МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ БЕЗОПАСНОСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Дисциплина: «Вычислительная математика»

Сплайн интерполяция

Выполнил:

студент группы N3247

Василев Васил Николаев

Проверил:

Гришенцев Алексей Юрьевич

Санкт-Петербург, 2022

1. Техническое задание

Разработать алгоритм и написать программу реализующую: найти приближение функции заданной в равноотстоящих точках, т.е. функции заданной в виде последовательности чисел, с помощью сплайна третьей степени. Произвести анализ результатов. Предусмотреть возможность выбора размера последовательности преобразования без перекомпиляции программы, размер последовательности , где . Оценить вычислительную сложность.

2. Теория

Кубический сплайн — гладкая функция, область определения которой разбита на конечное число отрезков, на каждом из которых она совпадает с некоторым кубическим многочленом (полиномом).

Функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$, разбитом на части $[x_{i-1}, x_i]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Кубическим сплайном называется функция $S(x)$, которая:

- на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ является многочленом степени не выше третьей;
- имеет непрерывные первую и вторую производные на всём отрезке $[a, b]$;
- в точках x_i выполняется равенство $S(x_i) = f(x_i)$, т. е. сплайн $S(x)$ интерполирует функцию f в точках x_1 .

2. Теория

Для однозначного задания сплайна перечисленных условий недостаточно, для построения сплайна необходимо наложить дополнительные требования — граничные условия:

- "Естественный сплайн" — граничные условия вида: $S''(a) = S''(b) = 0$;
- Непрерывность второй производной — граничные условия вида: $S'''(a) = S'''(b) = 0$;
- Периодический сплайн — граничные условия вида: $S'(a) = S'(b)$ и $S''(a) = S''(b)$.

Теорема: Для любой функции f и любого разбиения отрезка [a, b] на части $[x_{i-1}, x_i]$ существует ровно один естественный сплайн $S_i(x)$, удовлетворяющий перечисленным выше условиям.

Эта теорема является следствием более общей теоремы Шёнберга-Уитни об условиях существования интерполяционного сплайна.

2. Теория

На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = [1 , N]$ функция $S(x)$ есть полином третьей степени $S_i(x)$, коэффициенты которого надо определить. Запишем для удобства $S_i(x)$ в виде:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i (x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

тогда

$$S_i(x_i) = a_i,\ \ S_i'(x_i) = b_i,\ \ S_i''(x_i) = 2c_i,\ \ S_i'''(x_i) = 6d_i\ ,\ i = [1, N].$$

2. Теория

Условия непрерывности всех производных до второго порядка включительно записываются в виде

$S_i(x_{i-1}) = S_{i-1}(x_{i-1})$,

$S_i'(x_{i-1}) = S_{i-1}'(x_{i-1})$,

$S_i''(x_{i-1}) = S_{i-1}''(x_{i-1})$,

где i меняется от 1 до N ,а условия интерполяции в виде

$S_i(x_i) = f(x_i)$.

2. Теория

Обозначим: $h_i = x_i - x_{i-1}$ $i = [1, N]$, $f_i = f(x_i)$ $i = [0, N]$

Отсюда получаем формулы для вычисления коэффициентов "Естественного сплайна":

$a_i = f(x_i)$;

$d_i = (c_i - c_{i-1})/(3 \cdot h_i)$;

$b_i = (a_i - a_{i-1})/h_i + (2 \cdot c_i + c_{i-1}) \cdot h_i /3$;

$c_{i-1} \cdot h_i + 2 \cdot c_i \cdot (h_i + h_{i+1}) + c_{i+1} \cdot h_{i+1} = 3 \cdot ((a_{i+1} - a_i)/h_{i+1} - (a_i - a_{i-1})/h_i)$,

причем $c_N = S''(x_N) = 0$ и $c_1 - 3 \cdot d_1 \cdot h_1 = S''(x_0) = 0$.

