Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчет по практикуму

«Вычисление опорных функций некоторых множеств»

Студент 315 группы
М. В. Миловидов

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2024

1 Постановка задачи

Даны 3 множества:

1. Эллипс с полуосями a, b и центром в точке $z_0 = (x_0, y_0)$, заданный уравнением

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

2. Прямоугольник со сторонами 2a, 2b, параллельными осям координат, и центром в точке z_0

3. Ромб с диагоналями 2a, 2b, параллельными осям координат, и центром в точке z_0

Требуется аналитически вывести опорную функцию для каждого из этих множеств.

2 Вывод опорных функций

$$z = (x, y) \qquad l = (l_1, l_2)$$

Определение опорной функции:

$$\rho(l|Z) \;=\; \sup_{z\in Z}\langle l, z\rangle = \sup_{(x,y)\in Z}(l_1x + l_2y)$$

Нам понадобится следующее свойство опорной функции:

$$\rho(l|\{z_0\} + Z) \;=\; \langle l, z_0\rangle + \rho(l|Z) \tag{1}$$

2.1 Эллипс

Сведем к эллипсу с центром в точке 0 по свойству (1):

$$\rho(l|) \;=\; \langle l, z_0\rangle + \rho(l|Z - \{z_0\})$$

Для нахождения супремума воспользуемся методом множителей Лагранжа:

$$L = l_1x + l_2y + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1)$$

$$L_x = l_1 + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \qquad L_y = l_2 + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \qquad L_\lambda = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$x = \frac{-l_1a^2}{2\lambda} \qquad y = \frac{-l_2b^2}{2\lambda}$$

$$\frac{l_1^2a^2}{4\lambda^2} + \frac{l_2^2b^2}{4\lambda^2} = 1 \qquad \lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{l_1^2a^2 + l_2^2b^2}$$

$$\rho(l|Z - \{z_0\}) = \frac{l_1^2a^2}{\sqrt{l_1^2a^2 + l_2^2b^2}} + \frac{l_2^2b^2}{\sqrt{l_1^2a^2 + l_2^2b^2}} = \sqrt{l_1^2a^2 + l_2^2b^2}$$

$$\rho(l|Z) \;=\; \langle l, z_0\rangle + \sqrt{l_1^2a^2 + l_2^2b^2}$$

2.2 Квадрат

Сведем к квадрату с центром в точке 0 и гранью 2 по свойству (1):

$$\rho(l|Z) \ = \ \langle l, z_0\rangle + \rho(l|Z - \{z_0\})$$

Геометрически при $\|l\| = 1$ опорная функция является расстоянием до опорной гиперплоскости, то есть до самой дальней плоскости с нормалью l, касающейся исходного множества. В плоском случае это прямая. Из этого для квадрата и ромба получаем, что опорный вектор (на котором достигается супремум) является одной из вершин квадрата. Таким образом,

$$\rho(l|Z - \{z_0\}) = \max\{\langle l, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\rangle, \langle l, \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}\rangle, \langle l, \begin{bmatrix} -a \\ b \end{bmatrix}\rangle, \langle l, \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}\rangle\} =$$

$$= \max\{al_1 + bl_2, al_1 - bl_2, -al_1 + bl_2, -al_1 - bl_2\} = a|l_1| + b|l_2|$$

$$\rho(l|Z) = \langle l, z_0\rangle + a|l_1| + b|l_2|$$

2.3 Ромб

Рассуждаем аналогично предыдущему случаю:

$$\rho(l|Z) \ = \ \langle l, z_0\rangle + \rho(l|Z - \{z_0\})$$

$$\rho(l|Z - \{z_0\}) = \max\{\langle l, \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}\rangle, \langle l, \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}\rangle, \langle l, \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix}\rangle, \langle l, \begin{bmatrix} 0 \\ -b \end{bmatrix}\rangle\} =$$

$$= \max\{al_1, bl_2, -al_1, -bl_2\} = \max\{a|l_1|, b|l_2|\}$$

$$\rho(l|Z) = \langle l, z_0\rangle + \max\{a|l_1|, b|l_2|\}$$

3 Вывод

Для рассмотреных множеств были получены простые представления опорной функции, которые можно использовать, например, для кусочно-линейной аппроксимации границы множества.

Список литературы

[1] Чистяков И.В., Паршиков М.В. Лекции по Оптимальному Управлению