Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчет по практикуму

«Численное решение краевой задачи при помощи БПФ»

Студент 315 группы
М. В. Миловидов

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2024

1 Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) - \mu \cdot u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,1], \\ u(x,0) \equiv u(x,1) \equiv \xi(x), \\ u(0,y) \equiv u(1,y) \equiv \eta(y). \end{cases} \tag{1}$$

$\mu > 0,\ f \in C^1([0,1] \times [0,1]), \xi, \eta \in C^1([0,1]), \xi(0) = \xi(1) = \eta(0) = \eta(1)$. Для этой краевой задачи рассматривается разностная схема:

$$\begin{cases} \frac{y_{k+1,\ell} - 2y_{k,\ell} + y_{k-1,\ell}}{h_x^2} + \frac{y_{k,\ell+1} - 2y_{k,\ell} + y_{k,\ell-1}}{h_y^2} - \mu y_{k,\ell} = \varphi_{k,\ell} \\ y_{k,0} = y_{k,N} = \xi_k, y_{0,\ell} = y_{M,\ell} = \eta_\ell, k = \overline{1, M-1}, \ell = \overline{1, N-1}. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $h_x = 1/M, h_y = 1/N$ - значения $y_{k,\ell}$ аппроксимирующие функцию $u(x,y)$ в узлах сетки для $x_k = k/M,\ y_\ell = \ell/N,\ \varphi_{k,\ell} = f(x_k, y_\ell),\ \xi_k = \xi(x_k),\ \eta_\ell = \eta(y_\ell)$

Для функции

$$f(x,y) = xe^{-2x} \cos(x) + (2+y)\cos(2y).$$

реализовать в Matlab функцию fGiven, так чтобы можно было взять fHandle=@fGiven, и решить задачу (1) аналитически. Для этого, учитывая что $f(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$, взять $u(x,y) = u_1(x) + u_2(y)$ и решить аналитически соответствующие дифференциальные уравнения для u_1 и u_2 с краевыми условиями $u_1(0) = u_1(1) = u_1^0$ и $u_2(0) = u_2(1) = u_2^0$. Аналитическое решение задачи (1) поместить в тело функции uAnalytical(xMat,yMat,u1Zero,u2Zero,mu), где xMat и yMat соответствуют матрицам одного размера со значениями переменных x и y, а u1Zero, u2Zero и mu дают значения скалярных параметров u_1^0, u_2^0 и μ, соответственно. Написать функцию uNumerical(u1Zero,u2Zero,mu,M,N), которая передает на вход функции solveDirichlet параметры

- fHandle=@fGiven,
- xiHandle=@(x)uAnalytical(x,zeros(size(x)),u1Zero,u2Zero,mu),
- etaHandle=@(y)uAnalytical(zeros(size(y)),y,u1Zero,u2Zero,mu)

и возвращает результат работы solveDirichlet (то есть краевые условия в (1) берутся прямо из полученного аналити- ческого решения). График аналитического решения сравнить с графиком приближенного решения, полученного из (2) при различных M и N , нарисовать график разности между численным и аналитическим решением.

2 Решение задачи

Рассмотрим двумерное дискретное преобразование Фурье для $y_{k,\ell}$ и $\varphi_{k,\ell}$ по данной сетке:

$$y_{k,\ell} = \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} a_{p,q} e^{-2\pi i\left(\frac{kp}{M}+\frac{lq}{N}\right)}$$

$$\varphi_{k,\ell} = \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} b_{p,q} e^{-2\pi i\left(\frac{kp}{M}+\frac{lq}{N}\right)}$$

$$p = \overline{1, M-1},\ q = \overline{1, N-1}.$$

Применим его к разностной схеме (2):

$$M^2 \left(\sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} a_{p,q} e^{-2\pi i\left(\frac{(k+1)p}{M}+\frac{lq}{N}\right)} - 2\sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} a_{p,q} e^{-2\pi i\left(\frac{kp}{M}+\frac{lq}{N}\right)} + \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} a_{p,q} e^{-2\pi i\left(\frac{(k-1)p}{M}+\frac{lq}{N}\right)} \right) +$$

$$+ N^2 \left(\sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} a_{p,q} e^{-2\pi i\left(\frac{kp}{M}+\frac{(l+1)q}{N}\right)} - 2\sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} a_{p,q} e^{-2\pi i\left(\frac{kp}{M}+\frac{lq}{N}\right)} + \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} a_{p,q} e^{-2\pi i\left(\frac{kp}{M}+\frac{(l-1)q}{N}\right)} \right) -$$

