ÁLGEBRA LINEAR COMPUTACIONAL
ESPAÇO VETORIAL

Autor: Dr. Ricardo Noboru Igarashi

INICIAR

introdução

Introdução

Nesta última parte, apresentaremos os conceitos de espaços vetoriais. Lembrando que no primeiro módulo apresentamos os vetores e, neste momento, apresentamos os vetores em termos dos componentes. Por exemplo, em R^2, duas componentes e em R^3 três componentes. Neste módulo, usaremos as propriedades algébricas mais importantes dos vetores em R^n como axiomas. Consideraremos um conjunto de vetores, em que definiremos as operações de adição e multiplicação por um escalar. Por meio dessas definições e axiomas, apresentaremos o chamado espaço vetorial. Por fim, também estudaremos a transformação linear entre elementos de um espaço vetorial. Esses conceitos possuem aplicações nos campos da Física, Matemática, Computação e em diversos ramos das Engenharias.

Espaço Vetorial

Os vetores podem ser representados nas formas bidimensionais, isto é, no plano xy, como mostrado na Figura 4.1. Nesta situação, o par ordenado (x,y) representa um vetor:

bidimensional (x, y)

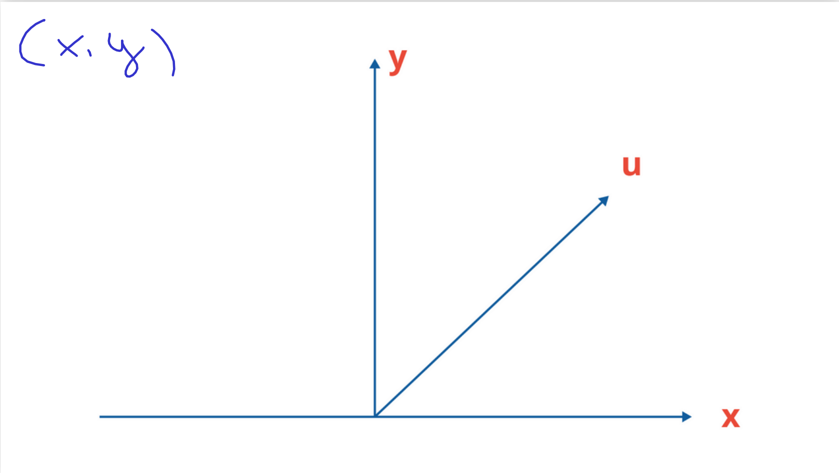


Figura 4.1 - Vetor representado no plano (x,y)
Fonte: Elaborada pelo autor.

A mesma ideia se apresenta no sistema tridimensional (x, y, z), isto é, no R^3 (WINTERLE, 2000). Esse mesmo conceito pode ser aplicado em R^4, R^5, $\ldots$, R^n. Claro que nessas últimas dimensões não conseguiremos ter a visão geométrica.

Nosso objetivo será trabalhar com os vetores no R^n. Assim, apresentaremos um conjunto de dez axiomas, oito dos quais são propriedades dos vetores no R^n. Lembrando que em matemática não se demonstra os axiomas. Os axiomas são pontos de partidas para provar teoremas (ANTON, 2012).

Para iniciarmos, designaremos os vetores $u = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n)$ e um escalar, que denotaremos como a e b. Com isso, consideraremos V um conjunto não vazio, que contém u, v e w, no qual estejam definidas duas operações, a adição entre dois vetores u e v e multiplicação de um escalar por um vetor. Se os axiomas seguintes forem satisfeitos por todos os vetores u, v e w em V e quaisquer escalares, podemos dizer que V é um espaço vetorial e que os objetos de V são vetores. Dessa forma, os axiomas são os seguintes (ANTON, 2012):

1. Se u e v são objetos em V, então $u+v$ é um objeto em V
$$u+v=v+u$$
$$u+(v+w)=(u+v)+w$$
2. Existe um vetor nulo de V, 0, que $0+u=u+0=u$.
3. Existe um vetor $-u$, denominado negativo de u, tal que $u+(-u)=(-u)+u=0$.
4. Se a for qualquer escalar e u um vetor em V, então au é um vetor em V.
5. $a\left(u+v\right)=au+av.$
$$\left(a+b\right)u=au+bu$$
6. $a\left(bu\right)=\left(ab\right)u$
$$1u=u$$

Assim, qualquer tipo de vetor pode estar dentro do espaço vetorial, desde que os dez axiomas sejam satisfeitos. Assim, diversos outros espaços têm o comportamento com o espaço R^n. Por exemplo, o espaço vetorial V pode ser substituído por polinômios, por matrizes etc. Existem alguns passos que podemos usar para mostrar que um conjunto com duas operações é um espaço vetorial:

a) identifique o conjunto V de objetos que serão os vetores;

b) identifique as operações de adição e multiplicação por escalar;

c) verifique a validade dos Axiomas 1 e 6;

d) confirme que valem os Axiomas 2, 3, 4, 5, 7, 8,9 e 10.

