LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA E FÍSICA

VETORES

Autor: Me. Talita Druziani Marchiori

Revisor: Rosalvo Miranda

INICIAR

introdução

Introdução

Algumas grandezas são determinadas apenas por um número, por exemplo 5 kg. Denominamos essas grandezas de escalares. Assim, as grandezas de: comprimento, área, massa, volume, temperatura, energia etc. são grandezas escalares. Outras grandezas precisam de uma direção e de um sentido para serem determinadas, como o deslocamento. Estas são chamadas de grandezas vetoriais. Outros exemplos de grandezas vetoriais são a velocidade, a aceleração, a força, o campo elétrico etc.

Nesta unidade trabalharemos noções básicas sobre os vetores e suas operações. Com isso, estaremos aptos para trabalhar com conceitos geométricos e físicos que envolvem esses elementos.

Bons estudos!

Notação Geométrica

Começamos nossos estudos com as noções geométricas dos vetores. Considere um segmento orientado (A, B), ou seja, um par de pontos no espaço em que A é a origem do segmento e B a extremidade, como na figura a seguir:

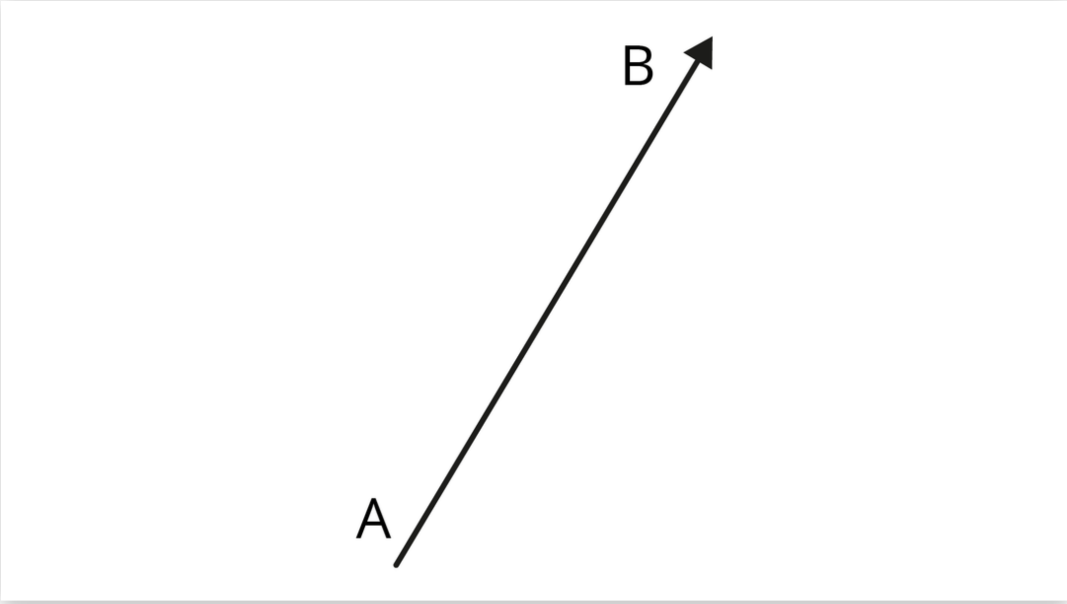


Figura 4.1 - Segmento orientado (A, B)
Fonte: Elaborada pela autora.

O módulo ou norma de um segmento orientado é sua medida e é representado por $|AB|$. Note que os segmentos orientados (A, B) e (B, A) possuem o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos opostos. Dois segmentos orientados são equivalentes se possuem a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo. Chamamos de vetor determinado por um segmento orientado (A, B) a classe de equivalência de todos os segmentos orientados equivalentes a (A, B) e representamos por $\overline{AB}$. Logo, qualquer segmento orientado (X, Y) equivalente a (A, B) é um representante do vetor $\overline{AB}$.

↳ módulo de AB

Observações:

- Também podemos representar um vetor por letras minúsculas encimadas por uma seta, por exemplo $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$. Para simplificar a notação, quando não houver ambiguidade, denotaremos os vetores apenas por letras minúsculas v, a, b.

  $\vec{v}$ $\vec{a}$
- Vamos representar o vetor nulo por $\overline{0}$. Ele é determinado pelo segmento nulo.
- Dado um vetor $v = \overline{AB}$, o vetor $\overline{BA}$ é o oposto de $\overline{AB}$ e é representado por $-v = -\overline{AB}$. ↳ melhor forma de representar
- Um vetor que possui norma igual a 1 é chamado de unitário.
- Dois vetores u e v são paralelos se seus representantes são paralelos. Como o vetor nulo não possui direção, é paralelo a qualquer vetor. No próximo tópico veremos a representação algébrica dessa condição.

Como os vetores são elementos matemáticos, é natural nos perguntarmos se podemos realizar operações com eles. A resposta é: sim!

