1 Модель 3

Модель представляет из себя задачу домохозяйства на рынке ипотеки. Домохозяйство может расходовать средства на потребление $C(t) = \frac{M(t)}{\theta(t)}$. Задача рассматривается на горизонте $t \in [0, T]$, $T \to \infty$. Весь рассматриваемый временной интервал делится на 3 части. τ - момент, когда домохоязйство берет имоптеку, $\hat{T} + \tau$ - момент, когда ипотека погашена. То, что оптимизируется состоит из трех слагаемых, каждое из которых суммирует полезность на этих трех отрезках. $Co(V)$ - полезность от обладания квартирой. Калибруется по отношению к потреблению на основании макроданных. V - стоимость квартиры, F - первоначальный взнос, x_1, x_2, x_3 - состояние домохозяйства (его богатство), отличия между разными переменными состояния в ДУ, которые задают траекторию (см систему ниже). A - платеж по ипотеке, $A = A(r_M, \hat{T}, V, F)$, $\hat{T}$ - срок ипотеки, r_M - ставка по ипотеке. Задача решается при помощи отдельных подзадач, которые решаются при помощи принципа максимума Понтрягина, для каждой подзадачи находится экстремаль и в итоге решается общая задача, в которой функционал объединен.

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = \int_0^{\tau} \left(\frac{M}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\delta t} dt + \int_{\tau}^{\hat{T}+\tau} \left(\frac{M}{\theta} + Co(V)\right)^{\alpha} e^{-\delta t} dt + \int_{\hat{T}+\tau}^{T} \left(\frac{M}{\theta} + Co(V)\right)^{\alpha} e^{-\delta t} dt \tag{1}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = S - \frac{M}{\theta} + r(x_1 - M) \\ x_1(0) = x_0, \quad x_1(\tau) = F + \theta S \\ \frac{dx_2}{dt} = S - A - \frac{M}{\theta} + r(x_2 - M) \\ x_2(\tau) = x_1(\tau) - F = \theta S \\ \frac{dx_3}{dt} = S - \frac{M}{\theta} + r(x_3 - M) \\ x_3(\tau + \hat{T}) = x_2(\tau + \hat{T}) \\ x_3(T) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

1.1 Подзадача 1

$$J_1 = \int_0^{\tau} \left(\frac{M}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\delta t} dt \xrightarrow[M \geqslant 0]{} max \tag{3}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = S - \frac{M}{\theta} + r(x_1 - M) \tag{4}$$

$$x_1(0) = x_0, \quad x_1(\tau) = F + \theta S \tag{5}$$

Решаем задачу (3-5):

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = (\delta - r)\varphi_1 \quad \to \quad \varphi_1(t) = \varphi_1^0 e^{(\delta - r)t}$$

$$\mathcal{H} = \left(\frac{M}{\theta}\right)^{\alpha} + \varphi_1 \left(S - \frac{M}{\theta} + r(x_1 - M)\right)$$

Условие максимума:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M} = \frac{\alpha}{\theta} \left(\frac{M}{\theta}\right)^{\alpha - 1} - \varphi_1 \left(\frac{1 + r\theta}{\theta}\right) = 0$$

$$M^* = \theta\left(\frac{\alpha}{1+r\theta}\frac{1}{\varphi_1^0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} e^{-\frac{\delta-r}{1-\alpha}t}$$

Подставляем условие максимума на M в уравнение для $\dot{x}_1$.

$$\frac{dx_1}{dt} = S - \left(\frac{\alpha}{(1+r\theta)^\alpha}\frac{1}{\varphi_1^0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} e^{-\frac{\delta-r}{1-\alpha}t} + rx_1$$

Решением данного уравнения при начальном условии $x_1(0) = x_0$ является:

$$x_1(t) = \left(\frac{\alpha}{(1+r\theta)^\alpha}\frac{1}{\varphi_1^0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha}\left(e^{-\frac{\delta-r}{1-\alpha}t} - e^{rt}\right) + \frac{S}{r}\left(e^{rt}-1\right) + x_0 e^{rt} \tag{6}$$

Мы также можем найти значение для φ_1^0 из краевого условия $x_1(\tau) = \theta S + F$.

$$\left(\frac{1}{\varphi_1^0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{\delta - r\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{(1+r\theta)^\alpha}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}} \frac{(\theta S + F - \frac{S}{r}(e^{r\tau}-1) - x_0 e^{r\tau})}{e^{-\frac{\delta-r}{1-\alpha}\tau} - e^{r\tau}} \tag{7}$$