Vamos fazer alguns exemplos, para a ilustração desses passos junto com os axiomas.

Exemplo 1)

O espaço vetorial nulo.

Primeiramente, já identificamos o conjunto V como apenas constituído do vetor 0.

Agora, temos de identificar as operações de adição e multiplicação por um escalar.

$$0+0=0$$

$$a0=0.$$

Também é verificado que os axiomas do espaço vetorial são satisfeitos. Assim, temos o espaço vetorial nulo.

Exemplo 2) O espaço vetorial R^n.

Identificamos o conjunto como $V = R^n$. Nesse caso, consideramos $u = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$. A operação de soma e multiplicação é definida para esses vetores.

$$u + v = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ u_3 + v_3,\ \ldots,\ u_n + v_{1n}$$

$$au = a\,(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) = (au_1, au_2, au_3, \ldots, au_n)$$

As operações anteriores obedecem aos axiomas e, portanto, são espaços vetoriais.

Exemplo 2) O espaço vetorial das matrizes $2x2$

Identificamos o conjunto como as matrizes $2x2$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Designamos as matrizes como $u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$.

Definimos as somas das matrizes como:

$$u + v = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{pmatrix}$$

$$au = a \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_{11} & au_{12} \\ au_{21} & au_{22} \end{pmatrix}$$

Agora, devemos verificar que os axiomas 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 e 10.

2) $u + v = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{pmatrix} = v + u.$

3) $u + (v + w) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$.

$$+ \begin{pmatrix} v_{11} + w_{11} & v_{12} + w_{12} \\ v_{21} + w_{21} & v_{22} + w_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} + v_{11} + w_{11} & u_{12} + v_{12} + w_{12} \\ u_{21} + v_{21} + w_{21} & u_{22} + v_{22} + w_{22} \end{pmatrix} = (u + v) + w$$

4) $0.u = 0 \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5) Existe um vetor u, denominado negativo de u, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$. Por exemplo, nesse caso, teremos:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7)

$$a\,(u + v) = a \left[\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \right] = a \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = au + av.$$

8) $(a+b)\,v = (a+b)\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = av + bv.$

9) $a\,(bu) = ab\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = (ab)\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}.$

10) $1u = 1\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$

Exemplo 3) Considere os seguintes vetores: $u = (u_1, u_2) = (2, 4)$, $v = (v_1, v_2) = (-3, 9)$ e $a = 7$. São definidas as seguintes operações:

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

$$au = (au_1, 0)$$

Usando o conceito de soma e multiplicação por um escalar, teremos:

$$u + v = (2 - 3, 4 + 9) = (-1, 13)$$

$$au = 7u = (7.2, 0) = (14, 0)$$

Quando aplicamos os axiomas nas operações anteriores, verificamos que o axioma 10 não é válido:

$$1u = 1\,(2, 4) = (1.2, 0) \neq u$$

Assim, as operações não formam um espaço vetorial.

Subespaço Vetorial

Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não vazio de V. Esse subconjunto S será um subespaço vetorial em relação à adição e à multiplicação por um escalar definidas em V. Nessa situação, também teríamos de aplicar os axiomas para o subconjunto S, contudo, como S faz parte de V, não há necessidade.

Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços: o conjunto {0}, chamado subespaço zero ou subespaço nulo, e o próprio espaço vetorial V, que são chamados subespaços triviais de V. Os restantes são chamados subespaços próprios de V.

Exemplo 4) O espaço vetorial R^2.

No espaço vetorial R^2, os subespaços triviais são $(0, 0)$. Os subespaços próprios de R^2 são retas que passam pela origem. Por exemplo: $x = y,\ x = 2x$.

Exemplo 5) O espaço vetorial R^3.

No espaço vetorial R^3, os subespaços triviais são $(0, 0, 0)$. Os subespaços próprios de R^3 são retas e planos que passam pela origem.

Vamos Praticar

Seja o espaço vetorial V conjunto de todos os pares ordenados de números reais e considerando as operações de adição e multiplicação por um escalar, a, definidos como $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$:

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)\,,\ au = (0, au_2)$$

ANTON, H. **Álgebra linear com aplicações** . Porto Alegre: Bookman, 2012.

Nessa definição, considere que $u = (3, -5)$, $v = (2, 3)$ e $a = 2$. Assinale a alternativa que indica os valores de $u + v$ e au, respectivamente:

- **a)** $(5, -2)$; $(0, 10)$
- **b)** $(5, -2)$; $(10, 0)$.
- **c)** $(5, -2)$; $(6, -10)$.
- **d)** $(5, -2)$; $(0, \ -10)$.
- **e)** $(5, -2)$; $(6, 10)$.

$u + v = (3+2, -5+3) = (5, -2)$

$a \cdot u = (0, a \cdot u2)$

$au = (0, 2 \cdot (-5)) = (0, -10)$

Combinação Linear

Para apresentarmos o conceito de combinação linear, vamos considerar os vetores v_1, v_2, ..., v_n que fazem parte do espaço vetorial V e os escalares a_1, a_2, ..., a_n. Podemos escrever um vetor v da forma:

$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots + a_n v_n$

será uma combinação linear dos vetores v_1, v_2, ..., v_n.

