# Об оценке спроса на трудовые ресурсы на основе нелинейных моделей межотраслевого баланса[1]

Н.К.Обросова[1,2], А.А.Спиридонов[1], М.В.Тарасенко[1,2]
[1]ФИЦ ИУ РАН, [2] ФГБУ «ВНИИ труда» Минтруда России
nobrosova@ya.ru

Аннотация. Работа посвящена развитию нового класса нелинейных моделей межотраслевого баланса с учетом замещения производственных факторов и экономических ограничений, являющегося развитием линейной модели В.Леонтьева. Новые модели позволяют вычислять экономическое равновесие в сети поставок и цен на основе анализа задачи распределения ресурсов и двойственной по Янгу задачи формирования цен. В статье исследуются вопросы применения такой модели с комбинированной производственной функцией с постоянной эластичностью замещения для анализа и прогнозирования платежеспособного спроса отраслей российской экономики на трудовые ресурсы.

Ключевые слова: задача распределения ресурсов, преобразование Янга, экономическое равновесие, межотраслевой баланс, производственная функция, идентификация, фонд оплаты труда

# On estimate of demand for labor resources based on nonlinear input-output models

N.K.Obrosova[1,2], A.A.Spiridonov[1], M.V.Tarasenko[1,2]
[1] Federal Research Center ”Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, [2]Russian national research institute of labor
nobrosova@ya.ru

Annotation. The paper contributes to the development of a new class of nonlinear models of input and output tables taking into account the substitution of production factors and economic constraints, which is a development of V.Leontief linear model. The new models allow to calculate the economic equilibrium in the supply and price network on the basis of analyzing the problem of resource allocation and the Yang dual problem of price formation. The article studies the application of such a model with a combined production function with constant elasticity of substitution for the analysis and forecasting of solvent demand for labor resources in the Russian economy.

Key words: resource allocation problem, Young transform, economic equilibrium, input-output tables, production function, identification, wage payroll

---

[1] Работа поддержана РНФ (грант 23-21-00429 ).

## 1. Введение

Современная переориентация рынков сопровождается процессами реструктуризации российской экономики. Переход от приоритетного развития капиталоемкого, но не трудоемкого добывающего сектора экономики к приоритетному развитию трудоемкого обрабатывающаго сектора увеличивает спрос на трудовые ресурсы, что повышает риски дефицита кадров. Актуальной проблемой является разработка методов оценки и сценарного прогнозирования платежеспособного спроса со стороны отраслей производства, а также контроля баланса спроса и предложения труда в отраслях экономики РФ.

Реорганизация экономических отношений приводит к смене поведения экономических агентов. В этой ситуации методы решения задач среднесрочного макроэкономического прогнозирования не могут опираться исключительно на анализ предыдущих тенденций, как это принято в рамках подходов, основанных на эконометрических зависимостях [1], [2],[3].

Решение поставленных задач должно быть основано на математических моделях, которые учитывают отраслевую реструктуризацию, а также существующие экономические ограничения. В статье мы предлагаем новый подход к анализу отраслевого спроса на рынке труда на основе математических моделей нелинейного межотраслевого баланса, которые учитывают замещение производственных факторов и ресурсные ограничения. Математический аппарат моделей заложен в работах [4],[5],[6] и сводится к решению проблемы поиска конкурентного равновесия на множестве допустимых межотраслевых потоков и цен, формализованной в виде задачи оптимального распределения ресурсов с неоклассическими производственными функциями, а также двойственной по Янгу задачи, решением которой являются равновесные цены в сети поставок. Прикладные модели, полученные на основе результатов исследований, успешно использовались для анализа реальных производственных сетей [7],[8]. В статье [9] разработана модификация модели, учитывающая ограниченность производственных мощностей в отрасли, позволившая оценить влияние на равновесие издержек, возникающих в результате дефицита мощностей в производственной сети. В [10] модель использована для анализа инфляционных рисков в экономике РФ. Модели нелинейного межотраслевого баланса являются развитием классической модели линейного межотраслевого баланса В.Леонтьева [11],[12], традиционно применяющейся с середины прошлого века для анализа межотраслевых связей

[13-16], в том числе для анализа рынка трудовых ресурсов [17]. Хотя линейный межотраслевой баланс используется в современных условиях для анализа производственной системы [18-20], трудности его применения связаны с невозможностью описания замещения факторов в рамках базового предположения о постоянстве норм прямых затрат.

