Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчет по практикуму

«Применение быстрого преобразования Фурье в Matlab»

Студент 315 группы
М. В. Миловидов

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2024

1 Постановка задачи

Получить аппроксимацию преобразования Фурье F(λ) для каждой функции f(t) из следующего набора:

$$\operatorname{arctg}(t/2) - \operatorname{arctg}(t), \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sin(2t), 3|t| \le 1, \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}, \tag{2}$$

$$\frac{e^{-2|t|}}{1 + 2\operatorname{arctg}^2(t)}, \tag{3}$$

$$\frac{\sin(t^3)}{t^2}, \tag{4}$$

при помощи быстрого преобразования Фурье (БПФ), выбирая различные шаги дискретизации исходной функции и различные окна, ограничивающие область определения f(t). Построить графики F(λ). Для первых двух функций f(t) вычислить F(λ) в явном виде и сравнить графики F(λ), полученные из аналитического представления F(λ) и из аппроксимации через БПФ.

Должна быть реализована функция plotFT(hFigure, fHandle, fFTHandle, step, inpLimVec, outLimVec). Входные аргументы этой функции следующие:

hFigure — handle существующей фигуры с 2 осями для графиков, в которую осуществляется вывод графиков. При от- сутствии осей (пустая фигура) должны быть созданы отдельные оси для вывода соответственно действительной и мнимой части преобразования Фурье F(λ). При наличии осей выводить новые графики в них, предварительно очистив их от старых графиков (о том, как это сделать, см. комментарии ниже о хранении метаинформации в свойстве UserData). При этом при отсутствии необязательного параметра outLimVec (см. ниже) пределы осей абсцисс не должны меняться (и быть одинаковыми для вещественной и мнимой части F(λ)).

fHandle — function handle для функции f(t) (для f(t) из набора, указанного на стр. 8 данного файла, соответствующие функции должны быть также реализованы под именами func1(t), func2(t), func3(t) и func4(t), так что в fHandle можно передавать @func1, @func2, @func3 и @func4, соответственно).

fFTHandle — либо function handle, либо пустой массив []. В случае function handle содержит handle функции, задаю- щей аналитически вычисленное преобразование Фурье F(λ) для первых двух функций f(t) из набора, указанного на стр. 8 данного файла (точное преобразование Фурье в этом случае должно выводиться вместе с приближен- ным). Соответствующие преобразования должны быть реализованы под именами ftfunc1(l), ftfunc2(l), так что в fFTHandle можно передавать @ftfunc1, @ftfunc2, соответственно. Если fFTHandle содержит пустой массив [], на осях выводятся только численные аппроксимации преобразования Фурье. step — положительное число, задающее шаг дискретизации Δ t.

inpLimVec — вектор-строка из двух элементов, задающий окно [a, b] для f(t) (первый элемент вектора содержит a, второй — b, a < b, причем не обязательно a = b).

outLimVec — вектор-строка из двух элементов, задающий окно для вывода преобразования Фурье [c, d] (первый эле- мент вектора содержит c, второй — d, c < d). То есть при выводе пределы оси для должны задаваться пользователем через этот параметр (таким образом, может выводиться только часть графика преобразования Фурье). Этот параметр может быть опциональным (то есть не передаваться в функцию). В таком случае окно для вывода берется из пределов осей абсцисс (при наличии на фигуре уже существующих правильных осей). Если же старых осей нет, то это окно может как-то разумно выбираться. Замечание. При выводе преобразования Фурье в окне [c, d] должны быть подсчитаны только те значения спектра, которые попадают в это окно. То есть не допускается расчёт спектра на очень большом интервале ("с запасом"), а далее вывод небольшой его части.

2 Вычисление fft

В начале алгоритма считается число точек разбиения N и пересчитывается шаг step, чтобы интервал ровно делился на N. Далее считается сетка разбиения сигнала, шаг спектра lstep = 2 * pi / T, где T - период разбиения. Далее по окну спектра считаются граничные точки nA и nB, попадающие в это окно, и разбиение спектра l = 0:lstep:(N-1)*lstep. Считается быстрое преобразование Фурье при помощи функции fft, оно домножается на шаг step для получения нужного маштаба спектра, а также на вектор экспонент exp(-1i * a * l) для сдвига a в 0. Получившийся вектор дублируется для заполнения всего нужного промежутка.