Exemplo 6) Considere os vetores $v_1 = (2, 3, -1)$ e $v_2 = (0, -3, 8)$. Monte uma combinação linear desses vetores como $v = 2v_1 - v_2$.

$$v = 2\,(2, 3, -1) - (0, -3, 8) = (4, 6, -2) - (0, -3, 8) = (4, 9, -10)$$

Subespaço Vetorial Gerado

Consideramos um espaço vetorial V que contém os vetores $v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots,\ v_n$. Se fizermos combinações vetoriais desses vetores, geraremos um conjunto S que será um subespaço vetorial de V. A seguir, colocamos dois exemplos:

Exemplo 7) Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ gerarão o espaço vetorial chamado R^2. Isso pode ser verificado, pois qualquer par (x, y) será uma combinação linear de e_1 e e_2.

$$(x, y) = a_1 e_1 + a_2 e_2 = a_1\,(1, 0) + a_2\,(0, 1) = (a_1, a_2)$$

Onde a_1 e a_2 são escalares.

Exemplo 8) Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ gerarão o espaço vetorial chamado R^3. Isso pode ser verificado, pois qualquer vetor (x,y,z) será uma combinação linear de $e_1,\ e_2$ e e_3.

$$(x, y, z) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = a_1 (1, 0, 0) + a_2 (0, 1, 0) + a_3 (0, 0, 1) = (a_1, a_2, a_3)$$

Em que a_1, a_2 e a_3 são escalares.

Dependência e Independência Linear

Consideramos um espaço vetorial V e um conjunto de vetores que chamamos $A = \{v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots,\ v_n\}$, que estão contidos em V. Com base nesses vetores, podemos escrever:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots + a_n v_n = 0$$

Uma das possíveis soluções seria a solução trivial \[{{a}_{1}}={{a}_{2}}={{a}_{3}}=\ldots = {{a}_{n}}=0\).

O conjunto de vetores A será linearmente independente (LI), caso a equação acima possua apenas a solução trivial. Contudo, se existirem soluções que $a_i \neq 0$, o conjunto de vetores será linearmente dependente.

Nessa situação, podemos definir o conjunto linearmente independente mais básico de R^n, sendo os vetores unitários canônicos:

$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1, \ldots, 0, \ldots, 0) \ldots,\ e_n = (0, 0, 0 \ldots, 1)$.

No primeiro módulo, verificamos que em R^3 temos os vetores unitários:

$$\hat{i} = (1, 0, 0)\ ,\ \hat{j} = (0, 1, 0)\ ,\ \hat{k} = (0, 0, 1)$$

Para verificar a dependência ou independência linear desses vetores, escrevemos:

$a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k} = 0$

A única maneira para que a equação acima seja zero será que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Assim, o conjunto de vetores é LI.

Exemplo 9) Determine se os vetores

$$v_1 = (1, -2, 3)\ ,\ v_2 = (5, 6, -1)\ ,\ v_3 = (3, 2, 1)$$

são linearmente independentes ou dependentes em R^3.

Primeiramente, escrevemos:

$$a_1 (1, -2, 3) + a_2 (5, 6, -1) + a_3 (3, 2, 1) = 0$$

Com base nessa equação, encontramos o seguinte sistema:

$$a_1 + 5a_2 + 3a_3 = 0$$

$$-2a_1 + 6a_2 + 2a_3 = 0$$

$$3a_1 - a_2 + a_3 = 0$$

Calculando o determinante da matriz formada pelos elementos $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Podemos verificar que, com isso, temos um sistema possível e indeterminado, isto é, as soluções possíveis são infinitas. Dessa forma, os vetores são linearmente dependentes.

Exemplo 10) Determine se os vetores $v_1 = (1, 2, 2, -1)$, $v_2 = (4, 9, 9, -4)$, $v_3 = (5, 8, 9, -5)$ são linearmente dependentes ou independentes.

Primeiramente, devemos escrever:

$$a_1 (1, 2, 2, -1) + a_2 (4, 9, 9, -4) + a_3 (5, 8, 9, -5) = (0, 0, 0, 0)$$

Com isso, podemos ter o seguinte sistema linear:

$$a_1 + 4a_2 + 5a_3 = 0$$

$$2a_1 + 9a_2 + 8a_3 = 0$$

$$2a_1 + 9a_2 + 9a_3 = 0$$

$$-a_1 - 4a_2 - 5a_3 = 0$$

Quando tentamos resolver esse sistema, encontramos que a única solução possível será que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Portanto, o conjunto de vetores acima será linearmente independente.

praticar

Vamos Praticar

Verificamos anteriormente que, para que um conjunto de vetores $v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n$ seja linearmente independente $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_nv_n = 0$.