В отличие от линейной модели В.Леонтьева, модели нелинейного межотраслевого баланса учитывают замещение производственных факторов. Преимуществом моделей межотраслевого баланса является интерпретируемый в терминах официальной статистики набор входных параметров и выходных переменных. Информация публикуется в рамках Системы национальных счетов (СНС) - стандартизованной на международном уровне базы данных о межотраслевых потоках [14]. Показатели модели нелинейного межотраслевого баланса интерпретируются в терминах Симметричной таблицы затраты-выпуск (СТЗВ) отечественной продукции в текущих основных ценах, которая входит в СНС. Схема таблицы СТЗВ приведена на рис.1. Таблица СТЗВ описывает финансовый баланс производства и распределения произведенной продукции и затраченных ресурсов в экономике, которая представляется набором чистых отраслей, каждая из которых производит уникальный однородный продукт, затрачивая при этом первичные и промежуточные ресурсы, а также набором конечных потребителей продукции отраслей. Выпуск отрасли распределяется на промежуточное и конечное потребление экономических агентов. Стандартная СТЗВ отечественной продукции, разбивается на три квадранта [14],[17],[20] (рис.1). Квадрант I характеризует потоки промежуточных затрат отрасли $j$, которые произведены отраслью $i$, квадрант II содержит вектора-столбцы конечного потребления произведенной продукции, квадрант III - затраты первичных ресурсов отраслями. В отличие от линейной модели В.Леонтьева, отражающей баланс строк I и II квадранта таблицы [17], нелинейные модели позволяют рассчитывать квадранты I и III СТЗВ, а также равновесные цены на продукты сети при заданном квадранте II и ценах первичных ресурсов. Такое преимущество позволяет анализировать в рамках моделей спрос отраслей на трудовые ресурсы.

Одной из проблем применения данных СТЗВ для оценки показателей рынка труда является систематическое различие этих показателей в статистике СНС и статистике труда Росстата. В статье на основе сопоставления соответствующих подходов Росстата разработана методика пересчета спроса на труд из СНС в статистику труда.

| | | Промежуточное потребление | Конечное потребление | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Симметричная таблица использования для создания выпуска (ТИ)** | | **продукты** **1 . . . m** | **Домашние хозяйства** | **Государство** | **Валовое накопление** (+изменение запасов материальных оборотных средств) | **Экспорт** |
| **отечественные продукты** | 1 | $Z_d = \lVert Z_i^j \rVert$ $i, j = 1, \dots, m$ | $Z_1^{H,0}$ | $Z_1^{G,0}$ | $Z_1^{INV,0}$ | $Z_1^{EXP,0}$ |
| | . . . | | $Z_2^{H,0}$ | $Z_2^{G,0}$ | $Z_2^{INV,0}$ … | $Z_2^{EXP,0}$ |
| | **m** | I квадрант | $Z_m^{H,0}$ | $Z_m^{G,0}$ | $Z_m^{INV,0}$ II квадрант | $Z_m^{EXP,0}$ |
| **Расходы на первичные ресурсы** | импорт | $Z_{m+1}^j$ | | | | |
| | оплата труда | $Z_{m+2}^j$ | III квадрант | | | |
| | в т.ч. заработная плата | $Z_{m+2}^{j,w}$ | | | | |
| | другие чистые налоги на производство | $Z_{m+3}^j$ | | | | |
| | потребление основного капитала | $Z_{m+4}^j$ | | | | |
| | чистая прибыль | $Z_{m+5}^j$ | | | | |
| | **Валовая добавленная стоимость** | $Z_{m+2}^j + Z_{m+3}^j + Z_{m+4}^j + Z_{m+5}^j$ | | | | |
| **Валовый выпуск** | | $Y_1 \ Y_2 \ . . . \ Y_m$ | | | | |

Рис. 1. Схема СТЗВ отечественной продукции.

Статья организована следующим образом.

Раздел 2 содержит описание нелинейной модели межотраслевого баланса и результаты ее исследования.

Раздел 3 посвящен формированию базы входных данных статистики РФ за 2017-2020 год для идентификации и расчетов по модели.

В разделе 4 решена обратная задача идентификации модели для явного вида производственных функций, построенных на основе функций с постоянной эластичностью замещения (CES).

В разделе 5 представлены результаты оценки платежеспособного спроса отраслей на труд на основе разработанной агрегированной модели.

В разделе 6 представлена методика сведения результатов расчета спроса на труд в модели к статистике труда Росстата.