Тогда значение J_1:

$$J_1 = \int_0^\tau \left(\frac{M}{\theta}\right)^\alpha e^{-\delta t} dt =$$
$$= \left(\frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha}\right)^{1-\alpha}(1+r\theta)^{-\alpha}\left(x_0 + \frac{S}{r} - \left(\frac{S}{r} + \theta S + F\right)e^{-r\tau}\right)^\alpha \left(1 - e^{-\frac{\delta - r\alpha}{1-\alpha}\tau}\right)^{1-\alpha} \tag{8}$$

1.2 Подзадача 2

$$J_2 = \int_\tau^{\tau+\hat{T}} \left(\frac{M}{\theta} + Co(V)\right)^\alpha e^{-\delta t} dt \xrightarrow[M \geqslant 0]{} max \tag{9}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = S - A - \frac{M}{\theta} + r(x_2 - M) \tag{10}$$

$$x_2(\tau) = x_1(\tau) - F = \theta S \tag{11}$$

Решаем задачу (9-11):

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = (\delta - r)\varphi_2 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_2(t) = \varphi_2^0 e^{(\delta-r)(t-\tau)}$$

$$\mathcal{H} = \left(\frac{M}{\theta} + Co(V)\right)^\alpha + \varphi_2\left(S - A - \frac{M}{\theta} + r(x_2 - M)\right)$$

Условие максимума:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M} = \frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{M}{\theta} + Co(V)\right)^{\alpha-1} - \varphi_2\left(\frac{1+r\theta}{\theta}\right) = 0$$

$$M^* = \theta \left(\frac{\alpha}{1+r\theta} \frac{1}{\varphi_2^0} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} e^{-\frac{\delta-r}{1-\alpha}(t-\tau)} - \theta Co(V)$$

Подставим M^* в уравнение для $\dot{x}_2$.

$$\frac{dx_2}{dt} = S - A - \frac{M}{\theta} + r(x_2 - M) = S - A - \left(\frac{\alpha}{(1+r\theta)^\alpha} \frac{1}{\varphi_2^0} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} e^{-\frac{\delta-r}{1-\alpha}(t-\tau)} + Co(V)(1+r\theta) + rx_2$$

С учетом начального ограничения $x_2(\tau) = \theta S$:

$$x_2(t) = \left(\frac{S}{r} + \frac{Co(V)(1+r\theta)}{r} - \frac{A}{r} \right) \left(e^{r(t-\tau)} - 1 \right) + \theta S e^{r(t-\tau)} + \\ + \left(\frac{\alpha}{(1+r\theta)^\alpha} \frac{1}{\varphi_2^0} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha} \left(e^{-\frac{\delta-r}{1-\alpha}(t-\tau)} - e^{r(t-\tau)} \right) \tag{12}$$

Найдем J_2:

$$J_2 = \int_\tau^{\tau+\hat{T}} \left(\frac{M}{\theta} + Co(V) \right)^\alpha e^{-\delta t} dt = \left(\frac{\alpha}{1+r\theta} \frac{1}{\varphi_2^0} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\delta-\alpha r}{1-\alpha}\hat{T}} \right) e^{-\delta\tau} \tag{13}$$

1.3 Подзадача 3

$$J_3 = \int_{\tau+\hat{T}}^{T} \left(\frac{M}{\theta} + Co(V) \right)^\alpha e^{-\delta t} dt \xrightarrow[M \geqslant 0]{} max \tag{14}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = S - \frac{M}{\theta} + r(x_3 - M) \tag{15}$$

$$x_3(\tau + \hat{T}) = x_2(\tau + \hat{T}) \tag{16}$$

$$x_3(T) = 0 \tag{17}$$

Решаем задачу (14-17).

$$\varphi_3(t) = \varphi_3^0 e^{(\delta-r)(t-\tau-\hat{T})}$$

$$\mathcal{H} = \left(\frac{M}{\theta} + Co(V) \right)^\alpha + \varphi_3 \left(S - \frac{M}{\theta} + r(x_3 - M) \right)$$

Условие максимума:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M} = \frac{\alpha}{\theta} \left(\frac{M}{\theta} + Co(V) \right)^{\alpha-1} - \varphi_3 \left(\frac{1+r\theta}{\theta} \right) = 0$$

$$M^* = \theta \left(\frac{\alpha}{1+r\theta} \frac{1}{\varphi_3^0} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} e^{-\frac{\delta-r}{1-\alpha}(t-\tau-\hat{T})} - \theta Co(V)$$

Подставим в дифференциальное уравнение для x_3:

$$\frac{dx_3}{dt} = S - \left(\frac{\alpha}{(1+r\theta)^\alpha}\frac{1}{\varphi_3^0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} e^{-\frac{\delta-r}{1-\alpha}(t-\tau-\hat{T})} + Co(V)(1+r\theta) + rx_3$$