Em que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, isto é, apenas soluções triviais. Nesse caso, considere que:

I. Os conjuntos de vetores (1,2) e (3,5) são um conjunto linearmente independente.

Porque:

II. A solução do sistema formado por esses vetores somente aceita solução trivial.

Assinale a alternativa que apresenta a correlação correta:

- ○ **a)** A asserção I é uma proposição verdadeira, e a asserção II é uma proposição falsa.
- ○ **b)** As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta da I.
- ○ **c)** A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.
- ○ **d)** As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa correta da I.
- ○ **e)** As asserções I e II são proposições falsas.

Dimensão de um Espaço Vetorial

A dimensão de um espaço vetorial V será definida pela sua base de vetores. Por exemplo, se V tem uma base com uma quantidade n vetores. Essa quantidade definirá a dimensão do espaço vetorial. Exemplos:

1. dim $R^2 = 2$
2. dim $R^3 = 3$
3. dim $R^n = n$
4. dim Matriz $(2, 2) = 4$
5. dim Matriz $(m, n) = mxn$.

reflita

Reflita

Muitos matemáticos deram importantes contribuições à Geometria Plana e Espacial. Podemos citar Pitágoras, Euclides, Arquimedes, dentre outros. Por meio das obras desses matemáticos, a Matemática deixa seu aspecto intuitivo e empírico e passa a assumir um caráter racional, dedutivo e lógico, com definições, axiomas, postulados e teoremas.

Fonte: Boyer (2012).

Para ter um entendimento melhor desse conceito, vamos fazer o exemplo a seguir:

Determinar a dimensão e a base do seguinte espaço vetorial.

$$V = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 /\ x + 2y + z = 0\ \}$$

Primeiramente, podemos isolar z: $x + 2y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -x - 2y$

Também poderíamos ter isolado x ou y

$(x,\ y,\ z)\ \in\ S$ tem a forma $(x,\ y,\ -x - 2y)$

$$(x, y, z) = (x,\ 0,\ -x) + (0,\ y,\ -2y)$$

$$(x,\ y,\ z) = x\,(1,\ 0,\ -1) + y\,(0,\ 1,\ -2)$$

$$S = \{(1,\ 0,\ -2)\,, (0, 1, -1)\}\quad dimS = 2$$

Nesse caso, a dimensão do espaço vetorial será igual a 2, com a base dada por $(1,\ 0,\ -2)\,, (0, 1, -1)$.

praticar

Vamos Praticar

A dimensão de um espaço vetorial dependerá da sua base vetorial. Dessa forma, determine a base e a dimensão do espaço vetorial descrito a seguir:

$$S = \{(x,\ y,\ z,\ w) \in R^4\ /\ x + 2y - z + w = 0\}$$

- **a)** $(1,\ 0,\ 0,\ -1)\,,\ (0,\ 1,\ 0,\ -2)\ \text{e}\ (0,\ 0,\ 1,\ 1)\ dim = 3.$
- **b)** $(1,\ 0,\ 0,\ -1)\,,\ \text{e}\ (0,\ 0,\ 1,\ 1)\ dim = 2.$
- **c)** $(1,\ 0,\ 0,\ -1)\ \text{e}\ (0,\ 1,\ 0,\ -2)\ dim = 2.$
- **d)** $(1,\ 0,\ 0,\ -1)\,,\ (0,\ 1,\ 0,\ -2)\,,\ (1,\ 1,\ 0,\ -3)\ \text{e}\ (0,\ 0,\ 1,\ 1)\ dim = 4.$
- **e)** $(1,\ 0,\ 0,\ -1)\,,\ (0,\ 1,\ 0,\ -2)\ \text{e}\ (1,\ 1,\ 0,\ -3)\ dim = 3.$

Transformações Lineares

Transformações lineares são funções da forma $w = F(x)$ cuja variável independente x é um vetor, e a variável dependente w é também um vetor. Estamos, portanto, interessados em estudar uma classe especial de tais funções chamadas "Transformações Lineares". As transformações lineares são fundamentais ao estudo da álgebra linear e têm muitas aplicações na Física, Engenharia e em muitos ramos da Matemática.

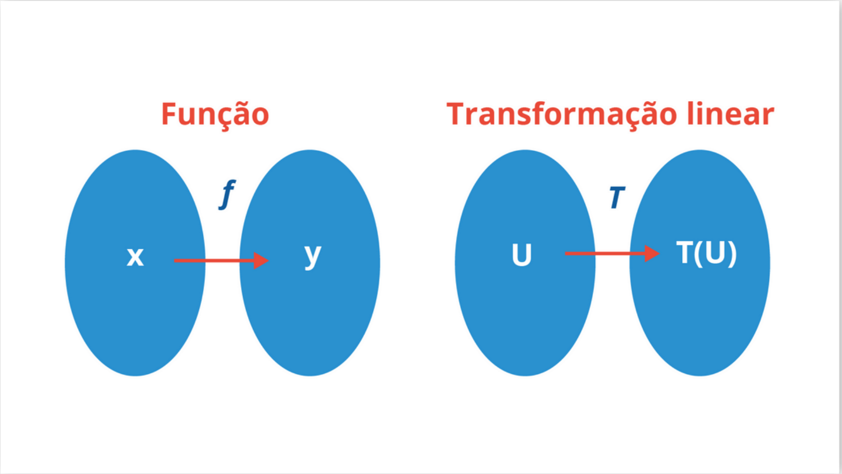


Figura 4.2 – Transformação linear
Fonte: Elaborada pelo autor.