Considere o representante (A, B) do vetor u e o representante (B, C) do vetor v. Como a extremidade do vetor u coincide com a origem do vetor v, a soma entre os vetores u e v é determinada pelo segmento orientado (A, C). Logo, o vetor soma tem a origem igual do primeiro vetor e extremidade igual ao segundo vetor. Geometricamente, o vetor $u + v$ fecha o triângulo, como podemos observar na imagem a seguir.

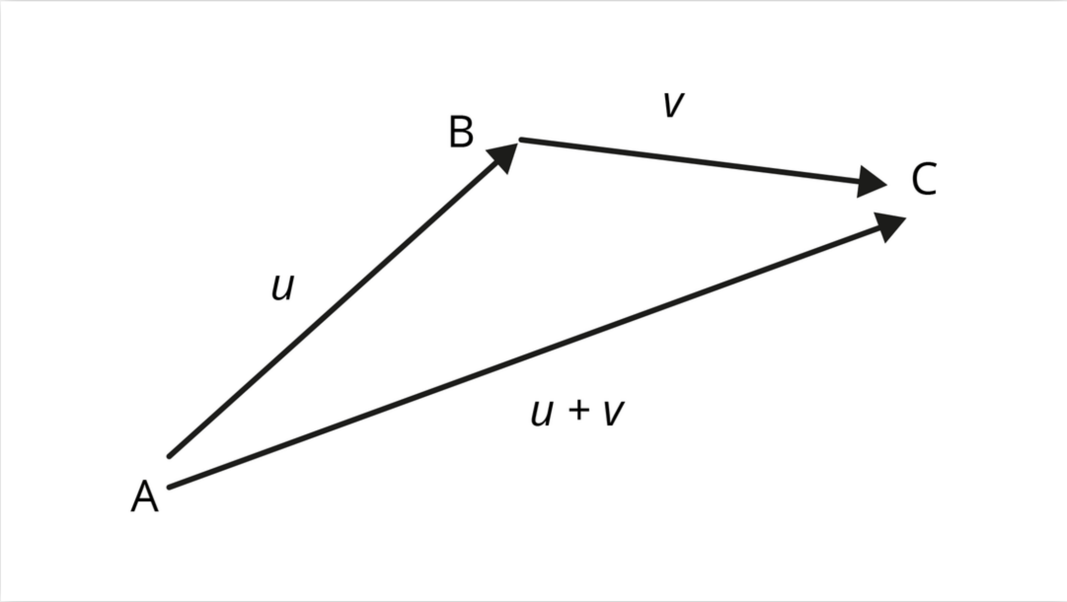


Figura 4.2 - Soma entre vetores
Fonte: Elaborada pela autora.

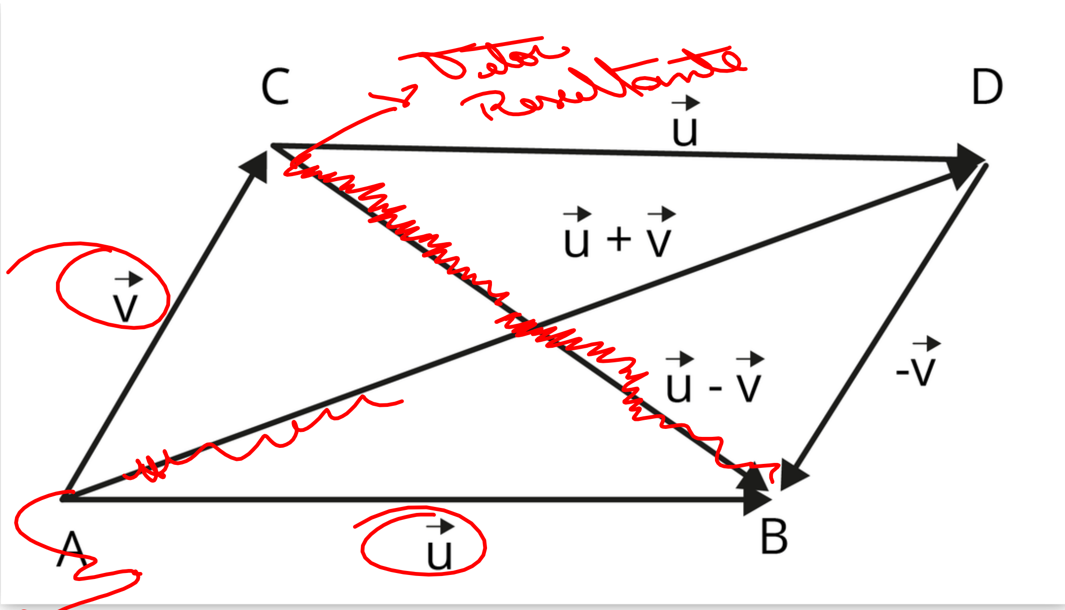
Reflita

Para os números reais, a soma é uma operação comutativa. Isso é, dados dois números reais quaisquer a e b, temos que:

$$a + b = b + a.$$

Também, sabemos que essa operação possui o elemento neutro e que todo número real possui um simétrico. O elemento neutro é o número 0, pois qualquer número adicionado ao 0 continua sendo o próprio número. E o simétrico de qualquer número é seu oposto, pois $a + (-a) = 0$, para qualquer número real a. Considerando a soma entre vetores, ela é comutativa? Qual é o elemento neutro dessa operação? Dado um vetor, qual vetor será seu simétrico?