3. Листинг

```
#include<stdio.h>
#include <string.h>
struct point
{
  double x;
  double y;
};
int main(int argc, char const *argv[]) {
  int csv = 0, t = 50;
if (argc == 2) {
  if (!strcmp(argv[1], "csv")) {
    csv = 1;
  }
  else if (!strcmp(argv[1], "nocsv")) {
    csv = -1;
  }
}
  long N;
  for (;;) {
    if (csv != 1) printf("Число точек: \n");
    scanf("%ld",&N );
    if (N >= 5) break;
    if (csv != 1) printf("Число точек должно быть больше или равно 5\n");
  }
  struct point tochka[N-1];
  double a[N], b[N-1], c[N], d[N-1], h[N-1], a2[N-1], l[N], m[N], z[N], s, x, y;
  if (csv != 1) printf("Координаты точек\n");
  for (size_t i = 0; i < N; i++) {
    if (csv != 1) printf("Точка %ld: ", i+1);
    scanf("%lf %lf", &tochka[i].x, &tochka[i].y);
  }
  if (csv != 1) printf("\n");
  for (size_t i = 0; i < N; i++) {
    if (csv != 1) printf("Точка %ld = (%0.3lf, %0.3lf)\n", i+1, tochka[i].x, tochka[i].y);
  }
  if (csv == 0) printf("Сколько точек вычислить между xi и xi+1\n");
  if (csv != -1) scanf("%d", &t);
```

```
for (size_t i = 0; i < N; i++) a[i] = tochka[i].y;
  for (size_t i = 0; i <= N-2; i++) {
    h[i] = tochka[i+1].x - tochka[i].x;
  }
  for (size_t i = 1; i <= N-2; i++) {
    a2[i] = 3*(a[i+1]-a[i])/h[i]-3*(a[i]-a[i-1])/h[i-1];
  }
  l[0]=1;
  m[0]=0;
  z[0]=0;
  for (size_t i = 1; i <= N-2; i++) {
    l[i] = 2*(tochka[i+1].x-tochka[i-1].x)-h[i-1]*m[i-1];
    m[i] = h[i]/l[i];
    z[i] = (a2[i]-h[i-1]*z[i-1])/l[i];
  }
  l[N] = 1;
  z[N] = 0;
  c[N] = 0;
  for (int i = N-2; i >= 0; i--) {
    c[i] = z[i]-m[i]*c[i+1];
    b[i] = (a[i+1]-a[i])/h[i]-h[i]*(c[i+1]+2*c[i])/3;
    d[i] = (c[i+1]-c[i])/(3*h[i]);
  }
  for (size_t i = 0; i < N-1; i++) {
    if (csv != 1) printf("a[%ld]=%0.3lf, b[%ld]=%0.3lf, c[%ld]=%0.3lf, d[%ld]=%0.3lf\n", i, a[i],
      i, b[i], i, c[i], i, d[i]);
  }
```

3. Листинг

```
if (csv != -1) {
    printf("\n");
      for (size_t i = 0; i < N-1; i++) {
      s = h[i]/t;
      x = tochka[i].x;
      if (csv != -1) printf("%0.4lf,%0.4lf\n", tochka[i].x, tochka[i].y);
        for (size_t j = 0; j < t-1; j++) {
          x = x+s;
          y = a[i] + b[i]*(x-tochka[i].x)+c[i]*(x-tochka[i].x)*(x-tochka[i].x)+d[i]*(x-tochka[i].x)*(x-tochka[i].x)*(x-tochka[i].x);
          if (csv != -1) printf("%0.4lf,%0.4lf\n", x, y);
        }
      }
    if (csv != -1 || csv) printf("%0.4lf,%0.4lf\n", tochka[N-1].x, tochka[N-1].y);
  }
  return 0;
}
```

Сложность:

- Кубический сплайн: O(n)

4. Заключение

Число точек:

5

Координаты точек

Точка 1: 1 2

Точка 2: 2 3

Точка 3: 4 1

Точка 4: 7 4

Точка 5: 10 12

Точка 1 = (1.000, 2.000)

Точка 2 = (2.000, 3.000)

