

ÁLGEBRA LINEAR COMPUTACIONAL MÉTODOS ITERATIVOS RESOLUÇÃO SISTEMAS LINEARES

Autor: Dr. Ricardo Igarashi

Revisor: Raimundo Almeida

INICIAR

Processing math: 82%

introdução

Introdução

Nesta unidade, reforçaremos o conteúdo do módulo II, apresentando a solução geométrica de sistemas lineares 2×2 e 3×3 . Esse conceito nos fornecerá uma visão espacial do significado de um sistema linear. Posteriormente, trabalharemos a resolução de forma iterativa para sistemas lineares. Esse fato é de muita importância, pois, muitas vezes, sistemas lineares não são resolvidos de forma analítica, e dessa forma, teremos de usar métodos numéricos. Nesta unidade, apresentaremos o método de Jacobi e método de Gauss Seidel. Esses métodos usarão como base um “chute” inicial, e, após, serão usados métodos de recorrência, para a resolução do sistema.

Processing math: 82%

Interpretação Geométrica dos Sistemas Lineares

Recordando:

Dizemos que $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}$ é solução de um sistema linear com n equações quando $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é solução de cada uma das equações do sistema linear.

Vamos ver um exemplo:

Dado o sistema linear a seguir, mostre que $(2, -1, 4)$ é solução do sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 21 \\ 3x - 1y + 4z = 23 \\ -4x + 2y - 6z = -34 \end{cases}$$

$$2(2) + 3(-1) + 5(4) \\ 4 - 3 + 20 = 21 \quad \checkmark$$

Verificando:

Processing math: 82%

$$\begin{aligned}
 2.(2) + 3.(-1) + 5.(4) &= 4 - 3 + 20 = 21 \\
 3.(2) - 1.(-1) + 4.(4) &= 6 + 1 + 16 = 23 \\
 -4.(2) + 2.(-1) - 6.(4) &= -8 - 2 - 24 = -34
 \end{aligned}$$

Como pudemos verificar, o trio (2, -1, 4) é solução do sistema linear, pois satisfaz as três equações.

Em estudos anteriores, vimos dois métodos de resolução de um sistema linear 2x e 3x3, que foram a regra de Crammer e o método de Gauss-Jordam.

Neste modulo, veremos a interpretação geométrica dos sistemas lineares e dois métodos iterativos, para a resolução do sistema.

Interpretação Geométrica de um Sistema Linear 2x2

Os pares ordenados de números reais que são solução de uma equação linear com duas incógnitas determinam, no gráfico, uma reta. A intersecção das retas das equações do sistema determina sua solução, se existir.

Veja, a seguir, a representação geométrica dos três sistemas lineares e, analisando os gráficos, classifique como SI (Sistema Impossível) SPD (Sistema Possível e Indeterminado) ou SPI (Sistema Possível e Indeterminado).

Para representar cada uma das retas no plano cartesiano, basta determinar pares ordenados que satisfaçam cada uma das equações:

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \rightarrow (4, 2), (2, -4) \\ 2x + 5y = 1 \rightarrow (-2, 1), (3, -1) \end{cases}$$

Na Figura 3.1, as retas concorrentes indicam que existe um único par ordenado, que é a solução do sistema solar, e essa solução é indicada na intersecção das duas retas.

Processing math: 82%

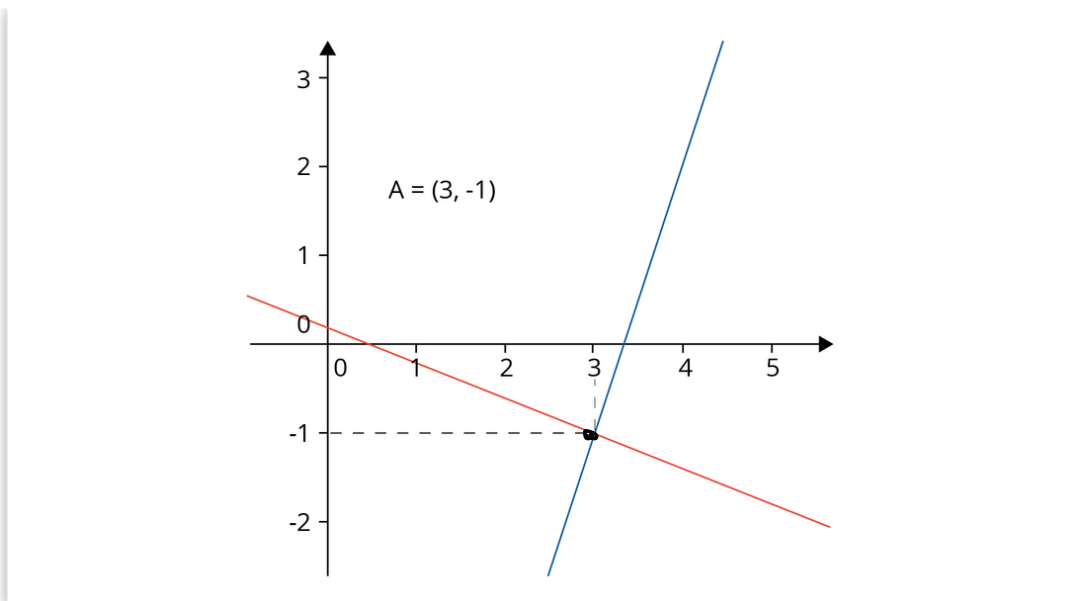


Figura 3.1 - Retas concorrentes

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \rightarrow (1, -2), (-1, -3) \\ 2x - 4y = 2 \rightarrow (1, 0), (3, 1) \end{cases}$$

Na Figura 3.2, as retas paralelas e distintas indicam que não existe par ordenado que seja solução do sistema linear (SI).

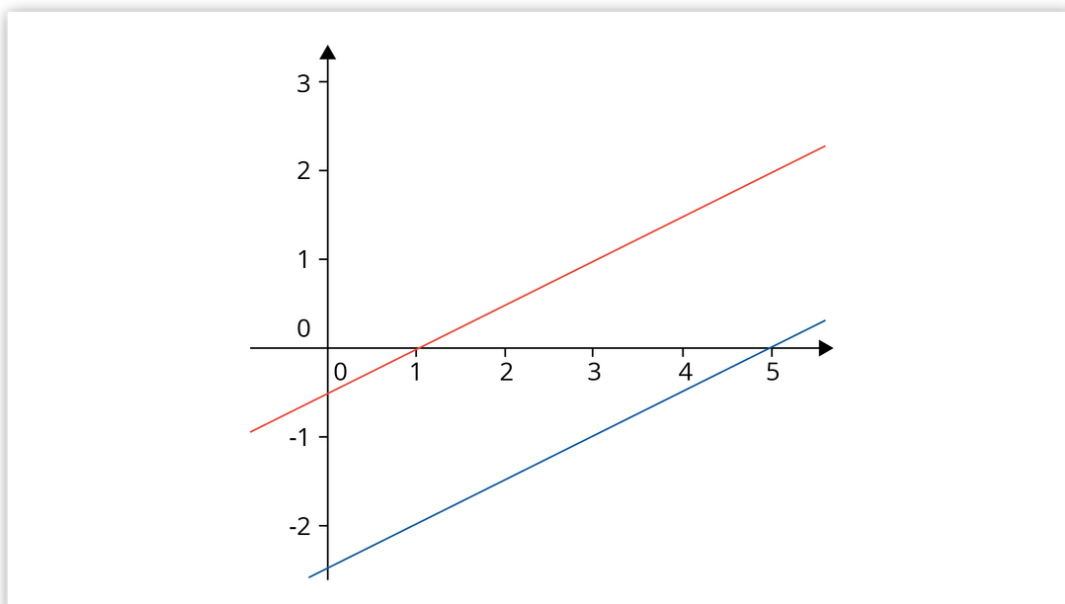


Figura 3.2 - Retas paralelas

Fonte: Elaborada pelo autor.