A subtração entre u e v representados respectivamente por (A, B) e (A, C) é dada pela soma do vetor u com o oposto do vetor v. Se construirmos o paralelogramo $ABCD$, como na Figura 4.3, vemos que o vetor $u - v = u + (-v) = \overline{CB}$. Nesse caso, como ambos os vetores possuem a mesma origem, $u + v = \overline{AD}$.



Resultante de $\vec{u} + \vec{v}$

Figura 4.3 - Subtração entre vetores
Fonte: Elaborada pela autora.

Agora vamos considerar um vetor $v \neq 0$ e um número real k não nulo. A multiplicação de um vetor por um número real é um novo vetor $u = k.\ v$, onde:

i) $|u| = [k].\ |v|$, onde $[k]$ representa o valor absoluto de k;

ii) u possui a mesma direção de v;

iii) u possui o mesmo sentido de v se $k > 0$ e u possui o sentido oposto de v se $k < 0$.

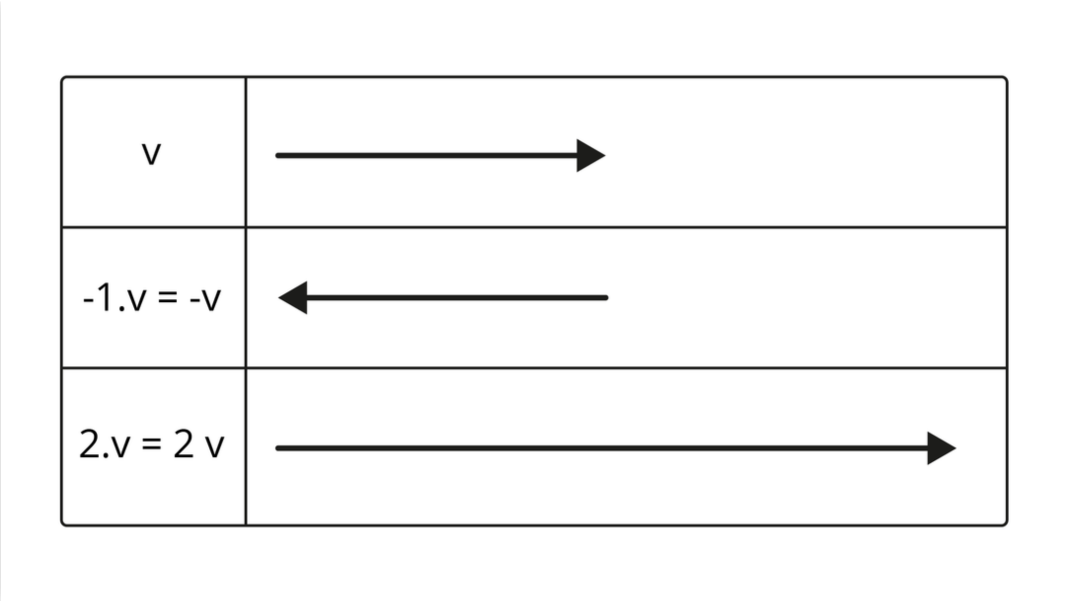


Figura 4.4 - Multiplicação de vetor por escalar
Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 4.4 apresenta um exemplo da multiplicação de vetor por escalar.

Vamos Praticar

Como acabamos de aprender, as características de um vetor AB são as mesmas de qualquer um de seus representantes. Em outras palavras, o módulo, a direção e o sentido de um vetor coincidem com o módulo, a direção e o sentido de qualquer representante. Logo, quando precisamos operar vetores, podemos utilizar outro vetor quando conveniente. Observe o cubo a seguir e assinale a alternativa correta.

