

# **MECÂNICA DOS SÓLIDOS – ESTÁTICA**

## **UNIDADE 4 - FORÇAS INTERNAS E MOMENTOS DE INÉRCIA**

Luis Fernando Nicolini



# Introdução

Caro aluno, você já se perguntou como os engenheiros projetistas escolhem os componentes estruturais que irão fazer parte de seu projeto? Como ele é capaz de saber as forças envolvidas internamente a um elemento estrutural e assim ser capaz de dimensioná-lo corretamente?

Um componente estrutural essencial para qualquer projetista de estruturas, suportes e máquinas é a viga. Quais conhecimentos você pensa serem importantes para que o engenheiro projetista consiga escolher uma viga adequada de forma prática?

Nesta unidade iremos aprender um pouco mais sobre ela e as propriedades que fazem esse componente ser tão útil no dia-a-dia do engenheiro projetista. Você sabe qual qualidade é essa? Se lhe dissesse que os momentos de inércia são informações muito úteis para sabermos a quão eficaz determinada viga pode ser. Também iremos abordar algumas classificações de vigas, o que podem ser muito úteis para você determinar qual perfil transversal utilizar.

Por meio de vários conhecimentos sequenciais que são alicerces para todo engenheiro mecânico, conhecimentos como as formas para determinar as forças internas em componentes por meio do método das seções, vamos aprender a construir diagramas e equações de esforço cortante e momento fletor ao longo do comprimento da viga, e até localizar centros de gravidade e inércia de seções transversais simples ou compostas e seus correspondentes momentos de inércia em relação a um eixo qualquer.

Aproveite ao máximo os conhecimentos desta unidade, pois são fundamentais para a graduação e profissão de Engenheiro.

## 4.1 Forças internas em membros estruturais

Para dimensionar uma estrutura mecânica é fundamental que o engenheiro projetista conheça as forças atuam internamente no membro estrutural, para assim possibilitar a seleção do material e geometria capazes de suportar a carga de projeto. As forças internas podem ser divididas em quatro resultantes, que são: as forças normais (tração e compressão), os esforços cortantes (transversal à seção do material), momentos fletores e momentos torsores. Para tal objetivo, estudaremos o método das seções com o objetivo de obter esses esforços internos para um ponto. Posteriormente, esse método pode ser generalizado para obter equações que representem as forças internas ao longo do comprimento de um membro estrutural.

### 4.1.1 Método das seções

O Método das Seções consiste em utilizar o conceito de que quando um corpo está em equilíbrio estático, cada parte dele também deve estar em equilíbrio. Isto é, se realizarmos um corte imaginário em determinado ponto de um membro estrutural, irão surgir forças e momentos no ponto do corte representando as resultantes internas que possuem a função de manter o equilíbrio da parte seccionada pelo corte imaginário.

Essas forças internas são determinadas utilizando as equações de equilíbrio. Para um espaço tridimensional as seis equações de equilíbrio são:

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0, \sum M_x = 0, \sum M_y = 0 \text{ e } \sum M_z = 0.$$

Caso o membro esteja sendo analisado em um espaço bidimensional, as equações de equilíbrio se resumem a:

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0 \text{ e } \sum M = 0.$$

Por simplicidade didática vamos analisar o caso 2D onde cada uma das equações de equilíbrio vai possibilitar obter uma das forças internas. Caso o eixo  $x$  esteja alinhado com o eixo longitudinal da seção de corte, a equação

$\sum F_x = 0$  possibilita o cálculo da força normal à seção transversal representada por  $N$ . Utilizando

$\sum F_y = 0$  é possível obter o esforço cortante  $V$  perpendicular ao eixo da seção. E finalmente, por meio de  $\sum M = 0$  obtém-se o momento fletor  $M$ .

---

## VOCÊ O CONHECE?

Jakob Bernoulli nascido em 1654 e falecido em 1705, na cidade de Basiléia, foi o primeiro da famosa linhagem Bernoulli de matemáticos suíços. Foi tutorado por Leibniz, e o primeiro - além de seu tutor e Newton - a desenvolver o cálculo diferencial para novos problemas. Para saber mais, acesse aqui:

<[http://redeabe.org.br/historia\\_estatistica/projeto/interna/69](http://redeabe.org.br/historia_estatistica/projeto/interna/69)  
([http://redeabe.org.br/historia\\_estatistica/projeto/interna/69](http://redeabe.org.br/historia_estatistica/projeto/interna/69))>.

---

Para melhor entendimento vamos a um exemplo esquemático. A figura (a) a seguir representa uma viga em balanço submetida à força  $P_1$  e Ponto B local onde desejamos saber as forças internas, então a seção  $a-a$  representa o local do “corte” para método das seções. A parte (b) da figura mostra as reações  $A_x$ ,  $A_y$  e  $M_A$  e as forças resultantes internas  $N$ ,  $V$  e  $M$  no Ponto B, representadas (expostas) como forças externas à parte seccionada  $N_B$ ,  $V_B$  e  $M_B$ . Note também que as forças  $N_B$ ,  $V_B$  e  $M_B$  da seção direita e esquerda são opostas. Isso é devido a Terceira Lei de Newton que para toda ação há uma reação de mesma intensidade, direção e sentido oposto.

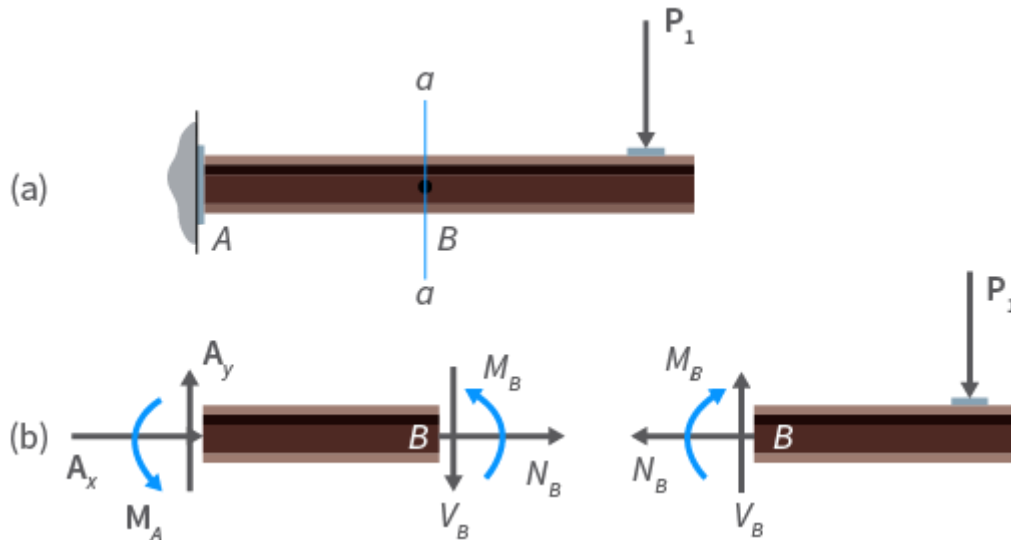


Figura 1 - (a) Viga em balanço. (b) Diagrama de corpo livre apresentando forças internas e reações de apoio ilustrando o Método das Seções.

Fonte: Elaborada pelo autor, baseada em HIBBELER, 2011.

A figura a seguir apresenta a convenção de sinais bidimensional para os esforços internos positivos. A força normal é considerada positiva quando gerar tração no membro, o esforço cortante é considerado positivo quando faz a barra girar no sentido horário, e o momento fletor é considerado positivo quando faz o membro ter uma concavidade na parte superior (HIBBELER, 2011).