3 Вычисление преобразования Фурье для функций 1 и 2

$$f_1(t) = \mathrm{arctg}(t/2) - \mathrm{arctg}(t).$$

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{arctg}(t/2) - \mathrm{arctg}(t)) e^{-i\lambda t} dt = \{\lambda \neq 0\} = -\frac{1}{i\lambda}(\mathrm{arctg}(t/2) - \mathrm{arctg}(t)) e^{-i\lambda t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} +$$

$$+\frac{1}{i\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{4}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{1+t^2}\right)e^{-i\lambda t}dt = \frac{1}{i\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{2}{t^2+4} - \frac{1}{t^2+1}\right)e^{-i\lambda t}dt =$$

Посчитаем интеграл по лемме Жордана. У каждой дроби две особые точки $\pm 2i$ и $\pm i$, из них в верхней полуплоскости находится +i и +2i. Они является полюсами первого порядка, в итоге имеем

$$= \frac{2\pi i}{i\lambda}\left(\lim_{t\to 2i}\frac{2}{t^2+4}e^{i\lambda t}(t-2i) - \lim_{t\to i}\frac{1}{t^2+1}e^{i\lambda t}(t-i)\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\lim_{t\to 2i}\frac{2}{t+2i}e^{i\lambda t} - \lim_{t\to i}\frac{1}{t+i}e^{i\lambda t}\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{2i}e^{-2\lambda} - \frac{1}{2i}e^{-\lambda}\right) = \frac{i\pi}{\lambda}(e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}).$$

Случай $\lambda = 0$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{arctg}(t/2) - \operatorname{arctg}(t))dt = 0.$$

$$f_2(t) = \begin{cases} \sin(2t), 3|t| \le 1, \\ 0, \text{иначе}. \end{cases} \tag{5}$$

1) $\lambda \neq \pm 2:$

$$F(\lambda) = \int_{-\frac{1}{3}}^{+\frac{1}{3}} \sin(2t) e^{-i\lambda t} dt = i \int_{-\frac{1}{3}}^{+\frac{1}{3}} \sin(2t)\sin(\lambda t) dt = \frac{i}{2} \int_{-\frac{1}{3}}^{+\frac{1}{3}} (\cos(2-\lambda) - \cos(2+\lambda))\sin(\lambda t)\, dt =$$

$$= \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2-\lambda}\sin(2-\lambda)t\Big|_{-\frac{1}{3}}^{+\frac{1}{3}} - \frac{1}{2+\lambda}\sin(2+\lambda)t\Big|_{-\frac{1}{3}}^{+\frac{1}{3}}\right) = i\left(\frac{\sin\frac{2-\lambda}{3}}{2-\lambda} - \frac{\sin\frac{2+\lambda}{3}}{2+\lambda}\right) = \frac{i}{3}\left(\operatorname{sinc}\frac{2-\lambda}{3\pi} - \operatorname{sinc}\frac{2+\lambda}{3\pi}\right).$$

2) $\lambda = \pm 2:$

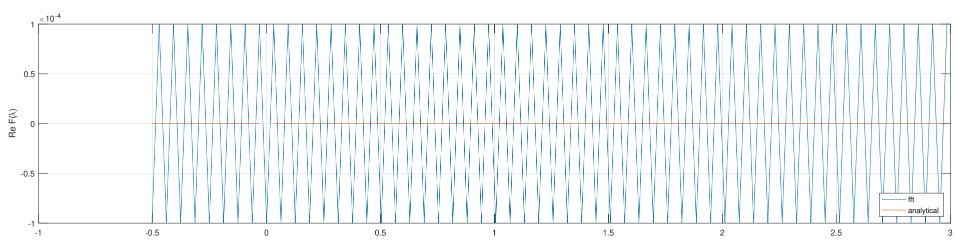
$$F(\lambda) = \pm i \int_{-\frac{1}{3}}^{+\frac{1}{3}} \sin^2(2t) dt = \pm\frac{i}{2}\int_{-\frac{1}{3}}^{+\frac{1}{3}} (1 - \cos 4t) dt = \pm\frac{i}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{\sin 4t}{4}\Big|_{-\frac{1}{3}}^{+\frac{1}{3}}\right) = \pm\frac{i}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{2\sin\frac{4}{3}}{4}\right) =$$