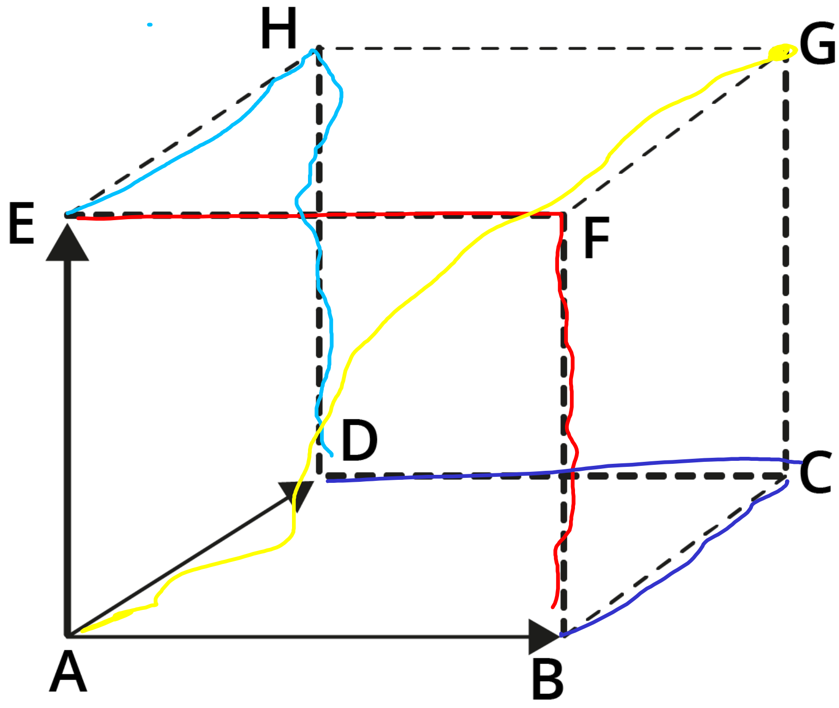


Figura 4.5 - Cubo
Fonte: Elaborada pela autora.

- ○ **a)** $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{DB}$
- ○ **b)** $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{CB}$
- ○ **c)** $\overline{AD} - \overline{AB} = \overline{AB}$
- ○ **d)** $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} = \overline{AG}$.
- ○ **e)** $\overline{AD} + \overline{AE} + \overline{AB} = \overline{AH}$

Notação Algébrica

Neste tópico trataremos dos vetores na forma algébrica. Com isso, estaremos representando algebricamente fatos geométricos. Isso auxilia a aplicação do conceito de vetores em diversas áreas. Os conceitos apresentados para vetores no plano são estendidos para vetores no espaço.

A base ortonormal formada pelos vetores $i = (1, 0)$ e $j = (0, 1)$ determina o plano cartesiano. Então, dado qualquer vetor v no plano existe uma única dupla de números reais x e y satisfazendo: $v = x\,i + y\,j$.

Nesse caso, também podemos representar o vetor v por: $v = (x, y)$ e chamamos os números x e y de coordenadas do vetor v.

Como as coordenadas são determinadas de maneira única, dois vetores u e v são iguais, se e somente se, suas coordenadas são iguais. Então, se $u = (x + 1,\ 2y - 3)$ e $v = (-3,\ 11)$ são iguais, para determinar os valores de x e y, devemos igualar as coordenadas, ou seja,

$x + 1 = -3$ e $2y - 3 = 11$

$x = -4$ $y = 7$

Disso , obtemos:

$$x = -4 \text{ e } y = 7.$$

O vetor nulo possui coordenadas iguais a $\vec{O} = (0, 0)$. zero e zero

Dados dois vetores $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ e k um número real, temos que:

- o oposto do vetor u é dado por:

$$-u = (-a, -b)$$

- a soma dos vetores u e v é dada por:

$$u + v = (a + c,\ b + d);$$

Uma nova coordenada surgirá

- a subtração dos vetores u e v é dada por:

nova coordenada

$$u - v = (a - c,\ b - d);$$

- a multiplicação do vetor u e do número real k é dada por:

$$k\,u = (ka,\ kb);$$

- a norma do vetor u é dada por:

$$|u| = \sqrt{a^2 + b^2};$$

Módulo do vetor

- os vetores u e v serão paralelos se existe $c \in \Re$ tal que:

$\vec{u} = a + b$ Paralelos se
$\vec{v} = c + d$ $\vec{u} = \vec{v} \cdot c$

$$u = c.\ v$$

Dados os vetores $u = (-3, 2)$ e $v = (4, -1)$, vejamos alguns exemplos:

a) $u + v = (-3, 2) + (4, -1) = (-3 + 4,\ 2 + (-1)) = (1, 1)$

b) $u - v = (-3, 2) - (4, -1) = (-3 - 4,\ 2 - (-1)) = (-7, 3);$

c) $2u - 3v = 2(-3, 2) - 3(4, -1) = (2.(-3),\ 2.2) - (3.4,\ 3.(-1)) = (-6, 4) - (12, -3)$
$= (-6 - 12,\ 4 - (-3)) = (-18,\ 7);$

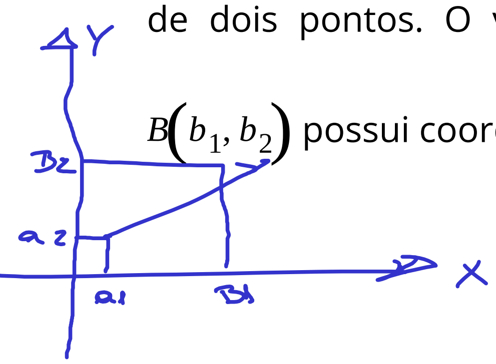
d) $|-2v| = [-2]|v| = 2\sqrt{4^2 + (-1)^2} = 2\sqrt{16+1} = 2\sqrt{17}$;

e) O vetor $w = (-9,\ 6)$ é paralelo ao vetor u, pois

$$w = (-9, 6) = 3(-3, 2) = 3.u,$$

Ou seja, existe um número real $c = 3$ tal que $w = c.\,u$.