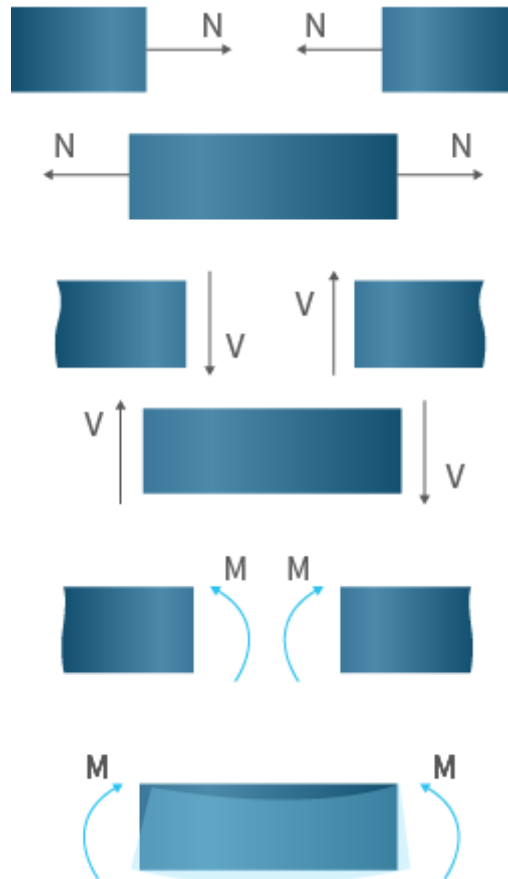


Figura 2 - Convenções de sinais positivos para esforços internos.

Fonte: HIBBELER, 2011, p. 345.

No caso de análise tridimensional, as cargas geralmente têm sinal positivo ou negativo de acordo com as direções do sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  adotado.

#### 4.1.2 Procedimentos de análise de forças internas

Hibbeler (2011), assim como Beer et al. (2019), recomendam o seguinte procedimento geral para análise de forças internas na seção transversal de um membro estrutural:

- determinar as reações de apoio utilizando as três equações de equilíbrio globais bidimensionais ( $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$ ,  $\sum M = 0$ ) dadas pela Segunda Lei de Newton;
- escolher o local onde se deseja conhecer os esforços internos e realizar a seção transversal (corte) do membro em dois segmentos;
- escolher o segmento com menor número de esforços para fazer o diagrama de corpo livre. É importante manter todas as cargas

distribuídas, momentos e forças que atuam sobre o membro nos seus locais exatos;

- arbitrar as resultantes internas nas respectivas direções positivas (como convencionado anteriormente). Essa etapa é importante, pois os sinais irão influenciar quais as regiões da seção transversal estão sob tração ou compressão. Lembre-se que a convenção das direções positivas para um segmento à esquerda do local de corte é o contrário do segmento à direita devido a Terceira Lei de Newton;
- aplicar a equação de equilíbrio  $\sum M = 0$  em relação à posição onde foi seccionado o membro. Isso permitirá obter o momento  $M$  diretamente, sem a necessidade de saber as forças  $N$  ou  $V$ ;
- aplicar as outras as equações de equilíbrio  $\sum F_x = 0$  e  $\sum F_y = 0$  para encontrar as forças  $N$  e  $V$ , respectivamente;
- caso o resultado de alguma das equações de equilíbrio gere um escalar negativo, significa que o sentido da força correspondente está invertido no diagrama de corpo livre.

Tendo conhecimento destes procedimentos fundamentais de análise das forças internas, vamos em frente com os estudos.

## 4.2 Equações e diagramas de esforço cortante e momento fletor

Um dos elementos estruturais mais utilizados na engenharia são as vigas. Para seu dimensionamento correto é necessário o conhecimento de seus esforços internos ao longo do seu comprimento. Como as forças resultantes internas geralmente variam para cada ponto do membro, o Método das Seções pode ser generalizado para obter equações que representem esses esforços ao longo do comprimento do membro estrutural, assim como os correspondentes diagramas de esforços cortantes e de momentos fletores.

Nesta seção faremos uma breve introdução sobre vigas e vamos aprender como obter equações e diagramas de esforços internos ao elemento estrutural, que pode ser uma viga ou outro tipo.

### 4.2.1 Tipos de vigas

Vigas são membros estruturais projetados para suportar cargas perpendiculares aos seus eixos, com elevada resistência à flexão. Em geral são longas barras prismáticas com seção transversal constante e sua classificação geralmente é dada pelas condições de apoio (HIBBELER, 2011; MERIAM; KRAIGE, 2009; BEER et al, 2019).

---

## VOCÊ QUER LER?

A Associação Brasileira da Construção Metálica (ABCEM) tem como objetivos o desenvolvimento da construção metálica no Brasil e a realização de estudos sobre a produção e suprimentos do setor. Você pode acessar aos materiais produzidos pela associação clicando aqui: <<https://www.abcem.org.br/> (<https://www.abcem.org.br/>)>.

---

As vigas são consideradas estaticamente determinadas se suas reações de apoio podem ser calculadas pelas equações de equilíbrio estático. São consideradas estaticamente indeterminadas quando o número de apoios é maior que o necessário e, portanto, as forças não podem ser determinadas usando simplesmente as equações de equilíbrio. A figura a seguir apresenta algumas classificações de vigas estaticamente determinadas e indeterminadas.



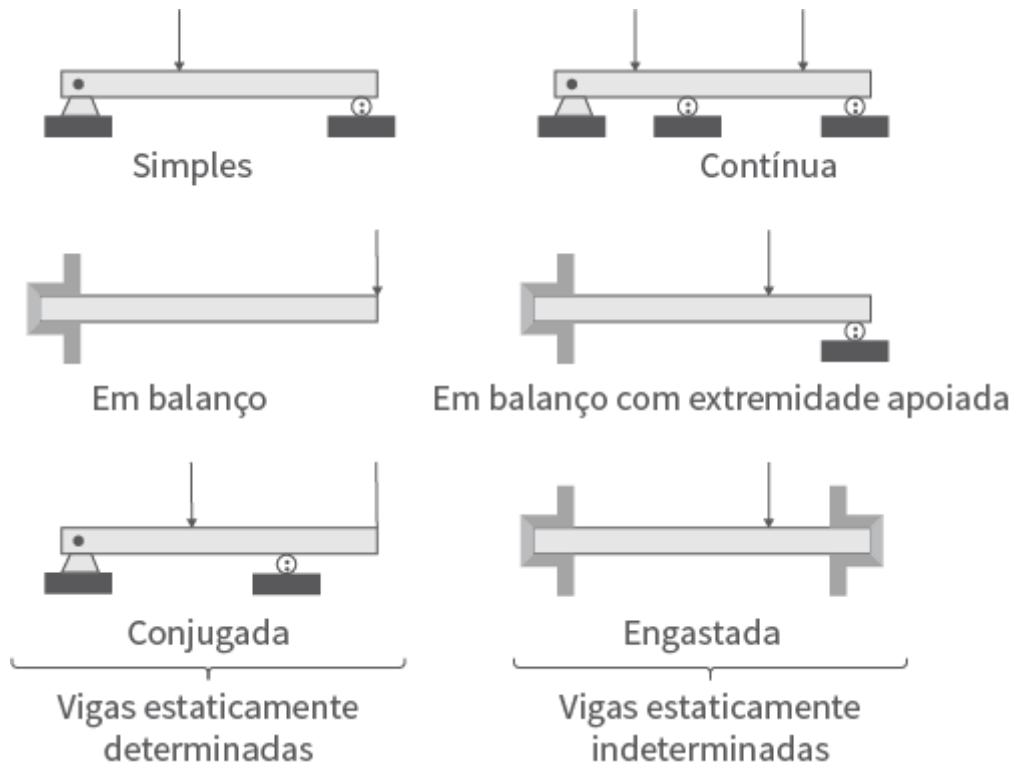


Figura 3 - Tipo de vigas classificadas pelo apoio.