$$- \mu \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} a_{p,q} e^{-2\pi i\left(\frac{kp}{M}+\frac{lq}{N}\right)} = \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} b_{p,q} e^{-2\pi i\left(\frac{kp}{M}+\frac{lq}{N}\right)}.$$

$$\sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} a_{p,q} e^{-2\pi i\left(\frac{kp}{M}+\frac{lq}{N}\right)} \left(M^2 \left(e^{\frac{-2\pi ip}{M}} - 2 + e^{\frac{2\pi ip}{M}} \right) + N^2 \left(e^{\frac{-2\pi iq}{N}} - 2 + e^{\frac{2\pi iq}{N}} \right) - \mu \right) =$$

$$= \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} b_{p,q} e^{-2\pi i\left(\frac{kp}{M}+\frac{lq}{N}\right)}.$$

Обозначим выражение в скобках за $c_{p,q}$:

$$c_{p,q} = M^2 \left(e^{\frac{-2\pi ip}{M}} - 2 + e^{\frac{2\pi ip}{M}} \right) + N^2 \left(e^{\frac{-2\pi iq}{N}} - 2 + e^{\frac{2\pi iq}{N}} \right) - \mu.$$

Таким образом $\forall\ p = \overline{1, M-1},\ q = \overline{1, N-1}$ имеем $a_{p,q} = \frac{b_{p,q}}{c_{p,q}}$.
ОДПФ для $b_{p,q}$:

$$b_{p,q} = \frac{1}{MN} \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} \varphi_{k,\ell} e^{2\pi i\left(\frac{kp}{M}+\frac{lq}{N}\right)} =$$

$$= \frac{1}{MN} \left(\varphi_{0,0} + \sum_{k=1}^{M-1} \varphi_{k,0} e^{2\pi i \frac{kp}{M}} + \sum_{\ell=1}^{N-1} \varphi_{0,\ell} e^{2\pi i \frac{\ell q}{N}} + \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{\ell=1}^{N-1} \varphi_{k,\ell} e^{2\pi i\left(\frac{kp}{M}+\frac{\ell q}{N}\right)} \right) = b_{p,q} = \varphi_0 + \tilde{b_{p,q}},$$

где

$$\varphi_0 = \frac{1}{MN} \left(\varphi_{0,0} + \sum_{k=1}^{M-1} \varphi_{k,0} e^{2\pi i \frac{kp}{M}} + \sum_{\ell=1}^{N-1} \varphi_{0,\ell} e^{2\pi i \frac{\ell q}{N}} \right),$$

$$\tilde{b_{p,q}} = \frac{1}{MN}\sum_{k=1}^{M-1}\sum_{\ell=1}^{N-1}\varphi_{k,\ell}e^{2\pi i\left(\frac{kp}{M}+\frac{\ell q}{N}\right)}.$$

Тогда

$$a_{p,q} = \frac{\varphi_0}{c_{p,q}} + \frac{\tilde{b_{p,q}}}{c_{p,q}}.$$

Напишем одномерное ДПФ для функций ξ, η:

$$\xi_k = \sum_{p=0}^{M-1}\gamma_p e^{-2\pi i\frac{kp}{M}},\ k = \overline{1, M-1},$$

$$\eta_\ell = \sum_{q=0}^{N-1}\delta_q e^{-2\pi i\frac{\ell q}{N}},\ \ell = \overline{1, N-1}.$$

Учтем краевые условия и получим:

$$y_{k,0} = \xi_k \Rightarrow \sum_{p=0}^{M-1}\sum_{q=0}^{N-1}a_{p,q}e^{-2\pi i\frac{kp}{M}} = \sum_{p=0}^{M-1}\gamma_p e^{-2\pi i\frac{kp}{M}} \Rightarrow \gamma_p = \sum_{q=0}^{N-1}a_{p,q}\ \forall k = \overline{1, M-1},$$

$$y_{0,\ell} = \eta_\ell \Rightarrow \sum_{p=0}^{M-1}\sum_{q=0}^{N-1}a_{p,q}e^{-2\pi i\frac{\ell q}{N}} = \sum_{q=0}^{N-1}\delta_q e^{-2\pi i\frac{\ell q}{N}} \Rightarrow \delta_q = \sum_{p=0}^{M-1}a_{p,q}\ \forall \ell = \overline{1, N-1}.$$

