 = ۰/۵۳۶۸ \\ R_2 = ۰/۳۳۶۴ \end{cases} \xrightarrow{①} Z_3 = -۰/۵۴۱۱ \xRightarrow{③} x_3 = ۳۱/۹۲$

$\begin{cases} R_1 = ۰/۰۷۱۲ \\ R_2 = ۰/۹۵۳۴ \end{cases} \xrightarrow{②} Z_4 = ۰/۶۱۷۳ \xRightarrow{③} x_4 = ۳۳/۱۷$

$\begin{cases} R_1 = ۰/۳۲۱۵ \\ R_2 = ۰/۶۱۲۷ \end{cases} \xrightarrow{①} Z_5 = -۱/۱۳۵۸ \xRightarrow{③} x_5 = ۳۰/۷۳$

۸-۲۵ راه ① : $\leftarrow$ تولید R_1 ، R_2 بصورتی که از $U[0,1]$ باشند.

$\begin{cases} X_1 = ۸ \times R_1 \\ X_2 = ۸ \times R_2 \end{cases}$ تبدیل آنها به $U[0,8]$ بصورتی که :

$$y = \min\{X_1, X_2\}$$

راه ② :

$۰ \le y \le ۸ \Rightarrow F(y) = P(Y \le y) = 1 - P(Y > y)$

* $Y > y$ معادل است با $(X_1 > y, X_2 > y)$

$1 - P(X_1 > y, X_2 > y) = 1 - P(X_1 > y) \times P(X_2 > y)$

به علت استقلال X_1 و X_2

$$\rightarrow 1 - P(X_1 > y) \times P(X_2 > y) = 1 - \frac{(8-y)}{8} \times \frac{(8-y)}{8} = 1 - \frac{(8-y)^2}{64}$$

چون X_1 و X_2 توزیع یکنواخت دارند بین ۰ و ۸ پس $\left(P(X_i > y) = \frac{8-y}{8}\right)$

ساده سازی

$$= \frac{y(16-y)}{64}$$

$R = F(y)$

$$\Longrightarrow R = \frac{y(16-y)}{64} \Rightarrow 64 = y(16-y) = 16y - y^2$$

استفاده از معادله درجه دوم

$$y = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \times 1 \times 64R}}{2} = 8 \pm 8\sqrt{1-R}$$

ساده سازی

چون $8 \geq y \geq 0$ می باشد پس باید منفی را انتخاب کنیم:

$$y = 8 - 8\sqrt{1-R} \Longrightarrow R \sim U[0,1]$$ تولید

و جایگذاری در این فرمول.