## 2. Экономическое равновесие в нелинейной модели межотраслевого баланса с ограничением мощностей производства

Рассмотрим функционирование производственной сети, в которой выделено $m$ чистых отраслей и один рациональный репрезентативный конечный потребитель с вектором конечного потребления

$X^0 = \left(X_1^0, \ldots, X_m^0\right) \geq 0$ и функцией полезности $F_0(X^0)$. Производственные функции $j$-й отрасли $F_j\left(X^j, l^j\right)$, $j = 1,\ldots,m$ описывают выпуск продукта отрасли $j$ в результате затрат $X^j = \left(X_1^j, \ldots, X_m^j\right) \geq 0$ промежуточных ресурсов, которые производятся в отраслях и вектора $l^j = \left(l_1^j, \ldots, l_n^j\right) \geq 0$ затрат первичных производственных факторов $1,\ldots,n$, которые не производятся в сети. Мы рассматриваем класс неоклассических производственных функций и функций полезности $\Phi$, т.е. вогнутые, не равные тождественно нулю, монотонно неубывающие, непрерывные и положительно однородные порядка 1 в неотрицательном октанте функции, обладающие свойством $F_j\left(0,0\right) = 0$. Будем считать, что производственные мощности отраслей ограничены компонентами вектора $M = (M_1,\ldots,M_m) > 0$, а суммарное потребление каждого первичного ресурса $k \in \{1,\ldots,n\}$ ограничено величиной $l_k$, причем $l = (l_1,\ldots,l_n) > 0$, т.е. каждая отрасль потребляет хотя бы один первичный ресурс.

В [9] исследована следующая задача оптимального распределения ресурсов в производственной сети с учетом ограничений на мощность отраслей

$$p_0 F_0\left(X^0\right) \to \max \tag{1}$$

$$F_j\left(X^j, l^j\right) \geq \sum_{i=0}^{m} X_j^i,\ j = 1,\ldots,m \tag{2}$$

$$M_j \geq \sum_{i=0}^{m} X_j^i, j = 1,\ldots,m \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{m} l_k^j \leq l_k, k = 1,\ldots,n, \tag{4}$$

$$X^0 \geq 0,\ X^1 \geq 0,\ldots,X^m \geq 0,\ l^1 \geq 0,\ldots,l^m \geq 0, \tag{5}$$

где $p_0 > 0$ - масштабирующий коэффициент, переводящий полезность конечного потребителя в денежное выражение. Мы рассматриваем задачу выпуклой оптимизации (1)-(5) в рамках предположении о продуктивности, которое гарантирует выполнение условий Слейтера (подробнее см.[9]).

***Теорема 1*** *[9]. Множество векторов* $\left\{\hat{X}^0, \hat{X}^1,\ldots,\hat{X}^m, \hat{l}^1,\ldots,\hat{l}^m\right\}$, *удовлетворяющих ограничениям (2)-(5), является решением задачи (1)-(5) тогда и только тогда, когда существуют множители Лагранжа* $\tilde{p} = \left(\tilde{p}_1,\ldots,\tilde{p}_m\right) \geq 0$, $v = (v_1,\ldots,v_m) \geq 0$ *и* $s = \left(s_1,\ldots,s_n\right) \geq 0$ *такие, что*

$$\left(\hat{X}^j,\hat{l}^j\right) \in Arg\max\{\tilde{p}_j F_j\left(X^j,l^j\right) - (\tilde{p}+v)X^j - sl^j \mid X^j \geq 0, l^j \geq 0\},\ j=1,\ldots,m,$$

$$\tilde{p}_j\left(F_j\left(\hat{X}^j,\hat{l}^j\right) - \hat{X}_j^0 - \sum_{i=1}^m \hat{X}_j^i\right) = 0,\ j=1,\ldots,m,$$

$$v_j\left(M_j - \hat{X}_j^0 - \sum_{i=1}^m \hat{X}_j^i\right) = 0,\ j=1,\ldots,m,$$

$$s_k\left(l_k - \sum_{j=1}^m \hat{l}_k^j\right) = 0,\ k=1,\ldots,n,$$

$$\hat{X}^0 \in Arg\max\{p_0 F_0(X^0) - (\tilde{p}+v)X^0 | X^0 \geq 0\}.$$

В соответствии с [9], мы интрпретируем множители Лагранжа к ограничениям (2)-(4) как цены на продукты сети: $\tilde{p}$ – цены, по которым производители продают произведенную продукцию; $v$ наценки на товары, возникающие в результате ограничения на мощность производства; $s$ – цены на первичные факторы производства.

Из Теоремы 1 следует, что оптимальные механизмы распределения ресурсов соответствуют механизмам конкурентного равновесия в производственной сети с векторами цен $p$, $v$ и $s$, а дефицит производственных мощностей приводит к расхождению в ценах спроса и предложения продуктов и порождает дополнительную прибыль, связанную с издержками $v$. Исследование конкурентного равновесия в модели опирается на двойственное по Янгу описание механизмов распределения ресурсов, позволяющее найти равновесные цены [9]. Преобразованием Янга производственной функции $F_j(X^j,l^j)$ и функции полезности $F_0(X^0)$, соответственно, назовем функцию себестоимости производства отрасли

$$q_j\left(p,s\right) = \inf\left\{pX^j + sl^j \middle/ F_j\left(X^j,l^j\right) \middle| X^j \geq 0, l^j \geq 0, F_j\left(X^j,l^j\right) > 0\right\}$$

и индекс потребительских цен

$$q_0\left(q\right) = \inf\left\{qX^0 \middle/ F_0\left(X^0\right) \middle| X^0 \geq 0, F_0\left(X^0\right) > 0\right\},$$

которые также являются неоклассическими функциями из класса $\Phi$ [9]. В работах [9], [10] исследовано решение двойственной по Янгу задачи к задаче (1)-(5), построена система уравнений для определения равновесных цен в модели и основное уравнение межотраслевого баланса, которое учитывает влияние характеристик производства, цен и издержек на межотраслевые потоки. Точнее, доказаны следующие утверждения.