Выражение для $x_2(\tau+\hat{T})$:

$$x_2(\tau+\hat{T}) = \left(\frac{S}{r} + \frac{Co(V)(1+r\theta)}{r} - \frac{A}{r}\right)\left(e^{r\hat{T}} - 1\right) + \theta S e^{r\hat{T}} + \\ + \left(\frac{\alpha}{(1+r\theta)^\alpha}\frac{1}{\varphi_2^0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha}\left(e^{-\frac{\delta-r}{1-\alpha}\hat{T}} - e^{r\hat{T}}\right) \tag{18}$$

Выражение для $x_3(\tau+\hat{T})$:

$$x_3(\tau+\hat{T}) = \left(\frac{\alpha}{(1+r\theta)^\alpha}\frac{1}{\varphi_3^0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha} - \frac{S}{r} - \frac{(1+r\theta)Co(V)}{r} + \hat{c}_3 e^{r(\tau+\hat{T})} \tag{19}$$

С учетом начального ограничения $x_3(\tau+\hat{T}) = x_2(\tau+\hat{T})$

$$x_3(t) = \theta S e^{r(t-\tau)} + \left(\frac{S}{r} + \frac{Co(V)(1+r\theta)}{r}\right)\left(e^{r(t-\tau)} - 1\right) + \frac{A}{r}\left(e^{r(t-\tau-\hat{T})} - e^{r(t-\tau)}\right) + \\ + \left(\frac{\alpha}{(1+r\theta)^\alpha}\frac{1}{\varphi_2^0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha}\left(e^{-\frac{\delta-r\alpha}{1-\alpha}\hat{T}} e^{r(t-\tau)} - e^{r(t-\tau)}\right) + \\ + \left(\frac{\alpha}{(1+r\theta)^\alpha}\frac{1}{\varphi_3^0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha}\left(e^{-\frac{\delta-r}{1-\alpha}(t-\tau-\hat{T})} - e^{r(t-\tau-\hat{T})}\right) \tag{20}$$

$x_3(T) = 0$, $x_3(T)e^{-rT} = 0$. Пусть $T \to \infty$, тогда:

$$\left(\theta S + \frac{S}{r} + \frac{Co(V)(1+r\theta)}{r} - \frac{A}{r}\right) e^{-r\tau} + \frac{A}{r} e^{-r(\tau+\hat{T})} + \\ + \frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha}\left[\left(\frac{\alpha}{(1+r\theta)^\alpha}\frac{1}{\varphi_2^0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(e^{-\frac{\delta-r\alpha}{1-\alpha}\hat{T}} e^{-r\tau} - e^{-r\tau}\right) - \left(\frac{\alpha}{(1+r\theta)^\alpha}\frac{1}{\varphi_3^0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} e^{-r(\tau+\hat{T})}\right] = 0 \tag{21}$$

Найдем J_3:

$$J_3 = \int_{\tau+\hat{T}}^{T} \left(\frac{M}{\theta} + Co(V)\right)^\alpha e^{-\delta t} dt = \left(\frac{\alpha}{1+r\theta}\frac{1}{\varphi_3^0}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha}\left(e^{-\delta(\tau+\hat{T})} - e^{\frac{\alpha(\delta-r)}{1-\alpha}(\tau+\hat{T})} e^{-\frac{\delta-r\alpha}{1-\alpha}T}\right) \tag{22}$$

Учтывая $T \to \infty$:

$$J_3 = \left(\frac{\alpha}{1+r\theta}\frac{1}{\varphi_3^0}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha} e^{-\delta(\tau+\hat{T})} \tag{23}$$

Из (21) можно найти:

$$\left(\frac{1}{\varphi_3^0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{\delta - r\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{(1+r\theta)^\alpha}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}}\left[\left(\theta S + \frac{S}{r} + \frac{Co(V)(1+r\theta)}{r} - \frac{A}{r}\right)e^{r\hat{T}} + \frac{A}{r} + \right.$$
$$\left. + \frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha}\left(\frac{\alpha}{(1+r\theta)^\alpha}\frac{1}{\varphi_2^0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(e^{-\frac{\delta - r}{1-\alpha}\hat{T}} - e^{r\hat{T}}\right)\right] \tag{24}$$

Можно подставить (24) в (23):

$$J_3 = \left(\frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha}\right)^{1-\alpha}(1+r\theta)^{-\alpha}e^{-\delta(\tau+\hat{T})}\left[\left(\theta S + \frac{S}{r} + \frac{Co(V)(1+r\theta)}{r} - \frac{A}{r}\right)e^{-r\hat{T}} + \frac{A}{r} + \right.$$
$$\left. + \frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha}\left(\frac{\alpha}{(1+r\theta)^\alpha}\frac{1}{\varphi_2^0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(e^{-\frac{\delta - r}{1-\alpha}\hat{T}} - e^{r\hat{T}}\right)\right]^\alpha \tag{25}$$