Transformações lineares são dois conjuntos de vetores ligados por meio de um conjunto domínio e um conjunto imagem por uma lei de formação.

Podemos ter transformações lineares $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Vamos ver um exemplo de como funciona uma transformação linear

Dado $T(x, y) = (2x, y, x + y)$ calcule $T(1, 1)$

Essa é uma transformação linear $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$T\left(1,1\right)=\left(2.1,1,1+1\right)\ \ T\left(1,1\right)\ \ =\ \ \left(2,1,2\right)$$

Condições necessárias para termos uma transformação linear:

Se $\vec{u}\rightarrow T\left(\vec{u}\right),\ v\rightarrow T\left(\vec{v}\right),\ \vec{u}+\vec{v}\ \rightarrow T\left(\vec{u}+\vec{v}\right),\ \mathrm{Dado} a\in\mathbb{R}a.\,\vec{u}T\left(a.\,\vec{u}\right)$

$$T\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=T\left(\vec{u}\right)+T\left(\vec{v}\right)$$

$$T\left(a.\,\vec{u}\right)=a.\,T\left(\vec{u}\right)$$

Dada a transformação linear $T\left(x,y\right)=\left(3x,-2y,x-y\right)$, os vetores $\vec{u}=\left(2,1\right)$ e $\vec{v}=\left(-1,3\right)$ e o número real $a=3$, mostre que as duas regras são válidas.

$$T\left(\vec{u}\right)=T\left(2,1\right)=\left(3.2,-2.1,2-1\right)=\left(6,-2,1\right)$$

$$T\left(\vec{v}\right)=T\left(-1,3\right)=\left(3.\left(-1\right),-2.3,-1-3\right)=\left(-3,-6,-4\right)$$

$$\vec{u}+\vec{v}=\left(1,4\right)\Rightarrow T\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\left(3.1,\ \ -2.4,1-4\right)=\left(3,-8,\ \ -3\right)$$

Propriedade 1

$$T\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=T\left(\vec{u}\right)+T\left(\vec{v}\right)\Rightarrow\left(3,-8.-3\right)=\left(6,-2,1\right)+\left(-3,-6,-4\right)=\left(3,-8,-3\right)$$

$$a.\,\vec{u}=3.\left(2,1\right)=\left(6,3\right)\ \ \Rightarrow T\left(6,3\right)=\left(3.6,-2.3,6-3\right)=\left(18,\ \ -6,\ 3\right)$$

Propriedade 2

$$T\left(a.\,\vec{u}\right)=\ a.\,T\left(\vec{u}\right)\Rightarrow\left(18,\ \ -6,\ 3\right)=3.\left(6,\ \ -2,\ 1\right)=\left(18,\ \ -6,\ 3\right)$$

Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, sendo $v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$ e $v_3 = (1,1,0)$. Determine $T(5,3,-2)$, sabendo que $T(v_1) = (1,-2)$, $T(v_2) = (3,1)$ e $T(v_3) = (0,2)$

- a. $T(5,3,-2) = (20,10)$
- b. $T(5,3,-2) = (20,-10)$
- c. $T(5,3,-2) = (-30,20)$
- d. $T(5,3,-2) = (-10,20)$
- e. $T(5,3,-2) = (10,20)$