Também podemos definir as coordenadas de um vetor através da diferença de dois pontos. O vetor $\underline{AB}$ com origem em $A\left(a_1, a_2\right)$ e extremidade em $B\left(b_1, b_2\right)$ possui coordenadas dadas por $x = b_1 - a_1$ e $y = b_2 - a_2$, isto é,



$$\underline{AB} = B - A = \left(b_1 - a_1, b_2 - a_2\right).$$

Por exemplo, sendo $A(-1, 3)$, $B = (5, 2)$ temos que o vetor $\underline{AB} = (6,\ -1)$, uma vez que:

$$\underline{AB} = (5 - (-1), 2 - 3) = (6,\ -1).$$

As coordenadas do A e B serão:

$AB = (x_2 - x_1), (y_2 - y_1)$

$AB = (5 - (-1)), (2 - 3)$

$AB = (6, -1)$

praticar

Vamos Praticar

Como já mencionamos neste tópico, os conceitos trabalhados no plano podem ser estendidos para o espaço. Logo, se temos dois pontos $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$ e $B\left(x_2, y_2, z_2\right)$ temos que o vetor $\underline{AB}$ é dado por $\underline{AB} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right)$ e seu módulo é determinado através de $\left| AB \right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$. Então, sendo $A(1, 0, 2)$ e $B(3, 2, 1)$, assinale a alternativa correta.

$AB = (3-1), (2-0), (1-2)$
$AB = (2, 2, -1)$

○ **a)** $BA = (2, 2, -1)$

○ **b)** $v = (0, -2, 1)$ é paralelo ao vetor AB.

módulo $= |AB| =$
$|AB| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (1)^2}$
$|AB| = 3$

○ **c)** $\left| AB \right| = 3$.

○ **d)** $\left| AB \right| = \sqrt{7}$.

○ **e)** $3AB = (-6, -6, 3)$

Multiplicação Entre Vetores

Neste tópico, vamos tratar da multiplicação entre dois vetores. A primeira multiplicação que apresentaremos é o produto escalar de dois vetores. Como o nome indica, o resultado dessa operação é um escalar, um número. Depois, trabalharemos com o produto vetorial de dois vetores e, como veremos, o resultado do produto vetorial é um novo vetor. Por fim, estudaremos o produto misto entre vetores, que combina o produto escalar e o produto vetorial. No que segue, trabalharemos com vetores no espaço. Sejam $u = x_1 i + y_1 j + z_1 k = \left(x_1, y_1, z_1\right)$ e $v = x_2 i + y_2 j + z_2 k = \left(x_2, y_2, z_2\right)$, dois vetores.

O produto escalar entre u e v é representado por $\langle u, v\rangle$ e é determinado por:

$$\langle u, v\rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Por exemplo, se considerarmos os vetores $u = (2,\ 3,\ 1)$ e $v = (3,\ -1,\ -1)$$ temos que o produto escalar entre u e v é dado por:

$$\langle u, v\rangle = 2.3 + 3.(-1) + 1.(-1) = 6 - 3 - 1 = 2.$$

saiba mais

Saiba mais

Podemos definir geometricamente o produto escalar entre dois vetores u e v como:

$$\langle u, v \rangle = |u||v| \cos \theta,$$

cosseno do ângulo

Onde θ representa o ângulo entre os vetores u e v. Essa definição geométrica do produto escalar nos auxilia a analisar como o ângulo entre os dois vetores se comporta. Por exemplo, se $\langle u, v \rangle = 0$ concluímos que $\theta = 90^o$, ou seja, os vetores u e v formam um ângulo de 90º. Nesse caso, dizemos que os vetores u e v são ortogonais.

ACESSAR

O produto vetorial entre os vetores u e v é um vetor representado por $u \times v$ com coordenadas x, $(-y)$ e z, ou seja, $u \times v = x\, i + (-y)\, j + z\, k = (x, -y, z)$, onde coordenadas são determinadas por:

$$x = \det\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\right) ; \; y = \det\left(\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\right) ; \; z = \det\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

Utilizando o cálculo de determinantes, concluímos que o produto vetorial entre dois vetores $u = x_1 i + y_1 j + z_1 k = \left(x_1, y_1, z_1\right)$ e $v = x_2 i + y_2 j + z_3 k = \left(x_2, y_2, z_2\right)$ pode ser determinado por:

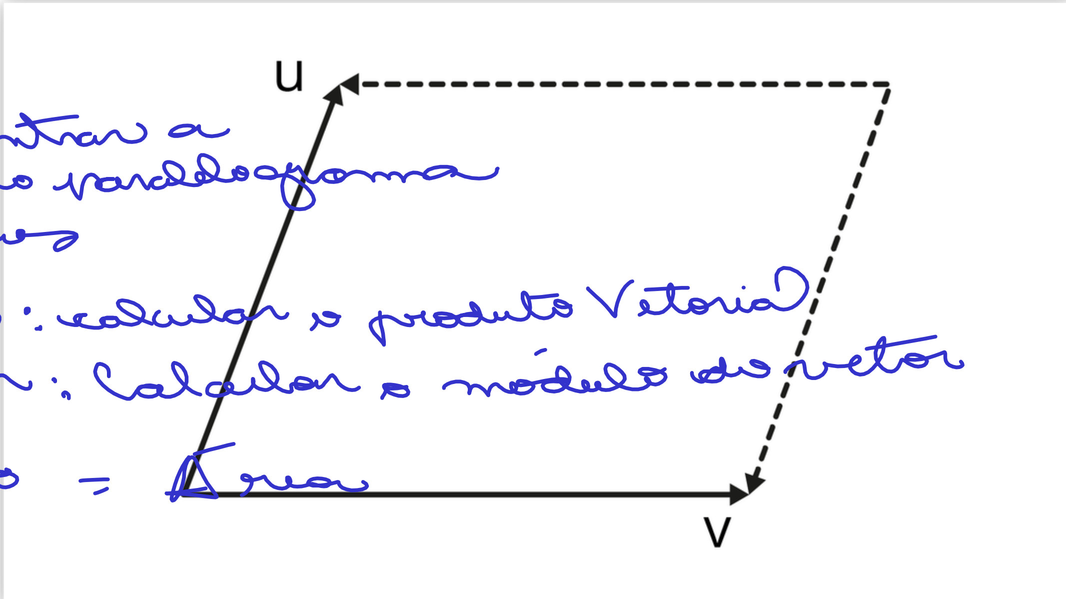
$$u \times v = \left(y_1 z_2 - y_2 z_1\right) i - \left(x_1 z_2 - x_2 z_1\right) j + \left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right) k$$

$$= \left(y_1 z_2 - y_2 z_1, \ - \left(x_1 z_2 - x_2 z_1\right), \ x_1 y_2 - x_2 y_1\right).$$

Então, sendo $u = (2, \ 3, \ 1)$ e $v = (-1, \ 0, \ 3)$ temos que:

$u \times v = (3.3 - 0.1, \ - \ (2.3 - (-1).1), \ 2.0 - (-1).3\ ) = (9 - 0, \ -(6+1), \ 0+3) = (9, \ -7, 3).$

Geometricamente, o módulo do produto vetorial representa a área do paralelogramo determinado por u e v. Esta é uma das aplicações dos vetores.



Para Encontrar a área do paralelogramo precisamos
1º passo: calcular o produto Vetorial
2º passo: Calcular o módulo do vetor
módulo = Área

Figura 4.6 - Paralelogramo formado pelos vetores u e v
Fonte: Elaborada pela autora.

Exemplificando, se desejarmos calcular a área do paralelogramo formado pelos vetores $u = (3, 1, 2)$ e $v = (4, \ -1, 0)$, devemos iniciar pelo cálculo do produto vetorial desses vetores: $u \times v = (0 - (-2), \ -(\ 0 - 8), \ -3 - 4) = (2, 8, \ -7)$. Feito isso, precisamos determinar o módulo do vetor encontrado: $|u \times v| = \sqrt{2^2 + 8^2 + (-7)^2} = \sqrt{117}$.

Então, a área do paralelogramo formado pelos vetores u e v é igual a $\sqrt{117}\ u.a.$

Para finalizarmos este tópico, vamos falar sobre o produto misto. Além dos vetores $u = x_1 i + y_1 j + z_1 k = \left(x_1, y_1, z_1\right)$ e $v = x_2 i + y_2 j + z_2 k = \left(x_2, y_2, z_2\right)$ utilizados até aqui, vamos considerar o vetor $w = x_3 i + y_3 j + z_3 k = \left(x_3, y_3, z_3\right)$. O produto misto entre os vetores u,v e w é igual ao produto escalar de u pelo vetor resultante do produto vetorial entre os vetores v e w, ou seja,

$$\langle u,\ v \times w \rangle$$

Logo, o resultado do produto misto é um número. Utilizando as fórmulas apresentadas para o cálculo do produto escalar e o produto vetorial, concluímos que:

$$\langle u,\ v \times w \rangle = \det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}\right) \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} = x_1\left(y_2z_3 - y_3z_2\right) - y_1\left(x_2z_3 - x_3z_2\right) + z_1\left(x_2y_3 - x_3y_2\right).$$

Então, sendo $u = 2i + 3j + 5k$, $v = -i + 3j + 3k$ e $w = 4i - 3j + 2k$ temos que o produto misto dos vetores u,v e w é dado por:

$$\langle u,\ v \times w \rangle = 2(3.2 - (-3).3) - 3(-1.2 - 4.3) + 5(-1.(-3) - 4.3)$$

$$= 2(6 + 9) - 3(-2 - 12) + 5(3 - 12) = 2.15 - 3.(-14) + 5.(-9) = 27$$

Seja A, B, C e D pontos que não estão num mesmo plano e considere o tetraedro formado por eles.

