MECÂNICA DOS SÓLIDOS – ESTÁTICA

UNIDADE 1 - PRINCÍPIOS GERAIS

Wladimir Alex Magalhães Barcha

Introdução

Grande parte das engenharias atuais tem seus fundamentos estabelecidos à partir dos princípios fundamentais da mecânica, definidos por Isaac Newton no final do século XVII. Você conhece Issac Newton? Conhece as três famosas leis do movimento criadas por ele?

A Mecânica é uma ciência física aplicada que trata dos estudos das forças e dos movimentos. Nela, as condições de repouso ou movimento de corpos sob a ação de forças são definidas. A finalidade da Mecânica é explicar e prever fenômenos físicos, fornecendo, assim, os fundamentos para as aplicações da Engenharia e para fenômenos encontrados no dia a dia. Ela é subdividida em três partes: Mecânica dos Corpos Rígidos, Mecânica dos Corpos Deformáveis e Mecânica dos Fluídos.

Nesta unidade estudaremos a Mecânica dos Corpos Rígidos, que é subdividida em: Estática e Dinâmica. A Estática estuda os corpos em repouso e as forças em equilíbrio, independentemente do movimento por elas produzido. A Dinâmica estuda a relação dos corpos em movimento e a causa que o produz (força).

Apesar de na vida real as estruturas e máquinas nunca serem completamente rígidas pois se deformam devido à ação dos esforços a que são submetidas, para fim de simplificação, na Estática os corpos são considerados perfeitamente rígidos. Essas deformações, normalmente, são bem pequenas, a ponto de não afetarem as condições de equilíbrio do corpo a ser estudado.

Você concorda com a afirmação a respeito das pequenas deformações existirem?

1.1 Conceitos fundamentais

Antes de avançarmos, algumas definições conceituais se fazem necessárias para o melhor entendimento da mecânica dos sólidos. De acordo com (HIBBELER, 2011), quatro quantidades podem ser descritas, e são apresentadas a seguir. Clique nos itens.

Espaço

O conceito de espaço é associado à noção de posição de um ponto material, o qual pode ser definido por três comprimentos, medidos a partir de um certo ponto de referência, ou de origem, segundo três direções dadas. Estes comprimentos são conhecidos como as coordenadas do ponto.

Tempo

Para se definir um evento não é suficiente definir sua posição no espaço. O tempo ou instante em que o evento ocorre também deve ser dado.

Massa

É uma medida da quantidade de matéria contida no corpo.

Força

A força representa a ação de um corpo sobre outro; e a causa que tende a produzir movimento ou a modificá-lo. A força é caracterizada pelo seu ponto de aplicação, sua intensidade, direção e sentido; uma força é representada por um vetor.

De acordo com Beer, et al. (2013), entende-se por partícula como um ponto no espaço onde se concentra toda a massa e com dimensões que podem ser desprezadas. Já um corpo rígido, é a combinação de um grande número de partículas que não tem a distância entre elas alterada quando sujeitas à uma força.

As três leis mais famosas do mundo, também conhecidas como Leis do movimento de Newton, ou princípios da mecânica são: o princípio da inércia (primeira lei de Newton), o princípio fundamental da dinâmica (segunda lei de Newton) e o princípio da ação e reação (terceira lei de Newton). Estabelecem que:

- **Primeira lei (Inércia)** – qualquer corpo em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme tende a permanecer assim, a menos que seja obrigado a alterá-los por aplicação de forças externas;
- **Segunda lei (dinâmica)** – A força resultante que atua sobre um corpo, produz uma aceleração, na mesma direção e no mesmo

sentido da força, inversamente proporcional a massa do corpo, ou seja: $\mathbf{F} = m.\mathbf{a}$

- **Terceira lei (ação e reação)** – quando um corpo exerce uma força sobre outro, este reage sobre o primeiro com uma força de mesma magnitude, com a mesma linha de ação e de sentido contrário.

VOCÊ O CONHECE?

Isaac Newton (1642-1727), foi um astrônomo, alquimista, filósofo natural, teólogo e cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático.

Isaac Newton ficou muito conhecido pela formulação das três leis fundamentais do movimento e pela formulaçao da lei universal da atração gravitacional (MERIAM, KRAIGE, 2015).

De posse dos conceitos fundamentais, vamos adiante com os estudos.

1.2 Unidades de medida

Das quatro unidades apresentadas anteriormente: espaço, tempo, massa e força; as três primeiras são consideradas unidades básicas. Já a quarta unidade, a força, é considerada uma unidade derivada, isto é, é definida em função de duas ou três básicas.

Desta forma, o Sistema Internacional de Unidades (SI) é subdividido em unidades básicas e/ou unidades derivadas. Como já dito, as unidades básicas adotadas na mecânica são: comprimento, massa e tempo. Já as unidades derivadas podem ser relacionadas com as unidades básicas, que são entre outras, força, pressão, trabalho etc. Os dois quadros a seguir mostram alguns exemplos, respectivamente.

As unidades do SI formam um sistema absoluto de unidades. Isto significa que as três unidades básicas escolhidas são independentes dos locais onde são feitas as medições.

Grandeza fundamental	Unidade fundamental	Símbolo
Comprimento	Metro	m
Massa	Quilograma	Kg
Tempo	Segundo	s

Quadro 1 - Unidades básicas de comprimento, massa e tempo.
Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Algumas unidades derivadas também são importantes para o presente estudo.

Grandeza derivada	Unidade derivada	Símbolo
Área	Metro quadrado	m^2
Força	Newton	N
Momento	Newton vezes metro	N.m
Tensão	Pascal	Pa

Quadro 2 - Unidades derivadas.
Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

A força é medida em Newton (N) que é definido como a força que imprime a aceleração de $1m/s^2$ à massa de 1 kg. A partir da Equação $F = m.a$ (segunda Lei de Newton), escreve-se: $1\ N = 1\ kg\ x\ 1m/s^2$.
O peso de um corpo, que também é considerado uma força, é expresso em Newton (N). Assim, da terceira Lei de Newton $P = m.g$ temos que o peso de um corpo de massa 1 kg é dado por $P = 1kg$ x $9{,}81m^2 = 9{,}81\ N$ onde $g = 9{,}81m^2$ é a aceleração da gravidade.
Outro exemplo de unidade derivada é a tensão ou pressão, que é medida no SI em Pascal (Pa). Ela é definida como a pressão exercida por uma força de 1 Newton uniformemente distribuída sobre uma superfície plana de 1 metro quadrado de área, perpendicular à direção da força ($\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}$). As unidades derivadas de tensões normais, de tração ou compressão, e tensões tangenciais também utilizam o Pascal.

VOCÊ SABIA?

O Sistema Internacional de Unidades (**SI**) é o sistema de medição mais usado no mundo, tanto no comércio como na ciência. Por acordo internacional, deverá substituir outros sistemas como o FPS (foot-pound-second) ou "pé-libra massa-segundo", sistema de unidades americano, o mais utilizado nos países de língua inglesa. Fique sempre atento às unidades quando for resolver um problema! (MERIAM; KRAIGE, 2015).

Múltiplos e submúltiplos das unidades fundamentais e derivadas são utilizados na forma de potências inteiras de dez. Esses múltiplos e submúltiplos são designados por prefixos, veja quadro a seguir.

Prefixo	Símbolo	Fator pelo qual a unidade é multiplicada
Exa	E	10^{18} = 1.000.000.000.000.000.000
Peta	P	10^{15} = 1.000.000.000.000.000
Tera	T	10^{12} = 1.000.000.000.000
Giga	G	10^{9} = 1.000.000.000
Mega	M	10^{6} = 1.000.000
Quilo	K	10^{3} = 1.000
Hecto	h	10^{2} = 100
Deca	da	10^{1} = 10
Deci	d	10^{-1} = 0,1
Centi	c	10^{-2} = 0,01
Mili	m	10^{-3} = 0,001
Micro	µ	10^{-6} = 0,000 001
Nano	n	10^{-9} = 0,000 000 001
Pico	p	10^{-12} = 0,000 000 000 001
Femto	f	10^{-15} = 0,000 000 000 000 001
Atto	a	10^{-18} = 0,000 000 000 000 000 001

Quadro 3 - Múltiplos e submúltiplos das unidades fundamentais e derivadas.
Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

O quadro anterior apresenta os prefixos mais utilizados no SI. O uso adequado do prefixo evitará a escrita de números muito grandes ou pequenos, por exemplo: escrevemos 333,4 km ou invés de 333.400 m.

VAMOS PRATICAR?

Suponha os números: 245.700 mm e 1.790 m. Transforme esses números em kr

Também transforme a velocidade de 100 Km/h e m/s e depois pratique taml outros números aleatórios.

No subtópico a seguir, vamos estudar a precisão dos algarismos significativos.

1.2.1 Algarismos significativos

Podemos definir os algarismos significativos como aqueles que estão em um número qualquer e que definem a sua precisão.
A seguir, listamos algumas regras para a definição de algarismos significativos. Clique nos itens.