Используя выражение $a_{p,q} = \frac{\varphi_0}{c_{p,q}} + \frac{\tilde{b_{p,q}}}{c_{p,q}}$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{q=0}^{N-1}\left(\frac{1}{MNc_{p,q}}\sum_{k=0}^{M-1}\varphi_{k,0}e^{2\pi i\frac{kp}{M}} + \frac{1}{MNc_{p,q}}\sum_{\ell=1}^{N-1}\varphi_{0,\ell}e^{2\pi i\frac{\ell q}{N}} + \frac{\tilde{b}_{p,q}}{c_{p,q}}\right) = \gamma_p,\ p = \overline{0, M-1}, \\ \sum_{p=0}^{M-1}\left(\frac{1}{MNc_{p,q}}\sum_{k=0}^{M-1}\varphi_{k,0}e^{2\pi i\frac{kp}{M}} + \frac{1}{MNc_{p,q}}\sum_{\ell=1}^{N-1}\varphi_{0,\ell}e^{2\pi i\frac{\ell q}{N}} + \frac{\tilde{b}_{p,q}}{c_{p,q}}\right) = \delta_q,\ q = \overline{0, N-1}. \end{cases}$$

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{M-1}\varphi_{k,0}\left(\frac{1}{MN}\sum_{q=0}^{N-1}\frac{1}{c_{p,q}}e^{2\pi i\frac{kp}{M}}\right) + \sum_{\ell=1}^{N-1}\varphi_{0,\ell}\left(\frac{1}{MN}\sum_{q=0}^{N-1}\frac{1}{c_{p,q}}e^{2\pi i\frac{\ell q}{N}}\right) + \sum_{q=0}^{N-1}\frac{\tilde{b}_{p,q}}{c_{p,q}} = \gamma_p,\ p = \overline{0, M-1} \\ \sum_{k=0}^{M-1}\varphi_{k,0}\left(\frac{1}{MN}\sum_{p=0}^{M-1}\frac{1}{c_{p,q}}e^{2\pi i\frac{kp}{M}}\right) + \sum_{\ell=1}^{N-1}\varphi_{0,\ell}\left(\frac{1}{MN}\sum_{p=0}^{M-1}\frac{1}{c_{p,q}}e^{2\pi i\frac{\ell q}{N}}\right) + \sum_{p=0}^{M-1}\frac{\tilde{b}_{p,q}}{c_{p,q}} = \delta_q,\ q = \overline{0, N-1}. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$\theta_{k,p} = \frac{1}{MN}\sum_{q=0}^{N-1}\frac{1}{c_{p,q}}e^{2\pi i\frac{kp}{M}}, \quad \tau_{\ell,p} = \frac{1}{MN}\sum_{q=0}^{N-1}\frac{1}{c_{p,q}}e^{2\pi i\frac{\ell q}{N}}.$$

$$\alpha_{k,q} = \frac{1}{MN}\sum_{p=0}^{M-1}\frac{1}{c_{p,q}}e^{2\pi i\frac{kp}{M}}, \quad \beta_{\ell,q} = \frac{1}{MN}\sum_{p=0}^{M-1}\frac{1}{c_{p,q}}e^{2\pi i\frac{\ell q}{N}}.$$

Система преобразуется в:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{M-1} \varphi_{k,0}\theta_{k,p} + \sum\limits_{\ell=1}^{N-1} \varphi_{0,\ell}\tau_{\ell,p} + \sum\limits_{q=0}^{N-1} \dfrac{\tilde{b}_{p,q}}{c_{p,q}} = \gamma_p, \; p = \overline{0, M-1} \\ \sum\limits_{k=0}^{M-1} \varphi_{k,0}\alpha_{k,q} + \sum\limits_{\ell=1}^{N-1} \varphi_{0,\ell}\beta_{\ell,q} + \sum\limits_{p=0}^{M-1} \dfrac{\tilde{b}_{p,q}}{c_{p,q}} = \delta_q, \; q = \overline{0, N-1}. \end{cases}$$

Учитывая последнее краевое условие

$$y_{00} = \xi_0 = \eta_0,$$

имеем

$$\sum_{p=0}^{M-1} \gamma_p = \sum_{q=0}^{N-1} \delta_q,$$

и при добавлении в систему можем исключить одно из уравнений (например при p = 0). В итоге получаем