Processing math: 82%

$$\begin{cases} 2x - 6y = 8 \rightarrow (4, 0), (1, -1) \\ 3x - 9y = 12 \rightarrow (4, 0), (1, -1) \end{cases}$$

Veja a Figura 3.3:

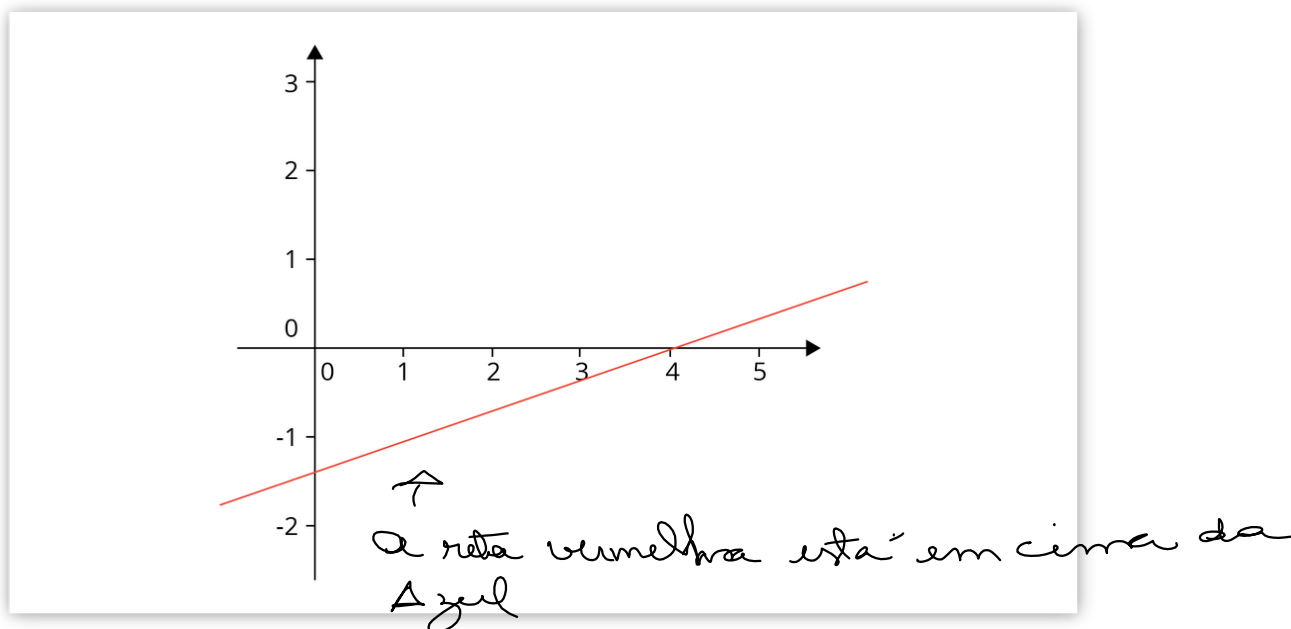


Figura 3.3 - Retas coincidentes

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 3.3, as retas coincidentes indicam que existem infinitos pares ordenados, que são soluções do sistema linear (SPL).

praticar

Vamos Praticar

Usando os conceitos apresentados até aqui, resolva o sistema linear 2x2 a seguir, usando o método da adição. Classifique-os quanto ao número de soluções e verifique a solução encontrada, fazendo a representação gráfica do sistema linear.

Processing math: 82%

$$\begin{aligned} 3(-2) - 2y &= -12 \\ -6 - 2y &= -12 \\ -2y &= -6 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5(-2) + 6 \cdot 3 &= \\ -10 + 18 &= 8 \end{aligned}$$

Ead.br

$$\begin{cases} 3x - 2y = -12 & (3) \\ 5x + 6y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 14x &= -36 + 8 \\ 14x &= -28 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

- ☒ **a)** O sistema tem solução única: $x = -2$ e $y = 3$. A solução é representada pela intersecção das retas, cujas soluções gerais são: $3x - 2y = -12$ e $5x + 6y = 8$.
- ☐ **b)** O sistema tem solução única: $x = 2$ e $y = -3$. A solução é representada pela intersecção das retas, cujas soluções gerais são: $3x - 2y = -12$ e $5x + 6y = 8$.
- ☐ **c)** O sistema tem solução única: $x = 3$ e $y = 1$. A solução é representada pela intersecção das retas, cujas soluções gerais são: $3x - 2y = -12$ e $5x + 6y = 8$.
- ☐ **d)** O sistema não admite solução.
- ☐ **e)** O sistema possui infinitas soluções.

Processing math: 82%

Interpretação Geométrica de um Sistema Linear 3x3

Considerando um sistema linear com três equações e três incógnitas, geometricamente, cada uma das equações define um plano. O termo ordenado (x, y, z) pertence à intersecção entre os três planos.

Existem oito possibilidades para as posições relativas dos três planos que vamos nomear de π_1 , π_2 e π_3 no espaço.

- **1ª possibilidade** : os três planos coincidentes

Nesse caso, todos os pontos $P(x, y, z)$ de π_1 são solução do sistema; há, portanto, infinitas soluções (SPI).

Veja o exemplo a seguir:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ 4x + 4y - 4z = 4 \end{cases}$$

Processing math: 82%

Nesse caso, analisando o plano formado pelas três equações, podemos usar qualquer uma das três equações para determinar uma solução genérica. Usaremos a equação 1.

$$x + y - z = 1 \quad z = x + y - 1 \quad \text{Solução} = (x, y, x + y - 1)$$

Algumas possíveis soluções para o sistema (1, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 5, 6), que representam um plano na figura:

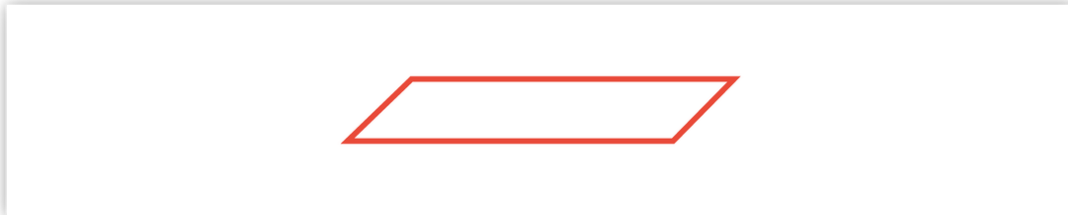


Figura 3.4 - Plano formado pela 1ª equação

Fonte: Elaborada pelo autor.

• **2ª possibilidade** : dois planos coincidem, e o terceiro é paralelo a eles

Nesse caso, o sistema é impossível, pois não existem pontos em comum aos três planos (SI).