- Qualquer número que for diferente de zero pode ser considerado significativo.
- O número zero, quando estiver à esquerda não é considerado significativo.
- O número zero, quando estiver à direita e entre outros números, diferentes de zero, é considerado significativo.
- Nas representações científicas considere todos os algarismos significativos exceto a potência de 10.

- Zeros à direita e no final serão significativos apenas se houver indicação da vírgula.

1.3 Procedimentos gerais para análise

A resolução de problemas/exercícios é a melhor forma para o aprendizado da mecânica dos sólidos aplicada à engenharia. A seguir, listamos uma sequência lógica que deve sempre ser utilizada para o sucesso na resolução do trabalho:

- leia e analise cuidadosamente o problema/exercício, correlacionando o mesmo com a teoria estudada;
- sempre que possível, desenhe os diagramas relacionados ao problema;
- sempre que realizar o equacionamento matemático, certifique-se que o mesmo esteja dimensionalmente equilavente;
- na solução das equações a resposta deve ter pelo menos três algarismos significativos;
- por fim, faça uma avaliação com bom senso sobre a sua resposta para checar se a mesma lhe parece razoável.

1.4 Classificação dos triângulos

Os triângulos podem ser classificados através da relação de seus lados ou pelo tamanho de seus ângulos.
Pelo tamanho de seus lados, os triângulos são classificados de três formas. Clique nos cards a seguir e conheça-os.

Triângulo equilátero

Se os três lados têm o mesmo comprimento (os três ângulos internos medem 60).

Triângulo isósceles

Se possuem dois lados com o mesmo comprimento. Os ângulos opostos a estes dois lados possuem a mesma medida.

Triângulo escaleno

Se todos os lados têm comprimentos diferentes (no triângulo escaleno os ângulos internos também possuem medidas diferentes).

Observe a imagem a seguir.

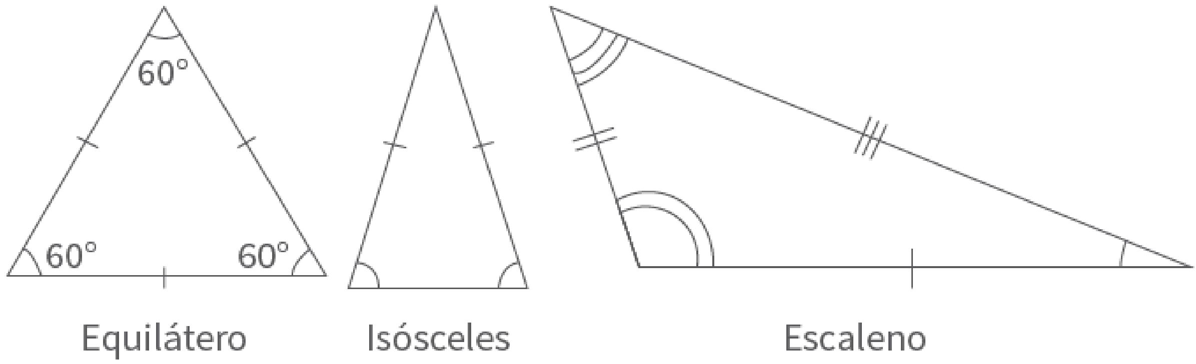

Figura 1 - Representação dos três tipos de triângulos: equilátero, isósceles e escaleno.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Pelo tamanho de seus ângulos a classificação pode ser a seguinte:

triângulo retângulo: se possuir um ângulo interno de 90° (ângulo reto). Os lados que formam o ângulo reto são chamados de catetos e o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa;

triângulo obliquângulo: quando nenhum de seus ângulos internos são retos (90°). São divididos em triângulos obtusângulos e acutângulos;

triângulo obtusângulo: se um de seus ângulos internos é obtuso (maior de 90°); os outros ângulos são agudos (menores de 90°);

triângulo acutângulo: quando seus três ângulos internos são menores de 90°. O triângulo equilátero é um caso particular de triângulo acutângulo.

VAMOS PRATICAR?

Em uma folha em branco, utilize uma régua e um lápis (ou caneta), e desenhe tı equiláteros, isóceles e escaleno. Desenhe também, com o mesmo procedim triângulos classificados a partir dos seus ângulos, os triângulos: r oblicuângulo, obtusângulo e acutângulo.

No tópico a seguir vamos aprender as razões trigonométricas e suas utilizações no cotidiano das pessoas.

1.5 Razões trigonométricas

A seguir iremos discutir um pouco sobre as principais razões trigonométricas que são utilizadas na resolução de problemas do dia a dia.
Iremos definir as relações métricas do triângulo retângulo e o teorema de Pitágoras, apresentar as funções trigonométricas especiais e apresentar a relação fundamental da trigonometria.

1.5.1 Triângulo retângulo

Um triângulo retângulo é definido como uma figura geométrica plana, com três lados, onde um de seus ângulos internos é um ângulo reto, isto é, que mede 90°. É baseado no triângulo retângulo que as principais relações trigonométricas são desenvolvidas, sendo a principal delas o famoso teorema de Pitágoras, que será explicado adiante.

- Elementos

Dado um triângulo ABC, vide figura a seguir, retângulo em A, podemos caracterizar os seguintes elementos:

- lado AB = c (cateto);
- lado AC = b (cateto);
- lado BC = a (hipotenusa);
- lado AD = h (altura relativa à hipotenusa);
- lado BD = m (projeção de c sobre a);
- lado DC = n (projeção de b sobre a).

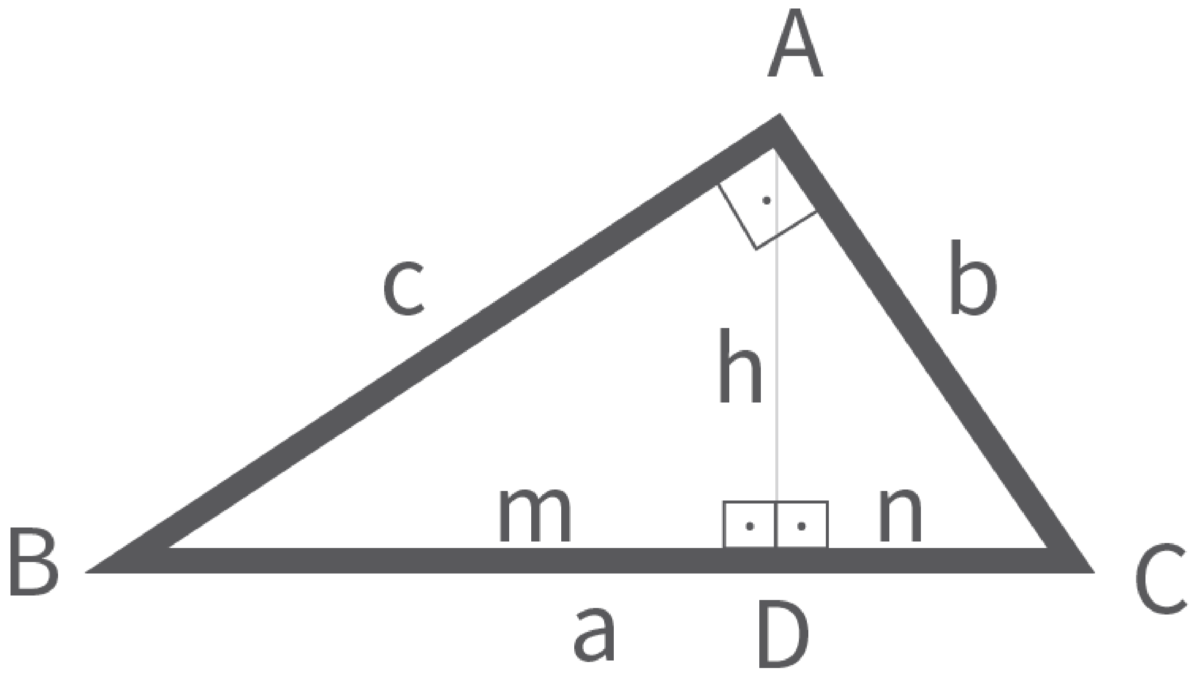

Figura 2 - Triângulo retângulo em A.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

- Relações métricas

Quando traçamos a altura AD relativa a hipotenusa do triângulo ABC, temos dois triângulos retângulos ABD e ACD semelhantes ao triângulo ABC. Assim, de acordo com a congruência dos ângulos indicados:

- B ≡ 1 (complementos de C)
- C ≡ 2 (complementos de B)