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{M-1} \varphi_{k,0}\theta_{k,p} + \sum\limits_{\ell=1}^{N-1} \varphi_{0,\ell}\tau_{\ell,p} + \sum\limits_{q=0}^{N-1} \dfrac{\tilde{b}_{p,q}}{c_{p,q}} = \gamma_p, \; p = \overline{0, M-1} \\ \sum\limits_{k=0}^{M-1} \varphi_{k,0}\alpha_{k,q} + \sum\limits_{\ell=1}^{N-1} \varphi_{0,\ell}\beta_{\ell,q} + \sum\limits_{p=0}^{M-1} \dfrac{\tilde{b}_{p,q}}{c_{p,q}} = \delta_q, \; q = \overline{0, N-1}. \end{cases}$$

- систему с M + N - 1 уравнениями и M + N - 1 неизвестными $\Rightarrow$ имеющую единственное решение.

Для решения системы

1. Вычисляем сетки для известных функций
2. Находим $c_{p,q}$
3. При помощи ifft2 от f находим
4. Находим φ_0 через систему
5. Находим $b_{k,\ell}$ через ifft2
6. Из получившегося выражаем $a_{p,q}$ и при помощи fft2 получаем значения функции $\varphi_{k,\ell}$

3 Аналитическое решение

Для проверки работы алгоритма решим задачу для функции из примера аналитически:

Учитывая, что $f(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$, положим $u(x,y) = u_1(x) + u_2(y)$ и решим следующие задачи:

$$\begin{cases} u_1''(x) - \mu \cdot u_1(x) = xe^{-2x}\cos(x), x \in [0,1], \\ u_1(0) \equiv u_1(1) \equiv u_1^0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} u_2''(y) - \mu \cdot u_2(y) = (2+y)\cos(2y), y \in [0,1], \\ u_2(0) \equiv u_2(1) \equiv u_2^0 \end{cases} \tag{4}$$

3.1 Решение для u_1

Запишем решение в виде суммы решения однородной задачи и частного решения неоднородной:

$$u_1(x) = u_1^{oo}(x) + u_1^{ch}(x).$$

Решение однородной задачи, очевидно, имеет вид

$$u_1^{oo}(x) = K_1 e^{-\sqrt{\mu}x} + K_2 e^{\sqrt{\mu}x}$$

Найдем частное решение неоднородной задачи. Будем искать в виде

$$u_1^{ch}(x) = (Ax+B)e^{-2x}\cos(x) + (Cx+D)e^{-2x}\sin(x) = e^{-2x}\left((Ax+B)\cos(x) + (Cx+D)\sin(x)\right).$$

Тогда

$$(u_1^{ch}(x))'' = 4e^{-2x}\left((Ax+B)\cos(x) + (Cx+D)\sin(x)\right) -$$
$$-4e^{-2x}\left(A\cos(x) - (Ax+B)\sin(x) + C\sin(x) + (Cx+D)\cos(x)\right) +$$
$$+e^{-2x}\left(-2A\sin(x) - (Ax+B)\cos(x) + 2C\cos(x) - (Cx+D)\sin(x)\right) =$$
$$= (3A-4C)e^{-2x}x\cos(x) + (3C-4A)e^{-2x}x\sin(x) +$$
$$+(3B-4A-4D+2C)e^{-2x}\cos(x) + (3D+4B-4C-2A)e^{-2x}\sin(x).$$

$$3A - 4C - \mu A - 1 = 0 \Rightarrow \; A = \frac{1+4C}{3-\mu}$$

$$3C - 4A - \mu C = 0. \; (3-\mu)C - 4\frac{1+4C}{3-\mu} = 0. \; ((3-\mu)^2 - 16)C = 4$$

$$\Rightarrow C = \frac{4}{(3-\mu)^2 - 16} \Rightarrow A = \frac{1}{3-\mu}\frac{(3-\mu)^2 - 16 + 16}{(3-\mu)^2 - 16} = \frac{3-\mu}{(3-\mu)^2 - 16}$$

$$3B - 4A - 4D + 2C - \mu B = 0 \Rightarrow B = \frac{4A - 2C + 4D}{3-\mu}$$

$$3D + 4B - 4C - 2A - \mu D = 0. \; (3-\mu)D + 4\frac{4A - 2C + 4D}{3-\mu} = 4C + 2A$$

$$\frac{(3-\mu)^2 + 16}{3-\mu}D = 4C + 2A - 4\frac{4A-2C}{3-\mu} \Rightarrow D = \frac{3-\mu}{(3-\mu)^2+16}\left(4C + 2A - 4\frac{4A-2C}{3-\mu}\right)$$