Veja o exemplo a seguir, cuja solução é apresentada na Figura 3.5:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ 4x + 4y - 4z = 7 \end{cases}$$

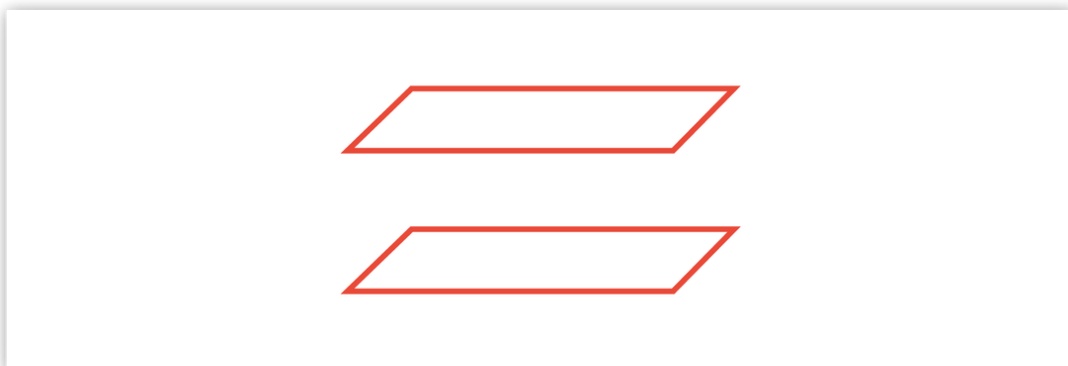


Figura 3.5 - Dois planos coincidentes e outro paralelo

Fonte: Elaborada pelo autor.

Processing math: 82%

- 3ª possibilidade: dois planos coincidem, e o terceiro os intersecta segundo uma reta, como mostrado na Figura 3.6. Nesse caso, todos os pontos $P(x, y, z)$ da reta formada pela intersecção dos três planos é solução do sistema linear (SPL).

Como as duas primeiras equações formam o mesmo plano, analisaremos a primeira e a terceira equações, para determinar a equação da reta e uma solução genérica para o sistema.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ 4x + 4y - z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 1 \cdot (-4) \\ 4x + 4y - z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 4y + 4z = -4 \\ 4x + 4y - z = 4 \end{cases}$$

$$3z = 0 \quad z = 0 \quad \text{então } 4x + 4y = 4 \quad y = 1 - x$$

Solução genérica $(x, 1 - x, z)$

Exemplos de solução do sistema $(1, 0, 0)$, $(2, -1, 0)$

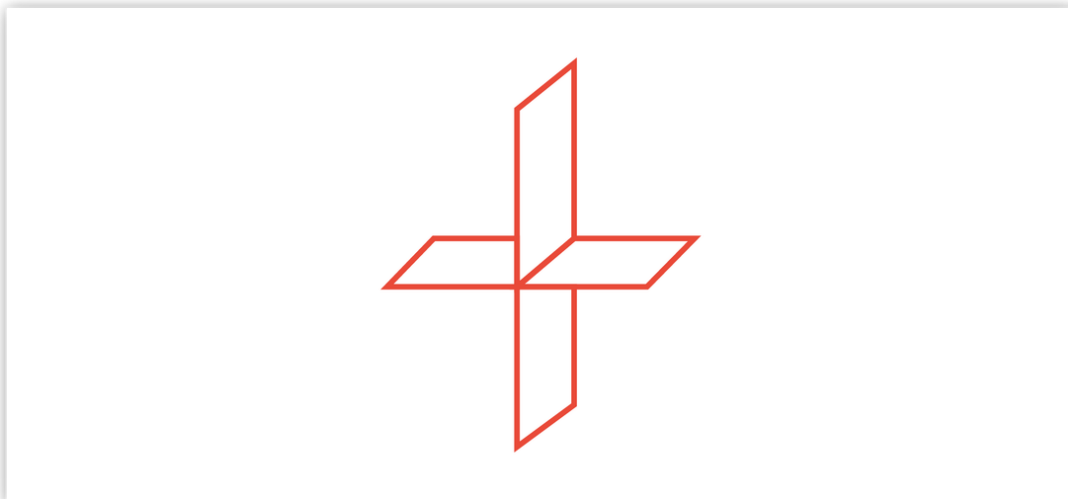


Figura 3.6 - Dois planos coincidem, e o terceiro os intersecta segundo uma reta

Fonte: Elaborada pelo autor.

Processing math: 82%

ade : os três planos são paralelos

Nesse caso, o sistema é impossível, pois não existem pontos em comum aos três planos (SI), como mostrado na Figura 3.7:

Veja o exemplo:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \\ 4x + 4y - 4z = 7 \end{cases}$$

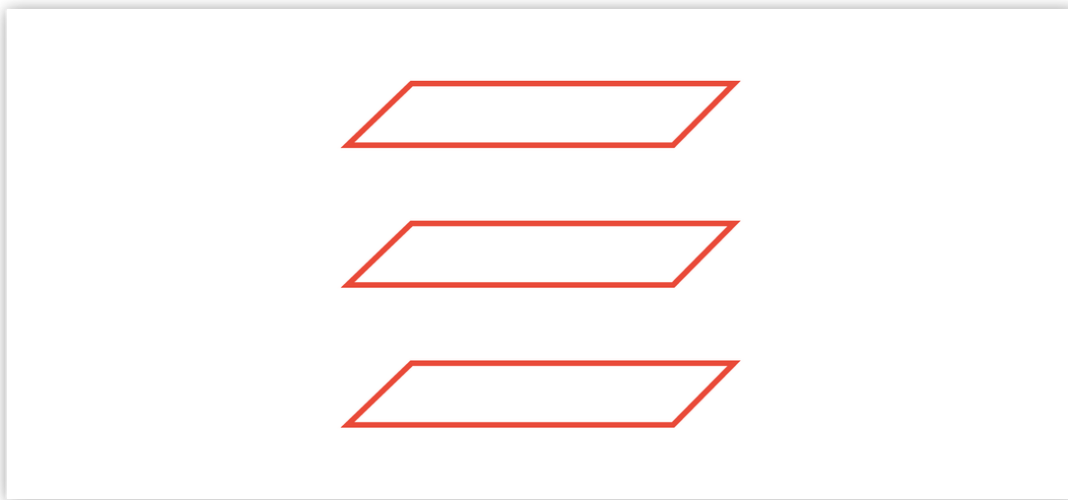


Figura 3.7 - Três planos paralelos

Fonte: Elaborada pelo autor.

- 5ª possibilidade: dois planos são paralelos, e o outro os intersecta, formando duas retas, como mostrado na Figura 3.8.

Nesse caso, o sistema é impossível, pois não existem pontos em comum aos três planos (SI).