Fonte: MERIAM; KRAIGE, 2009, p. 202.

Note que os carregamentos atuantes nas vigas da figura anterior são todas cargas concentradas, isso ocorre por questões puramente de visualização didática. Na verdade, poderiam ser ainda cargas distribuídas ou momentos puros aplicados a estrutura.

#### 4.2.2 Equações de esforço cortante e momento fletor

Para suprir o requisito de conhecer detalhadamente as forças cortantes e momentos internos ao longo do eixo axial elemento estrutural é possível utilizar uma generalização do Método das Seções. As funções que representam o esforço cortante e momento fletor são geralmente descontínuas. Descontinuidades na equação do esforço cortante podem ser geradas em pontos onde há variação de forças distribuídas ou forças concentradas, enquanto que descontinuidades no momento fletor são geradas por momentos binários (HIBBELER, 2006). Desta forma, é necessária a divisão da viga em segmentos contínuos. Por este motivo as funções devem ser determinadas para cada um destes segmentos.

#### 4.2.3 Procedimentos para equações de esforço cortante e momento fletor

Hibbeler (2011) recomenda um procedimento geral para obter as equações das forças internas ao longo de uma viga.

- Determinar as reações de apoio e decompô-las em componentes perpendiculares e paralelas ao eixo da viga. Geralmente adota-se o eixo axial da viga como eixo  $x$ , e o eixo  $y$  como eixo transversal.
- Seccionar a viga a cada distância  $x$  e desenhar o correspondente diagrama de corpo livre com os esforços internos arbitrados como positivos pela conversão adotada.
- Aplicar o Método das Seções utilizando as equações de equilíbrio para obter funções representando o esforço cortante  $V$  e momento fletor  $M$ , ambos, em função da distância  $x$  (denotados como  $V(x)$  e  $M(x)$ ) para determinado segmento.
- Repetir o processo até ter obtido funções de  $V(x)$  e  $M(x)$  para todos os segmentos e assim possibilitando conhecer os esforços internos ao longo de toda a viga ou membro estrutural em questão.

Conhecendo os procedimentos recomendados por Hibbeler (2011), seguiremos os estudos para o diagrama de esforço cortante e momento fletor.

#### 4.2.4 Diagrama de esforço cortante e momento fletor

As equações  $V(x)$  e  $M(x)$  podem ser usadas para desenhar os respectivos diagramas. Os diagramas são do tipo  $V$  ou  $M$  versus  $x$ . Valores positivos são representados acima do eixo  $x$  e negativos para abaixo.

A seguir iremos explorar a construção das equações por meio de um exemplo adaptado de Beer et al. (2019). A figura (a) a seguir apresenta uma viga bi apoiada (nos pontos A e B) de comprimento com carga concentrada na posição média D.

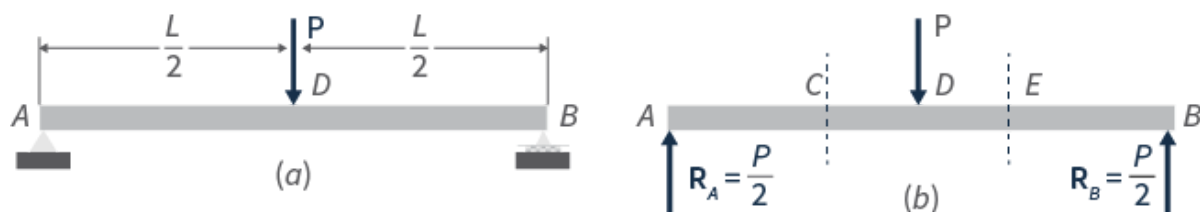


Figura 4 - (a) Viga em bi apoiada com carga concentrada e (b) Diagrama de corpo livre com reações de apoio.

Fonte: Elaborada pelo autor, baseada em BEER, et al., 2019.

Há uma força concentrada que será responsável por gerar uma descontinuidade no diagrama de esforço cortante  $V(x)$ . Então, são necessárias duas equações para representar as variações dos esforços internos ao longo da viga. Portanto, precisamos seccionar a viga em dois pontos (aqui denominados Ponto C e Ponto E), uma antes e outro depois da carga  $P$  responsável pela descontinuidade das equações.

## VOCÊ SABIA?

Famoso pela afirmação de que a terra é redonda, Galileo Galilei, que nasceu em 1564, e veio a falecer em 1642, foi também um dos primeiros a estudar uma forma analítica para estudar feixes de fibras (vigas) carregadas transversalmente (GERE E TIMOSHENKO, 1997).

A figura (c) a seguir apresenta o diagrama de corpo livre com as resultantes internas para os dois segmentos da viga seccionada no Ponto C. Enquanto que a figura (d) apresenta a mesma informação para viga seccionada no Ponto E.

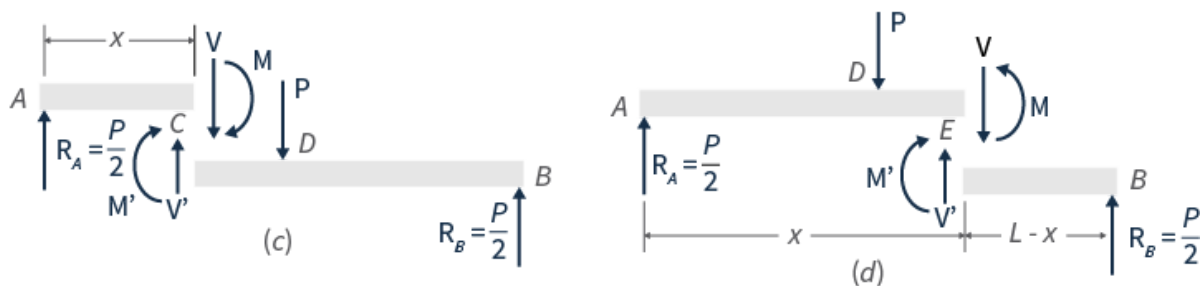


Figura 5 - (c) Diagrama de corpo livre da viga seccionada no Ponto C e (d) diagrama de corpo livre da viga seccionada no Ponto E.

Fonte: Elaborada pelo autor, baseada em BEER, et al., 2019.

Usando o diagrama de corpo livre do segmento AC da figura (c) anterior, vamos iniciar utilizando a equação de equilíbrio

$$\sum M_C = 0$$

$$-\left(\frac{P}{2}\right)x + M = 0 \rightarrow M = \frac{Px}{2} \rightarrow \text{para } 0 \leq x \leq L/2$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-\left(\frac{P}{2}\right) + V = 0 \rightarrow V = \frac{P}{2} \rightarrow \text{para } 0 \leq x \leq L/2$$

Usando o diagrama de corpo livre do segmento EB da figura (d) anterior, vamos dar continuidade utilizando a equação de equilíbrio

$$\sum M_E = 0$$

$$+M - \left(\frac{P}{2}\right)(L - x) = 0 \rightarrow M = -\frac{Px}{2} + \frac{PL}{2} \rightarrow \text{para } L/2 \leq x \leq L$$

$$\sum F_y = 0$$

$$+ \left(\frac{P}{2}\right) + V = 0 \rightarrow V = -\frac{P}{2} \rightarrow \text{para } L/2 \leq x \leq L$$

Por meio das equações geradas para os dois segmentos (AC e CB), é possível criar o Diagrama de Esforço Cortante na figura (e) a seguir, e o Diagrama de Momento Fletor apresentado na figura (f) a seguir.

