МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ БЕЗОПАСНОСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Дисциплина: «Вычислительная математика»

Скалярное и векторной произведение векторов

Выполнил:

студент группы N3247

Василев Васил Николаев

Проверил:

Гришенцев Алексей Юрьевич

Санкт-Петербург, 2022

1. Техническое задание

Разработать алгоритм и написать программу реализующую: скалярное и векторное произведение векторов. Исходные вектора вводить в программу из консоли или из файла. Предусмотреть возможность выбора размера векторов без перекомпиляции программы, размер векторов , где . Оценить вычислительную сложность скалярного и векторного произведения векторов. Число презентаций на группу за всё время семестра, не более: 2

2. Теория

Скалярное произведение — операция над двумя векторами, результатом которой является скаляр (число).

Обозначения: (a, b), $a{\cdot}b$, $\langle a, b\rangle$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{b_k} = a_1 \overline{b_1} + a_2 \overline{b_2} + \cdots + a_n \overline{b_n}.$$

2. Теория

Свойства

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| pr_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| pr_{\vec{b}} \vec{a}$$

$$|\lambda \vec{a}| \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \lambda \vec{b}), \text{где } \lambda \ - \text{числова константа}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

2. Теория

С помощью скалярного произведения можно дать определение основных метрических понятий в пространстве: длины вектора и угла между парой векторов.

1. Длиной вектора в n-мерном пространстве называется неотрицательное число

$$|x| = +\sqrt{(x,x)}$$

2. Углом $\boldsymbol{\varphi}$ между двумя векторами x и y называется такой угол (в пределах от 0 до π), что

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x||y|}$$

Отсюда вытекает известная формула скалярного произведения:

$$(x,y) = |x||y|\,cos\,\varphi$$

2. Теория

Докажем, что $(a,b)=|a||b|\ \ cos\theta$

По теореме косинусов:

$$\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2=\|\vec{a}\|^2+\left\|\vec{b}\right\|^2-2\,\|\vec{a}\|\ \ \left\|\vec{b}\right\|\cos\theta$$

По свойствам скалярного произведения:

$$\begin{aligned}\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2&=\left(\vec{a}-\vec{b}\right).\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\\&=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}\\&=\|\vec{a}\|^2-2\vec{a}.\vec{b}+\left\|\vec{b}\right\|^2\end{aligned}$$

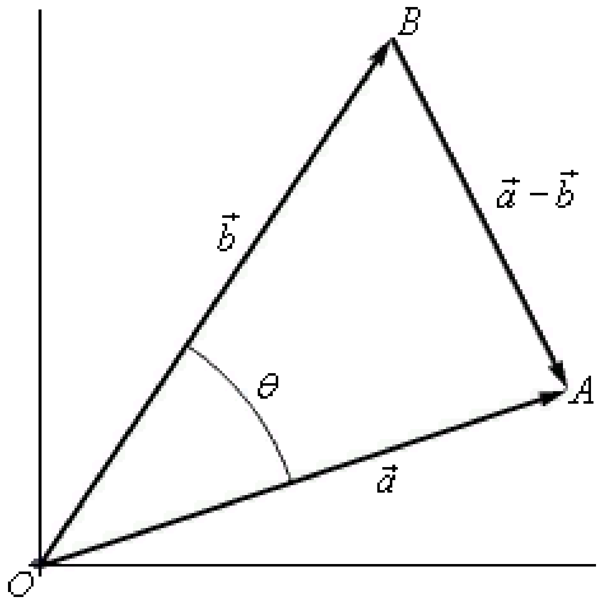
Приравнивая два выражения, получаем:

$$\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2=\|\vec{a}\|^2+\left\|\vec{b}\right\|^2-2\,\|\vec{a}\|\ \ \left\|\vec{b}\right\|\cos\theta$$