Для нахождения констант подставим краевые условия:

$$K_1 + K_2 + u_1^{ch}(0) = u_1^0 \Rightarrow K_1 = u_1^0 - K_2 - u_1^{ch}(0).$$

$$K_1 e^{-\sqrt{\mu}} + K_2 e^{\sqrt{\mu}} + u_1^{ch}(1) = u_1^0.\ (u_1^0 - K_2 - u_1^{ch}(0))e^{-\sqrt{\mu}} + K_2 e^{\sqrt{\mu}} + u_1^{ch}(1) = u_1^0.$$

$$K_2(e^{\sqrt{\mu}} - e^{-\sqrt{\mu}}) = u_1^0(1 - e^{-\sqrt{\mu}}) + u_1^{ch}(0)e^{-\sqrt{\mu}} - u_1^{ch}(1).$$

$$K_2 = \frac{u_1^0(1 - e^{-\sqrt{\mu}}) + u_1^{ch}(0)e^{-\sqrt{\mu}} - u_1^{ch}(1)}{e^{\sqrt{\mu}} - e^{-\sqrt{\mu}}}.$$

3.2 Решение для u_2

Запишем решение в виде суммы решения однородной задачи и частного решения неоднородной:

$$u_2(y) = u_2^{oo}(y) + u_2^{ch}(y).$$

Решение однородной задачи имеет вид

$$u_2^{oo}(y) = K_1 e^{-\sqrt{\mu}y} + K_2 e^{\sqrt{\mu}y}$$

Найдем частное решение неоднородной задачи. Будем искать в виде

$$u_2^{ch}(y) = (Ax + B)\cos(2y) + (Cx + D)\sin(2y).$$

Тогда

$$(u_2^{ch}(y))'' = -4A\sin(2y) - 4(Ay + B)\cos(2y) + 4C\cos(2y) - 4(Cy + D)\sin(2y).$$

$$-4A - \mu A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{\mu + 4}.$$

$$-4C - \mu C = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$-4B + 4C - \mu B = 2 \Rightarrow B = -\frac{2}{\mu + 4}.$$

$$-4D - 4A - \mu D = 0 \Rightarrow D = -\frac{4A}{\mu + 4} = \frac{4}{(\mu + 4)^2}.$$

Константы $K_3,\ K_4$ находятся аналогично предыдущему случаю:

$$K_3 = u_2^0 - K_4 - u_2^{ch}(0).$$

$$K_4 = \frac{u_2^0(1 - e^{-\sqrt{\mu}}) + u_2^{ch}(0)e^{-\sqrt{\mu}} - u_2^{ch}(1)}{e^{\sqrt{\mu}} - e^{-\sqrt{\mu}}}.$$

4 Сравнение численного и аналитического решения

4.1 Переход к задаче (1)

Сложив полученные решения, мы получим функцию $u(x, y) = u_1(x) + u_2(y)$. Она будет удовлетворять уравнению

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) - \mu \cdot u(x, y) = f(x, y), (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Таким образом, она удовлетворяет системе (1) с краевыми условиями