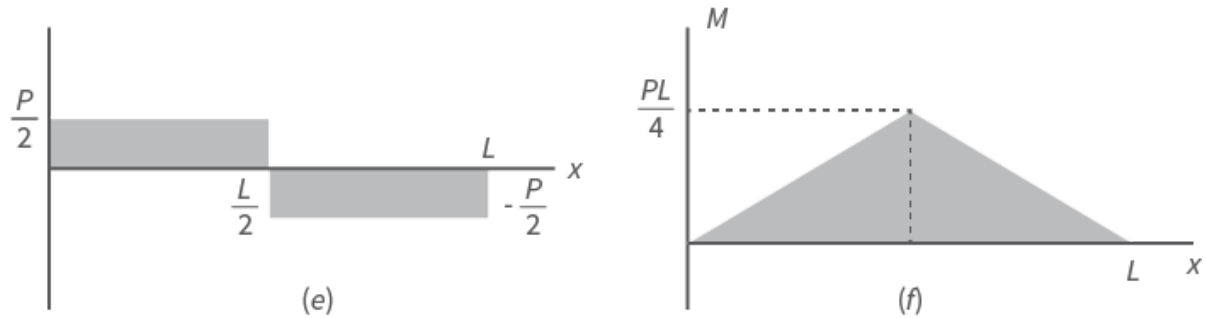


Figura 6 - (e) Diagrama do Esforço Cortante  $V$ . (f) Diagrama do Momento Fletor  $M$ .

Fonte: Elaborada pelo autor, baseada em BEER, et al., 2019.

A maior vantagem do uso dos diagramas é a facilidade para identificar o valor máximo das solicitações internas, cujos valores são normalmente os critérios de dimensionamento para toda a dimensão da viga. Pelos diagramas da figura anterior é fácil identificar os valores e posição dos máximos globais, em que  $V_{max} = 0.5P$  e  $M_{max} = +0.25PL$ .

### 4.3 Relações entre carga distribuída, esforço cortante e momento fletor

Nesta seção estudaremos formas de gerar os gráficos de esforço cortante e momento fletor por meio de relações diferenciais que existem entre o momento fletor, o esforço cortante e carga.

---

## VOCÊ QUER VER?

O documentário *Megaconstruções* da Discovery Channel apresenta uma série de documentários que explora grandes feitos da engenharia estrutural, neste episódio poderemos conhecer mais do Shanghai World Financial Center.

---

Essas relações são especialmente úteis para gerar os diagramas, principalmente quando há muitas cargas concentradas ou carga distribuída mais complexa, fatores que gerariam muitas descontinuidades tornando o uso do Método das Seções muito trabalhoso ou complexo dependendo do carregamento em questão (BEER, et al., 2019; HIBBELER, 2011).

### ***4.3.1 Relações entre carga e força cisalhante***

Vamos considerar uma viga bi apoiada com um carregamento distribuído arbitrário como mostrado na figura a seguir. Analisando a secção de um segmento CC' de comprimento infinitesimal  $\Delta x$  e fazendo o diagrama de corpo livre mostrando as forças e momentos internos nas direções positivas.

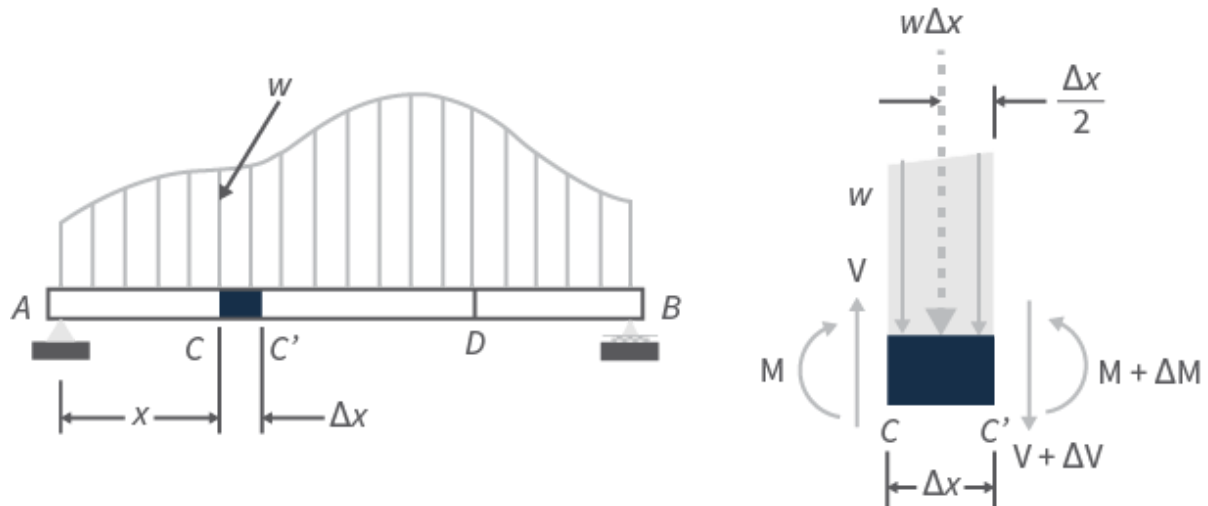


Figura 7 - Viga com carregamento  $w$  e diagrama de corpo livre para segmento diferencial  $\Delta x$ .

Fonte: Elaborada pelo autor, baseada em BEER, et al., 2019.

Hibbeler (2011) e Beer et al. (2019) apresentam uma sequência de passos para dedução das relações entre os esforços. Ao aplicar as equações de equilíbrio levando em consideração que: as forças e momentos do lado direito possuem um acréscimo diferencial, pois variam com  $x$ , tem-se  $V + \Delta V$  e  $M + \Delta M$ ; e que como  $\Delta x$  é muito pequeno o carregamento  $w$  pode ser considerado constante nesse segmento  $CC'$ .

Fazendo o somatório de força na direção vertical, tem-se:

$$V - (V + \Delta V) - w\Delta x = 0$$

$$\Delta V = -w\Delta x$$

Dividindo ambos os lados por  $\Delta x$ , e fazendo  $\Delta x$  tender à zero, obtemos:

$$\frac{dV}{dx} = -w$$

O que indica que para uma viga a inclinação do diagrama de esforço cortante é igual à intensidade da carga distribuída. Se realizarmos a integração da equação  $dV = w(x)dx$  tem-se que a integração entre dois pontos quaisquer na viga é igual a

$$\Delta V = \int w(x)dx$$

Ou seja, a variação do esforço cortante é igual à área sob a curva de carregamento.

### 4.3.2 Relações entre força cisalhante e momento fletor

A realizar o balanço dos momentos no segmento  $CC'$  da figura anterior, e realizando procedimento análogo ao Item 4.3.1, tem-se:

$$(M + \Delta M) - M - V\Delta x + w\Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V\Delta x - \frac{1}{2} w (\Delta x)^2$$

Dividindo ambos os lados por  $\Delta x$ , e fazendo  $\Delta x$  tender à zero, obtemos:

$$\frac{dM}{dx} = V$$

Isto é, a inclinação do diagrama de momento fletor é igual à intensidade do esforço cortante. Se realizarmos a integração da equação de  $dM = Vdx$  tem que

$\Delta M = \int Vdx$  Ou seja, a variação do momento fletor é igual a área sob o diagrama do esforço cortante.

