Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчет по практикуму

«Вывод уравнений, описывающих поляру для эллипса»

Студент 315 группы
М. В. Миловидов

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2024

1 Постановка задачи

Дан эллипс с полуосями a, b и центром в точке $z_0 = (a_0, b_0)$, заданный уравнением

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \leq 1$$

Вывести общий вид поляры для данного множества:

$$Z^\circ = \left\{ l \in R^2 \mid \langle l, z \rangle \leq 1, \forall z \in Z \right\}$$

2 Вывод поляры

$$z = (x, y) \quad\quad l = (l_1, l_2)$$

Нам понадобится следующее свойство поляры:

$$Z^\circ = \{ l \in R^2 : \rho(l|Z) \leq 1 \}$$

где ρ - опорная функция:

$$\rho(l|Z) \;=\; \sup_{z \in Z} \langle l, z \rangle \;=\; \sup_{(x,y) \in Z} (l_1 x + l_2 y)$$

Подставим выражение для опорной функции эллипса:

$$\rho(l|Z) \;=\; \langle l, z_0 \rangle + \sqrt{l_1^2 a^2 + l_2^2 b^2}$$

$$Z^\circ = \{ l \in R^2 :\; \langle l, z_0 \rangle + \sqrt{l_1^2 a^2 + l_2^2 b^2} \leq 1 \}$$

3 Примеры

Построим поляру эллипсов с полуосями a = 2, b = 1 с центрами в точках (0, 0) и (2, 1):
Подставим значения в полученную выше формулу поляры:

$$Z_1^\circ = \{ l \in R^2 :\; \langle l, z_0 \rangle + \sqrt{l_1^2 a^2 + l_2^2 b^2} \leq 1 \} = \{ l \in R^2 :\; \langle l, 0 \rangle + \sqrt{4 l_1^2 + l_2^2} \leq 1 \} =$$

$$= \{ l \in R^2 :\; 4 l_1^2 + l_2^2 \leq 1 \}$$

- эллипс с полуосями $\frac{1}{2}, 1$

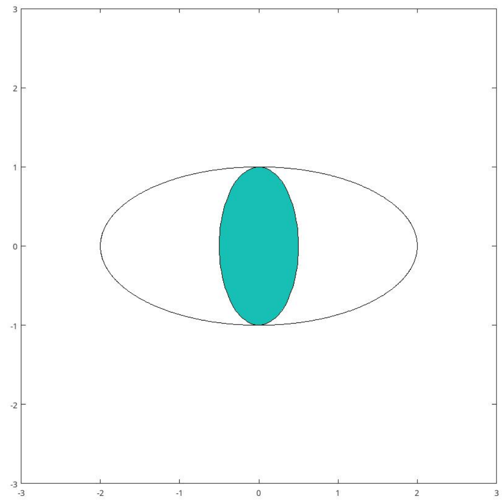
$$Z_2^\circ = \{ l \in R^2 :\; \langle l, z_0 \rangle + \sqrt{l_1^2 a^2 + l_2^2 b^2} \leq 1 \} = \{ l \in R^2 :\; 2l_1 + l_2 + \sqrt{4 l_1^2 + l_2^2} \leq 1 \} =$$

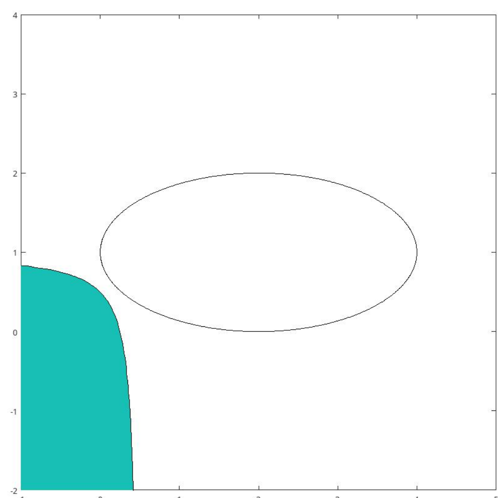
$$= \{ l \in R^2 :\; \sqrt{4 l_1^2 + l_2^2} \leq 1 - 2l_1 - l_2 \} = \{ l \in R^2 :\; 4 l_1^2 + l_2^2 \leq 1 + 4 l_1^2 + l_2^2 - 4 l_1 - 2 l_2 + 4 l_1 l_2 \} =$$

$$= \{ l \in R^2 :\; 1 - 4 l_1 - 2 l_2 + 4 l_1 l_2 \geq 0 \} = \{ l \in R^2 :\; 4 l_1 (l_2 - 1) - 2 l_2 + 1 \geq 0 \} =$$

$$= \{l \in R^2: \ l_1 \geq \frac{2(l_2-1)}{4(l_2-1)} + \frac{1}{4(l_2-1)}\} = \{l \in R^2: \ l_1 \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4(l_2-1)}\}$$

- граница данного множества - гипербола
Сравним с результатами работы программы





4 Вывод

Видно, что поляра эллипса может быть как ограничена, так и не ограничена.

Список литературы

[1] Чистяков И.В., Паршиков М.В. Лекции по Оптимальному Управлению

[2] Sawiki Поляра множества и ее свойства