CÁLCULO NUMÉRICO COMPUTACIONAL

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INTERPOLAÇÃO DE FUNÇÕES

Autor: Me. Ronald Ramos Alves

Revisor: Raimundo Almeida

INICIAR

Processing math: 100%

introdução

Introdução

Em diversas situações da engenharia e da ciência, não dispomos de equações/funções que descrevam integralmente todos os dados observados, mas temos acesso a um conjunto de medidas discretas ou equações/funções muito complexas para trabalhar. Se necessitarmos de medidas intermediárias, dentro do conjunto inicial de dados, por exemplo como fazemos para determinar tais valores?

Nesses casos, quando possuímos equações/funções muito complexas para trabalhar ou queremos determinar valores dentro de um intervalo específico dos dados iniciais, podemos recorrer aos métodos numéricos de interpolação. Nesta unidade, veremos as interpolações linear, quadrática e de Lagrange. Nos três casos, aprenderemos como determinar o polinômio interpolador e calcular as aproximações e o erro de truncamento associado aos métodos.

Interpolação

Muitas funções são conhecidas apenas em um conjunto finito e discreto de pontos de um intervalo $[a, b]$, como a função $y = f(x)$, dada na tabela a seguir:

i	x_i	y_i
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
3	x_3	y_3

Tabela 3.1 - Situação genérica de uma função conhecida apenas em alguns pontos do seu domínio
Fonte: Barroso (1987, p. 151).

Nessa situação, caso seja necessário realizar operações com os valores dessa Processing math: 100% or de sua forma analítica, podemos utilizar as técnicas de interpolação numérica e trocá-la por outra função, a qual é uma aproximação da função original, determinada a partir dos valores tabelados.

Outra possibilidade de utilização da interpolação numérica é quando dispomos da lei de formação da função, entretanto ela envolve operações mais difíceis (ou até impossíveis) como diferenciações e integrações. Nesses casos, buscamos uma função que possa aproximar a função dada e que tenha uma forma analítica mais simples de trabalhar.

Considerando uma função $y = f(x)$, conhecida apenas em alguns pontos tabelados, como na tabela anterior, queremos determinar uma forma analítica para a função $y = f(x)$, em que se $x \in \left(x_0, x_3\right)$, $x \neq x_i$, i=0,1,2,3, possamos calcular $f(x)$.

Diversas classes de funções podem ser utilizadas para atacar esse problema, entre as quais podemos citar as exponenciais, as logarítmicas, as trigonométricas e as **polinomiais** , entre outras. Em nossos estudos, utilizaremos apenas as funções polinomiais. E, consequentemente, determinaremos um **polinômio interpolador** , que é uma aproximação da função dada inicialmente.

Exemplo: na tabela a seguir, está assinalado o número de habitantes na cidade de Salvador nos censos dos anos de 1980, 1991, 2000 e 2010.

ANO	1980	1991	2000	2010
Nº DE HABITANTES	1 531 242	2 072 058	2 440 828	2 675 656

Tabela 3.2 -Exemplo de interpolação de valores para cálculo do número aproximado de habitantes em 2005
Fonte: Brasil (2010, *on-line*)

Como podemos determinar o número aproximado de habitantes em Salvador no ano de 2005?

Para responder a essa pergunta, desenvolveremos três métodos de interpolação e discutiremos os resultados encontrados. Estudaremos os seguintes métodos: interpolação linear, interpolação quadrática e interpolação de Lagrange.

Processing math: 100%

Interpolação Linear

Suponha que conhecemos dois pontos distintos de uma função $y = f(x): (x_0, y_0)$ e (x_1, y_1) e desejamos calcular o valor de y para um determinado valor de x pertencente ao intervalo $\left[x_0, x_1\right]$, a partir da utilização da interpolação polinomial. Como podemos proceder?