Veja o exemplo:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \\ 4x + 4y - 4z = 4 \end{cases}$$

Processing math: 82%

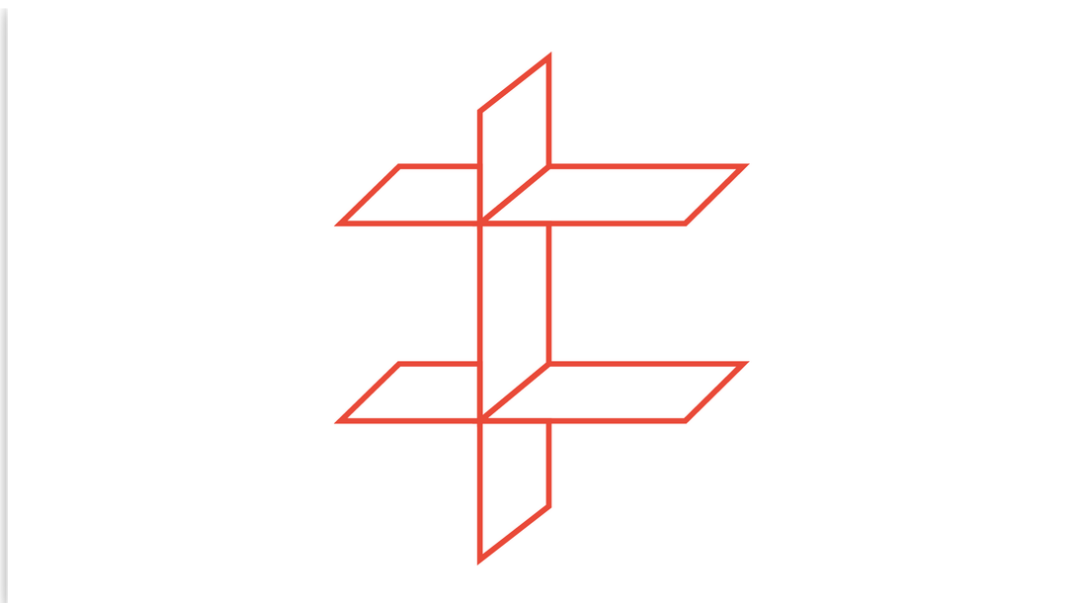


Figura 3.8 - Dois planos são paralelos, e o outro os intersecta formando duas retas

Fonte: Elaborada pelo autor.

- **6ª possibilidade** : os três planos são distintos e têm uma reta em comum, como mostrado na Figura 3.9:

Nesse caso, todos os pontos $P(x, y, z)$ da reta formada pela intersecção dos três planos são solução do sistema linear (SPI).

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \\ 4x + y + 3z = 7 \end{cases}$$

A terceira equação é uma combinação entre a primeira e a segunda equações. Para verificar, basta multiplicar a primeira equação por dois e somar com a segunda.

Para determinar uma solução genérica, faremos combinações entre as duas primeiras equações:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases} \quad 3x + 2z = 6 \quad z = \frac{6 - 3x}{2}$$

Processing math: 82%

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases} \cdot (-1) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2x + y - z = -5 \end{cases} \quad -x + 2y = -4 \quad y = \frac{x-4}{2}$$

$$\text{Solução genérica} \left(x, \frac{x-4}{2}, \frac{6-3x}{2} \right)$$

Exemplos de solução do sistema $(0, -2, 3)(2, -1, 0)$

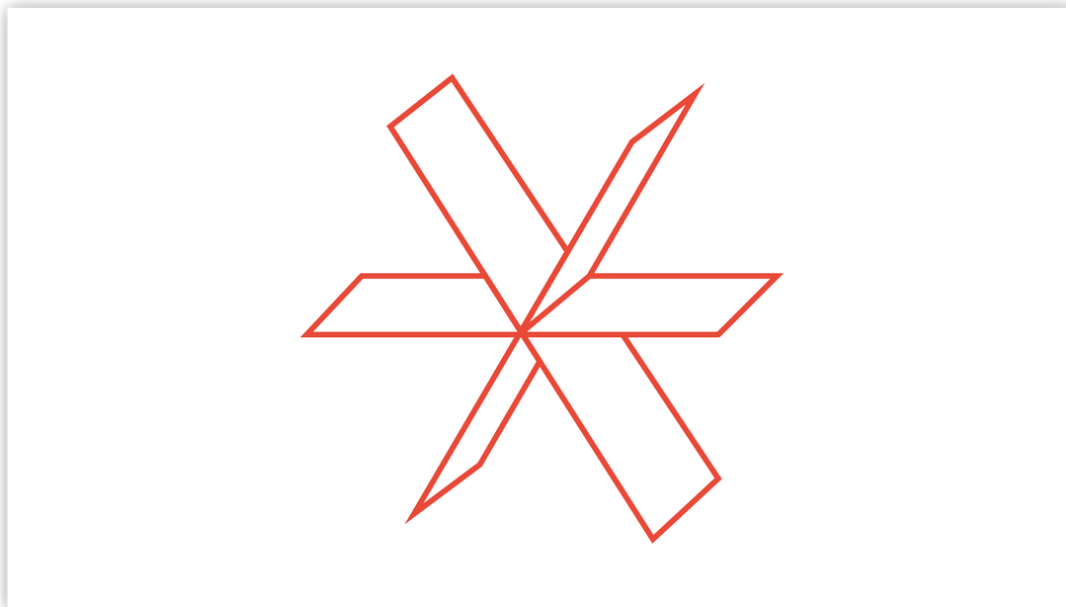


Figura 3.9 - Três planos são distintos e têm uma reta em comum

Fonte: Elaborada pelo autor.

- **7ª possibilidade** : os três planos se intersectam, dois a dois, formando três retas paralelas, como mostrado na Figura 3.10.

Nesse caso, o sistema é impossível, pois não existem pontos em comum aos três planos (SI).

Veja o exemplo:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 5x + 2y + z = 2 \\ 9x + 3y + 5z = 5 \end{cases}$$

Processing math: 82%

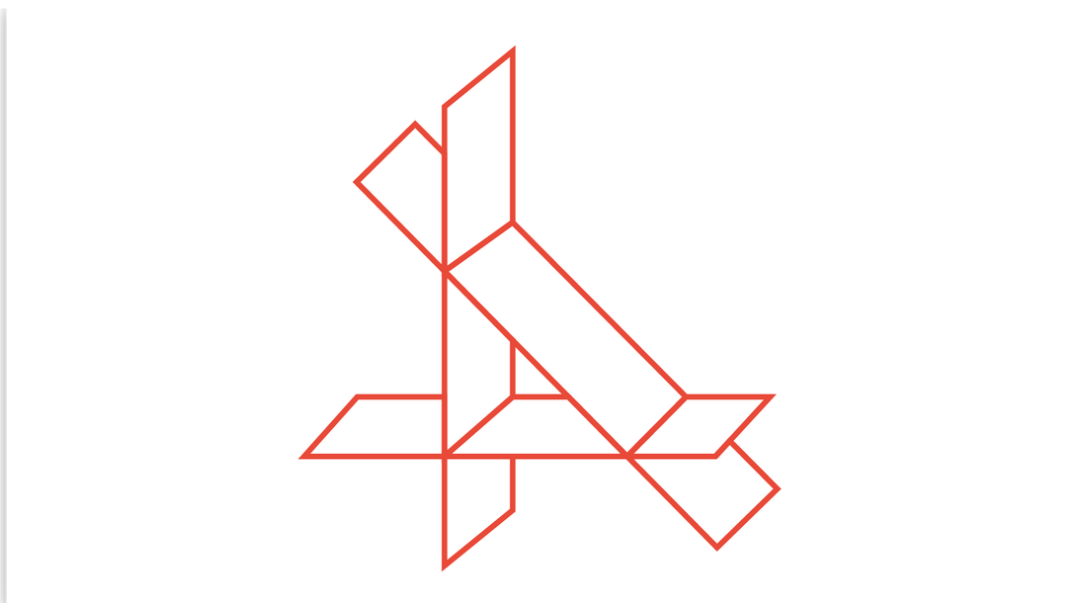


Figura 3.10 - Três planos se intersectam, dois a dois, formando três retas paralelas

Fonte: Elaborada pelo autor.

- **8ª possibilidade** : os três planos têm um único ponto em comum, como mostrado na Figura 3.11.

Nesse caso, o sistema é possível e determinado, pois existe um único ponto em comum aos três planos.