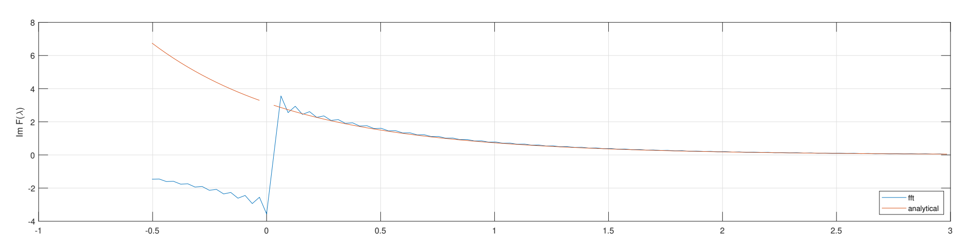
$$= \pm\frac{i}{3}\left(1 - \operatorname{sinc}\frac{4}{3\pi}\right) = \frac{i}{3}\left(\operatorname{sinc}\frac{2-\lambda}{3\pi} - \operatorname{sinc}\frac{2+\lambda}{3\pi}\right).$$

$$F(\lambda) = \frac{i}{3}\left(\operatorname{sinc}\frac{2-\lambda}{3\pi} - \operatorname{sinc}\frac{2+\lambda}{3\pi}\right)\ \forall\lambda.$$

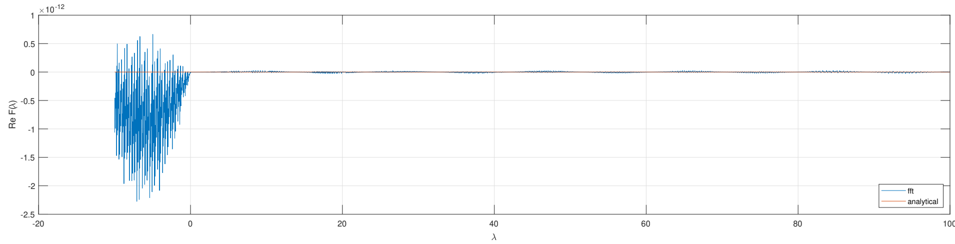
4 Полученные графики

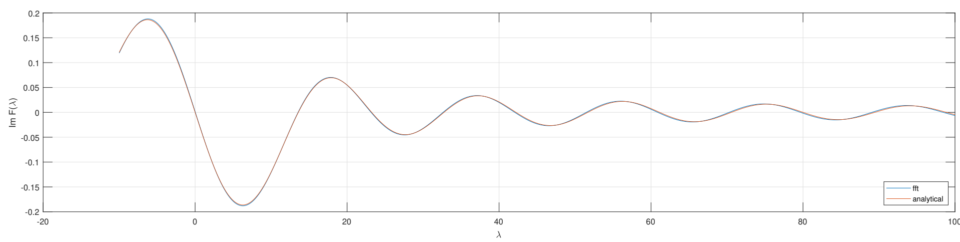
$$f(t) = \operatorname{arctg}(t/2) - \operatorname{arctg}(t),\ F(\lambda) = \begin{cases} \frac{i\pi}{\lambda}(e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}), \lambda \neq 0 \\ 0, \lambda = 0 \end{cases}.$$