$$\|\vec{a}\|^2-2\vec{a}.\vec{b}+\left\|\vec{b}\right\|^2=\|\vec{a}\|^2+\left\|\vec{b}\right\|^2-2\,\|\vec{a}\|\ \ \left\|\vec{b}\right\|\cos\theta$$

$$-2\vec{a}.\vec{b}=-2\,\|\vec{a}\|\ \ \left\|\vec{b}\right\|\cos\theta$$

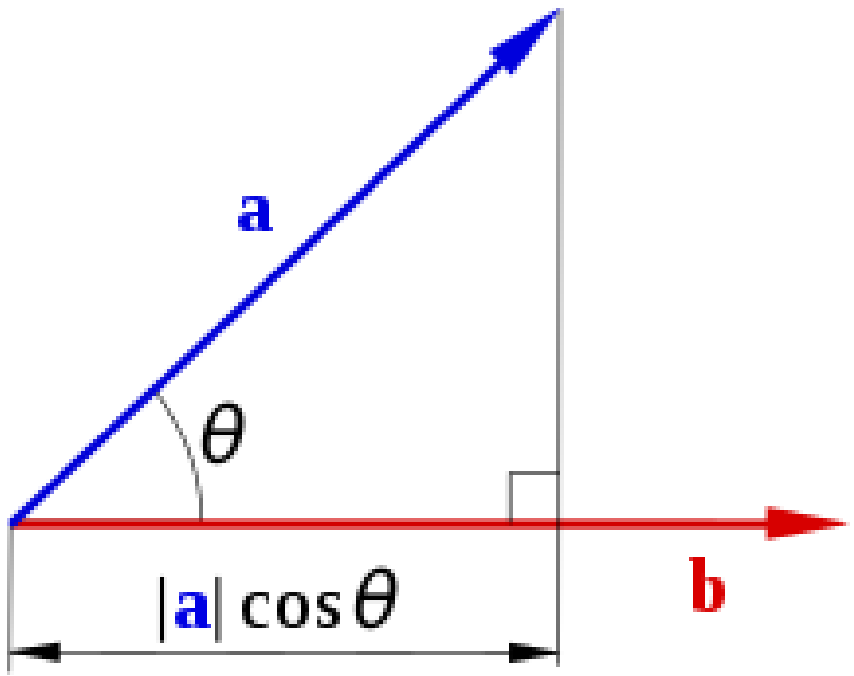
$$\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\ \ \left\|\vec{b}\right\|\cos\theta$$



2. Теория

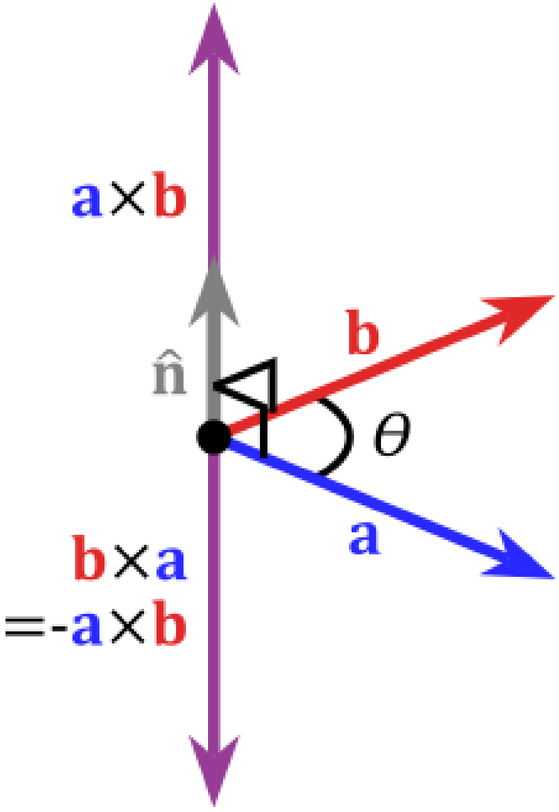
- $(a, b) = |a||b|cos\theta = |b|pr_b a,$
- Если b – единичный вектор, то **геометрический смысл скалярного произведения –** это проекция вектора a на направление, определяемое вектором b_0.