***Предложение 1****[10]. Пусть $F_j > 0$, $j = 1,...,m$. Тогда равновесные цены потребителя $\hat{p} = (\hat{p}_1,...,\hat{p}_m) > 0$ определяются из вариационного принципа*

$$\min_{\hat{p}\geq 0}\left\{\sum_{j=1}^{m} M_j\left(\hat{p}_j - q_j\left(\hat{p},\hat{s}\right)\right)_+ \middle| q_0\left(\hat{p}\right) \geq p_0\right\},$$ *а издержки $v = (v_1,...,v_m) \geq 0$*

*удовлетворяют системе уравнений*

$$\hat{p}_j - v_j = q_j\left(\hat{p},\hat{s}\right),\ \ j = 1,...,m \tag{6}$$

*где $\hat{p}_j - v_j = \tilde{p}_j > 0$. В случае $F_0(X^0) > 0$ верно равенство $q_0(\hat{p}) = p_0$. Более того, если для некоторого $j \in \{1,...,m\}$ верно $v_j > 0$, то $F_j\left(\hat{X}^j,\hat{l}^j\right) = M_j$.*

***Предложение 2****[10]. Пусть $\hat{X}^0,\hat{X}^j,\hat{l}^j,\tilde{p},v$ - равновесие в модели. Если $F_j\left(\hat{X}^j,\hat{l}^j\right) > 0$ для всех $j = 1,...,m$, то*

$$F_i\left(\hat{X}^i,\hat{l}^i\right) = \sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}\left(\tilde{p},v\right)F_j\left(\hat{X}^j,\hat{l}^j\right) + \hat{X}_i^0,\ i = 1,...,m, \tag{7}$$

*где $\lambda_{ij}\left(\tilde{p},v\right) = \hat{X}_i^j \big/ F_j(\hat{X}^j,\hat{l}^j) \geq 0,\ i,j = 1,...,m$, а матрица $\Lambda\left(\tilde{p},v\right) = \left\|\lambda_{ij}\left(\tilde{p},v\right)\right\|$ является продуктивной.*

***Замечание 2.****(см.[10]) Пусть в равновесии $F_j\left(X^j,l^j\right) > 0$. Тогда, в случае дифференцируемости производственных функций $F_j$ верны равенства*

$$\tilde{p}_i + v_i \big/ \tilde{p}_j = \partial F_j\left(X^j,l^j\right) \big/ \partial X_i^j, \qquad \hat{s}_k \big/ \tilde{p}_j = \partial F_j\left(X^j,l^j\right) \big/ \partial l_k^j. \tag{8}$$

Замечание 2 позволяет вычислить равновесные межотраслевые потоки в случае выбора явного вида неоклассических производственных функций. Равновесные потоки и равновесные цены в модели определяются в силу соотношений (6)-(8). Далее мы рассматриваем производственные функции на основе комбинации функции с постоянной, но не фиксированной заранее, эластичностью замещения (CES) и ее частного случая - функции Кобба-Дугласа с единичной эластичностью замещения.

**3. Формирование входной базы данных модели для производственной сети РФ за 2017-2020 годы**

Полные таблицы СТЗВ публикуются Росстатом [24] раз в пять лет с задержкой 3 года (последняя публикация за 2016 год). В [10] представлены результаты восстановления СТЗВ отечественной продукции на основе системы таблиц ресурсов (ТР) и использования (ТИ), доступных в одинаковой номенклатуре 61 отрасль - 61 продукт в СНС Росстата [24] за 2016-2020 годы. Структура полученных таблиц СТЗВ соответствует схеме на рис.1. В статье мы используем результаты формирования входной бызы данных из [10] и рассчитываем платежеспособный спрос на труд для пяти крупных агрегированных производственных комплексов экономики РФ, которые сформированы по признакам близости структуры потребления их продукции конечными потребителями и участию в экспортно-импортных операциях (подробнее см. [10]): обрабатывающий, экспортирующий, инфраструктурный, услуги, финансы. Разбиение официальной номенклатуры ОКВЭД на указанные группы приведено в Приложении (табл.1).