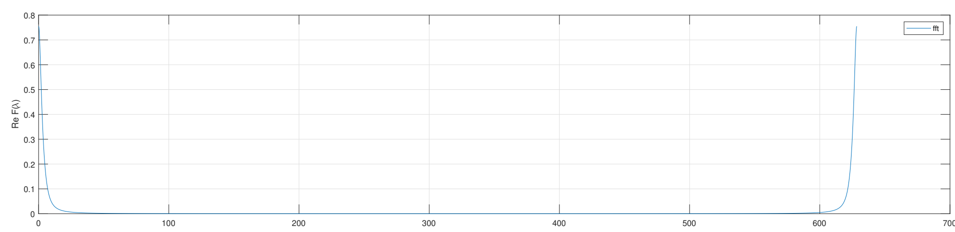


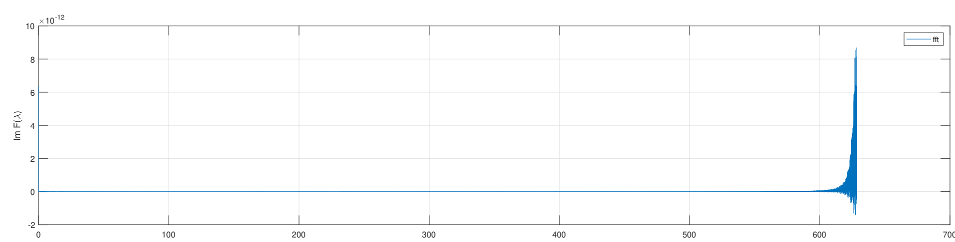
$$f(t) = \begin{cases} \sin(2t), 3|t| \le 1 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}, \quad F(\lambda) = \frac{i}{3}\left(\operatorname{sinc}\frac{2-\lambda}{3\pi} - \operatorname{sinc}\frac{2+\lambda}{3\pi}\right).$$