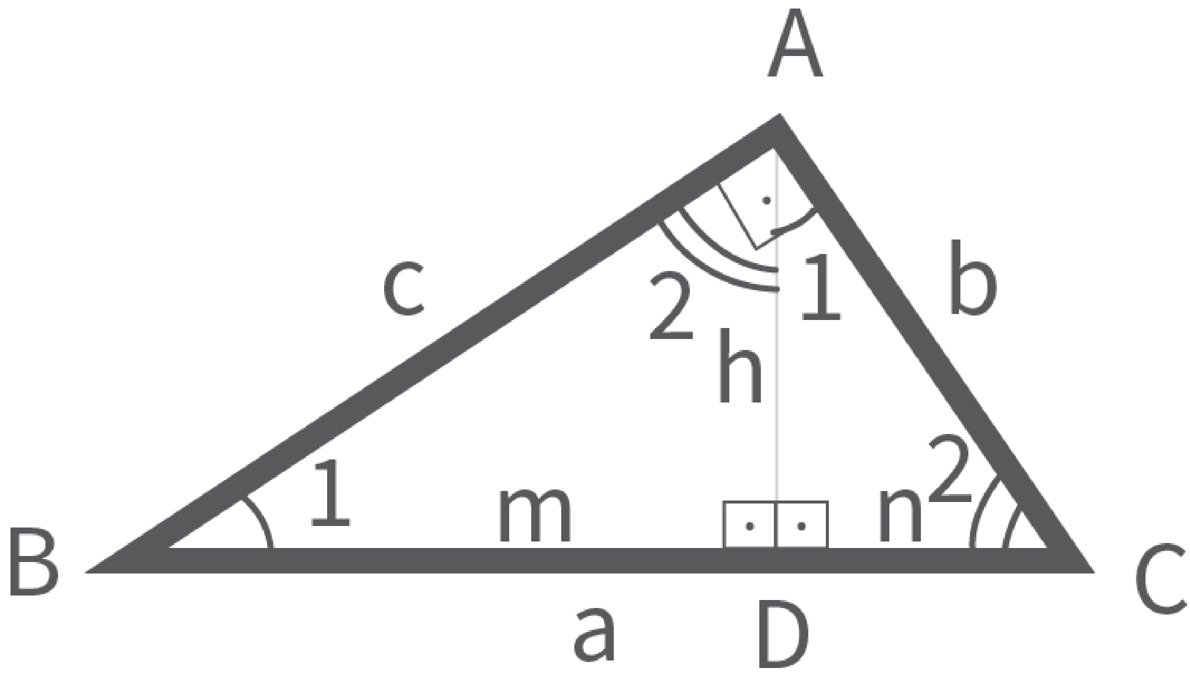

Figura 3 - Triângulo retângulo.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Com base na semelhança dos triângulos ΔABC, ΔABD e ΔACD, determinam-se as seguintes relações:

(1) $b^2 = a.n$	(3) $h^2 = m.n$	(5) $b.h = c.n$
(2) $c^2 = a.m$	(4) $b.c = a.h$	(6) $c.h = b.m$

Figura 4 - Relações Trigonométricas.
Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

A seguir, iremos explorar um pouco mais as relações trigonométricas.

1.5.2 Teorema de Pitágoras

Considerando-se as relações (1) e (2) definidas no quadro anterior, e somando-se as mesmas temos a base para a definição do Teorema de Pitágoras:

$$(1) b^2 = a.n;$$
$$(2) c^2 = a.m;$$

Assim, $b^2 + \ c^2 = a.n + a.m = a\,(n+m) = a\,(a) = \ a^2 \rightarrow\rightarrow\rightarrow b^2 + \ c^2 = \ a^2$

Desta forma, demonstra-se que o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, também conhecido como Teorema de Pitágoras

$a^2 = \ b^2 + \ c^2$

VOCÊ O CONHECE?

Pitágoras de Samos (570-495 a.C.), filósofo e matemático grego, descobridor de inúmeras descobertas matemáticas, astronômicas, musicais, médicas e científicas além do famoso Teorema de Pitágoras. Aliás, foi esse teorema que possibilitou a descoberta dos números irracionais (https://www.infoescola.com/matematica/numeros-irracionais/) e o surgimento do conceito de raiz quadrada (https://www.infoescola.com/matematica/radiciacao/) através da aplicação do mesmo a um triângulo cujos catetos possuíam valor 1.

Continuamos adiante com mais relações trigonométricas.

1.5.3 Seno, Cosseno e Tangente de um angulo agudo (30°, 45° e 90°)

Sendo θ a medida de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo ΔABC mostrado a seguir, tem-se:

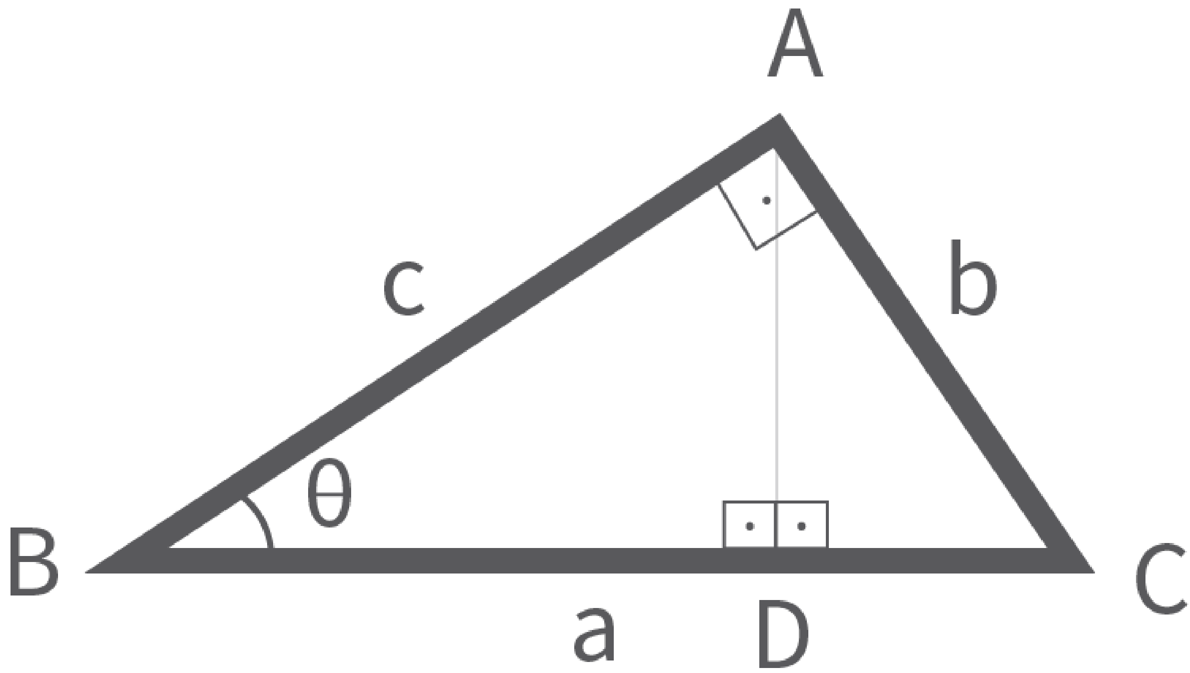

Figura 5 - Triângulo retângulo.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

- Seno de θ = senθ = cateto oposto/hipotenusa
- Cosseno de θ = cosθ = cateto adjacente/hipotenusa
- Tangente de θ = tgθ = cateto oposto/cateto adjacente

1.5.4 Razões trigonométricas especiais

A seguir listamos algumas razões trigonométricas muito utilizadas no dia a dia.

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 1 - Razões Trigonométricas usuais.
Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

VAMOS PRATICAR?

Utilize uma calculadora científica e calcule os valores dos senos, cossenos e da de alguns ângulos. Utilize os ângulos 30°, 45°, 60° e também com intermediários e aleatórios. É importante que você pratique estes cálculos, tente com diversos angulos!

Depois de praticar um pouco, continue em frente!

1.5.5 Relação fundamental da trigonometria

Relacionando o teorema de Pitágoras com as funções trigonométricas do seno e do cosseno, obtemos a seguinte relação:

$\sin\theta = \frac{b}{a} \rightarrow\rightarrow\rightarrow b = a\sin\theta;$

$\cos\theta = \frac{c}{a} \rightarrow\rightarrow\rightarrow c = a\cos\theta;$

Assim,

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow\rightarrow\rightarrow a^2 = (a\sin\theta)^2 + (a\cos\theta)^2$$
$$a^2 = a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta = a^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)$$

Assim, obtém-se a relação fundamental da trigonometria:

$$\left(\boldsymbol{\sin^2\theta + \cos^2\theta}\right) = 1$$

VOCÊ QUER LER?

"Geometria plana e trigonometria" livro de Álvaro Emílio Leite e Nelson Pereira Castanheira, da editora Intersaberes, traz estudos minuciosos sobre os ângulos, triângulos e suas razões trigonométricas, com especial atenção à lei dos senos e cossenos.

Aqui finalizamos a revisão dos conceitos de trigonometria e a seguir, iniciaremos o estudo das grandezas escalares e vetoriais.