Показатели квадранта III СТЗВ (см. рис.1) содержат две строки, которые участвуют в формировании фонда доходов занятых в экономике: заработная плата и чистая прибыль. В результате анализа авторами различных вариантов показателей, характеризующих затраты труда в рамках СНС, сумма указанных величин (заработная плата+чистая прибыль) оказывается наиболее близкой к данным оплаты труда в статистике труда Росстата [25]. Поэтому квадрант III СТЗВ 2016-2020 года группируется в три строки, соответствующие следующим первичным ресурсам: R1 - промежуточный импорт, R2- заработная плата плюс чистая прибыль, R3 - разность валовой добавленной стоимости отрасли за вычетом ресурса R2. Для вычисления равновесных цен в модели база данных дополняется индексами цен на первичные ресурсы R1,R2,R3, рассчитанными на основе официальной статистики Росстата о среднегодовых индексах цен первичных ресурсов в экономике за 2017-2020 годы: индекс цен импортной продукции (рассчитывается на основе официальных данных российской таможенной статистики как произведение индекса средних цен импорта в долларах и индекса курса доллара к рублю), индексы номинальной среднегодовой заработной платы в отраслях экономики, индекс-дефлятор ВВП.

Ресурс R2 дифференцирован в зависимости от комплекса. Таблицы СТЗВ 2017-2020 с переформированным квадрантом III и индексами цен на первичные ресурсы образуют базу данных модели.

**4. Идентификация и калибровка модели**

В качестве базового года выбран 2019 год. Входные данные содержат следующие показатели 2017-2020 года: агрегированные СТЗВ[2] ; индексы цен $s_{kj}$ на первичные ресурсы, $j=1,...,5$, $k=1,2,3$ к 2019 году; вектор $Z^0=\left(Z_1^0,\dots,Z_5^0\right)$ конечного потребления в текущих ценах (квадрант II СТЗВ). По таблице СТЗВ базового 2019 года вычислим значения

$$a_{ij}=Z_i^j\big/Y_j\,,\ b_{kj}=Z_{m+k}^j\big/Y_j\,,\ \ i,j=1,..,5,\ k=1,..,3,\qquad \sum_{i=1}^m a_{ij}+\sum_{k=1}^n b_{kj}=1,\ j=1,..,5.$$

Технологии производства в отраслях описываются производственными функциями вида

$$F_j\left(X,l\right)=\alpha_j G_j^{\gamma_j}\prod_{k=1}^n l_{kj}^{\left(1-\theta_{kj}\right)b_{kj}}\text{, где}$$

$$G_j\left(X,l\right)=\left(\sum_{i=1}^m\left(X_{ij}/w_{ij}\right)^{-\rho_j}+\sum_{k=1}^n\theta_{kj}\left(l_{kj}/w_{m+k,j}\right)^{-\rho_j}\right)^{-1/\rho_j},$$

$$\alpha_j=\gamma_j^{-\gamma_j}\prod_{k=1}^n b_{kj}^{-\left(1-\theta_{kj}\right)b_{kj}},\quad \gamma_j=\sum_{i=1}^m a_{ij}+\sum_{k=1}^n\theta_{kj}b_{kj},$$

$$w_{ij}=\left(a_{ij}/\gamma_j\right)^{1+\rho_j/\rho_j},\qquad w_{m+k,j}=\left(b_{kj}/\gamma_j\right)^{1+\rho_j/\rho_j},\quad -1\le\rho_j<+\infty,\ \rho_j\ne 0.$$

Индикатор $\theta_{kj}=0$, если первичный фактор $l_{kj}$ имеет единичную эластичность замещения с остальными факторами и $\theta_{kj}=1$, если фактор замещается в рамках CES функции с эластичностью $\left(1+\rho_j\right)^{-1}$.

**4.1. Вычисление равновесия в модели**

В случае комбинированных производственных функций равновесные индексы цен $p$ на продукты и издержки $v$ определяются из решения системы уравнений (6), в которой функции себестоимости $q_j\left(p+v,s\right)$ также имеют вид комбинированных функций для всех $j=1,...,m$

[2] Мы исключаем 2020 год из критериев калибровки модели в связи с существенным нарушением экономических отношений в условиях пандемии Covid-19.

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ij}}{\gamma_j}\left(p_i+v_i\right)^{\rho_j/\left(1+\rho_j\right)}+\sum_{k=1}^{n}\theta_{kj}\frac{b_{kj}}{\gamma_j}\left(s_{kj}\right)^{\rho_j/\left(1+\rho_j\right)}\right)^{\gamma_j\left(1+\rho_j\right)/\rho_j}\prod_{k=1}^{n}s_{kj}^{\left(1-\theta_{kj}\right)b_{kj}}=p_j.$$

Для случая ограниченности производственной мощности в отрасли $j$ издержки $v_j>0$ определяются из условия $F_j\left(X^j,l^j\right)=M_j$ с учетом баланса (7).