- Равносильное определение: скалярное произведение есть произведение длины проекции первого вектора на второй и длины второго вектора (см. рисунок). Если хотя бы один из векторов нулевой, то произведение считается равным нулю



2. Теория

- **Векторным произведением** вектора a на вектор b в трёхмерном евклидовом пространстве называется вектор c, удовлетворяющий следующим требованиям:
- длина вектора c равна произведению длин векторов a и b на синус угла между ними (т. е. площади параллелограмма, образованного векторами a и b);
- вектор c ортогонален каждому из векторов a и b;
- вектор c направлен так, что тройка векторов a, b, c является правой
- Обозначение: $c = a \times b = [a, b]$



2. Теория

В n-мерном пространстве каждому набору из (n-1) векторов можно сопоставить их "векторное произведение", которое будет аналогом обычного векторного произведения

$$\mathbf{P}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_{n-1}}) = \det\left(\begin{pmatrix} \mathbf{e_1} \\ \vdots \\ \mathbf{e_n} \end{pmatrix}, \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_{n-1}}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \cdots & \mathbf{e_n} \\ a_{1_1} & a_{1_2} & \cdots & a_{1_n} \\ a_{2_1} & a_{2_2} & \cdots & a_{2_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1_1} & a_{n-1_2} & \cdots & a_{n-1_n} \end{vmatrix}.$$

Если n = 2:

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

3. Листинг

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main() {
  int n, m;
  float ratio, det;
  printf("Скалярное или векторное произведение в n-мерном пространстве\n");
  printf("n равно:");
  scanf("%d", &n); if (n < 2) return 0;
  printf("число векторов:");
  scanf("%d", &m); if (m < 2) return 0;
  float arr[m+1][n];
  float arr2[m+1][n];
  int n2=n-1;

  for (size_t i = 0; i <= n; i=i+2) {
    arr[m][i] = 1;
  }
  for (size_t i = 1; i <= n; i=i+2) {
    arr[m][i] = -1;
  }

  printf("Координаты %d-мерных векторов\n",n);
  for (size_t i = 0; i < m; i++) {
    for (size_t j = 0; j < n; j++)
      scanf("%f", &arr[i][j]);
}
  for (size_t i = 0; i < m; i++) {
    printf("Вектор %ld = {", i+1);
    printf("%0.3f", arr[i][0]);
    for (size_t j = 1; j < n; j++) printf(", %0.3f", arr[i][j]);
    printf("}\n");
  }
```

```c
//Скалярное произведение
float sproizvedenie = 0;
for (size_t i = 0; i < n; i++) {
sproizvedenie = sproizvedenie + arr[0][i] * arr[1][i];
}
printf("Скалярное произведение векторов 1 и 2 = %0.3f\n", sproizvedenie);

if (n-1 != m && (n != 2 && m != 2)) {
  printf("Нельзя посчитать векторное произведение\n");
  return 0;
}
if (n == 2 && m == 2) {
  printf("Векторное произведение = {0, 0, %0.3f}\n", arr[0][0]*arr[1][1]-
arr[0][1]*arr[1][0]);
}
else{
```

3. Листинг

```
int v;
    for (size_t i = 0; i < n; i++) {
      for (size_t k = 0; k < m; k++) {
        v=0;

        for (size_t j = 0; j < n; j++) {
          if (j==i) v++;

          arr2[k][j] = arr[k][v];
          v++;
        }
      }

      for (size_t i = 0; i < m; i++) {
        for (size_t j = 0; j < n2; j++) printf("%0.2f ", arr2[i][j]);
        printf("\n");
      }
      //---
      det =1;
      for(size_t i=0;i< n2;i++)
      {
         for(size_t j=i+1;j< n2;j++)
         {
            ratio = arr2[j][i]/arr2[i][i];