1.6 Escalares, vetores e operações vetoriais

No estudo da mecânica dos sólidos, dois tipos de grandezas são utilizadas: as grandezas **escalares** e os **vetores**.

As grandezas escalares possuem apenas o seu valor ou magnitude, como por exemplo a massa, o tempo, o volume, a energia, a densidade, entre outros.

Já as grandezas vetoriais, além de valor ou magnitude, possuem também a direção. Alguns exemplos são a força, o deslocamento, a velocidade, a aceleração, entre outros. Uma grandeza vetorial ou simplesmente vetor, é representado por uma seta e um certo ângulo. O sentido do vetor é dado pela orientação da seta e seu comprimento dá a sua magnitude. Neste curso, para indicarmos um vetor utilizaremos o negrito, como por exemplo **P**. Onde a magnitude é representada por *P*. Outra forma utilizada em manuscritos é a utilização de uma seta sobre a magnitude, $\overrightarrow{P}.$

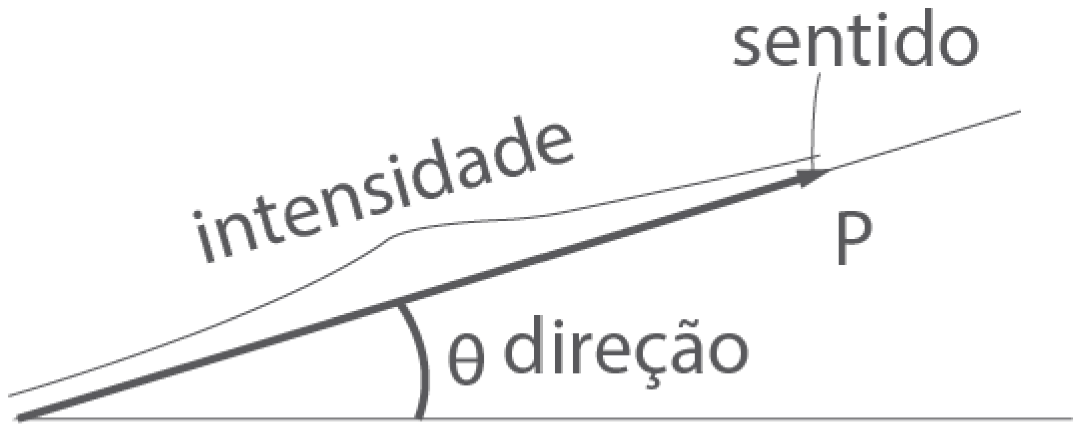

Figura 6 - Representação de um vetor.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Os vetores que representam grandezas físicas são classificados como apresentado nas abas a seguir. Clique e veja.

- **Vetor livre**

  É aquele que pode ser transladado para qualquer posição no espaço desde que se mantenham a mesma direção e magnitude.

- **Vetor móvel**

  É aquele que pode ser posicionado em qualquer ponto ao longo da sua linha de ação. Pelo princípio da transmissibilidade, os efeitos externos de um vetor móvel permanecem os mesmos.

- **Vetor fixo**

  É aquele que deve permanecer sempre no mesmo ponto de aplicação.

O negativo de um vetor **P** é um vetor **–P** com a mesma magnitude e direção mas com sentido oposto.

1.6.1 Operações vetoriais

A seguir iremos estudar um pouco sobre as operações vetoriais. Iremos estudar a adição e subtração de vetores utilizando as regras do paralelogramo e do triângulo.

- ## Multiplicação e divisão de um vetor por um escalar

A multiplicação de um vetor **P** por um escalar a resulta em um vetor **aP** (com sua magnitude aumentada) e com sua magnitude *aP*.

Se o escalar for positivo o sentido do vetor resultante continua o mesmo. Já se o escalar for negativo o sentido do vetor resultante é o oposto ao do vetor original.

A divisão de um vetor **P** por um escalar a segue as leis da multiplicação, ou seja **P**/a = (1/a)**P**.

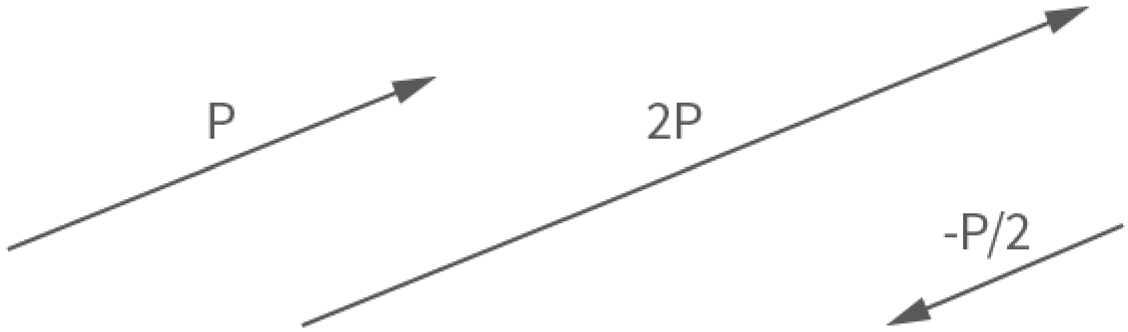

Figura 7 - Exemplos de operações de escalar com vetor.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

- ## Adição de dois vetores

Considere os vetores **P** e **Q**:

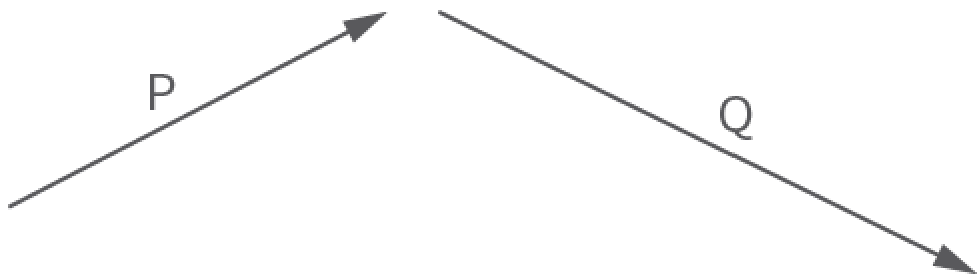

Figura 8 - Vetores **P** e **Q**.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

A adição pela regra do paralelograma diz que a união entre os vetores e suas origens obtém um vetor resultante **R** = **P** + **Q** a partir de retas paralelas traçadas em um ponto comum de intersecção dos vetores, formando um paralelogramo.

Na adição pela regra do triângulo o vetor **P** é somado ao vetor **Q** unindo-se a origem de **Q** à extremidade de **P**. Assim, o vetor resultante **R** é dado por:

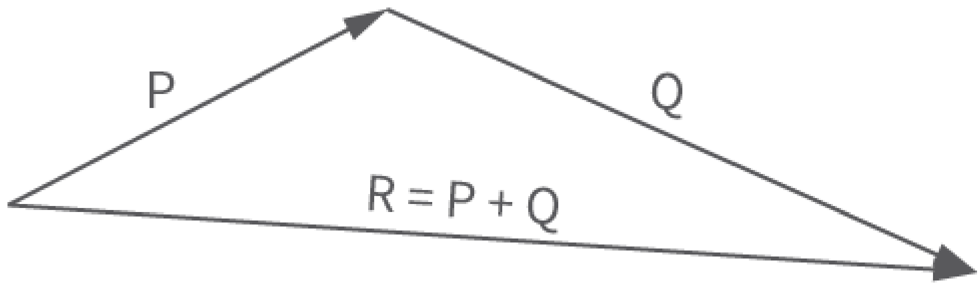

Figura 9 - Exemplo de adição de vetores pela regra do triângulo.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

A adição de vetores é comutativa, ou seja não importa a ordem dos fatores:
$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}$

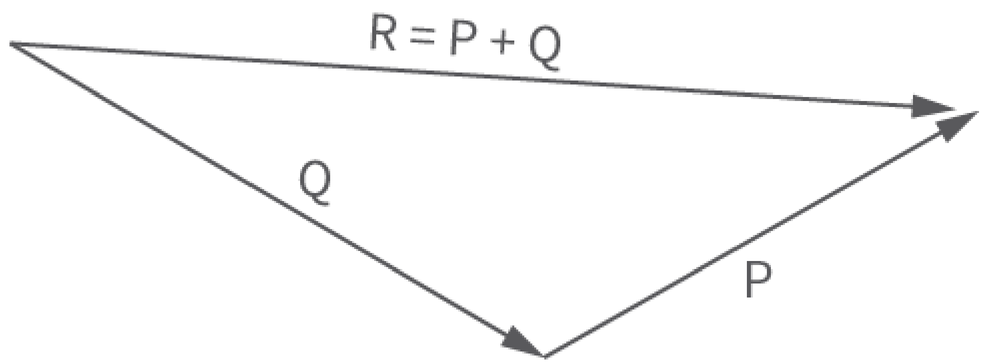

Figura 10 - Exemplo de adição de vetores pela regra do triângulo.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