## 4.4 Centro de gravidade, centro de massa e centroide

Meriam e Kraige (2009) apresentam um exemplo muito interessante para aprendizagem do centro de gravidade, o qual está demonstrado na figura a seguir. Para conhecer este método, clique nas setas abaixo.

Consiste-se em um corpo suspenso por um fio e em equilíbrio sob a ação da gravidade representada pelo vetor  $W$ . O fio oferece uma força de tração em virtude da gravidade que atua em todas as suas partículas do corpo. Como o corpo está em equilíbrio, o somatório das forças em todos os eixos, incluído o eixo vertical, é nula.

Adicionalmente, observa-se que a força gravitacional resultante é colinear a linha do fio. Caso repetirmos o experimento suspendendo o corpo em outras posições (caso (b) e (c) da figura a seguir), notaremos que novas linhas de ação da força estarão presentes. No entanto, estas linhas são concorrentes em um único ponto (ponto G), chamado de centro de gravidade do corpo (MERIAM; KRAIGE, 2009).

Neste exemplo, você já pode notar que toda a distribuição complicada das forças de gravidade próximas à Terra em um corpo é equivalente a uma única força que atua no seu centro de gravidade (RUINA; PRATAP, 2014). Isso simplifica a descrição matemáticas, os cálculos bem como a análise dos fenômenos físicos referentes aos movimentos e equilíbrio dos corpos

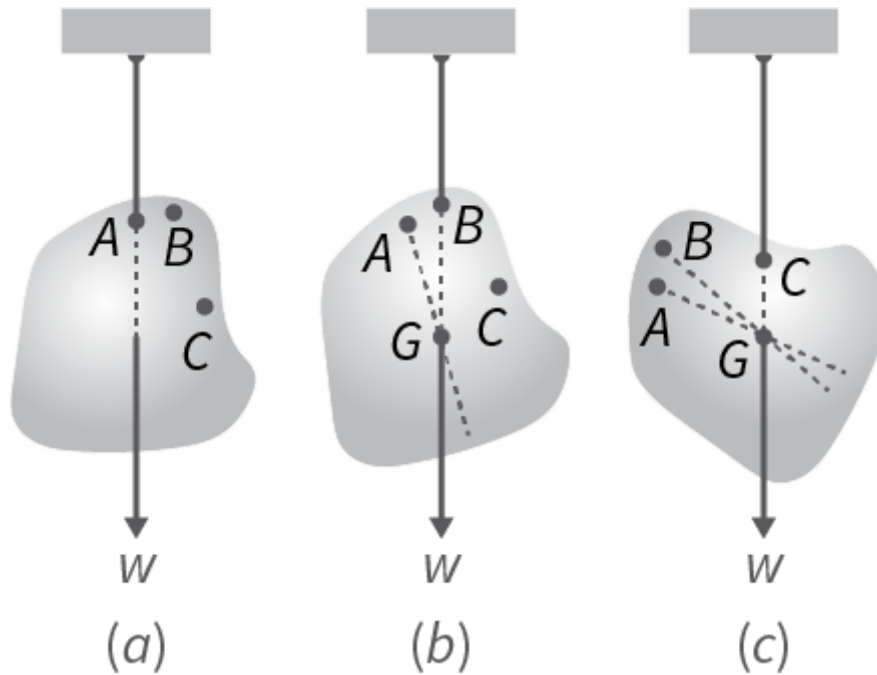


Figura 8 - Corpo suspenso por um fio em diferentes pontos. Traçando uma linha ao longo da ação das forças para diferentes pontos de suspensão, acharemos um ponto onde as linhas são concorrentes. Este corresponde a localização do centro de gravidade.

Fonte: Elaborada pelo autor, baseada em MERIAM; KRAIGE, 2009.

Outro exemplo interessante é demonstrado na próxima figura. Consiste-se no arremessamento de um taco de beisebol. O corpo sofre um deslocamento de rotação e translação. Descrever tal movimento não é muito simples pois a maioria das partículas desse corpo apresenta uma trajetória complexa. No entanto, se desprezarmos o atrito com o ar, existe um ponto o qual exibe uma trajetória parabólica, chamado de centro de massa.



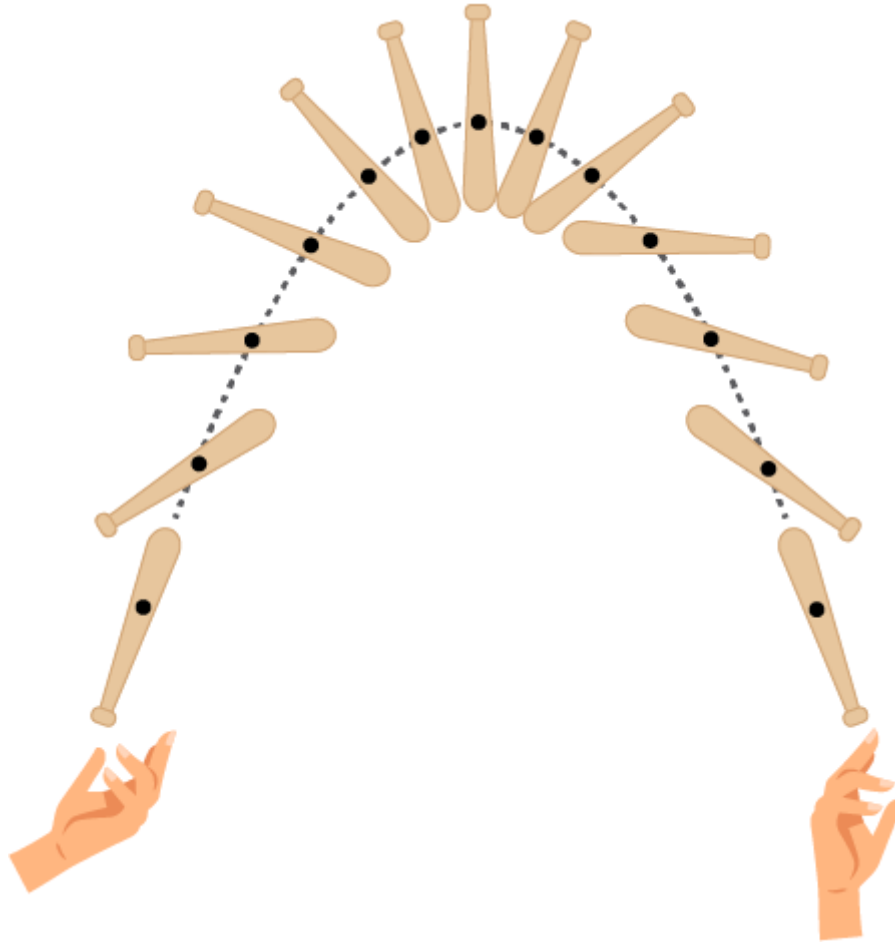


Figura 9 - Lançamento de um taco de beisebol. Desprezando a resistência do ar, existe um ponto que percorre uma trajetória parabólica, facilmente descrita por equações analíticas.

Fonte: HALLIDAY, RESNICK, WALKER, 2011, p. 508.