Vamos ver um exemplo

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 4x + 7y - z = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ -y + 10z = -3 \\ -z = 0 \end{cases}$$

$$z = 0, y = 3, x = -2$$

Solução $(-2, 3, 0)$

Processing math: 82%

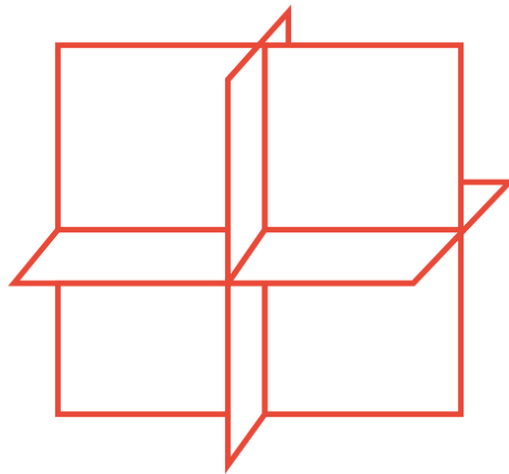


Figura 3.11 - Três planos têm um único ponto em comum

Fonte: Elaborada pelo autor.

praticar

Vamos Praticar

Dado um sistema de equações com três equações com três incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

cada equação representa um plano no espaço tridimensional. Dessa forma, os três planos acima que vamos designar como π_1 , π_2 e π_3 são os planos definidos pelas equações do sistema. Assim, as soluções do referido sistema pertencem à intersecção desses planos.

Processing math: 82%

Usando esses conceitos, assinale a alternativa que corresponda à solução geométrica do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 4 \\ 3x + 6y - 3z = 5 \end{cases}$$

- ☐ **a)** Os três planos coincidem. Nesse caso, o sistema é indeterminado e qualquer ponto dos planos é uma solução do sistema.
- ☐ **b)** O sistema é impossível. Nesse caso, dois planos coincidem, e o terceiro plano é paralelo a eles.
- ☐ **c)** Dois planos coincidem, e o terceiro os intersecta segundo uma reta r . Nesse caso, o sistema é indeterminado, e qualquer ponto da reta r é uma solução do sistema.
- ☐ **d)** Os três planos são paralelos. Nesse caso, o sistema é impossível.
- ☐ **e)** Os planos formados pelas duas primeiras equações são paralelos, e o plano formado pela terceira equação os intersecta segundo duas retas paralelas. Nesse caso, o sistema é impossível.

Processing math: 82%

Métodos Iterativos

Nesta seção, apresentaremos os métodos iterativos para a resolução de sistemas lineares. Faremos uma pequena introdução aos métodos iterativos e, após, apresentaremos os métodos de Gauss Jacobi e Gauss Seidel.

Introdução dos Métodos Iterativos

Os métodos iterativos consistem em transformar um sistema linear $Ax = b$ em que:

A = matriz dos coeficientes do sistema linear, $n \times n$

x = matriz das variáveis, $n \times 1$

b = matriz dos termos constantes, $n \times 1$

Solução

Processing math: 82% tipo $x = Mx + c$ em que M é matriz $n \times n$ e c matriz $n \times 1$

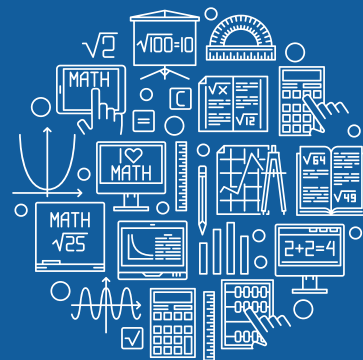
Observamos que $\varphi(x) = Mx + c$ é uma função de iteração dada na forma matricial.

E, dessa forma, podemos iniciar o esquema iterativo.

Partindo de $x^{(0)}$ (aproximação inicial) podemos construir a seguinte sequência:

Primeira Iteração

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{C}.\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{g} = \varphi(\mathbf{x}^{(0)})$$



freepik.c

A próxima iteração é sempre calculada usando o valor da iteração anterior.

Teste de Parada

O processo iterativo é repetido até que a matriz solução $x^{(k)}$ do sistema linear seja suficientemente próxima da matriz $x^{(k-1)}$

Processing math: 82%

Medimos essa distância por $d^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$

Assim, dada uma precisão ε , a matriz $x^{(k)}$ será escolhida como resposta aproximada da solução exata do sistema linear se $d^{(k)} < \varepsilon$

Podemos, também, efetuar o cálculo utilizando o teste do erro relativo:

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|}$$

Método de Gauss – Jacobi

A forma como o método de Gauss-Jacobi transforma o sistema linear $Ax = b$ em um sistema $x = Mx + c$ é a seguinte:

Vamos pegar um sistema genérico $n \times n$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Inicialmente, temos de supor $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$ isolamos o x da diagonal principal

Processing math: 82%

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{a_{11}} \cdot (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}} \cdot (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}} \cdot (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}) \end{array} \right.$$

Para fazer os passos da iteração, usaremos o valor determinado no passo anterior e, portanto, teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \cdot (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \cdot (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} \cdot (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{array} \right.$$

Condição de Convergência

Considere o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array} \right.$$

Processing math: 82%

critérios para analisar a convergência do sistema por método iterativo. Esses critérios estabelecem apenas condições suficientes.

1. Critério da soma por linha

$$a_{11} \geq a_{12} + a_{13} \qquad a_{22} \geq a_{21} + a_{23} \qquad a_{33} \geq a_{31} + a_{32}$$

Se as três desigualdades se verificarem, podemos garantir a convergência. Se uma das condições não está satisfeita, nada podemos afirmar sobre a convergência.

2. Critério da soma por colunas

$$a_{11} \geq a_{21} + a_{31} \qquad a_{22} \geq a_{12} + a_{32} \qquad a_{33} \geq a_{13} + a_{23}$$

Se as três desigualdades se verificarem, podemos garantir a convergência. Se uma das condições não está satisfeita, nada podemos afirmar sobre a convergência.

3. Critério de Sassenfeld

$$\beta_1 = \left| \frac{a_{12}}{a_{11}} \right| + \left| \frac{a_{13}}{a_{11}} \right| < 1 \qquad \beta_2 = \left| \frac{a_{21}}{a_{22}} \right| \cdot \beta_1 + \left| \frac{a_{23}}{a_{22}} \right| < 1 \qquad \beta_3 = \left| \frac{a_{31}}{a_{33}} \right| \cdot \beta_1 + \left| \frac{a_{32}}{a_{33}} \right| \cdot \beta_2 < 1$$

Se as três desigualdades se verificarem, podemos garantir a convergência. Se uma das condições não está satisfeita, nada podemos afirmar sobre a convergência.

Exemplo: mostre que, mesmo permutando a ordem das equações, o critério da soma por linhas e por colunas não garante a convergência do sistema, mas o critério de Sassenfeld satisfaz a condição de convergência.