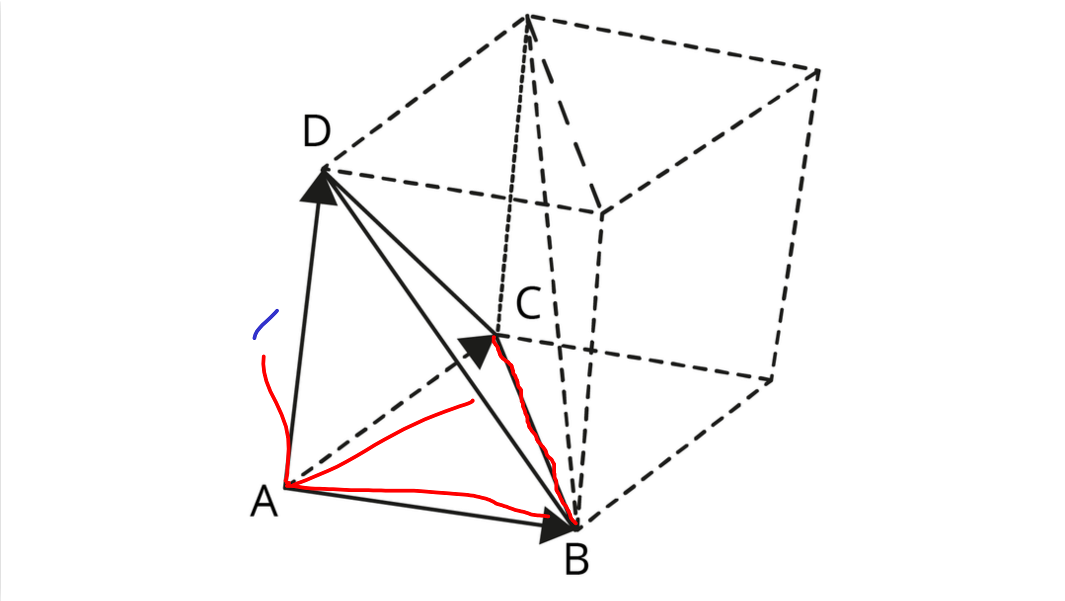


Figura 4.7 - Tetraedro formado pelos pontos A, B, C e D e paralelepípedo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$

Fonte: Elaborada pela autora.

O valor absoluto do produto misto entre os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ é igual ao volume do paralelepípedo formado por eles. Essa é a interpretação geométrica para o produto misto e outra aplicação dos vetores.

praticar

Vamos Praticar

O cálculo do produto misto entre vetores auxilia a determinar o volume do paralelepípedo, que é um sólido geométrico. Porém, como o volume do tetraedro formado pelos pontos A, B, C e D é igual a um sexto do volume formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$, também podemos utilizar o produto misto para determinar o volume do tetraedro. Sabendo que $\overline{AB} = (2, -1, 1)$, $\overline{AC} = (1, 0, -1)$ e $\overline{AD} = (2, -1, 4)$,

Vetoriais

qual é o volume do tetraedro formado pelos pontos A, B, C e D? Assinale a alternativa correta.

Para encontrar volume
$(|\vec{u}|, |\vec{v}|) \cdot \{\vec{w}\}| =$ Volume

Determinante dos Vetores = Volume

- a) 9 unidades de volume.
- b) 5 unidades de volume.
- c) 3 unidades de volume.
- d) 1 unidade de volume.
- e) 0,5 unidades de volume.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$

$$= \underbrace{(0 + 2 - 1)} - (0 + 2(-4))$$

$$1 - (-2$$

$$3/6 = 0,5$$

módulo desses vetores foi 3

Vetores na Física

Como já pudemos perceber, os vetores estão presentes na Física quando precisamos representar grandezas que possuem módulo, direção e sentido como por exemplo o deslocamento, a velocidade, a aceleração, a força, dentre outras.

Na Física, podemos utilizar o produto escalar para determinar o trabalho realizado por uma força no decorrer de um deslocamento.

O produto vetorial também possui aplicações na Física, como obter o torque. O torque é um vetor e significa a possibilidade de um corpo alterar seu movimento de rotação ou de sofrer uma torção. Um exemplo cotidiano de torque é quando abrimos uma porta ou quando usamos uma chave de fenda.

Esse vetor pode ser determinado pelo produto vetorial entre os vetores força e distância, ou seja,

→ Torque

$$\tau = r \, x \, F$$

→ força
→ distância

Onde τ representa o torque, $|r|$ a distância do ponto de aplicação da força ao eixo e F denota a força.

Se o produto vetorial dos vetores força e distância for nulo, dizemos que o corpo se encontra em equilíbrio rotacional. Pelo Sistema Internacional de medidas, a unidade do torque é o Newton vezes metro, representada por $N.m$.

Por exemplo, considere uma com origem em A e extremidade em B, onde o vetor $AB = 2j$, com unidade de medida em metros e uma força $F = 10\,i$, com unidade de medida em Newtons. Sendo Oz o eixo de rotação, qual o valor do torque sobre a barra?