1.4 Общая задача

$$J = J_1 + J_2 + J_3 \xrightarrow[\tau \geqslant 0, \varphi_2^0]{} max \tag{26}$$

Подставим (8), (13), (25) в (26):

$$J = \left(\frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha}\right)^{1-\alpha}(1+r\theta)^{-\alpha}\left(x_0 + \frac{S}{r} - \left(\frac{S}{r} + \theta S + F\right)e^{-r\tau}\right)^\alpha\left(1 - e^{-\frac{\delta - r\alpha}{1-\alpha}\tau}\right)^{1-\alpha} +$$
$$+ \left(\frac{\alpha}{1+r\theta}\frac{1}{\varphi_2^0}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\delta - \alpha r}{1-\alpha}\hat{T}}\right)e^{-\delta\tau} +$$
$$+ \left(\frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha}\right)^{1-\alpha}(1+r\theta)^{-\alpha}e^{-\delta(\tau+\hat{T})}\left[\left(\theta S + \frac{S}{r} + \frac{Co(V)(1+r\theta)}{r} - \frac{A}{r}\right)e^{-r\hat{T}} + \frac{A}{r} + \right.$$
$$\left. + \frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha}\left(\frac{\alpha}{(1+r\theta)^\alpha}\frac{1}{\varphi_2^0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(e^{-\frac{\delta - r}{1-\alpha}\hat{T}} - e^{r\hat{T}}\right)\right]^\alpha \xrightarrow[\tau \geqslant 0, \varphi_2^0]{} max \tag{27}$$

Выпишем условия первого порядка:

$$\frac{\partial J}{\partial \tau} = \left(\frac{1-\alpha}{\delta - \alpha r}\right)^{1-\alpha}(1+r\theta)^{-\alpha}\left[(\delta - \alpha r)\left(x_0 + \frac{S}{r} - \left(\frac{S}{r} + \theta S + F\right)e^{-r\tau}\right)^\alpha\left(1 - e^{-\frac{\delta - \alpha r}{1-\alpha}\tau}\right)^{-\alpha}e^{-\frac{\delta - \alpha r}{1-\alpha}\tau} + \right.$$
$$+ \alpha r\left(\frac{S}{r} + \theta S + F\right)\left(x_0 + \frac{S}{r} - \left(\frac{S}{r} + \theta S + F\right)e^{-r\tau}\right)^{\alpha - 1}\left(1 - e^{-\frac{\delta - \alpha r}{1-\alpha}\tau}\right)^{1-\alpha}e^{-r\tau} -$$
$$\left. - \delta e^{\delta(\tau+\hat{T})}\left[\left(\theta S + \frac{S}{r} + \frac{Co(V)(1+r\theta)}{r} - \frac{A}{r}\right)e^{-r\hat{T}} + \frac{A}{r} + \frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha}\left(\frac{\alpha}{(1+r\theta)^\alpha}\frac{1}{\varphi_2^0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(e^{-\frac{\delta - r}{1-\alpha}\hat{T}} - e^{r\hat{T}}\right)\right]^\alpha\right] -$$
$$- \delta\left(\frac{\alpha}{1+r\theta}\frac{1}{\varphi_2^0}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\delta - \alpha r}{1-\alpha}\hat{T}}\right)e^{-\delta\tau} = 0 \tag{28}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial \varphi_2^0} = \frac{\alpha}{\delta - \alpha r} \Bigg[& \left(\frac{\alpha}{1+r\theta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(e^{-\frac{\delta - r\alpha}{1-\alpha}\hat{T}} - 1\right) e^{-\delta\tau} \left(\varphi_2^0\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}} + \left(\frac{1-\alpha}{\delta - \alpha r}\right)^{2-\alpha} (1+r\theta)^{1-\alpha} \left(\frac{\alpha}{1+r\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \\
& \cdot \left(e^{-\frac{\delta - r}{1-\alpha}\hat{T}} - e^{r\hat{T}}\right) e^{-\delta(\tau + \hat{T})} \Bigg[\left(\theta S + \frac{S}{r} + \frac{Co(V)(1+r\theta)}{r} - \frac{A}{r}\right) e^{-r\hat{T}} + \frac{A}{r} + \\
& + \frac{1-\alpha}{\delta - r\alpha} \left(\frac{\alpha}{(1+r\theta)^{\alpha}} \frac{1}{\varphi_2^0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(e^{-\frac{\delta - r}{1-\alpha}\hat{T}} - e^{r\hat{T}}\right) \Bigg]^{\alpha - 1} \left(\varphi_2^0\right)^{-\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} \Bigg] = 0 \qquad (29)
\end{aligned}
$$