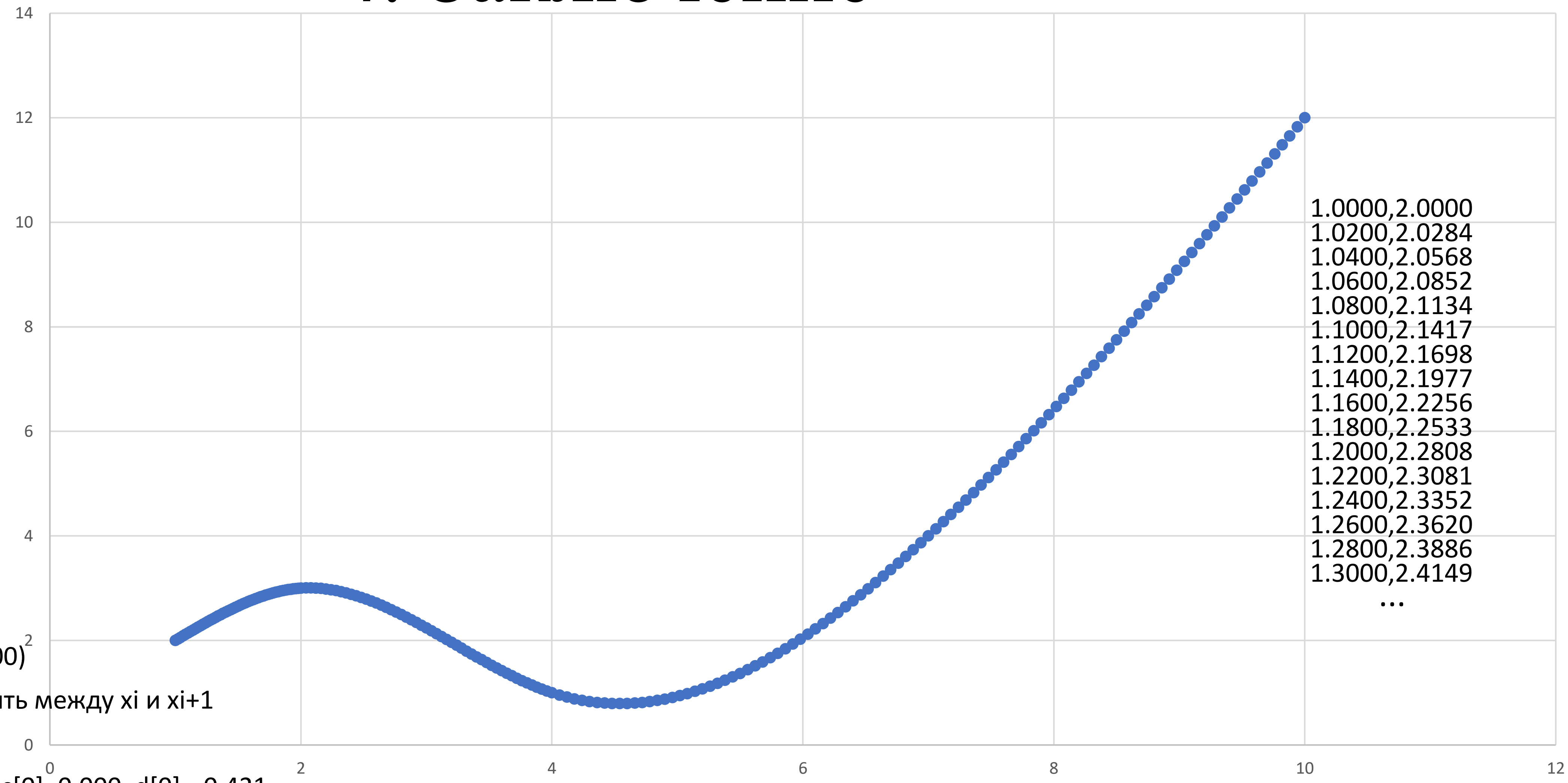
Точка 3 = (4.000, 1.000)

Точка 4 = (7.000, 4.000)

Точка 5 = (10.000, 12.000)

Сколько точек вычислить между xi и xi+1

50



1.0000,2.0000
1.0200,2.0284
1.0400,2.0568
1.0600,2.0852
1.0800,2.1134
1.1000,2.1417
1.1200,2.1698
1.1400,2.1977
1.1600,2.2256
1.1800,2.2533
1.2000,2.2808
1.2200,2.3081
1.2400,2.3352
1.2600,2.3620
1.2800,2.3886
1.3000,2.4149
...