Pelo que mencionamos anteriormente,

$$\tau = r\,x\,F = (0, 2, 0) \times (10, 0, 0) = (2.0 - 0.0,\ -(0.0 - 10.0), 0.0 - 10.2) = (0, 0,\ -20)\ N.m$$

ou, equivalentemente

$$\tau = \ -20\,k\,N.m.$$

Vamos Praticar

Em um experimento, o pesquisador considera uma força, em newtons, dada por $F = 5i + 10j$ e, aplica essa força em uma posição dada em metros definida por $r = 0,2i + 0,1\,j$. Ao fazer isso, o pesquisador provoca uma rotação ao redor do eixo Oz. Assinale a alternativa que indica o valor do torque produzido.

a) $\tau = \ -1,5\,k\,N.m$

b) $\tau = -0,5\,k\,N.m$

c) $\tau = \ 1,5\,k\,N.m$

5i 10j
0,2i 0,1j

5i 10
0,2 0,1

(0,5+2) − (2+0,5+2) −
(0,5 + 2+0,5) − (2+0,5+2)

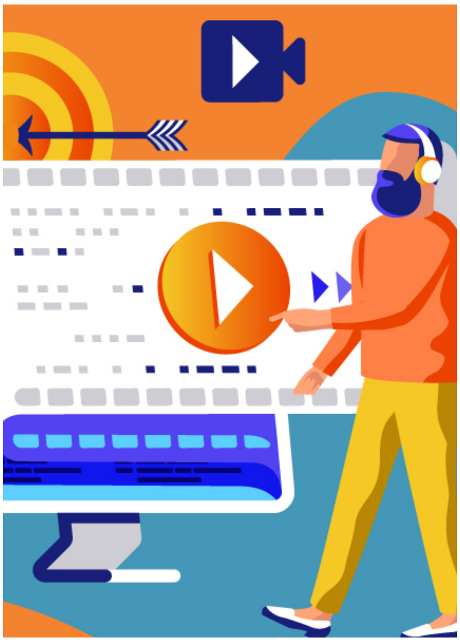
3 −4 5

−1,5 Nm

- d) $\tau = \ 2,5\ k\,N.\,m$
- e) $\tau = \ 5\ k\,N.\,m$

indicações

Material Complementar



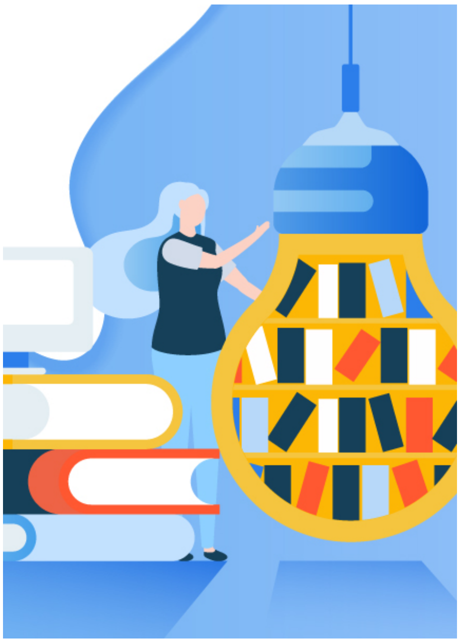
FILME

A teoria de tudo

Ano: 2015

Comentário: Esse filme é baseado na história do astrofísico Stephen Hawking e mostra sua carreira científica, além de sua vida pessoal. Stephen é considerado um dos físicos de mente mais brilhante do mundo e nem mesmo uma doença degenerativa como a esclerose o fez parar de produzir ciência.

TRAILER



LIVRO

Geometria analítica: um tratamento vetorial

Editora: Pearson

Autores: Paulo Boulos e Ivan de Carvalho

ISBN: 9788587918918

Comentário: Esse livro aborda a teoria de vetores de forma detalhada contando com diversos exemplos resolvidos e exercícios propostos.

Conclusão

Nesta unidade estudamos os vetores, ferramenta presente em muitos conteúdos da Matemática e da Física. Como tais disciplinas são bases de diversos conceitos em outras áreas, tais como a Engenharia, o uso dos vetores se expande para outras áreas.

Inicialmente, o conceito de vetor pode ser abstrato e de difícil compreensão. Porém, quando conseguirmos perceber que vários eventos em nossa volta, como o deslocamento, são descritos através das grandezas vetoriais, começaremos a nos familiarizar com esses elementos.

Esperamos que você tenha aproveitado esta unidade ao máximo. Caso algum conceito não tenha ficado claro, revise-o. Para que conteúdos futuros sejam compreendidos sem dificuldade, lembre-se: sua dedicação faz a diferença, até breve!

Referências Bibliográficas

BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria analítica** : um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2005.

DIAS, C. C.; DANTAS, N. M. **Geometria analítica e números complexos** . Natal: EDUFRN, 2006. Disponível em: http://professor.luzerna.ifc.edu.br/daniel-ecco/wp-content/uploads/sites/42/2017/08/Aula-11-Geo.pdf . Acesso em: fev. 2020.

HELERBROCK, R. Torque. **Brasil Escola** . [s.d.]. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/torque-uma-forca.htm . Acesso em: 9 fev. 2020.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria analítica** . São Paulo: Makron Books, 2000.