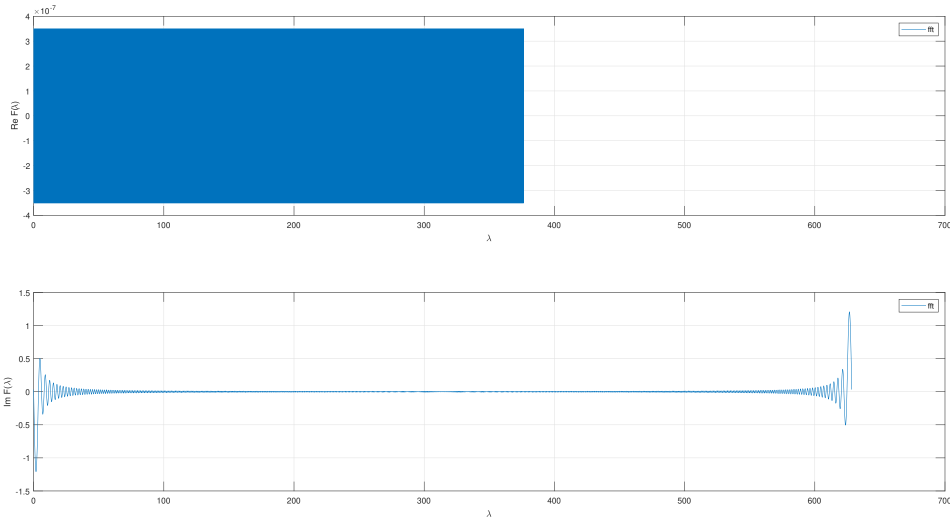


$$f(t) = \frac{e^{-2|t|}}{1 + 2\operatorname{arctg}^2(t)}.$$



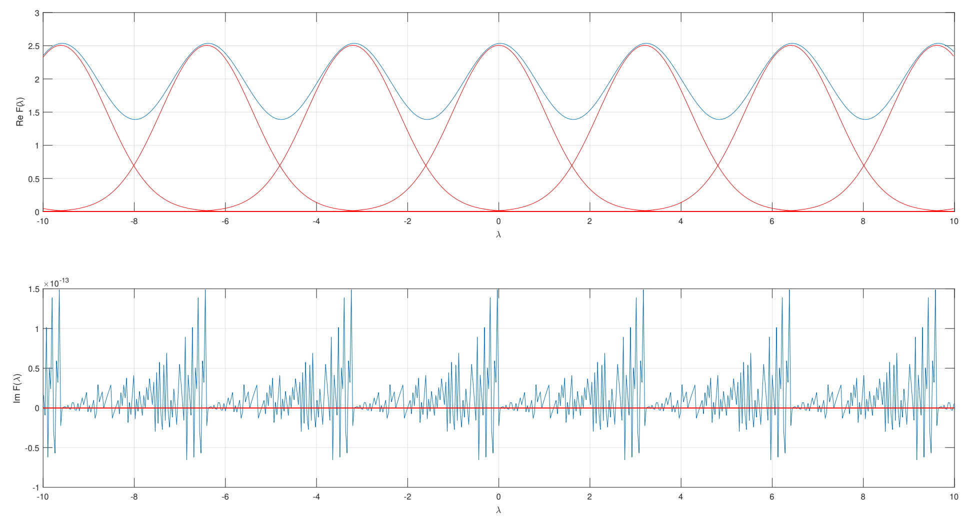


$$f(t) = \frac{\sin(t^3)}{t^2}.$$

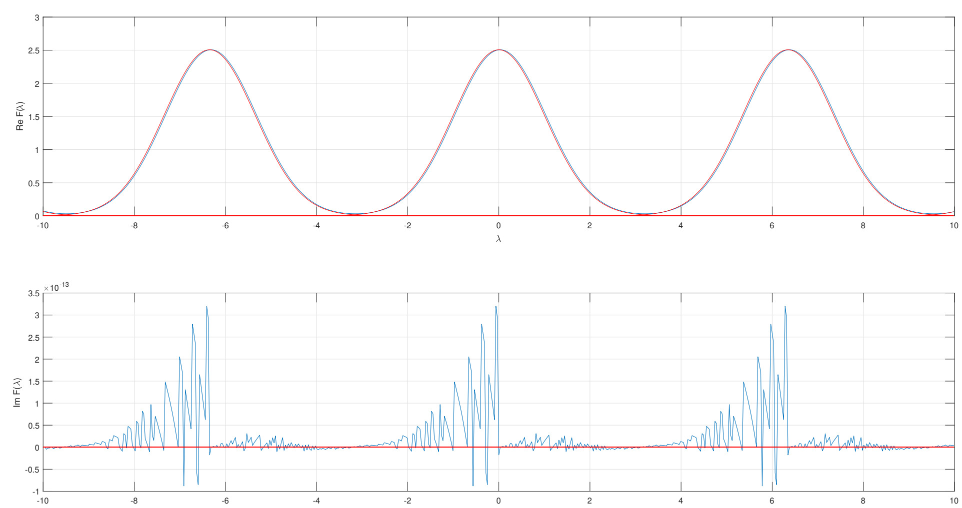


5 Эффект наложения спектра и рябь

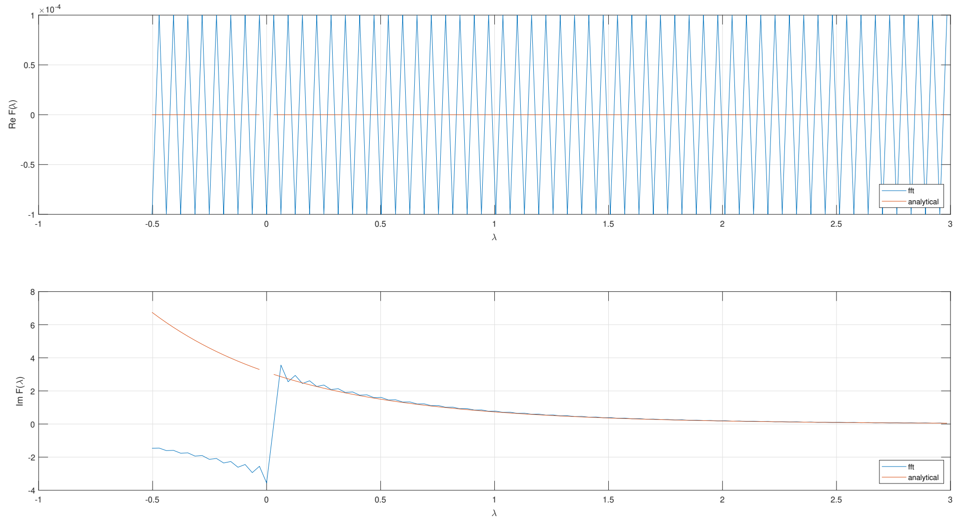
После дискретизации сигнал переходит в размноженный спектр. Эффект наложения спектра проявляется, когда интервал спектра больше, чем расстояние между получившимися размноженными спектрами (если считать, что спектр ограничен). Рассмотрим для примера гауссиану $f(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$, преобразованием которой является похожая функция $F(\lambda) = \sqrt{2\pi} \cdot e^{\frac{\lambda^2}{2}}$. Ошибка наложения спектра будет возникать, когда $\frac{2\pi}{\Delta t} < \Lambda$, где Λ - интервал спектра. Можно считать, что спектр гауссианы ограничен и его интервал равен 2π (для удобства). Тогда если взять шаг дискретизации $\Delta t = 2$, мы увидим эффект наложения спектра, в сравнении с несуммированным размноженным спектром:



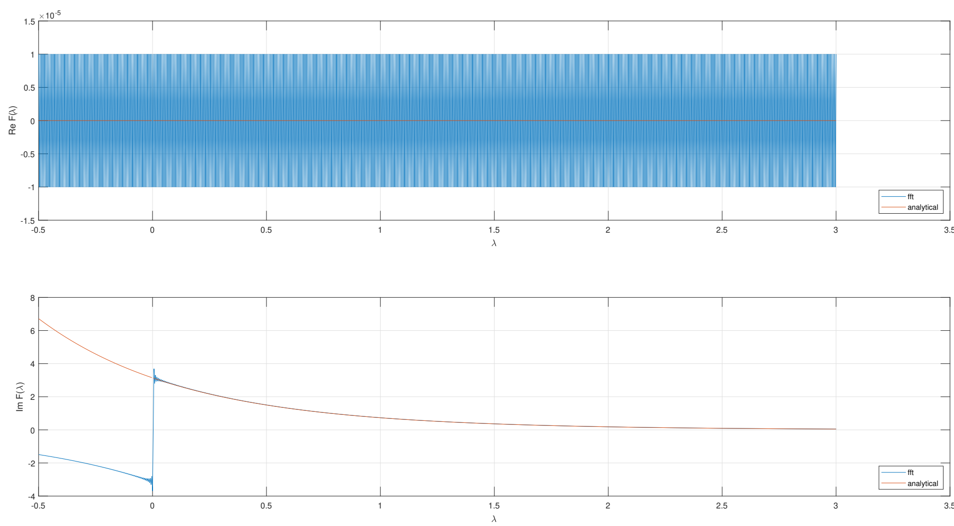
Выбрав шаг $\Delta t = 1$, мы как раз попадаем ровно в интервал спектра, и эффект наложения спектра пропадает (на самом деле почти, потому что спектр гауссианы все же неограничен, но очень близок к нулю вне данного интервала). Такая частота называется частотой дискретизации Найквиста. (то есть $\Delta t = \frac{2\pi}{\Lambda}$)



Другим побочным эффектом ДПФ является рябь. Она связана с тем, что мы берем конечный промежуток для сигнала, в связи с тем теряем в точности. Особенно сильно этот эффект проявляется в точках разрыва спектра, как видно на примере функции номер 1:



Увеличив интервал сигнала с [-100, 100] до [-1000, 1000], мы видим уменьшение эффекта ряби, хотя в точке разрыва до конца убрать его невозможно:



Список литературы

[1] Точилин П.А. Лекции по Преобразованиям Лапласа Фурье 2024