Um corpo pode ser imaginado como um conjunto de massas discretas (SERWAY; JEWETT, 2019). Segundo Halliday, Resnick e Walker (2016), o centro de massa de um sistema de partículas é o ponto que se move como se (1) toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e (2) todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto. Na visão matemática, o centro de massa é o ponto cujas coordenadas geométricas definido pela média ponderada das coordenadas de cada ponto massivo, resultando em um único conjunto de coordenadas que representa o movimento do conjunto de massas distribuídas (ALVES, 2019). Enquanto o campo gravitacional for tratado como uniforme (não varia de um ponto para outro) e paralelo, o centro de massa coincide com o centro de gravidade.

De acordo com Halliday, Resnick e Walker (2016), o centro de massa de um sistema, composto por  $n$  partículas ou  $n$  massas, é definido como o ponto cujas coordenadas são dadas por:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i, z_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

ou

$$r_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i r_i$$

onde  $M$  é a massa total do sistema composta por diversas massas  $m_i$  com posições  $x_i$ ,  $y_i$  e  $z_i$ . Adicionalmente,  $r$  corresponde ao vetor posição do centro de massa das massas com posições  $r_i$ .

Para o caso de duas massas, a equação anterior para o caso do eixo x, se resume a

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^2 m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}$$

Para o caso de corpos maciços, o somatório das massas discretas é substituído pela integral das massas infinitesimais por meio das equações definidas por Alonso e Finn (2014):

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int x dm, y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm, z_{CM} = \frac{1}{M} \int z dm$$

Segundo Halliday, Resnick e Walker (2016), se tratando de corpos homogêneos, ou seja, que apresentam uma massa específica uniforme (igual em todas as suas partes), as equações acima podem ser escritas no formato

$$x_{CM} = \frac{1}{V} \int x dV, y_{CM} = \frac{1}{V} \int y dV, z_{CM} = \frac{1}{V} \int z dV$$

Para chegar nestas equações, utilizou-se as expressões  $\rho = dm/dV$  e  $dm = (M/V)dV$ . Note que a integral passou a ser realizada sobre o volume do corpo. Além disso, a seguinte equação pode ser desenvolvida para a determinação do vetor posição do centro de massa

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm = \frac{\int \rho \mathbf{r} dV}{\int \rho dV} = \frac{\rho \int \mathbf{r} dV}{\rho \int dV} = \frac{\int \mathbf{r} dV}{V}$$

No caso de corpos homogêneos, a localização do centro de massa e do centroide são as mesmas (RUINA; PRATAP, 2014).

Clique nas abas e aprenda mais sobre o tema!

<b>Simetria</b>	A simetria pode facilitar a determinação da localização do centro de massa, centro de gravidade e centroide. Para exemplos simples uma esfera ou uma caixa quadrada sabe-se que a localização do centro de massa, centro de gravidade e centroide se encontra no centro destes corpos.
<b>Centroide</b>	Considerando corpos homogêneos, Pytel e Kiusalaas (2010) fornecem duas regras importantes para a localização do centroide: se o corpo possuir um plano de simetria, o seu centroide está localizado neste plano, e se o corpo possuir dois planos de simetria que se interceptam ao longo de uma linha, o seu centroide localiza-se nesta linha. Tal regra é importante especialmente para volumes de revolução.

Agora que somos capazes de determinar o centro de massa de corpos, iremos no explorar no próximo tópico como utilizar esse conhecimento para corpos que podem ser divididos em elementos mais simples.

## 4.5 Corpos compostos

Um corpo pode ser tratado como uma soma de duas ou mais partes. Tal estratégia pode ser adotada para realizar o cálculo do centro de massa, centro de gravidade e centroide. A figura a seguir mostra um exemplo de corpo composto. Para realização do cálculo de seu centroide, é possível discretizá-lo em três áreas distintas, as quais subimos o centroide de cada uma por simetria.

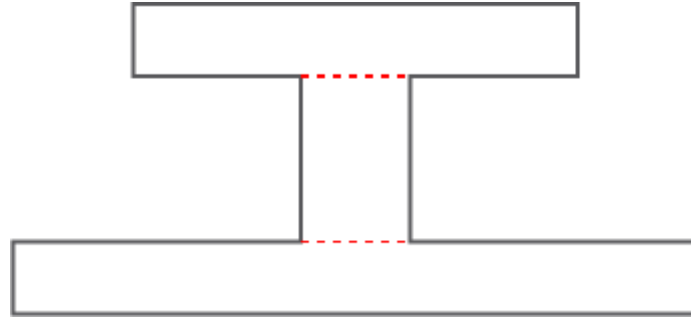


Figura 10 - Exemplo de corpo composto. Para facilitar o cálculo de seu centroide, é possível discretizá-lo em três áreas distintas.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Deste modo, foi possível eliminar a necessidade de aplicar integrais para determinar o centroide de toda a área composta (HIBBELER, 2006).

## 4.6 Definição de momento de inércia de área

O Momento de Inércia de Área, também conhecido como Segundo Momento de Área, é uma propriedade geométrica que na engenharia é frequentemente associada à resistência (rigidez) que um perfil transversal tem. Essa propriedade tem aplicação em casos como resistência à flexão, por exemplo. E também em inúmeras outras disciplinas como mecânica dos fluidos, mecânica estrutural, mecânica dos materiais e projetos mecânicos (HIBBELER, 2006); BEER et al., 2019).

### 4.6.1 Momento de inércia para áreas

Quando uma carga distribuída varia linearmente perpendicularmente a uma área, o cálculo do momento da distribuição dessa carga em relação a um eixo (geralmente que passa pelo centroide) irá gerar um escalar chamado momento de inércia de área. Em que a palavra inércia é usada pelo motivo da formulação ser similar ao momento de inércia de massa, que é uma propriedade dinâmica. É calculada por meio de uma integral de área proporcional ao quadrado da distância dessa área para o eixo e representado pela letra ***I*** (HIBBELER, 2006). Cujas formulações são apresentadas a seguir.

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

### 4.6.2 Momento de inércia polar

Também se pode determinar o Momento de Inércia Polar, que se refere ao momento em relação ao polo (origem dos eixos ***x*** e ***y***) ou eixo ***z***. Representado como

$$J_0 = \int_A r^2 dA = I_x + I_y$$

Onde ***r*** é a distância do polo até o elemento de área ***dA***. Em que a relação de ***r*** com ***x*** e ***y*** é dado por:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