$$u(x, 0) \equiv u(x, 1) \equiv \xi(x) \equiv u_1(x),$$

$$u(0, y) \equiv u(1, y) \equiv \eta(y) \equiv u_2(y),$$

причем

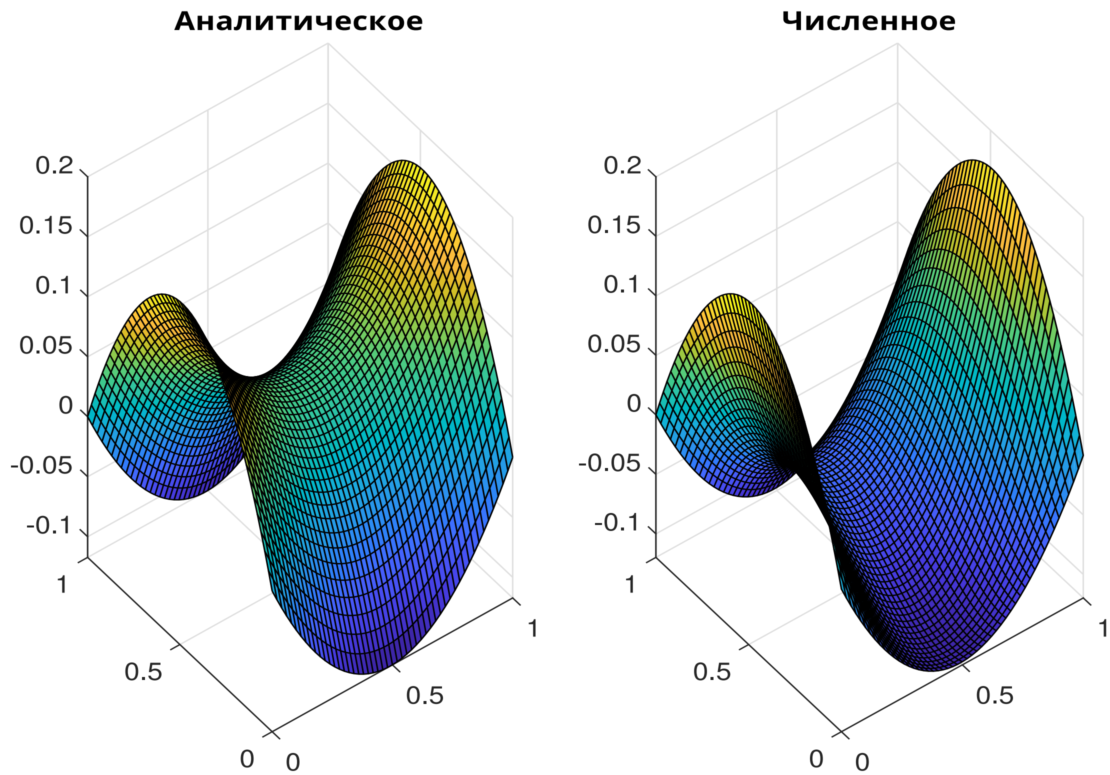
$$\xi(0) = \xi(1) = \eta(0) = \eta(1) = u_1^0 + u_2^0,$$

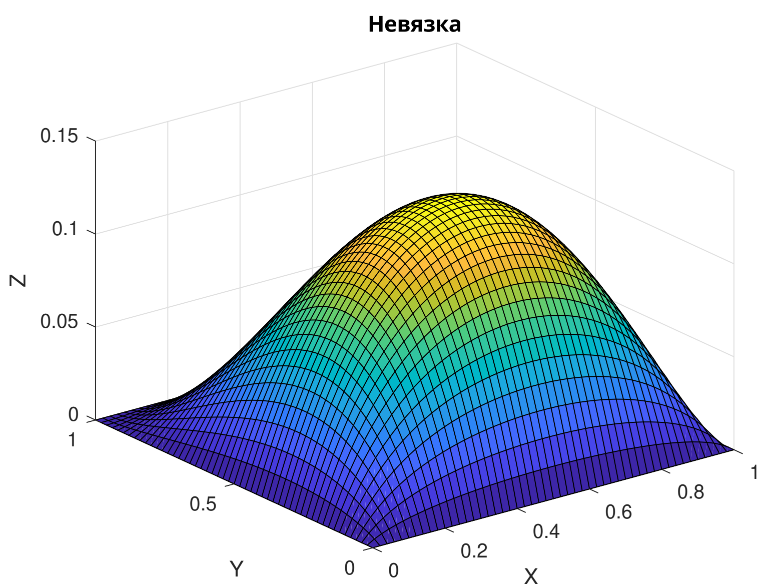
все функции аналитические, так что задача поставленна коректно и ее можно решать численно при помощи вышеописанного метода.

4.2 Сравнение решений

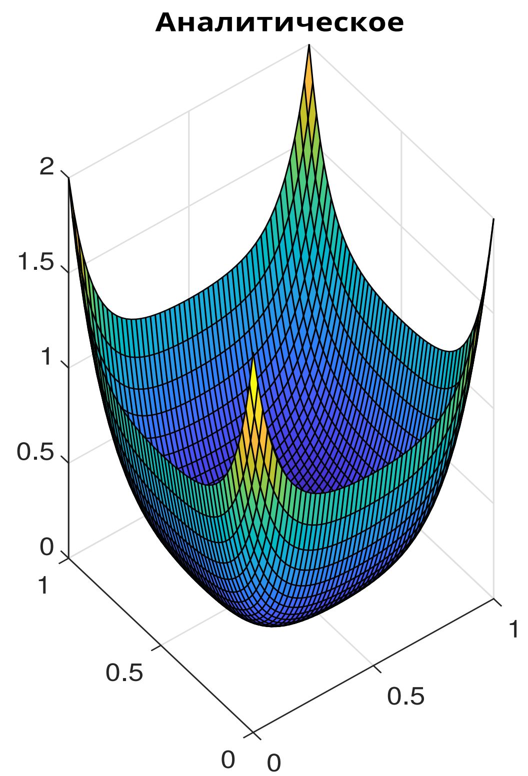
Сравним аналитическое решение для разных наборов параметров:

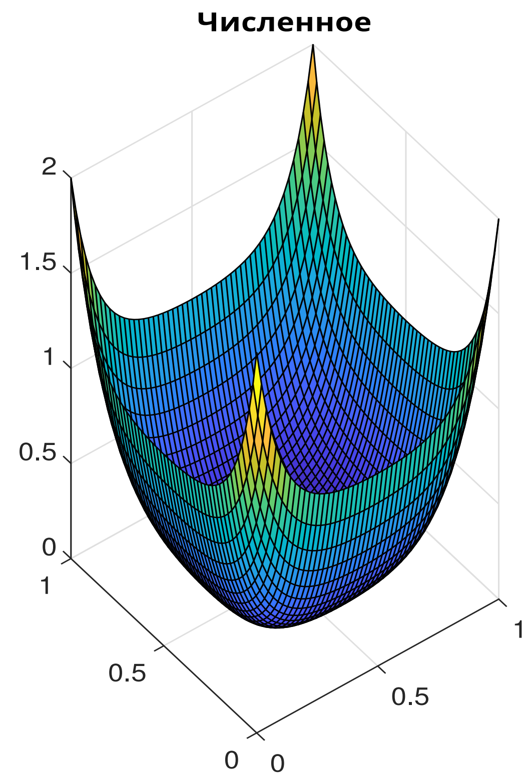
4.3 $M = 50,\ N = 50,\ \mu = 1,\ u_1^0 = 1,\ u_2^0 = -1$