É possível mostrar que o grau do polinômio interpolador é uma unidade menor que o número de pontos conhecidos, e, portanto, nessa situação, o polinômio interpolador tem grau igual a 1, isto é,

$$P_1(x) = a_1x + a_0$$

Como estamos trabalhando com uma aproximação, certamente teremos um erro de truncamento associado ao método da interpolação linear. Seja $f(x)$ a função dada representada pela curva, e $P_1(x)$ o polinômio interpolador, representado pela reta, conforme podemos visualizar na Figura 3.1.

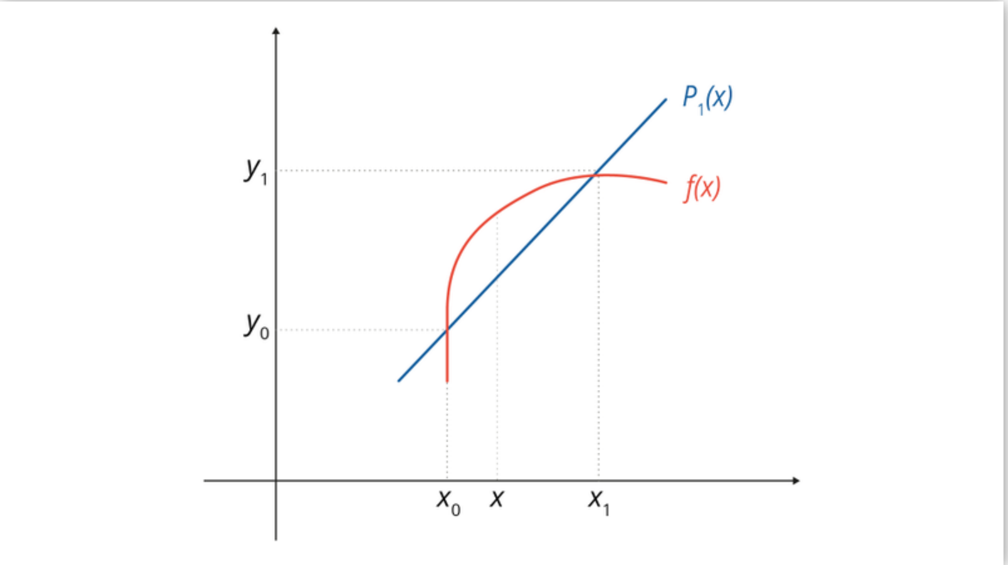


Figura 3.1 - Representação de uma função genérica e sua respectiva aproximação linear
Fonte: Barroso (1987, p. 156).

Por definição, o erro de truncamento cometido no ponto x é dado pela fórmula:

$$E_T(x) = f(x) - P_1(x)$$

Processing math: 100%

Por outro lado, pode-se mostrar que ele pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$E_T(x) = \left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right) \cdot \frac{f''(\epsilon)}{2}$$

Em que $\epsilon \in \left(x_0, x_1\right)$.

Ao longo do texto, mostraremos que essa expressão pode ser generalizada para um caso qualquer com n+1 pontos distintos. No caso linear, temos dois pontos distintos e grau do polinômio interpolador igual a 1.

Exemplo 1: na tabela a seguir, está assinalado o número de habitantes na cidade de Salvador nos censos dos anos de 1980, 1991, 2000 e 2010. A partir da **interpolação linear** , calcule uma aproximação para a quantidade de habitantes em 2005 na cidade de Salvador. Utilize os valores da tabela referentes aos anos de 2000 e 2010.

ANO	1980	1991	2000	2010
Nº DE HABITANTES	1 531 242	2 072 058	2 440 828	2 675 656

Tabela 3.3 - Exemplo de interpolação de valores para cálculo do número aproximado de habitantes em 2005, usando interpolação linear
Fonte: Brasil (2010, on-line)