### 4.6.3 Raio de giração

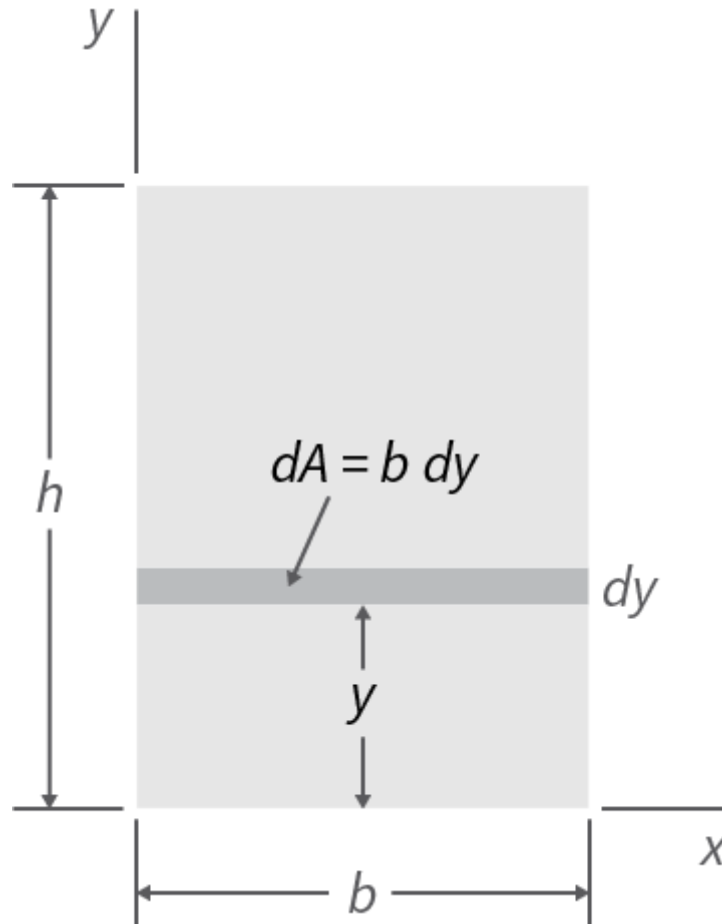
Imagine uma área  $A$  com momento de inércia  $I_x$  em relação ao eixo  $x$ . Se concentrarmos toda essa área em uma faixa estreita a uma distância  $k_x$  do eixo  $x$ , essa distância  $k_x$  representa o raio de giração dessa seção transversal e é definido como

$$I_x = k_x^2 A$$

$$k_x^2 = \frac{I_x}{A} \rightarrow k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

## CASO

Vamos calcular o momento de inércia de uma seção transversal retangular em relação à base, como apresentado na figura a seguir.



Dividindo o retângulo em elementos de área de altura  $dy$  e largura constante  $b$ , tem-se que o elemento diferencial de área  $dA$  é

$$dA = b dy$$

E o elemento diferencial de momento de inércia de área em relação ao eixo  $x$  localizado na base.

$$dI_x = y^2 dA = y^2 b dy$$

$$I_x = \int_0^h dI_x = \int_0^h b y^2 dy = \frac{1}{3} b h^3$$

E o raio de giração  $k_x$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3} b h^3}{b h}} = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

Agora imagine que o eixo  $x$  está localizado no centroide da seção transversal. Para obter esse momento de inércia de área em relação a nova localização do eixo, basta trocarmos os limites de integração. Já que o limite inferior (a base) agora está localizado na posição

$y = -h/2$  e não mais em  $y = 0$ , e o limite superior está em  $y = +h/2$  e não mais em  $y = h$ . Então

$$I_x = \int_{-h/2}^{h/2} dI_x = \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{8} - \left( -\frac{1}{8} \right) \right) b h^3 = \frac{bh^3}{12}$$

E o raio de giração  $k_x$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12}bh^3}{bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

Isso demonstra a importância ao definir corretamente a posição dos eixos a depender a aplicação desejada.

Agora que somos capazes de determinar o momento de inércia e raio de giração para área simples, iremos no próximo tópico como utilizar esse conhecimento para áreas que podem ser divididas em várias áreas mais simples

## 4.7 Momento de inércia para áreas compostas

Muitas seções transversais bastante usadas no dia-a-dia da engenharia são complexas para o cálculo do momento de inércia. Porém, podem-se dividir essas áreas em partes menores, mais simples para o cálculo do segundo momento de inércia em relação a um eixo. Para essa divisão ser útil faremos uso do Teorema dos Eixos Paralelos.

### 4.7.1 Teorema dos eixos paralelos

Hibbeler (2006) define que esse teorema pode ser utilizado para determinar o momento de inércia de uma área em relação a um eixo qualquer desde que esse eixo seja paralelo a um eixo passando pelo centroide da área.

Seja  $I_x$  o momento de inércia de uma área  $A$  a ser determinado,  $d_x$  a distância o eixo a um eixo paralelo passando pelo centroide, e  $\bar{I}_x$  o momento de inércia em relação a esse eixo passando pelo centroide, então

$$I_x = \bar{I}_x + Ad_x^2.$$

### 4.7.2 Momento de inércia para áreas compostas

Áreas compostas consistem em vários elementos de área mais simples que tem seus momentos de inércia conhecidos (como retângulos, círculos e triângulos) então o momento de inércia dessas áreas compostas é igual a soma algébrica dos momentos de área das partes (HIBBELER, 2006).

Na figura a seguir iremos explorar esse conhecimento por meio de um exemplo adaptado de Hibbeler (2016).

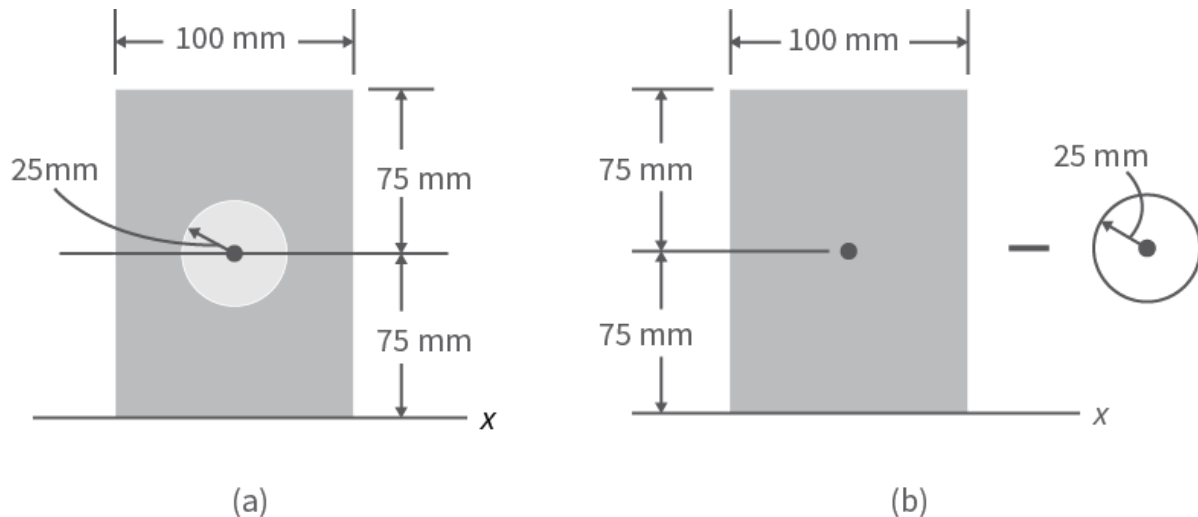


Figura 11 - O momento de inércia da área composta (a) é soma algébrica dos momentos de inércia das componentes de área mais simples (b).

Fonte: HIBBELER, 2016, p. 541.

O valor do momento de inércia do círculo em relação ao eixo  $x$  usando o Teorema dos Eixos Paralelos é:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$= \frac{\pi}{4}(25)^4 + \pi(25)^2(75)^2 = 11.4 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Enquanto que para o retângulo é

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$= \frac{1}{12}(100)(150)^3 + (100)(150)(75)^2 = 112.5 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Então o momento de inércia da área composta é o momento de inércia do retângulo menos o momento de inércia do círculo.