$(x,y,z) = a(0,1,0) + b(1,0,1) + c(1,1,0)$

$(x,y,z) = (0,a,0) + (b,0,b) + (c,c,0)$

$(x,y,z) = (0+a+0) + (a+0+c) + (a+b+0)$

$x = b$

$b = x$

$z = x + a$

$a = z - x$

$y = a + c$

$y = z - x + c$

$c = y - z - x$

$(x,y,z) = a(0,1,0) + b(1,0,1) + c(1,1,0)$

$(x,y,z) = (0,a,0) + (b,0,b) + (c,c,0)$

$(x,y,z) = (0,b,0) + (a,0,c) + (a,b,0)$

$x = b$

$b = x$

$y = a + c$

$y = z - x + c$

$c = y - z - x$

$z = a + b$

$z = a + x$

$a = z - x$

$(z-x)(1,-2) + x(3,1) + (y-z-x)(0,2)$

$z-x, (-2(z-x)) + 3x, x + (0, 2y - 2z - 2x)$

$z - x + 3x + 0, -\cancel{2z} - 2x + x + 2y - \cancel{2z} - \cancel{2x}$

$z + 2x, -4z - 4x + x + 2y$

$z + 2x, -4z - 3x + 2y$

$(-2 + 2(5)), -4(-2) - 3\cdot 5 + 2 \cdot 3$

$8, 8 - 10 + 6$

$8, -4$

saiba mais

Saiba mais

As transformações lineares, no plano, são estudadas com maior afinco nas disciplinas de Álgebra Linear. Muitas vezes, não mostram as relações existentes da Álgebra Linear com a Geometria, fato que faz com que o ensino de tal disciplina se torne mais abstrata. A proposta deste artigo é explorar atividades com o uso do WINPLOT, para mostrar as transformações lineares no plano e os tipos existentes, objetivando dar um suporte maior para a inserção das transformações lineares em outros espaços vetoriais e estudar a Geometria das Transformações. O fato de as transformações também serem uma função, justifica ainda mais o uso do WINPLOT. As atividades sugeridas, que contemplam exemplos que facilitarão o entendimento das definições que são apresentadas, normalmente, na disciplina de Álgebra Linear, fazendo um elo entre Álgebra e Geometria.

ACESSAR

Matriz de uma transformação linear

Dada a transformação linear $T\left(x,y\right) = \left(2x - y,\ x - 2y,\ x + 2y\right)$.

Como a transformação está no $\mathbb{R}^2$, vamos aplicar a transformação na base canônica.

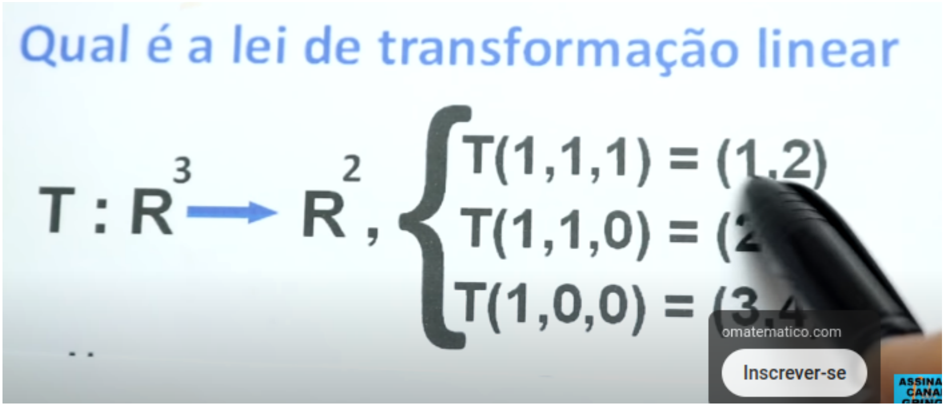
Base canônica = $\left\{\left(1,0\right),\left(0,1\right)\right\}$

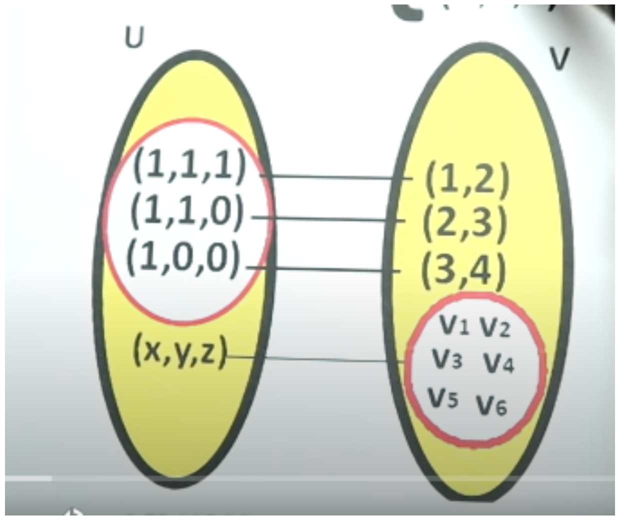
$$T\left(1,0\right) = \left(2,\ 1,\ 1\right) \qquad T\left(0,1\right) = \left(-1,-2,2\right)$$

Matriz = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

praticar

Vamos Praticar





$$(x,y,z) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0)$$
$$(x,y,z) = (a,a,a) + (b,b,0) + (c,0,0)$$
$$(x,y,z) = (a+b+c) + (a+b) + a$$

$z = a$

$y = a + b$

$\to y = z + b$

$b = y - z$

$x = \underbrace{a + b}_{y} + c$

$x = y + c$

$c = x - y$

$a = z \qquad b = y - z \qquad c = x - y$

$$z(1,1,1) + y - z(1,1,0) + x - y(1,0,0)$$
$$zT(1,1,1) + y - zT(1,1,0) + (x-y)T(1,0,0)$$
$$z(1,2) + (y-z)(2,3) + (x-y)(3,4)$$
$$(z, 2z) + (2(y-z), 3(y-z)) + (3(x-y), 4(x-y))$$
$$(\cancel{z} + 2y - 2\cancel{z} + 3x - 3y), (2z + 3y - 3z + 4x - 4y)$$
$$(-z - y + 3x, \; -z - y + 4x)$$

Essa é a lei de formação para transformar um R^3 em R^2

Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $B=\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, sendo $v_1=(0,\ 1,\ 0)$ $v_2=(1,\ 0,\ 1)$ $v_3=(1,\ 1,\ 0)$.