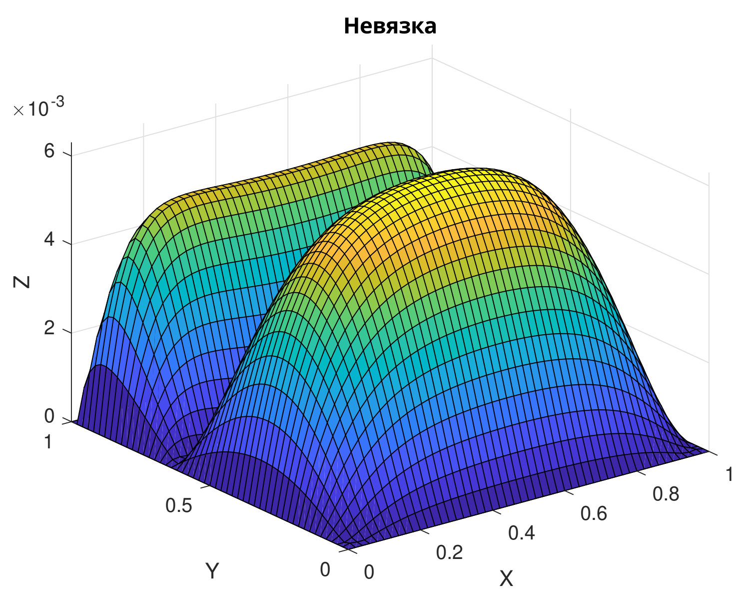




4.4 $M = 50,\ N = 50,\ \mu = 100,\ u_1^0 = 1,\ u_2^0 = 1$



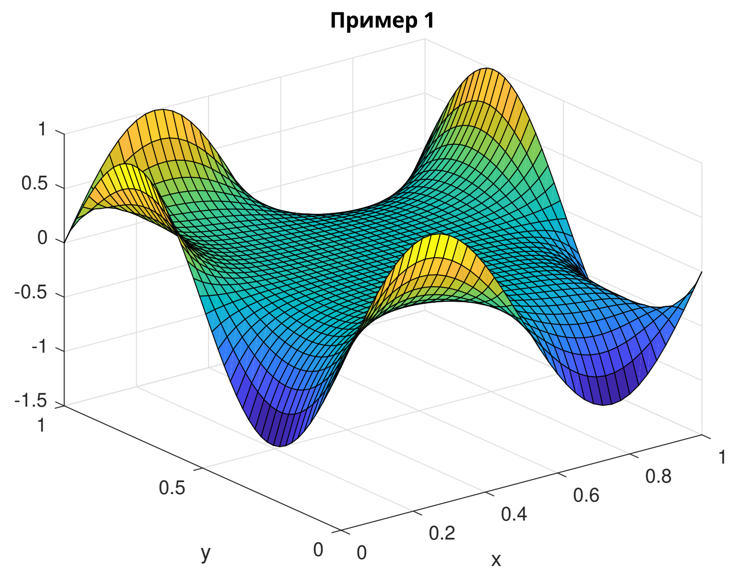




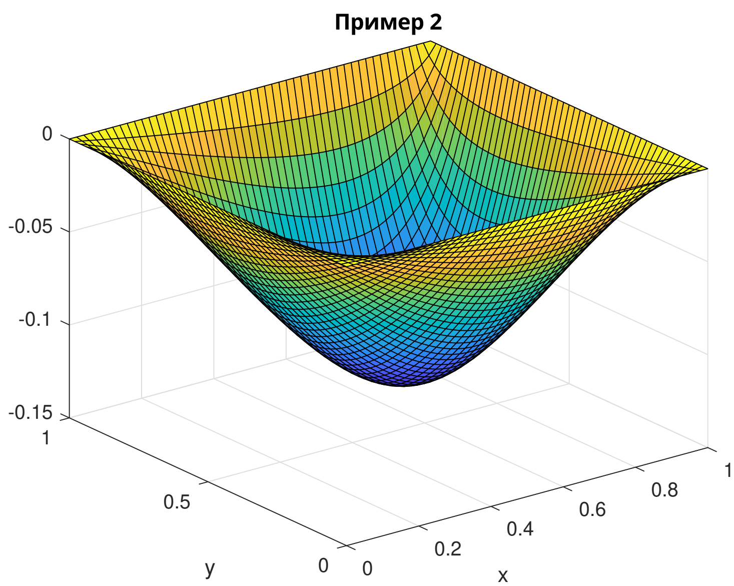
5 Решения для некоторых произвольных функций

Рассмотрим численные решения для некоторых произвольных функций.

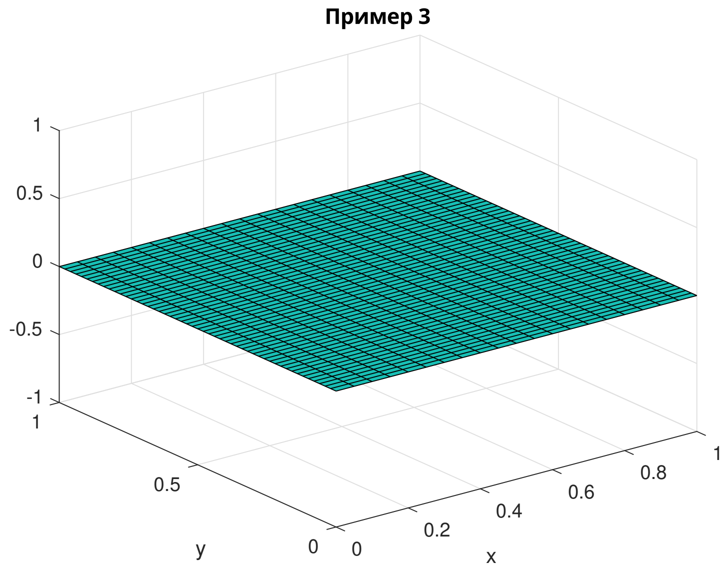
5.1 $M = 40,\ N = 45,\ \mu = 120,\ f(x,y) = (x^2+y^2)^2,\ \xi(x) = \sin(2\pi x),\ \eta(y) = \sin(-2\pi y)$



5.2 $M = 50,\ N = 50,\ \mu = 10,\ f(x,y) = 10\sin(xy),\ \xi(x) \equiv 0,\ \eta(y) \equiv 0$



5.3 $M = 20,\ N = 50,\ \mu = 10,\ f(x,y) \equiv 0,\ \xi(x) \equiv 0,\ \eta(y) \equiv 0$



Список литературы

[1] Точилин П.А. Лекции по Преобразованиям Лапласа Фурье 2024