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \\ 10x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -20 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 10 \end{cases}$$

Vamos permutar as equações, para tentar deixar os maiores valores de cada

Processing math: 82% não a_{11} , a_{22} , a_{33}

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -20 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 10 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$$

Critério da soma por linha não satisfaz a condição de convergência, como podemos verificar:

$$10 > 3 + 2 \text{ (v)} \quad 5 > 2 + 3 \text{ (f)} \quad 5 > 3 + 3 \text{ (f)}$$

Critério da soma por colunas não satisfaz a condição de convergência, como podemos verificar:

$$10 > 2 + 3 \text{ (v)} \quad 5 > 3 + 3 \text{ (f)} \quad 5 > 3 + 2 \text{ (f)}$$

O critério de Sassenfeld satisfaz a condição de convergência, como podemos verificar:

$$\beta_1 = \left| \frac{3}{10} \right| + \left| \frac{2}{10} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

$$\beta_2 = \left| \frac{2}{5} \right| \cdot \frac{1}{2} + \left| \frac{-3}{5} \right| = \frac{4}{5} < 1$$

$$\beta_3 = \left| \frac{3}{-5} \right| \cdot \frac{1}{2} + \left| \frac{3}{-5} \right| \cdot \frac{4}{5} = \frac{39}{50} < 1$$

1. Determine a solução do sistema linear a seguir, com $\varepsilon < 0,05$:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

Inicialmente, verificaremos as condições de convergência:

$$10 > 2 + 1 \quad 5 > 1 + 1 \quad 10 > 2 + 3$$

Processing math: 82% à condição da soma por linha.

Inicialmente, devemos isolar x_1 na primeira equação, x_2 na segunda equação e x_3 na terceira equação.

$$x_1 = \frac{1}{10} \cdot (7 - 2x_2 - x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{5} \cdot (-8 - x_1 - x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{10} \cdot (6 - 2x_1 - 3x_2)$$

Se adotarmos como solução inicial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, teremos:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{10} \cdot (7 - 2 \cdot 0 - 0) = 0,7$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{5} \cdot (-8 - 0 - 0) = -1,6$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10} \cdot (6 - 2 \cdot 0 - 0) = 0,6$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{bmatrix}$$

Para pularmos essa primeira iteração, podemos sempre adotar a solução inicial como sendo:

$$x^{(0)} = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad x_1^{(0)} = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{7}{10} \quad x_2^{(0)} = \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{-8}{5} \quad x_3^{(0)} = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{6}{10}$$

Prosseguindo vamos fazer a segunda iteração

Processing math: 82%

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{10} \cdot (7 - 2 \cdot (-1,6) - 0,6) = 0,96$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{5} \cdot (-8 - 0,7 - 0,6) = -1,86$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{10} \cdot (6 - 2 \cdot 0,7 - 3 \cdot (-1,6)) = 0,94$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{bmatrix} \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,96 \\ -1,86 \\ 0,94 \end{bmatrix} \quad |x^{(2)} - x^{(1)}| = \begin{bmatrix} 0,26 \\ 0,26 \\ 0,34 \end{bmatrix}$$

$$d_r^{(2)} = \frac{d^{(2)}}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(2)}|} = \frac{0,34}{1,86} \cong 0,1827 > 0,05$$

Teremos de fazer mais uma iteração:

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{10} \cdot (7 - 2 \cdot (-1,86) - 0,94) = 0,978$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{5} \cdot (-8 - 0,96 - 0,94) = -1,98$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{10} \cdot (6 - 2 \cdot 0,96 - 3 \cdot (-1,86)) = 0,966$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,96 \\ -1,86 \\ 0,94 \end{bmatrix} \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,978 \\ -1,98 \\ 0,966 \end{bmatrix} \quad |x^{(3)} - x^{(2)}| = \begin{bmatrix} 0,018 \\ 0,12 \\ 0,026 \end{bmatrix}$$

$$d_r^{(3)} = \frac{d^{(3)}}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(3)}|} = \frac{0,12}{1,98} \cong 0,0606 > 0,05$$

Teremos de fazer mais uma iteração:

Processing math: 82%

$$x_1^{(4)} = \frac{1}{10} \cdot (7 - 2 \cdot (-1,98) - 0,966) = 0,9994$$

$$x_2^{(4)} = \frac{1}{5} \cdot (-8 - 0,978 - 0,966) = -1,9888$$

$$x_3^{(4)} = \frac{1}{10} \cdot (6 - 2 \cdot 0,978 - 3 \cdot (-1,98)) = 0,9984$$

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,978 \\ -1,98 \\ 0,966 \end{bmatrix} \quad x^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,9994 \\ -1,9888 \\ 0,9984 \end{bmatrix} \quad |x^{(4)} - x^{(3)}| = \begin{bmatrix} 0,0214 \\ 0,0088 \\ 0,0324 \end{bmatrix}$$

$$d_r^{(4)} = \frac{d^{(4)}}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(4)}|} = \frac{0,0324}{1,9888} \cong 0,01629 < 0,05$$

Portanto, a solução aproximada do sistema linear é $x = \begin{bmatrix} 0,9994 \\ -1,9888 \\ 0,9984 \end{bmatrix}$.

praticar

Vamos Praticar

Vimos que um dos métodos de resolução de sistemas lineares são os métodos iterativos. Nessa metodologia, devemos escolher valores iniciais para fazer a convergência do cálculo iterativo. Também, devemos levar em conta a convergência do sistema linear.

Processing math: 82%

$$\begin{cases} kx_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ kx_1 + 6x_2 = 2 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 3 \end{cases}$$

Pelo critério de linhas, assinale a alternativa que indica o intervalo de k , para que exista a convergência do sistema apresentado:

- ☐ **a)** $1 < k < 3$.
 - ☐ **b)** $2 < k < 4$.
 - ☐ **c)** $3 < k < 7$.
 - ☐ **d)** $4 < k < 6$.
 - ☐ **e)** $8 < k < 10$.
-

Processing math: 82%

Método de Gauss-Seidel

Inicialmente, o método de Gauss-Seidel é exatamente igual ao método de Gauss-Jacobi, ou seja, o processo iterativo consiste em sendo $x^{(0)}$ uma aproximação inicial, calcular $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(k)}$ até atingir uma resposta em que o erro relativo seja menor do que o erro estipulado.

A diferença no processo iterativo de Gauss-Seidel consiste em usar valores já conhecidos de $x^{(k)}$, portanto, no momento de se calcular $x_j^{(k+1)}$ usamos todos os valores $x_1^{(k+1)}$, ..., $x_{j-1}^{(k+1)}$ que já foram calculados e os valores $x_{j+1}^{(k)}$, ..., $x_n^{(k)}$ restantes.

Vamos pegar como exemplo o mesmo problema proposto anteriormente e resolvido pelo método de Gauss-Jacobi.

Exemplo: determine a solução do sistema linear a seguir, com $\varepsilon < 0,05$:

Processing math: 82%

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

Inicialmente, devemos isolar x_1 na primeira equação, x_2 na segunda equação e x_3 na terceira equação.

$$x_1 = \frac{1}{10} \cdot (7 - 2x_2 - x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{5} \cdot (-8 - x_1 - x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{10} \cdot (6 - 2x_1 - 3x_2)$$

Se adotarmos como solução inicial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, teremos:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{10} \cdot (7 - 2 \cdot 0 - 0) = 0,7$$

Agora vem a diferença no método de Gauss-Seidel, pois para calcular $x_2^{(1)}$, já usaremos o $x_1^{(1)} = 0,7$, já encontrado no passo anterior.

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{5} \cdot (-8 - 0,7 - 0) = -1,74$$

Para calcular o $x_3^{(1)}$, vamos utilizar os valores já calculados acima $\{x_1\}^{\left(1 \right)}=0,7$ e $\{x_2\}^{\left(1 \right)}=-1,74$.

$$\{x_3\}^{\left(1 \right)}=\frac{1}{10} \cdot \left(6-2 \cdot 0,7-3 \cdot \left(-1,74 \right) \right)=0,982 \sim$$

Processing math: 82%

$$\{x\}^{\left(1 \right)} = \left[\begin{matrix} 0,7 & -1,74 & 0,982 \end{matrix} \right]$$

Portanto, essa é a diferença do método de Gauss-Seidel: os valores que já foram calculados são usados na própria iteração.