Determine $T(2,\ 4,\ -1)$, sabendo que $T(v_1)=(1,-2)$, $T(v_2)=(3,\ 1)$ e $T(v_3)=(0,2)$.

○ **a)** $T(2,\ 4,\ -1)=(2,\ 3)$.

Feedback: alternativa **incorreta** , pois você deveria ter feito:

$$(2,\ 4,\ -1)=a_1(0,\ 1,\ 0)+a_2(1,\ 0,\ 1)+a_3(1,\ 1,\ 0)$$

$$\begin{cases} a_2+a_3=2 \\ a_1+a_3=4 \\ a_2=-1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$a_1=1 \quad a_2=-1 \quad a_3=3$$

$$(2,\ 4,\ -1)=1.v_1-1.v_2+3.v_3$$

$$T(2,\ 4,\ -1)=1.T(v_1)-1.T(v_2)+3.T(v_3)$$

$$T(2,\ 4,\ -1)=1.(1,\ -2)-1.(3,\ 1)+3.(0,\ 2)$$

$$T(2,\ 4,\ -1)=(-2,\ 3)$$

◉ **b)** $T(2,\ 4,\ -1)=(-2,\ 3)$.

Feedback: alternativa **correta** , pois você provavelmente deve ter resolvido o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a_2+a_3=2 \\ a_1+a_3=4 \\ a_2=-1 \end{cases}$$

Encontrando

$$T(2,\ 4,\ -1)=(-2,\ 3)$$

○ **c)** $T(2,\ 4,\ -1)=(2,\ 4)$.

Feedback: alternativa **incorreta** , pois você deveria ter feito:

$$(2,\ 4,\ -1)=a_1(0,\ 1,\ 0)+a_2(1,\ 0,\ 1)+a_3(1,\ 1,\ 0)$$

$$\begin{cases} a_2+a_3=2 \\ a_1+a_3=4 \\ a_2=-1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$a_1=1 \quad a_2=-1 \quad a_3=3$$

Exercícios

1) Dado $\boxed{\overline{T(x,y)} = 2x, y, x+y}$. Calcule $T(1,1)$

$\mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{R}^3$

$T(1,1) \longrightarrow 2(1), 1, 1+1$

$\mathbb{R}^3$ de $T(1,1) = (2, 1, 2)$

$$(2,\ 4,\ \ -1) = 1.v_1 - 1.v_2 + 3.v_3$$

$$T\left(2,\ 4,\ \ -1\right) = 1.T\left(v_1\right) - 1.T\left(v_2\right) + 3.T\left(v_3\right)$$

$$T\left(2,\ 4,\ \ -1\right) = 1.\left(1,\ \ -2\right) - 1.\left(3,\ 1\right) + 3.\left(0,\ 2\right)$$

$$T\left(2,\ 4,\ \ -1\right) = \left(-2,\ 3\right)$$

○ **d)** $T\left(2,\ 4,\ \ -1\right) = \left(-2,\ \ -3\right)$.

Feedback: alternativa **incorreta** , pois você deveria ter feito:

$$(2,\ 4,\ \ -1) = a_1\left(0,\ 1,\ 0\right) + a_2\left(1,\ 0,\ 1\right) + a_3\left(1,\ 1,\ 0\right)$$

$$\begin{cases} a_2 + a_3 &= 2 \\ a_1 + a_3 &= 4 \\ \quad a_2 &= -1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = -1 \quad a_3 = 3$$

$$(2,\ 4,\ \ -1) = 1.v_1 - 1.v_2 + 3.v_3$$

$$T\left(2,\ 4,\ \ -1\right) = 1.T\left(v_1\right) - 1.T\left(v_2\right) + 3.T\left(v_3\right)$$

$$T\left(2,\ 4,\ \ -1\right) = 1.\left(1,\ \ -2\right) - 1.\left(3,\ 1\right) + 3.\left(0,\ 2\right)$$

$$T\left(2,\ 4,\ \ -1\right) = \left(-2,\ 3\right)$$

○ **e)** $T\left(2,\ 4,\ \ -1\right) = \left(3,\ 2\right)$.