Заметим, что в силу Предложения 2 вектор валового выпуска отраслей в текущих ценах определяется выражением $Y\left(\hat{Z}^0,p\right)=\left(E-\Lambda\left(p,\lambda\right)\right)^{-1}\hat{Z}^0$, где $\Lambda\left(p,v\right)=\left\|\lambda_{ij}\right\|$ - матрица $\left(m\times m\right)$ с элементами

$$\lambda_{ij}=\frac{p_j}{p_j+v_j}a_{ij}\left(\frac{p_i+v_i}{p_jA_j\left(p_j\right)}\right)^{\rho_j/\left(1+\rho_j\right)},\text{ где } A_j\left(p_j\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(p_j/s_{kj}\right)^{\left(1-\theta_{kj}\right)b_{kj}/\gamma_j}.$$

Соотношения (8) позволяют вычислить (см. [10]) элементы квадранта I матрицы СТЗВ $Z_{i,j}=\lambda_{ij}Y_j$ и элементы квадранта III , ($j=1...,m,\ k=1,...,n-1$)

$$Z_{m+k,j}=\left(1-\theta_{kj}\right)b_{kj}\frac{p_j}{p_j+v_j}Y_j+\theta_{kj}b_{kj}\frac{p_j}{p_j+v_j}Y_j\left(\frac{s_{kj}}{p_jA_j\left(p_j\right)}\right)^{\rho_j/\left(1+\rho_j\right)},$$

$$Z_{m+n,j}=\left(1-\theta_{nj}\right)b_{nj}\frac{p_j}{p_j+v_j}Y_j+\theta_{nj}b_{nj}\frac{p_j}{p_j+v_j}Y_j\left(\frac{s_{nj}}{p_jA_j\left(p_j\right)}\right)^{\rho_j/\left(1+\rho_j\right)}+\frac{v_j}{p_j+v_j}Y_j.$$

Приведенные соотношения позволяют вычислить равновесие в модели в зависимости от параметра $\rho_j$. Оценка параметров эластичностей производится на этапе калибровки модели на данных СТЗВ 2017-2019 года.

### 4.2 Калибровка модели: оценка эластичностей замещения факторов

Мы принимаем гипотезу о достаточности производственных мощностей комплексов для удовлетворения спроса в период 2017-2020 года. Поэтому в рамках решения обратной задачи идентификации рассматривается модель без учета ограничений на производственные мощности и $v_j=0,\ j=1,...,m$. На основе анализа данных статистики постоянные пропорции финансовых затрат на ресурс R2 и прочие затраты включены только в инфраструктурный комплекс, т.е. $\theta_{23}=0$, остальные $\theta_{kj}=1$. В этих предположениях решение задачи (1)-(5) с комбинированными производственными функциями воспроизводит СТЗВ базового 2019 года при единичных ценах независимо от значений параметра эластичности замещения $\rho_j$, что обосновывает выбор коэффициентов производственных функций, за исключением параметров эластичности замещения $\rho = (\rho_1, ..., \rho_5)$, которые определяются в результате процесса калибровки модели на основе сформированной базы данных СТЗВ 2017-2019 года. Поскольку целью исследования является анализ спроса отраслей на труд, в качестве критерия калибровки выбран максимум отклонения расчетных и статистических значений расходов комплексов на первичный ресурс R2 (заработная плата плюс чистая прибыль) в каждом из комплексов по годам, т.е.

$$\rho = Arg \min \max_{t_1 \le t \le t_2} \max_{j=1,...,m} \left| Z_{m+2,j}(t,\rho) - \hat{Z}_{m+2,j}(t) \right|,$$

где $t_1 = 2017$ и $t_2 = 2019$ - границы диапазона лет, за которые рассматривается статистика, $\hat{Z}_{m+2,j}(t)$ - статистика затрат первичного ресурса R2 в году $t$, $Z_{m+2,j}(t)$ - расчет по модели затрат первичного ресурса R2 в году $t$. Результаты оценки эластичностей замещения приведены в табл. 2 в Приложении.