- Adição entre três ou mais vetores

Considere os vetores **P**, **Q** e **S**. A soma entre estes vetores pode ser realizada em duas etapas. Primeiro realiza-se a soma entre **P** e **Q** e, depois adiciona-se o vetor **S** ao vetor resultante **R1** = **P** + **Q**.
Desta forma, obtém-se um segundo vetor resultante $\mathbf{R}_2 = \ \mathbf{R}_1 + \ \mathbf{S} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S}$

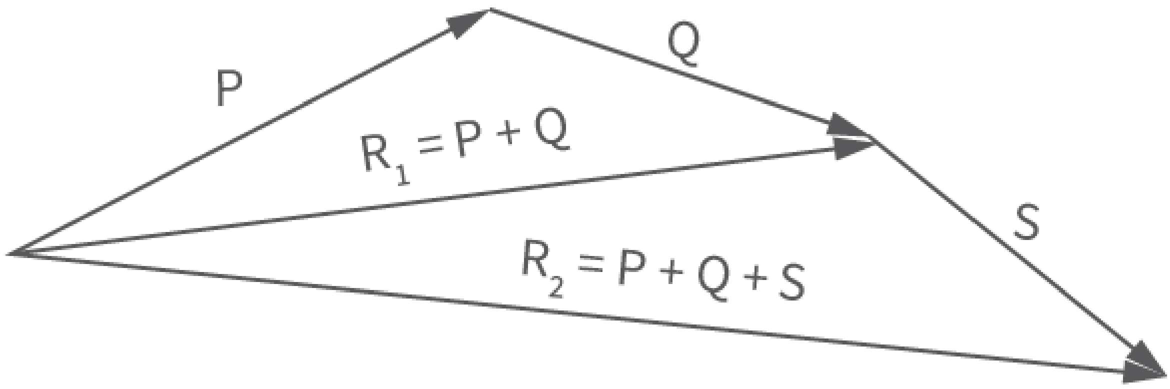

Figura 11 - Exemplo de adição de três vetores.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

- Subtração entre vetores

A subtração de vetores é um caso particular da adição de vetores, onde o vetor resultante é expresso por:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q}) = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$$

As regras do paralelogramo e do triângulo são válidas para a subtração de vetores.

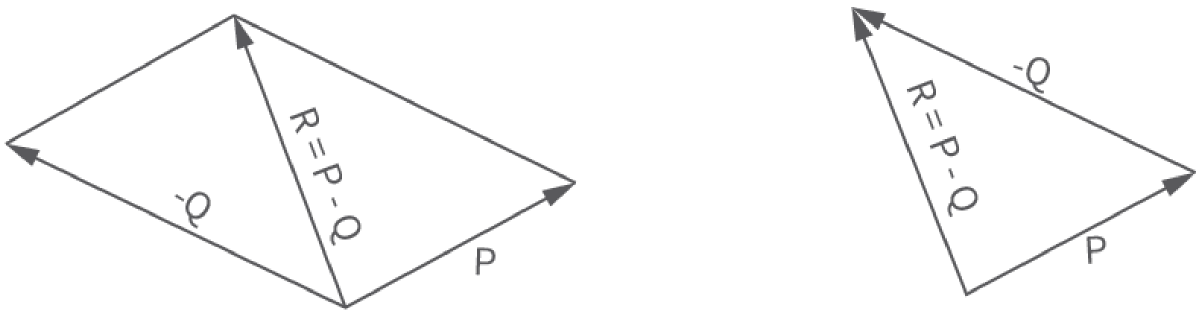

Figura 12 - Exemplo de subtração de vetores.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Leis dos Senos

Dado o triângulo ABC a seguir, podemos obter o seguinte:

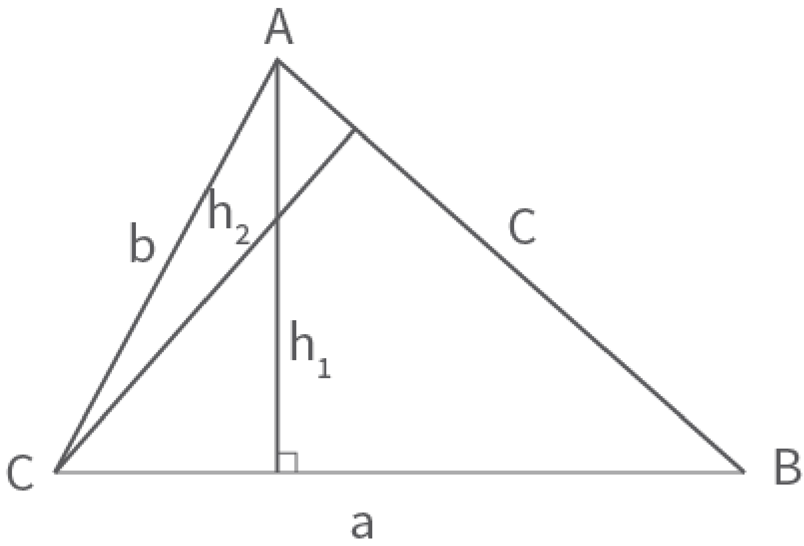

Figura 13 - Triângulo ABC.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

$\sin \mathrm{C} = \frac{\mathrm{h_1}}{\mathrm{b}} \;\rightarrow\rightarrow\rightarrow\; \mathrm{h_1} = \mathrm{b} \sin \mathrm{C}$;

$\sin \mathrm{B} = \frac{\mathrm{h_1}}{\mathrm{c}} \;\rightarrow\rightarrow\rightarrow\; \mathrm{h_1} = \mathrm{c} \sin \mathrm{B}$

Logo,

$\mathrm{b} \sin \mathrm{C} = \mathrm{c} \sin \mathrm{B} \;\rightarrow\rightarrow\rightarrow\; \frac{\mathrm{b}}{\sin \mathrm{B}} = \frac{\mathrm{c}}{\sin \mathrm{C}}$

Também temos que:

$\sin \mathrm{A} = \frac{\mathrm{h_2}}{\mathrm{b}} \;\rightarrow\rightarrow\rightarrow\; \mathrm{h_2} = \mathrm{b} \sin \mathrm{A}$

$\sin \mathrm{B} = \frac{\mathrm{h_2}}{\mathrm{a}} \;\rightarrow\rightarrow\rightarrow\; \mathrm{h_2} = \mathrm{a} \sin \mathrm{B}$

Logo,

$\mathrm{b} \sin \mathrm{A} = \mathrm{a} \sin \mathrm{B} \;\rightarrow\rightarrow\rightarrow\; \frac{\mathrm{b}}{\sin \mathrm{B}} = \frac{\mathrm{a}}{\sin \mathrm{A}}$

Assim, definimos a Lei dos Senos como:

$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{sen\ B}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{sen\ A}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{sen\ C}}$

Leis dos Cossenos

Dado o triângulo ABC a seguir, podemos obter o seguinte:

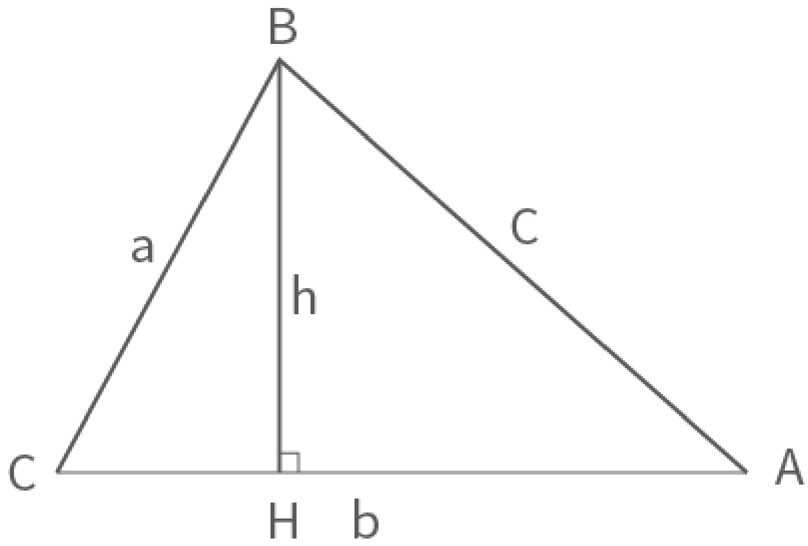

Figura 14 - Triângulo ABC.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

$$a^2 = h^2 + (b - HA)^2 \;\rightarrow\rightarrow\rightarrow\; a^2 = (c \sin A)^2 + (b - c \cos A)^2$$
$$a^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A$$
$$a^2 = c^2 \left(\sin^2 A + \cos^2 A\right) + b^2 - 2bc \cos A$$

Assim, definimos a Lei dos Cossenos como:

$$\mathbf{a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A}$$

1.7 Vetor de força e vetor de posição

A seguir veremos a definição dos vetores de força e posição bem como a relação entre eles.