            for(size_t k=0;k< n2;k++)
            {
               arr2[j][k] = arr2[j][k] - ratio*arr2[i][k];
            }
         }
      }

      for(size_t i=0;i< n2;i++)
        {
            det = det * arr2[i][i];
        }

      printf("Данная матрица имеет детерминант: %0.3f\n\n", det);
      //---

      arr[m][i] = arr[m][i] * det;
    }

    printf("Векторное произведение = {%0.3f", arr[m][0]);
    for (size_t i = 1; i < n; i++) {
      printf(", %0.3f",arr[m][i]);
    }
    printf("}\n");
  }
  return 0;
}
```

- скалярное произведение векторов: O(n)
- векторное произведение векторов: при рекурсивном нахождении определителя - O(n!)

4. Заключение

Скалярное или векторное произведение в n-мерном пространстве
n равно:3
число векторов:2
Координаты 3-мерных векторов

1 2 3
3 4 5
Вектор 1 = {1.000, 2.000, 3.000}
Вектор 2 = {3.000, 4.000, 5.000}
Скалярное произведение векторов 1 и 2 = 26.000
2.00 3.00
4.00 5.00
Данная матрица имеет детерминант: -2.000

1.00 3.00
3.00 5.00
Данная матрица имеет детерминант: -4.000

1.00 2.00
3.00 4.00
Данная матрица имеет детерминант: -2.000

Векторное произведение = {-2.000, 4.000, -2.000}

Скалярное или векторное произведение в n-мерном пространстве
n равно:2
число векторов:2
Координаты 2-мерных векторов

1.2 3
5.3 1
Вектор 1 = {1.200, 3.000}
Вектор 2 = {5.300, 1.000}
Скалярное произведение векторов 1 и 2 = 9.360
Векторное произведение = {0, 0, -14.700}

4. Заключение

Скалярное или векторное произведение в n-мерном пространстве
n равно:5
число векторов:4
Координаты 5-мерных векторов
9 8 7 6 5
1 2 3 4 8

9 8 2 4 6
7 5 3 5 1
Вектор 1 = {9.000, 8.000, 7.000, 6.000, 5.000}
Вектор 2 = {1.000, 2.000, 3.000, 4.000, 8.000}
Вектор 3 = {9.000, 8.000, 2.000, 4.000, 6.000}
Вектор 4 = {7.000, 5.000, 3.000, 5.000, 1.000}
Скалярное произведение векторов 1 и 2 = 110.000
8.00 7.00 6.00 5.00
2.00 3.00 4.00 8.00
8.00 2.00 4.00 6.00
5.00 3.00 5.00 1.00
Данная матрица имеет детерминант: -696.000

9.00 7.00 6.00 5.00
1.00 3.00 4.00 8.00
9.00 2.00 4.00 6.00
7.00 3.00 5.00 1.00
Данная матрица имеет детерминант: -837.000

9.00 8.00 6.00 5.00
1.00 2.00 4.00 8.00
9.00 8.00 4.00 6.00
7.00 5.00 5.00 1.00
Данная матрица имеет детерминант: -146.000

9.00 8.00 7.00 5.00
1.00 2.00 3.00 8.00
9.00 8.00 2.00 6.00
7.00 5.00 3.00 1.00
Данная матрица имеет детерминант: -265.000

9.00 8.00 7.00 6.00
1.00 2.00 3.00 4.00
9.00 8.00 2.00 4.00
7.00 5.00 3.00 5.00
Данная матрица имеет детерминант: -200.000

Векторное произведение = {-696.000, 837.000, -146.000, 265.000, -200.000}

5. Список литературы

Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики // М.: Наука, 1970. – 664 с.

https://ru.wikipedia.org/wiki/Скалярное_произведение

https://ru.wikipedia.org/wiki/Векторное_произведение

Спасибо за внимание!