## 5. Расчет платежеспособного спроса на труд в модели

На рис.2 представлены результаты сопоставления рассчитанных на основе

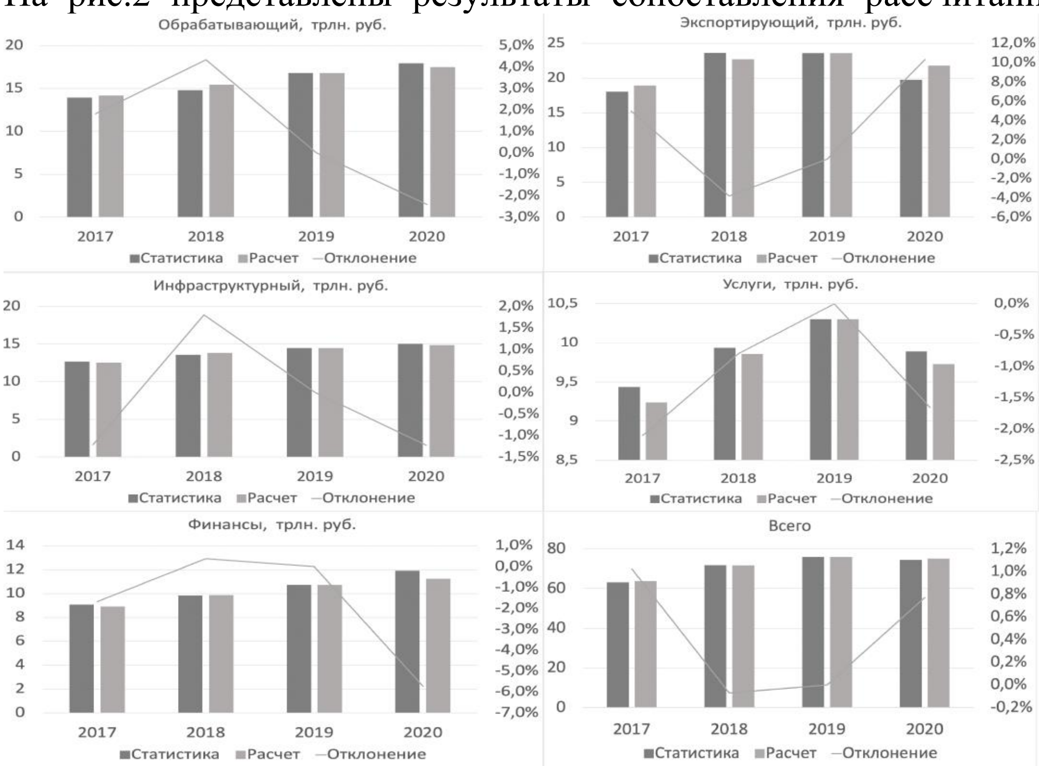


Рис.2. Оценка спроса на труд в модели (расчет, статистика).

модели показателей затрат первичного ресурса R2 (заработная плата + чистая прибыль) для комплексов отраслей и суммарно по экономике и соответствующих данных СТЗВ за 2017-2020 годы. Размерность левой шкалы – трлн. руб., правой – %. За каждый год построены два столбика диаграммы: расчет первичного ресурса R2 в модели и данные статистики (трлн. руб. в год). Линия соответствует отклонению в %. Результаты демонстрируют достаточно высокую точность оценок спроса на труд отраслевых комплексов. Заметим, что для 2020 года, исключенного из критерия калибровки модели, в трех из пяти комплексов отклонения сохраняются на низком уровне.

**Литература.**

1. *C. Chakraborty*, *A. Joseph*, Machine Learning at Central Banks, Bank of

England Staff Working Paper, 674 (2017)
2. *D. Kreptsev, S. Seleznev*, Forecasting for the Russian Economy Using Small-Scale DSGE Models, Russian Journal of Money and Finance, 77:3 (2018), 51–67.
3. *B.P. Dixon, D.W. Jorgenson*, Handbook of Computable General Equilibrium Modeling, Elsevier B.V., North Holland, (2012).
4. *А.А. Шананин*. Двойственность по Янгу и агрегирование балансов // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2020, с. 81-85 [A.A. Shananin. Dvojstvennost' po Jangu i agregirovanie balansov // Doklady Rossijskoj akademii nauk. Matematika, informatika, processy upravlenija, 2020, s. 81-85 (In Russian)]
5. *A.A. Shananin*, Problem of Aggregating of an Input-Output Model and Duality Computational Mathematics and Mathematical Physics, 61 (2021), 153–166
6. *N.K. Obrosova, A.A. Shananin*, Young duality of variational inequalities. An application for the analysis of interactions in production networks, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 29:3 (2023), 88—105
7. *N. Obrosova, A. Shananin*, General Equilibrium Models in Production Networks with Substitution of Inputs In: Khachay, M., Kochetov, Y., Eremeev, A., Khamisov, O., Mazalov, V., Pardalos, P. (eds) Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2023. Lecture Notes in Computer Science, 13930 (2023) Springer, Cham.
8. *A. Boranbayev, N. Obrosova, A. Shananin*, Nonlinear input-output balance and Young duality: analysis of Covid-19 macroeconomic impact on Kazakhstan, Siberian Electronic Mathematical Reports, 19(2) (2022), 835–851
9. *N. Obrosova, A. Shananin*, A nonlinear Input-Output model with capacitiy constraints, Siberian Electronic Mathematical Reports, 21(2) (2024), 654–668
10. *Н.К.Обросова, А.А.Спиридонов, А.А.Шананин*. Оценка инфляционных рисков в условиях реструктуризации экономики в сетевой модели с инфраструктурными ограничениями // Siberian Electronic Mathematical Reports, 2024, т. 21, №2. [N.K.Obrosova, A.A.Spiridonov, A.A.Shananin. Ocenka infljacionnyh riskov v uslovijah restrukturizacii jekonomiki v setevoj modeli s infrastrukturnymi ogranichenijami // Siberian Electronic Mathematical Reports, 2024, t. 21, №2. (In Russian)]
11. *W.W. Leontief*, Quantitative Input-Output Relations in the Economic System of the United States, Review of Economics and Statistics, 18 (1936), 105–125
12. *W.W. Leontief*, The Structure of American Economy, 1919-1939: An Empirical Application of Equilibrium Analysis, Oxford University Press,