1.7.1 Vetor de força

Um vetor de força é uma quantidade vetorial que especifica a sua magnitude, direção e sentido. Assim como vetores, a soma pode ser feita através da regra do paralelogramo e ou do triângulo.
No estudo da mecânica dos sólidos, dois problemas comuns utilizam as operações de soma ou subtração de vetores: determinar uma força resultante através de outras aplicadas em um certo ponto; e decompor uma força resultante conhecida em duas componentes.

- ## Determinando uma força resultante

Na figura a seguir, temos duas forças, **F1** e **F2**, atuando sobre um pino. Para a obtenção da força resultante $\mathbf{F_r} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$, podemos utilizar a regra do paralelogramo, vide figura (b). Com esta configuração ou utilizando a regra do triângulo, figura (c), e com a aplicação das leis dos senos ou cossenos obtém-se a magnitude e direção da força resultante.

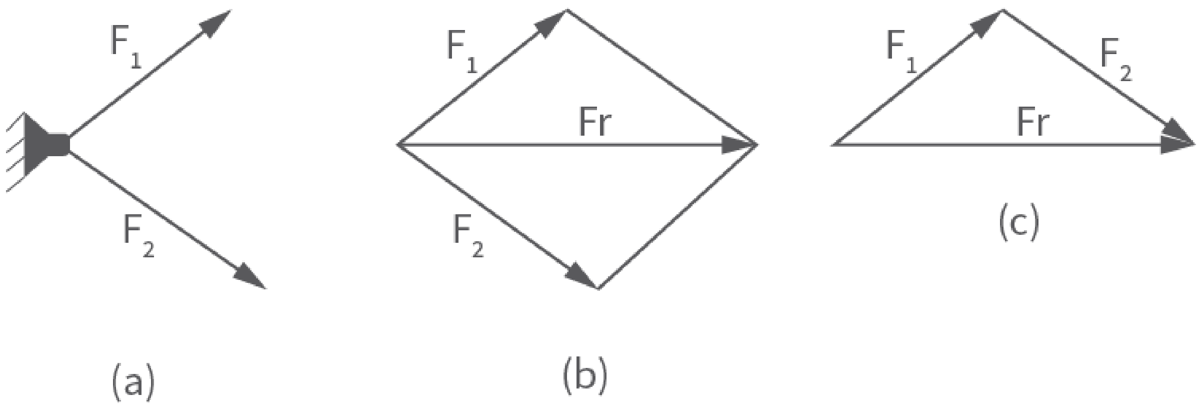

Figura 15 - (a) Forças atuantes em um pino; (b) Obtenção da Força resultante pela regra do paralelogramo; (c) Obtenção da Força resultante pela regra do triângulo.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

- ## Determinando as componentes de uma força

Em alguns casos será necessário decompor uma força para determinar as suas componentes e assim encontrar o efeito do esforço destas forças em determinados componentes. Veremos um exemplo na imagem a seguir.

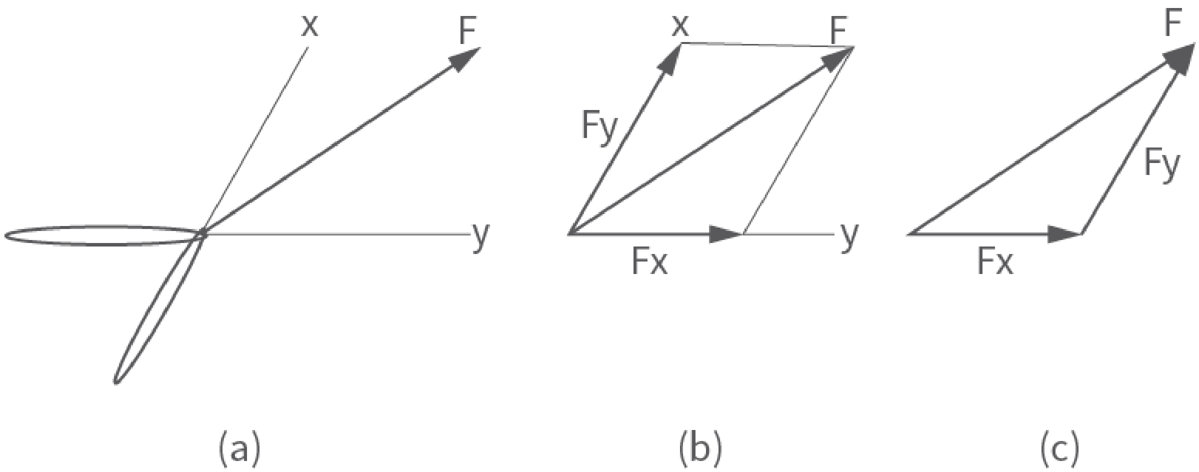

Figura 16 - (a) Força resultante; (b) Obtenção das componentes da força pela regra do paralelogramo; (c) Obtenção das componentes pela regra do triângulo.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Na figura (a) anterior, a força **F** deve ser decomposta em duas componentes que atuam ao longo das barras definidas pelos eixos x e y. Para a obtenção das componentes podemos utilizar a regra do paralelogramo, na figura (b) anterior, traçando eixos paralelos aos eixos das barras. A regra do triângulo também pode ser utilizada e, em conjunto com as leis dos senos e cossenos, permite a obtenção das magnitudes das forças componentes.

CASO

A seguir apresentaremos um exemplo para a determinação das componentes de uma força.

Na figura a seguir, uma força de 800N é exercida sobre um parafuso A. Determine as componentes vertical e horizontal da força, conforme esquema a seguir.

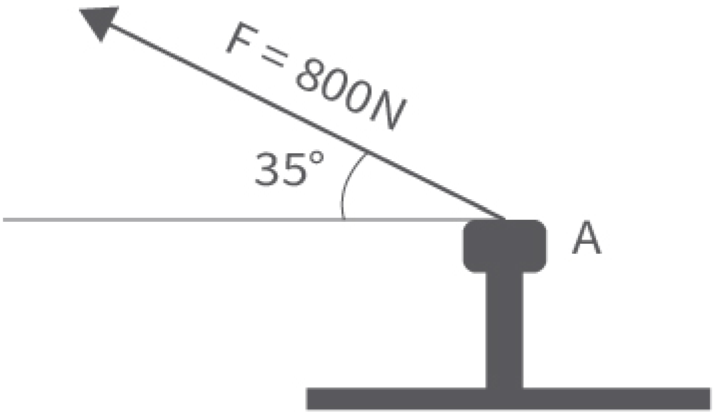

Figura: Exemplo de Decomposição de Força.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Solução: Se utilizarmos a regra do triângulo e as leis dos senos e cossenos, obtemos as componentes da força nos eixos x e y.

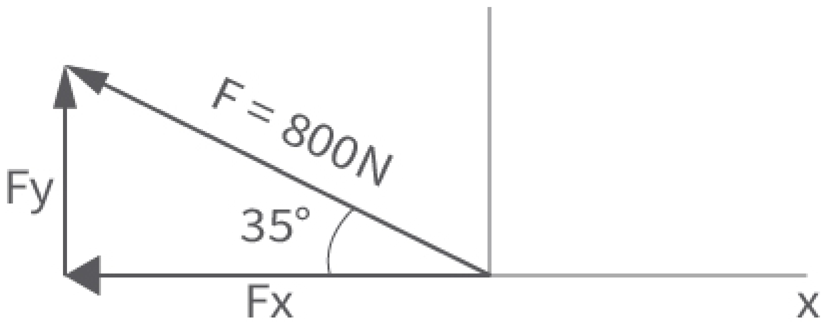

Figura: Decomposição da força resultante.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019

Através da lei dos senos e cossenos obtemos:

$$cos35^\circ = \frac{-\mathbf{Fx}}{\mathbf{F}};$$

$$sen35^\circ = \frac{\mathbf{Fy}}{\mathbf{F}}$$

Assim:

$$\mathrm{F_x} = -800\cos 35^\circ = -655{,}32\mathrm{N}$$

$$\mathrm{F_y} = 800\sin 35^\circ = 458{,}86\mathrm{N}$$

Exemplo

Dada a figura a seguir, determine as componentes da força de 300N que atuam nas barras AC e AB da treliça mostrada.