Vamos fazer mais uma iteração:

$$\{x\}_1^{\left(2 \right)} = \frac{1}{10} \cdot \left(7 - 2 \cdot \left(-1,74 \right) - 0,982 \right) \approx 0,9498$$

$$\{x\}_2^{\left(2 \right)} = \frac{1}{5} \cdot \left(-8 - 0,9498 - 0,982 \right) \approx -1,98636$$

$$\{x\}_3^{\left(2 \right)} = \frac{1}{10} \cdot \left(6 - 2 \cdot 0,9498 - 3 \cdot \left(-1,98636 \right) \right) = 1$$

$$\{x\}^{\left(1 \right)} = \left[\begin{matrix} 0,7 & -1,74 & 0,982 \end{matrix} \right] \sim \{x\}^{\left(2 \right)} = \left[\begin{matrix} 0,9498 & -1,98636 & 1,005948 \end{matrix} \right] \sim \left| \{x\}^{\left(2 \right)} - \{x\}^{\left(1 \right)} \right| \approx \left[\begin{matrix} 0,2498 & 0,24636 & 0,023948 \end{matrix} \right]$$

$$d_r^{\left(2 \right)} = \frac{\{d\}^{\left(2 \right)}}{\underset{1 \leq i \leq n}{\mathop{\max}} \left| x_i^{\left(2 \right)} - x_i^{\left(1 \right)} \right|} \approx \frac{0,2498}{1,98636} \approx 0,1258 > 0,05$$

Teremos de fazer mais uma iteração:

$$\{x\}^{\left(2 \right)} = \left[\begin{matrix} 0,9498 & -1,98636 & 1,005948 \end{matrix} \right]$$

$$\{x\}_1^{\left(3 \right)} = \frac{1}{10} \cdot \left(7 - 2 \cdot \left(-1,98636 \right) - 1,005948 \right) \approx 0,9966772$$

$$\{x\}_2^{\left(3 \right)} = \frac{1}{5} \cdot \left(-8 - 0,9966772 - 1,005948 \right) \approx -2,000525$$

Processing math: 82%

$$\{x_3\}^{\left(3 \right)} = \frac{1}{10} \cdot \left(6 - 2 \cdot 0,9966772 - 3 \cdot \left(0,9966772 \right) \right) \approx 1,0008221$$

$$\{x\}^{\left(2 \right)} = \left[\begin{matrix} 0,9498 & -1,98636 & 1,005948 \\ 0,9966772 & -2,000525 & 1,0008221 \end{matrix} \right] \sim \{x\}^{\left(3 \right)} = \left[\begin{matrix} 0,9966772 & -2,000525 & 1,0008221 \\ 0,0468772 & 0,014165 & 0,0051259 \end{matrix} \right]$$

$$d_r^{\left(2 \right)} = \frac{\{d\}^{\left(2 \right)}}{\underset{1 \leq i \leq n}{\mathop{\max}} \{x_i^{\left(2 \right)}\}} \approx \frac{0,0468772}{2,000525} \approx 0,023 < 0,05$$

Portanto, a solução aproximada do sistema linear é $x = \left[\begin{matrix} 0,9966772 & -2,000525 & 1,0008221 \end{matrix} \right]$

Para concluir, o método de Gauss-Seidel e o método de Gauss-Jacobi são algoritmos utilizados para determinar soluções aproximadas para um sistema linear tão próximas quanto for desejado.

Processing math: 82%

Saiba mais

Os métodos iterativos são vastamente investigados na área de computação para a verificação de qual método pode ser mais eficiente do ponto de vista computacional. Para ter um entendimento melhor, você pode ler o artigo “Paralelização e comparação de métodos iterativos na solução de sistemas lineares grandes e esparsos”.

Fonte: Adaptado de Barroso (1987).

ACESSAR

O método de Gauss-Seidel foi criado para convergir mais rapidamente, pois na própria iteração já utiliza os valores calculados. Isso acontece com a grande maioria dos sistemas, mas não sempre.

Processing math: 82%

reflita

Reflita

Tente aplicar essa técnica de método iterativo para resolver os sistemas lineares do bloco 2. Veja se encontra as mesmas soluções com os outros métodos diretos e reflita sobre a resolução.

Vamos ver mais um exemplo de resolução do sistema linear usando o método de Gauss-Seidel.

Exemplo: verifique a convergência e, caso seja satisfeita, obtenha a solução pelo método de Gauss-Seidel com erro absoluto inferior a $\{10\}^{-3}$.

$$\begin{cases} 5x+y+z=5 \\ 3x+4y+z=6 \\ 3x+3y+6z=0 \end{cases}$$

Critério da soma por linha $5 > 1+1+1$ $4 > 3+1$ $\left(f \right)$ não satisfaz.

Critério da soma por colunas $5 > 3+3$ $\left(f \right)$ não satisfaz.

Critério de Sassenfeld:

$$\{\beta_1\} = \left| \frac{1}{5} \right| + \left| \frac{1}{5} \right| = 0,4 < 1$$

$$\{\beta_2\} = \left| \frac{3}{4} \right| + 0,4 + \left| \frac{1}{4} \right| = 0,55 < 1$$

Processing math: 82%

$$\{\beta_3\} = \left| \frac{3}{6} \right| \cdot 0,4 + \left| \frac{3}{6} \right| \cdot 0,55 = 0,475 < 1$$

Critério de Sassenfeld é satisfeito, pois $\{\beta_1\} < 1$ ~~~~ $\{\beta_2\} < 1$ ~~~~ $\{\beta_3\} < 1$

O sistema converge:

$$\begin{matrix} x = \frac{1}{5} \cdot (5 - y - z) \\ y = \frac{1}{4} \cdot (6 - 3x - z) \\ z = \frac{1}{6} \cdot (-3x - 3y) \end{matrix}$$

$$\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} x^{(1)} = \frac{1}{5} \cdot (5 - 0 - 0) = 1 \\ y^{(1)} = \frac{1}{4} \cdot (6 - 3 \cdot 1 - 0) = 0,75 \\ z^{(1)} = \frac{1}{6} \cdot (-3 \cdot 1 - 3 \cdot 0,75) = -0,875 \end{matrix}$$

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,75 \\ -0,875 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} x^{(2)} = \frac{1}{5} \cdot (5 - 0,75 - (-0,875)) = 1,025 \\ y^{(2)} = \frac{1}{4} \cdot (6 - 3 \cdot 1,025 - (-0,875)) = 0,95 \\ z^{(2)} = \frac{1}{6} \cdot (-3 \cdot 1,025 - 3 \cdot 0,95) = -0,9875 \end{matrix}$$

$$\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,025 \\ 0,95 \\ -0,9875 \end{bmatrix}$$

E assim sucessivamente, até que o erro absoluto seja menor do que $\{10\}^{-3}$.

Lembrando que o erro absoluto é calculado por $\{\bar{x}\}^{(k)} - \{\bar{x}\}^{(k-1)}$.

Vamos, agora, utilizar o Excel para resolver o problema proposto.