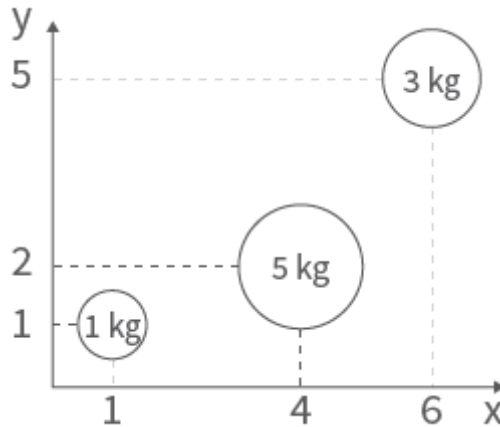
$$I_x = 112.5 \times 10^6 - 11.4 \times 10^6$$

$$I_x = 101.1 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Esse procedimento para cálculo de uma área que pode ser considerada composta por vários elementos, possibilitada pelo Teorema dos Eixos Paralelos, é capaz de facilitar muito descobrir qual o momento de inércia de uma área que por outro método poderia exigir um esforço desproporcional quando comparado com o método apresentado neste tópico.

## VAMOS PRATICAR?

Você deve determinar o centro de massa da figura a seguir, utilizando a definição para o centro de massa, no eixo x e no eixo y, respectivamente.



Utilize as fórmulas a seguir para solucionar a questão:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M} =$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{M} =$$

Gabarito: Utilizando a definição de cálculo para o centro de massa, no eixo x e y temos, respectivamente:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M} = \frac{1(1) + 5(4) + 3(6)}{1 + 5 + 3} = 4$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{M} = \frac{1(1) + 5(2) + 3(5)}{1 + 5 + 3} = 2$$

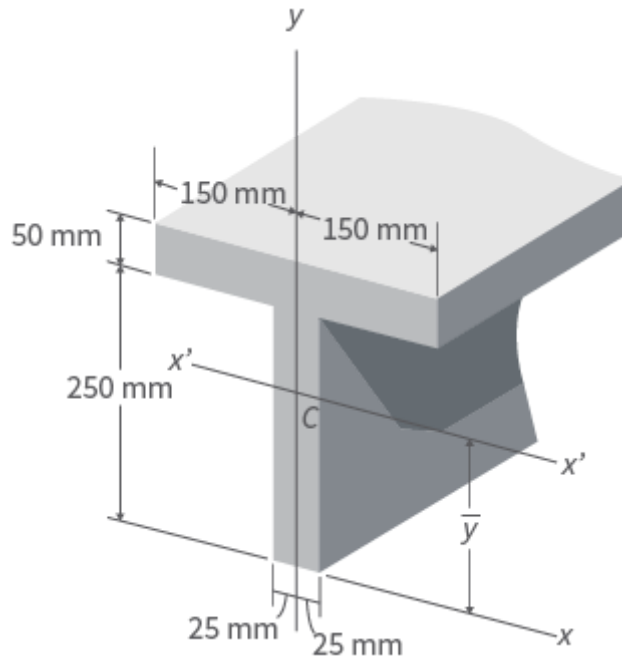
Os resultados fazem sentido pois se intuitivamente podemos perceber que o centro de massa do sistema deve estar localizado um pouco a direita e acima da massa de 5 kg. Naturalmente, isso ocorre, pois, a massa de 3 kg possui uma massa maior que a de 1 kg e está localizada próximo a origem do sistema de coordenadas. Você pode utilizar o mesmo método para calcular os valores diferentes que você estipulou.

Na sequência, veja outro exemplo prático.



## VAMOS PRATICAR?

Na figura a seguir iremos explorar esse conhecimento por meio de um adaptado de Hibbeler (2016).



Calcule a posição  $\bar{y}_C$  do centroide do perfil mostrado, a partir do eixo  $x$ .  
fórmula a seguir para solucionar a questão:

$$\bar{y}_C = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^N A_i \bar{y}_i$$

Gabarito: Utilizando a definição de cálculo para o centroide, vamos dividir a s  
duas áreas, um retângulo horizontal superior e outro vertical inferior

$$\bar{y}_C = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^N A_i \bar{y}_i = \frac{A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2}{A_1 + A_2} = \frac{(300 \times 50 \text{ mm}^2) \cdot 275 \text{ mm} + (50 \times 250 \text{ mm}^2)}{(300 \times 50 \text{ mm}^2) + (50 \times 250 \text{ mm}^2)}$$

$$\bar{y}_C = \frac{(15000 \text{ mm}^2) \cdot 275 \text{ mm} + (12500 \text{ mm}^2) \cdot 125 \text{ mm}}{(15000 \text{ mm}^2) + (12500 \text{ mm}^2)} = \frac{4125000 \text{ mm}^3 + 1562500 \text{ mm}^3}{27500 \text{ mm}^2}$$

$$\bar{y}_C = \frac{5687500 \text{ mm}^3}{27500 \text{ mm}^2} = 206,81 \text{ mm}$$

## Síntese

Esta unidade abordou a análise estrutural de viga, seus diagramas e equações de momentos fletores e esforços cortantes. Assim como cálculos de centros de massa e momentos de inércia de área, trazendo ao aluno os conhecimentos básicos que os Engenheiros e Arquitetos utilizam para projetar tais estruturas.

Nesta unidade, você teve a oportunidade de:

- estruturar o método das seções para determinar as cargas internas em um elemento estrutural;
- desenvolver este procedimento formulando equações que podem ser representadas de modo que descrevam o cisalhamento e momento interno ao longo de um membro estrutural;
- compreender o processo de construção de diagramas de esforço cortante e momento fletor em elementos estruturais;
- conhecer o conceito de centro de gravidade, centro de massa e centroide;
- conhecer como determinar a localização do centro de gravidade e do centroide para um sistema de partículas discretas e um corpo de forma arbitrária;
- desenvolver um método para determinar o momento de inércia de área de uma figura plana;
- conhecer sobre produto de inércia e identificar como determinar os momentos de inércia máximo e mínimo de uma área;
- conhecer o conceito de momento de inércia da massa confrontando com o conceito de momento de inércia de área.



◀ Clique para baixar o conteúdo deste tema.

## Bibliografia

- ABCEM. Associação brasileira da construção metálica. **Homepage**. Disponível em: . Acesso em: 21/09/2019.
- ALONSO, M.; FINN, E. J. **Física um curso universitário**. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2014.
- ALVES, L. M. **Fundamentos da física para a ciência e engenharia dos materiais**. 1. ed. Ponta Grossa: [s.n.], 2019.
- BEER, F. P.; JR, RUSSEL. E. J.; DEWOLF, J. T. **Mechanics of materials**. 3. ed. [S.l.]: Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, 2019.
- MEGACONSTRUÇÕES: Discovery Channel. Shanghai World Financial Center (Dublado) 2018. 44 min, col. Son. Disponível em: . Acesso em: 21/09/2019.

- GERE, J. TIMOSHENKO, S. **Mechanics of Materials**. 4. ed. Boston: PWS Publishing Company, 1997.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentals of Physics**. 9. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2011.
- \_\_\_\_\_. **Fundamentos de Física - Mecânica**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- HIBBELER, R. C. **Estatica - Mecânica para Engenharia**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2011.
- \_\_\_\_\_. **Statics - Engineering Mechanics**. 14. ed., New Jersey: Hoboken, 2016.
- \_\_\_\_\_. **Mecânica of Materials**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. **Mecânica para Engenharia - Estática**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- PYTEL, A.; KIOUSALAAS, J. **Engineering Mechnics Statics**. 3. ed. Stamford: Cengage Learning, 2010.
- REDEABE. **História estatística**. Disponível em: Acesso em: 21/09/2019.
- RUINA, A.; PRATAP, R. **Introduction to Statics and Dynamics**. [S.l.]: Oxford University Press, 2014.
- SERWAY, R. A.; JEWETT, J. W. **Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics**. [S.l.]: Cengage Learning, 2019.