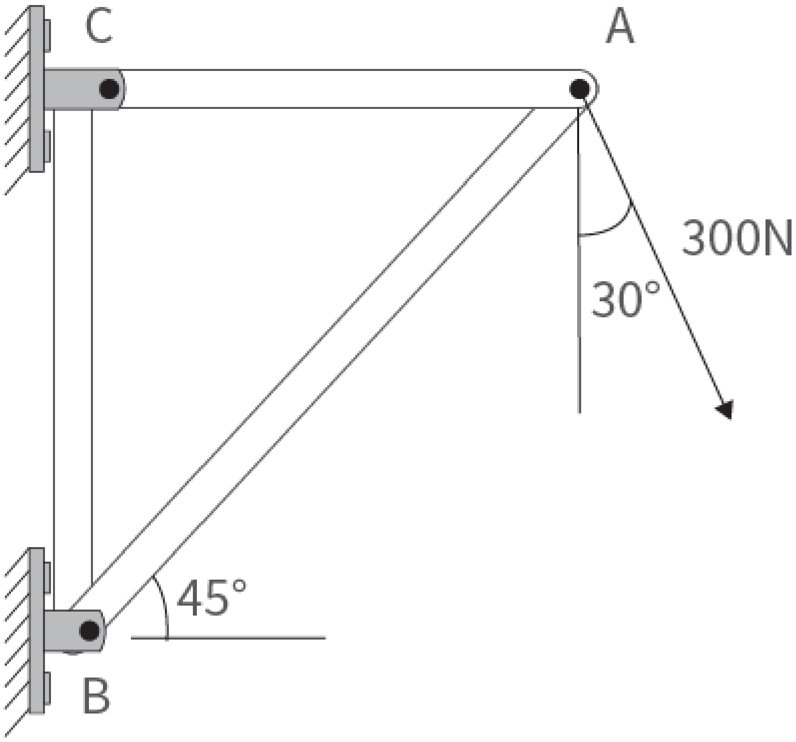

Figura 17 - Exemplo de Componentes da Força Resultante.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Solução: Utilizaremos a regra do triângulo para montar as componentes da força resultante de 300N. O resultado é mostrado na figura a seguir.

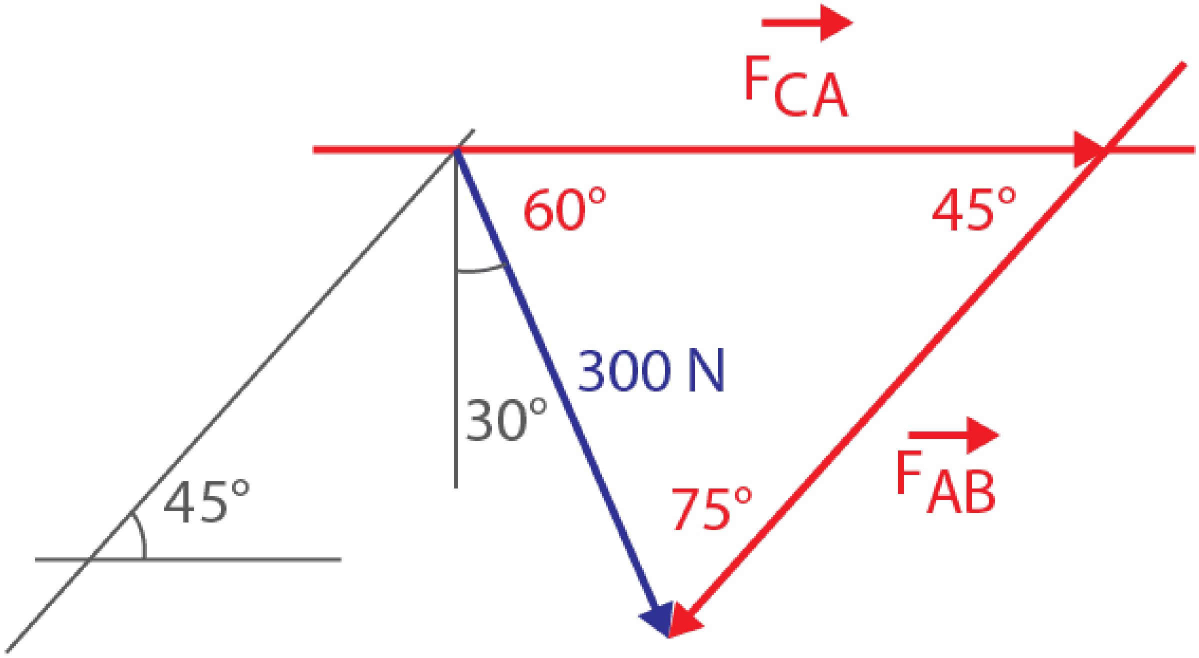

Figura 18 - Força resultante e suas componentes.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Da lei dos Senos temos que:

$$\frac{\mathbf{300}}{\mathbf{sen\ 45^{\circ}}} = \frac{F_{CA}}{\mathbf{sen\ 75^{\circ}}} = \frac{\mathbf{F_{AB}}}{\mathbf{sen\ 60^{\circ}}}$$

Assim,

$$\mathbf{F_{CA}} = 410\text{N}$$
$$\mathbf{F_{AB}} = 367{,}5\text{N}$$

VAMOS PRATICAR?

Como no exemplo anterior, da treliça, determine as componentes da força qu nas barras AC e AB da treliça. Desta vez, considere valores diferentes, sub valores do ângulo de 30° para 15°, o ângulo de 45° para 60° e a força de 300N p força de 500N.

Depois de praticar um pouco, continue em frente!

1.7.2 Vetor de posição

O conceito de vetor de posição, como será visto adiante, será muito importante no equacionamento do vetor de força direcionado entre dois pontos.

- **Sistemas de coordenadas x,y,z**

O sistema de coordenadas que utilizaremos para a localização de pontos no espaço é o sistema da "mão direita". Este sistema, muito utilizado na bibliografia técnica, exige que o eixo *z* esteja direcionado para cima, auxiliando na medição da altura de um objeto ou altura de um ponto. Desta forma, os eixos *x* e *y* ficarão no plano horizontal (vide figura a seguir).

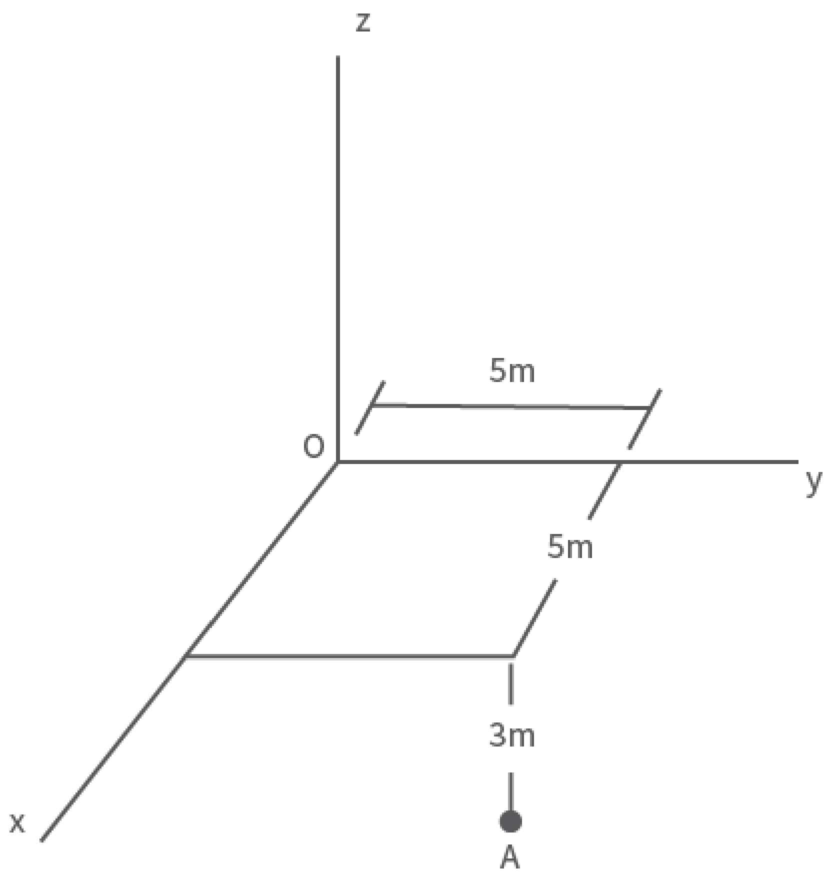

Figura 19 - Sistema de Coordenadas.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Todos os pontos no espaço podem ser localizados à partir da origem do sistema, o ponto *O*. Desta forma, de acordo com a figura anterior, o ponto *A* tem suas posições nos eixos: .
Outra forma de representar o ponto *A* seria: *A*(5m; 5m; -3m).

- **Conceito de vetor de posição**

Um vetor de posição *r* pode ser definido como um vetor fixo que define um ponto no espaço com relação a outro. Se o vetor *r* sai da origem *O* até um ponto *P(x, y, z)* ele pode ser expresso como um vetor cartesiano: (vide figura a seguir).