Inicialmente, devemos escrever o sistema linear da seguinte forma:

Processing math: 82%

$$\begin{matrix} \{x\}^{\left(k+1 \right)} = \frac{1}{5} \cdot \left(5 - \{y\}^k - \{z\}^k \right) \\ \{y\}^{\left(k+1 \right)} = \frac{1}{4} \cdot \left(6 - 3\{x\}^{\left(k+1 \right)} - \{z\}^k \right) \\ \{z\}^{\left(k+1 \right)} = \frac{1}{6} \cdot \left(-3\{x\}^{\left(k+1 \right)} - 3\{y\}^{\left(k+1 \right)} \right) \end{matrix}$$

Agora, passemos ao Excel:

1º passo – criar a tabela a seguir no Excel, em que $k=0$ é o chute inicial:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		k	x	y	z	erro x	erro y	erro z
3		0	0,00000	0,00000	0,00000			
4		1						
5		2						
6		3						
7		4						
8		5						
9		6						
10		7						
11		8						
12		9						
13		10						
14								

Figura 3.12 - Chute inicial para o processo iterativo

Fonte: Elaborada pelo autor.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		k	x	y	z	erro x	erro y	erro z
3		0	0,00000	0,00000	0,00000			
4		=1/5*(5-D3-E3)						
5		2						
6		3						
7		4						
8		5						
9		6						
10		7						
11		8						
12		9						
13		10						

Figura 3.13 - Digitar $\{x\}^{\left(k+1 \right)} = \frac{1}{5} \cdot \left(5 - \{y\}^k - \{z\}^k \right)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Processing math: 82%

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		k	x	y	z	erro x	erro y	erro z
3		0	0,00000	0,00000	0,00000			
4		1	=1/4*(6-3*C4-E3)					
5		2						
6		3						
7		4						
8		5						
9		6						
10		7						
11		8						
12		9						
13		10						

Figura 3.14 - Digitar $\{y^{\left(k+1 \right)}\}=\sim \frac{1}{4}.\left(6-3\{{x}^{\left(k+1 \right)}\}-\{{z}^k\} \right)$
Fonte: Elaborada pelo autor.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		k	x	y	z	erro x	erro y	erro z
3		0	0,00000	0,00000	0,00000			
4		1	1,00000	=1/6*(-3*C4-3*D4)				
5		2						
6		3						
7		4						
8		5						
9		6						
10		7						
11		8						
12		9						
13		10						

Figura 3.15 - Digitar $\{z^{\left(k+1 \right)}\}=\sim \frac{1}{6}.\left(-3\{{x}^{\left(k+1 \right)}\}-3\{{y}^{\left(k+1 \right)}\} \right)$
Fonte: Elaborado pelo autor.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		k	x	y	z	erro x	erro y	erro z
3		0	0,00000	0,00000	0,00000			
4		1	1,00000	0,75000	-0,87500			
5		2						
6		3						
7		4						
8		5						
9		6						
10		7						
11		8						
12		9						
13		10						

Figura 3.16 - Primeira iteração
Fonte: Elaborada pelo autor.

Processing math: 82%

Aqui, já podemos verificar a primeira iteração e comparar com o resultado obtido acima:

```
\left\{ \begin{matrix} {x^{\left( 1 \right)}}=\frac{1}{5}.\left( 5-0-0 \right)=1~~~~~ \\ {y^{\left( 1 \right)}}=\frac{1}{4}.\left( 6-3.1-0 \right)=0,75~~~~~ \\ {z^{\left( 1 \right)}}=\frac{1}{6}.\left( -3.1-3.0,75 \right)=-0,875~~ \\ \bar{x}^{\left( 1 \right)}}=\left[ \begin{matrix} 1 \\ 0,75 \\ -0,875 \end{matrix} \right] \end{matrix} \right.
```

Figura 3.17 - Digitando o erro $| \{x\}^{k+1} - \{x\}^k |$
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 3.18 - Arrastar toda a linha 1 para as outras linhas
Fonte: Elaborada pelo autor.

Na sexta linha, já é possível obter a resposta com um erro absoluto menor do que $\{10\}^{-3}$, como proposto no exercício.

Processing math: 82%

praticar

Vamos Praticar

Resolva o sistema linear a seguir no Excel, usando o método de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, com erro absoluto $\epsilon < 10^{-4}$, determinando o número de iterações para cada método.

$$\begin{cases} 7x+3y+2z+w=13,5 & 2x+10y+3z-2w=-24,5 \\ x-y+11z-3w=16 & -x+2y-3z+8w=3 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ \bar{w} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ☐ a) Gauss-Jacobi = 10 ; Gauss-Seidel= 9
- ☐ b) Gauss-Jacobi = 11 ; Gauss-Seidel= 9
- ☐ c) Gauss-Jacobi = 13 ; Gauss-Seidel= 7
- ☐ d) Gauss-Jacobi = 11 ; Gauss-Seidel= 7
- ☐ e) Gauss-Jacobi = 11 ; Gauss-Seidel= 8

Processing math: 82%

indicações

Material Complementar



FILME

O jogo da imitação

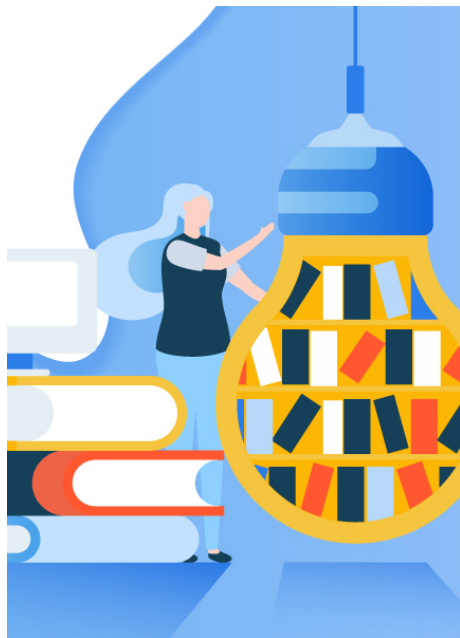
Ano: 2015

Comentário: Filme que conta a história de Alan Turing, um cientista que ajudou a decifrar os códigos que os alemães usam para se comunicarem com os submarinos. O mais interessante é como ele programava o computador, para tentar decifrar esses códigos.

Para conhecer mais sobre o filme, acesse o *trailer*, disponível.

Processing math: 82%

TRAILER



LIVRO

Guia Mangá. Álgebra Linear

Shin Takahashi

Editora: Novatec

ISBN: 8575222937

Comentário: Uma maneira divertida para aprender álgebra. Basicamente, nesse mangá, um personagem que conhece Matemática tem de ensinar álgebra para uma menina. Se ele conseguir fazer isso, poderá entrar para o clube de caratê.

Processing math: 82%

conclusão

Conclusão

Neste capítulo, aprendemos a resolver e a interpretar as soluções de sistemas lineares 2×2 e 3×3 . Lembrando que no sistema 2×2 teremos duas retas e no sistema 3×3 , três planos. Também, apresentamos o método de resolução do sistema linear pelo método iterativo. Nesses métodos, temos de começar com um “chute” inicial e, depois, fazemos as iterações, até a convergência. Vimos dois métodos: Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel. Verificamos que o método de Gauss-Seidel é mais rápido de convergir do que o de Gauss-Jacobi.

referências

Referências Bibliográficas

BARROSO, L. C. **Cálculo numérico** (com aplicações). 2. ed. São Paulo: Harbra, 1987.

DORNELLES FILHO, A. A. **Fundamentos de cálculo numérico**. Porto Alegre: Editora Bookman, 2016.

Processing math: 82%

Processing math: 82%