a[0]=2.000, b[0]=1.421, c[0]=0.000, d[0]=-0.421

a[1]=3.000, b[1]=0.159, c[1]=-1.262, d[1]=0.341

a[2]=1.000, b[2]=-0.793, c[2]=0.786, d[2]=-0.063

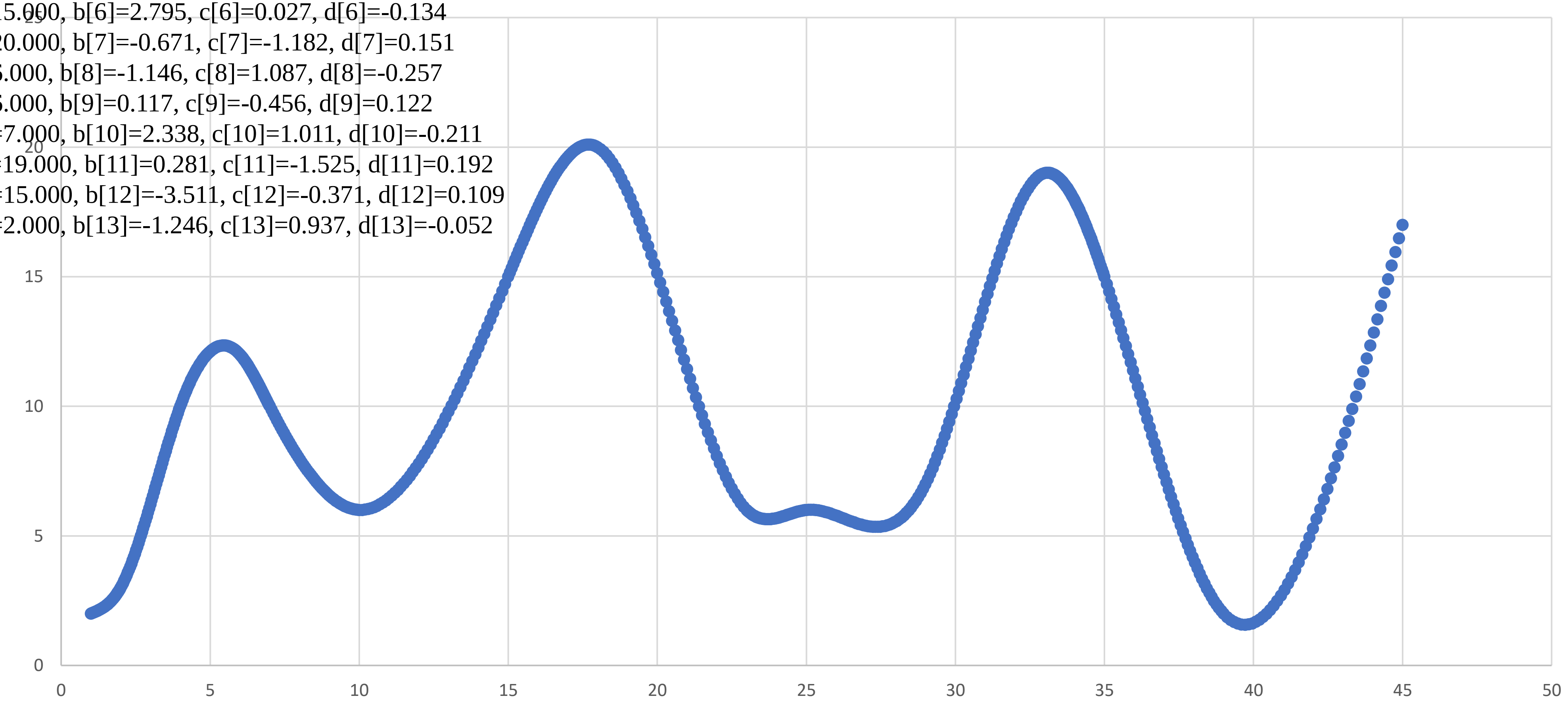
a[3]=4.000, b[3]=2.227, c[3]=0.220, d[3]=-0.024

4. Заключение

Число точек:
15
Координаты точек
Точка 1: 1 2
Точка 2: 2 3
Точка 3: 4 10
Точка 4: 6 12
Точка 5: 7 10
Точка 6: 10 6
Точка 7: 15 15
Точка 8: 18 20
Точка 9: 23 6
Точка 10: 25 6
Точка 11: 29 7
Точка 12: 33 19
Точка 13: 35 15
Точка 14: 39 2
Точка 15: 45 17

a[0]=2.000, b[0]=0.468, c[0]=0.000, d[0]=0.532
a[1]=3.000, b[1]=2.065, c[1]=1.597, d[1]=-0.440
a[2]=10.000, b[2]=3.177, c[2]=-1.040, d[2]=-0.024
a[3]=12.000, b[3]=-1.274, c[3]=-1.186, d[3]=0.460
a[4]=10.000, b[4]=-2.265, c[4]=0.195, d[4]=0.039
a[5]=6.000, b[5]=-0.054, c[5]=0.542, d[5]=-0.034
a[6]=15.000, b[6]=2.795, c[6]=0.027, d[6]=-0.134
a[7]=20.000, b[7]=-0.671, c[7]=-1.182, d[7]=0.151
a[8]=6.000, b[8]=-1.146, c[8]=1.087, d[8]=-0.257
a[9]=6.000, b[9]=0.117, c[9]=-0.456, d[9]=0.122
a[10]=7.000, b[10]=2.338, c[10]=1.011, d[10]=-0.211
a[11]=19.000, b[11]=0.281, c[11]=-1.525, d[11]=0.192
a[12]=15.000, b[12]=-3.511, c[12]=-0.371, d[12]=0.109
a[13]=2.000, b[13]=-1.246, c[13]=0.937, d[13]=-0.052

Точка 1 = (1.000, 2.000)
Точка 2 = (2.000, 3.000)
Точка 3 = (4.000, 10.000)
Точка 4 = (6.000, 12.000)
Точка 5 = (7.000, 10.000)
Точка 6 = (10.000, 6.000)
Точка 7 = (15.000, 15.000)
Точка 8 = (18.000, 20.000)
Точка 9 = (23.000, 6.000)
Точка 10 = (25.000, 6.000)
Точка 11 = (29.000, 7.000)
Точка 12 = (33.000, 19.000)
Точка 13 = (35.000, 15.000)
Точка 14 = (39.000, 2.000)
Точка 15 = (45.000, 17.000)



5. Список литературы

Numerical Analysis Richard L. Burden J. Douglas Faires

https://ru.wikipedia.org/wiki/Кубический_сплайн

Спасибо за внимание!