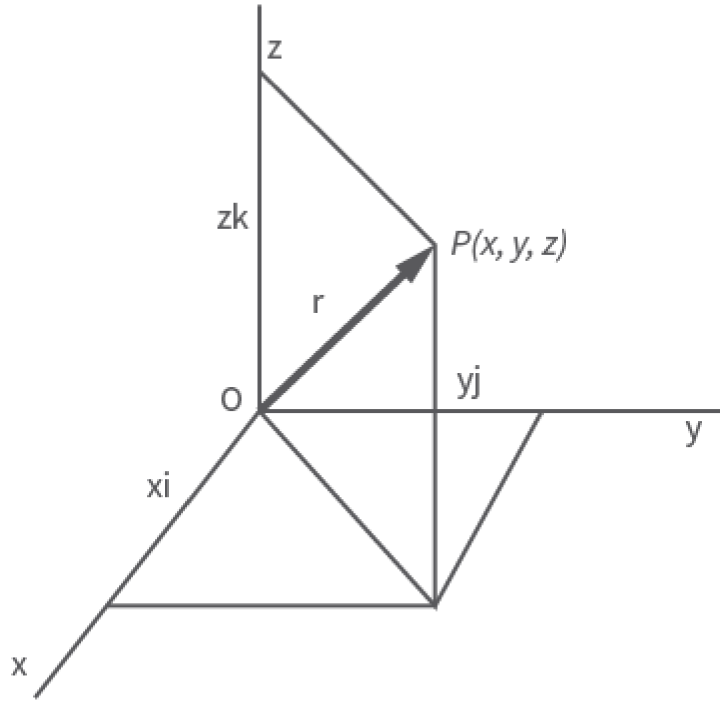

Figura 20 - Vetor Cartesiano.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

A intensidade/magnitude de um vetor cartesiano é dada pela raiz quadrada positiva da soma dos quadrados de suas componentes: $r = \sqrt{xi^2 + yj^2 + \ zk^2}$

Na grande maioria dos casos práticos e encontrados na literatura, o vetor de posição é direcionado de um ponto *A* para outro ponto *B* no espaço (vide figura a seguir). De acordo com a conveção utilizada, o vetor é referenciado com dois subscritos para indicar os seus pontos de partida e final. Desta forma um vetor *r* pode ser descrito como *rAB*, indicando que o vetor sai de *A* para *B*.

Analisando a figura a seguir, através da regra do triângulo, podemos afirmar que: $r_A + \ r = \ r_B$ Resolvendo esta equação tem-se

$$r = \ r_B - \ r_A = (x_B i + \ y_B j + \ z_B k) - (x_A i + \ y_A j + \ z_A k)$$

ou,

$$r = \ (x_B - \ x_A)i + \ (y_B - \ y_A)j + \ (z_B - \ z_A)k$$

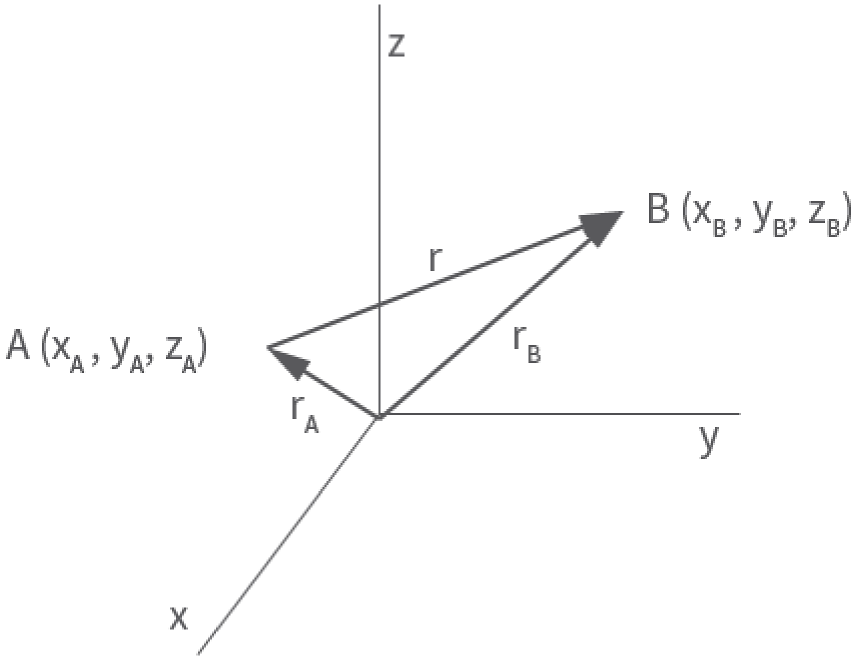

Figura 21 - Vetor Espacial.
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Assim, as componentes i, j e k do vetor de posição *r* podem ser obtidos através da subtração dos valores das coordenadas do ponto $B(x_B, y_B, z_B)$ e $A(x_A, y_A, z_A)$.

VOCÊ QUER VER?

A aula online *Física Total – Vetores e operações vetoriais* é uma vídeoaula completa que aborda os principais tópicos sobre vetores e suas operações. O vídeo é apresentado pelo professor de Física Ivys Urquiza. Você pode assisti-la aqui:

<https://www.youtube.com/watch?v=8Qg4U_eCPzA (https://www.youtube.com/watch?v=8Qg4U_eCPzA)>

Assim, finalizamos o conteúdo desta unidade. Vamos agora revisar um pouco do que foi visto até aqui.

Síntese

Chegamos ao final desta unidade, onde foi abordado os princípios gerais da disciplina Mecânica dos Sólidos bem como a revisão de alguns conceitos que darão embasamento para as próximas unidades.
Nesta unidade, você teve a oportunidade de:

- aprender que a Mecânica é uma ciência física aplicada que trata dos estudos das forças e dos movimentos;
- aprender que uma partícula é um corpo cujas dimensões podem ser desprezadas. É considerado um ponto geométrico em que se concentra toda a massa do corpo;
- aprender que um Corpo Rígido é a combinação de várias partículas que não tem a distância entre elas alterada com a aplicação de uma força;
- aprender que as três leis de Newton devem ser memorizadas pois sempre serão utilizadas;
- aprender que o Sistema Internacional de Unidades (SI) é subdividido em unidades básicas ou fundamentais (metro e segundo por exemplo) e unidades derivadas (o Newton por exemplo);
- aprender que os prefixos G, M, k, m e n são utilizados para expressar quantidade numéricas grandes e pequenas;
- aprender que os triângulos podem ser clasificados através da relação de seus lados ou pelo tamanho de seus ângulos. Memorize-as;
- aprender que o teorema de Pitágoras e as leis dos senos e cossenos também devem ser memorizadas pois sempre serão utilizadas;
- aprender que no estudo da mecânica dos sólidos, dois tipos de grandezas são utilizadas: as grandezas escalares e os vetores;
- aprender que um escalar é um número positivo ou negativo;
- aprender que um Vetor é uma quantidade que possui magnitude, direção e sentido;

- aprender que na multiplicação de um vetor por um escalar, se o escalar for positivo o sentido do vetor resultante continua o mesmo. Já se o escalar for negativo o sentido do vetor resultante é o oposto ao do vetor original;
- aprender que as regras do paralelogramo e do triângulo são válidas para a adição e subtração de vetores;
- aprender que um vetor de força é uma quantidade vetorial que especifica a sua magnitude, direção e sentido. Assim como vetores, a soma pode ser feita através da regra do paralelogramo e ou do triângulo;
- aprender que um vetor de posição r pode ser definido como um vetor fixo que define um ponto no espaço com relação a outro.

PDF ◀ **Clique para baixar o conteúdo deste tema.**

Bibliografia

AMARAL, O. **Estática**. Porto Alegre: Instituto Estadual do Livro, 2006. p. 134 (Coleção 2000) ISBN 8570632983.

BEER, F. P. et al. **Estática e mecânica dos materiais.** Porto Alegre: AMGH, 2013. ISBN 9788580551655.

______. **Mecânica vetorial para engenheiros:** estática. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. ISBN 9788580550481.

FISICATOTAL. **Físitca Total** – Aula 07 – vetor – Vetores e operações vetoriais. 2013. 37 min. Son., color. Disponível em: . Acesso em: 13/09/2019.

HIBBELER, R. C. **Estática**: mecânica para engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. 512 p. ISBN 978-85-7605-815-1.

LEET, K. M.; UANG, C.; GILBERT, A. **Fundamentos da análise estrutural**. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009. xxii, 790 p. ISBN 978-85-7726-059-1.

LEITE, A. E.; CASTANHEIRA, N. P. **Geometria Plana e Trigonometria.** Curitiba: Intersaberes, 2014.

MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. **Mecânica para engenharia**, v.1: estática. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. ISBN 978-85-216-3040-1.

ONOUYE, B.; KANE, K. **Estática e resistência dos materiais para arquitetura e construção de edificações**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. xv, p. 543 ISBN 978-85-216-2763-0.

SINGER, F. L. **Mecânica para engenheiros**: estática. São Paulo: Harbra & Row do Brasil, 1977. p. 351.

SORIANO, H. L. **Estática das estruturas**. 3.ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014. xv, 422 p. ISBN 978-85-399-0458-7.