(1951)
13. *Ю.В. Яременко*. Теория и методология исследования многоуровневой экономики. – М.: Наука, 1997, 397 с. [Ju.V. Jaremenko. Teorija i metodologija issledovanija mnogourovnevoj jekonomiki. – M.: Nauka, 1997, 397 s. (In Russian)]
14. *R. Stone*, Input—Output and National Accounts, (1961)
15. *A.A. Ebiefung, M.M. Kostreva*, The generalized Leontief input-output model and its application to the choice of new technology, Ann Oper Res 44 (1993), 161—172
16. *F. Tanaka*, Applications of Leontief ’s input-output analysis in our economy, Academic Research Group, Faculty of Economics, Nagasaki Prefectural University, (2011)
17. *R.E. Miller, P.D. Blair*, Input-Output Analysis: Foundations and Extensions, Second Edition, Cambridge University Press, (2009).
18. *V.V. Ivanter*, Role of Input-Output Model in Macroeconomic Analysis and Forecasting, Stud. Russ. Econ. Dev., 29, (2018), 581—583
19. *A.A. Shirov*, Use of Input–Output Approach for Supporting Decisions in the Field of Economic Policy, Stud. Russ. Econ. Dev., 29 (2018), 588—597.
20. *I.D. Masakova*, The Russian Practice of Compiling Input-Output Tables: Problems and Prospects of Development, Stud. Russ. Econ. Dev., 30 (2019), 119–128
21. Федеральная служба государственной статистики. Официальная статистика, национальные счета, таблицы ресурсов и использования. https://rosstat.gov.ru/statistics/accounts. (дата обращения: 10.11.2024) [Federal'naja sluzhba gosudarstvennoj statistiki. Oficial'naja statistika, nacional'nye scheta, tablicy resursov i ispol'zovanija. https://rosstat.gov.ru/statistics/accounts. (data obrashhenija: 10.11.2024) (In Russian)]
22. Федеральная служба государственной статистики. Сборник «Труд и занятость в России» https://rosstat.gov.ru/folder/210/document/13210. (дата обращения: 10.11.2024) [Federal'naja sluzhba gosudarstvennoj statistiki. Oficial'naja statistika, nacional'nye scheta, tablicy resursov i ispol'zovanija. Sbornik «Trud i zanjatost' v Rossii» https://rosstat.gov.ru/folder/210/document/13210. (data obrashhenija: 10.11.2024) (In Russian)]

## Приложение

Таблица 1. Состав агрегированных комплексов экономики РФ.

| Комплекс | Список ОКВЭД |
|---|---|

| | |
|---|---|
| Обрабатывающий | A 01, C (10-12), C (13-15), C 18, C 21, C 23, C 26, C 27, C 28, C 29, C 30, C (31-32), C 33, F (41-43), G 45, J (62-63), M 71, M 72, M (74-75), S 95 |
| Инфраструктурный | D 35, E 36, E (37-39), H 49, H 51, J 61, O 84, P 85, Q 86, Q (87-88) |
| Услуги | G 47, H 52, H 53, I (55-56), J 58, J (59-60), M 73, N 77, N 78, N 79, N (80-82), R (90-92), R 93, S 94, S 96, T |
| Финансовый | K (64-66), L 68, M (69-70) |
| Экспортный | A 02, A 03, B (05-09), C 16, C 17, C 19, C 20, C 22, C 24, C 25, G 46, H 49, H 50 |

Таблица 2. Результат калибровки модели по данным 2017-2019 года.

| Комплекс | Обрабатывающий | Экспортирующий | Инфраструктурный | Услуги | Финансы |
|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | 0.48 | -0.47 | -0.48 | -0.71 | 0.95 |