Feedback: alternativa **incorreta** , pois você deveria ter feito:

$$(2,\ 4,\ \ -1) = a_1\left(0,\ 1,\ 0\right) + a_2\left(1,\ 0,\ 1\right) + a_3\left(1,\ 1,\ 0\right)$$

$$\begin{cases} a_2 + a_3 &= 2 \\ a_1 + a_3 &= 4 \\ \quad a_2 &= -1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = -1 \quad a_3 = 3$$

$$(2,\ 4,\ \ -1) = 1.v_1 - 1.v_2 + 3.v_3$$

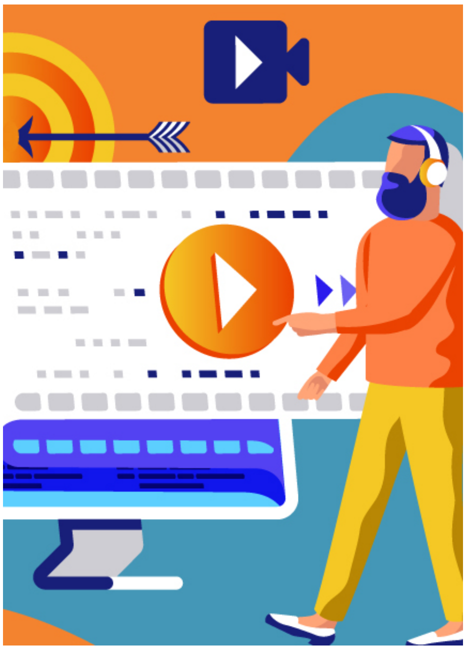
$$T\left(2,\ 4,\ \ -1\right) = 1.T\left(v_1\right) - 1.T\left(v_2\right) + 3.T\left(v_3\right)$$

$$T\left(2,\ 4,\ \ -1\right) = 1.\left(1,\ \ -2\right) - 1.\left(3,\ 1\right) + 3.\left(0,\ 2\right)$$

$$T\left(2,\ 4,\ \ -1\right) = \left(-2,\ 3\right)$$

indicações

Material Complementar



FILME

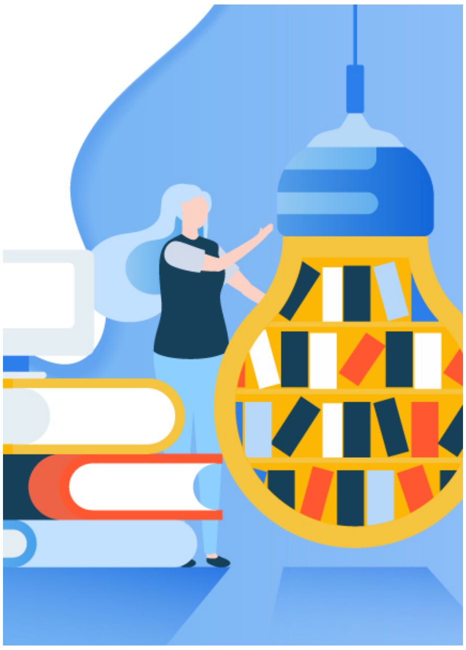
Estrelas além do tempo (Hidden Figures)

Ano: 2016

Comentário: é história real que você quer? Pois se prepare, porque *Estrelas além do tempo* remonta o auge da corrida espacial entre Estados Unidos e Rússia durante a Guerra Fria. Como pano de fundo, há a segregação racial da sociedade, que também se reflete na NASA, onde um grupo de funcionárias negras é obrigada a trabalhar em parte do processo. Nesse grupo, estão Katherine Johnson, Dorothy Vaughn e Mary Jackson, três matemáticas que, além de provarem sua competência dia após dia, precisam lidar com o preconceito, para que consigam ascender na hierarquia da NASA.

Assista ao *trailer* oficial do filme

TRAILER



LIVRO

Matemática divertida e curiosa

Malba Tahan

Editora: Editora Afiliada

ISBN: 978-85-01-10192-1

Comentário: recreações e curiosidades da Matemática, que transformam a aridez dos números e a exigência de raciocínio numa brincadeira, ao mesmo tempo útil e recreativa. Eis, em síntese, o que é *Matemática Divertida e Curiosa* : o professor Júlio César de Mello e Souza, com o pseudônimo de Malba Tahan, consegue um verdadeiro milagre: a união da ciência com o lúdico, transformando sua leitura num agradável passatempo.

conclusão

Conclusão

Ao término deste capítulo, você terá feito um grande progresso em conceitos de álgebra linear. Estudamos, inicialmente, o espaço vetorial e o subespaço vetorial, que são conceitos importantes da álgebra linear. Você também aprendeu o que é uma combinação linear e quando dois ou mais vetores são linearmente dependentes ou linearmente independentes. O conceito de independência linear é muito importante para definir uma base em um espaço ou um subespaço vetorial. Na sequência, vimos a definição de dimensão de uma base e concluímos o capítulo falando sobre as transformações lineares.

Você também aprendeu as principais operações vetoriais: soma, produto escalar e produto vetorial. Além disso, teve um contato com outro importante tópico da Matemática: equações de reta e de plano. Com este tópico, você aprendeu como se encontra uma equação de reta, conhecendo alguns pontos que pertencem a essa reta. Esses fundamentos serão aplicados em outras disciplinas, como Cálculo Numérico, Estatística etc.

referências

Referências Bibliográficas

ANTON, H. **Álgebra linear com aplicações** . Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOYER, C. B. **História da Matemática** . Tradução da terceira edição americana. São Paulo: Blucher, 2012.

WINTERLE, P. **Vetores e geometria analítica** . São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.