De acordo com o enunciado do exemplo, devemos utilizar os dados dos anos de 2000 e 2010, nos quais a quantidade de habitantes é igual a 2440828 e 2675656, respectivamente. Assim, analisando a expressão da interpolação linear, $P_1(x) = a_1x + a_0$, colocaremos a quantidade de habitantes como a variável dependente $P_1(x)$ e o ano como variável independente x. Consequentemente, o nosso problema consiste em determinar o valor das constantes reais a_1 e a_0. Para isso, substituiremos os valores na expressão dada:

$$2440828 = a_1 \cdot 2000 + a_0$$

Processing math: 100%

$$2675656 = a_1 \cdot 2010 + a_0$$

Essas equações formam um sistema de equações lineares com duas equações e duas incógnitas, o qual pode ser resolvido por vários métodos. Resolveremos pelo método da adição:

$$-2440828 = -a_1 \cdot 2000 - a_0$$

e

$$2675656 = a_1 \cdot 2010 + a_0$$

Multiplicamos a primeira equação por (-1). Agora, somamos as equações membro a membro e encontramos:

$$234828 = 10 \cdot a_1$$

E, portanto,

$$a_1 = 23482,8$$

Para determinarmos o valor de a_0, podemos utilizar qualquer uma das equações do sistema. Usando a primeira equação, temos que

$$a_0 = 2440828 - a_1 \cdot 2000$$

$$a_0 = 2440828 - 23482,8 \cdot 2000$$

$$a_0 = -44524772$$

Assim, podemos escrever o polinômio interpolador:

$$P_1(x) = 23482,8 \cdot x - 44524772$$

No nosso problema inicial, desejamos calcular uma aproximação para a quantidade de habitantes na cidade de Salvador no ano de 2005, logo de posse do polinômio interpolador. Basta substituirmos x=2005 e determinaremos o valor procurado:

$$P_1(2005) = 23482,8 \cdot 2005 - 44524772$$

Processing math: 100%

$$P_1(2005) = 2558242$$

O valor encontrado representa uma aproximação para a quantidade de habitantes na cidade de Salvador no ano de 2005. Como estamos tratando o fenômeno como de natureza linear, poderíamos simplesmente ter percebido que 2005 é a média entre 2000 e 2010 e, então, faríamos a média entre os respectivos valores da quantidade de habitantes:

$$\frac{2440828 + 2675656}{2} = 2558242$$

A vantagem de obtermos o polinômio interpolador é que agora possuímos uma função que nos permite calcular uma aproximação para a quantidade de habitantes em qualquer instante de tempo entre 2000 e 2010.

No Excel, basta criarmos e selecionarmos a tabela a seguir (Tabela 3.4) e clicamos em **Inserir** . Selecione **Dispersão com Linhas Suaves e Marcadores** . Para exibir a equação, clicamos com o botão direito na linha exibida e escolhemos **Adicionar Linha de Tendência** . Finalmente, nas opções, marcamos as opções **Linear** e **Exibir Equação no gráfico** .

Ano	2000	2010
Habitantes	2440828	2675656

Tabela 3.4 - Exemplo de interpolação de valores para cálculo do número aproximado de habitantes em 2005, usando interpolação linear e o Excel
Fonte: Elaborada pelo autor.

O gráfico a seguir será gerado:

Processing math: 100%

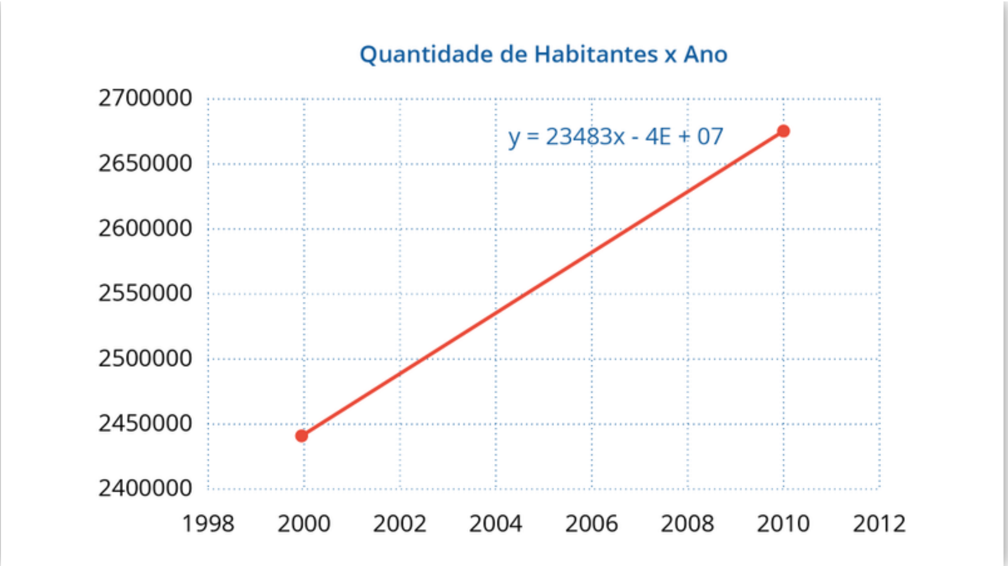


Gráfico 3.1 - Gráfico de $P_1(x)$ construído no Excel

Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 2 : Dada a função $f(x) = 10x^3 - 5x + 2e$ os pontos $(0,5; f(0,5))$ e $(0,6; f(0,6))$, determine:

a) Uma aproximação para o valor de $f(0,55)$.

b) O erro de truncamento cometido no cálculo do item a).

a) Como dispomos de dois pontos distintos, utilizaremos interpolação linear, ou seja, determinaremos o polinômio $P_1(x) = a_1x + a_0$. Os pontos dados são $(0,5; 0,75)$ e $(0,6; 1,16)$. Como vimos ao longo do texto, montamos e resolvemos o seguinte sistema de equações lineares:

$$0,75 = a_1 \cdot 0,5 + a_0$$

e

$$1,16 = a_1 \cdot 0,6 + a_0$$

Esse sistema pode ser resolvido da mesma forma que o exemplo anterior. Assim, encontramos como solução $a_1 = 4,1$ e $a_0 = -1,3$ e, consequentemente,

$$P_1(x) = 4,1x - 1,3$$

Portanto, o valor aproximado para $f(0,55)$ é igual a

Processing math: 100%

$$P_1(0,55) = 4,1 * 0,55 - 1,3$$

$$P_1(0,55) = 0,955$$

b) Nesse caso, vamos utilizar a expressão para o erro de truncamento:

$$E_T(x) = f(x) - P_1(x)$$

$$E_T(0,55) = f(0,55) - P_1(0,55)$$

$$E_T(0,55) = 0,91375 - 0,955 = -0,04125$$

Em algumas situações, é mais simples ou conveniente utilizar a outra expressão para o erro de truncamento:

$$E_T(x) = \left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right) \cdot \frac{f''(\epsilon)}{2}$$

$$E_T(0,55) = (0,55 - 0,5)(0,55 - 0,6) \cdot \frac{f''(\epsilon)}{2}$$

Como não sabemos o valor de ϵ , podemos considerá-lo igual ao valor x, que maximiza a função $\left|f''(x)\right| = |60x|$ no intervalo $[0,5; 0,6]$ e, dessa forma, calculamos a cota máxima para o erro de truncamento:

$$|E_T(0,55)| \leq |(0,55 - 0,5)(0,55 - 0,6) \cdot \frac{60 \cdot 0,6}{2}|$$

$$|E_T(0,55)| \leq 0,045$$

Esse valor encontrado para a cota máxima do erro de truncamento pode ser comprovado pelo erro calculado no item a) $(E_T(0,55) = -0,04125)$, uma vez que $|E_T(0,55)| \leq 0,045$ é equivalente a

$$-0,045 \leq E_T(0,55) \leq 0,045$$

Interpolação Quadrática

Se, de uma função, são conhecidos três pontos distintos, então o polinômio interpolador será de grau 2:

Processing math: 100%

$$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Sabemos que um polinômio da forma como {{P}_{2}}\left(x \right) foi definido é uma função quadrática e seu gráfico é uma parábola. Como não conhecemos os valores das constantes {{a}_{2}}, {{a}_{1}}e {{a}_{0}}, teremos de resolver o sistema a seguir:

$$a_2 {x_0}^2 + a_1 x_0 + a_0 = y_0$$

$$a_2 {x_1}^2 + a_1 x_1 + a_0 = y_1$$

$$a_2 {x_2}^2 + a_1 x_2 + a_0 = y_2$$

Em que os pontos $\left(x_0, y_0\right)$, $\left(x_1, y_1\right)$ e $\left(x_2, y_2\right)$ são conhecidos. Para esse sistema, a matriz dos coeficientes é igual a:

$$V = \begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Pode-se provar que o determinante dessa matriz é dado por $det(V) = \left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)$. Logo, como os pontos são distintos, o sistema terá solução única, pois $det(V) \neq 0$. Isso significa que, dados três pontos distintos, sempre poderemos encontrar o polinômio interpolador de grau 2, que passa pelos três pontos dados. Além da existência, o polinômio é unicamente determinado.

Como no caso da interpolação linear, por definição, o erro de truncamento cometido no ponto x é dado pela fórmula:

$$E_T(x) = f(x) - P_2(x)$$

Por outro lado, pode-se mostrar que o mesmo pode ser calculado por meio da seguinte expressão:

$$E_T(x) = \left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) \cdot \frac{f'''(\epsilon)}{6}$$

Em que $\epsilon \in \left(x_0, x_2\right)$.

No próximo tópico, mostraremos que essa expressão pode ser generalizada para um caso qualquer com n+1 pontos distintos. No caso quadrático, temos três pontos distintos e grau do polinômio interpolador igual a 2.

Exemplo 3 : vamos retomar o problema da aproximação do número de habitantes na cidade de Salvador. Na tabela a seguir, está assinalado o número de habitantes na cidade de Salvador nos censos dos anos de 1980, 1991, 2000 e 2010. A partir da **interpolação quadrática** , calcule uma aproximação para a quantidade de habitantes em 2005 na cidade de Salvador. Utilize os valores da tabela referentes aos anos de 1991, 2000 e 2010.

ANO	1980	1991	2000	2010
Nº DE HABITANTES	1 531 242	2 072 058	2 440 828	2 675 656

Tabela 3.5 - Exemplo de interpolação de valores para cálculo do número aproximado de habitantes em 2005, usando interpolação quadrática
Fonte: Brasil (2010, *on-line*)

De acordo com o enunciado do exemplo, devemos utilizar os dados dos anos de 1991, 2000 e 2010, nos quais a quantidade de habitantes é igual a 2072058, 2440828 e 2675656, respectivamente. Assim, analisando a expressão da interpolação quadrática, $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, colocaremos a quantidade de habitantes como a variável dependente $P_2(x)$ e o ano como variável independente x. Consequentemente, o nosso problema consiste em determinar o valor das constantes reais $a_2, a_1 e a_0$. Para isso, substituiremos os valores na expressão dada:

$$a_2 \cdot 1991^2 + a_1 \cdot 1991 + a_0 = 2072058$$

$$a_2 \cdot 2000^2 + a_1 \cdot 2000 + a_0 = 2440828$$

$$a_2 \cdot 2010^2 + a_1 \cdot 2010 + a_0 = 2675656$$

Processing math: 100% rmam um sistema de equações lineares com três equações e três incógnitas, o qual pode ser resolvido por vários métodos. Resolveremos pelo método de Cramer:

$$V = \begin{bmatrix} 1991^2 & 1991 & 1 \\ 2000^2 & 2000 & 1 \\ 2010^2 & 2010 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, $det(V) = -1710$. Em seguida, precisamos calcular os determinantes das matrizes Va_2, Va_1 e Va_0, as quais são obtidas quando substituímos a coluna 1, 2 e 3 pelos termos independentes, respectivamente, isto é,

$$Va_2 = \begin{bmatrix} 2072058 & 1991 & 1 \\ 2440828 & 2000 & 1 \\ 2675656 & 2010 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Va_1 = \begin{bmatrix} 1991^2 & 2072058 & 1 \\ 2000^2 & 2440828 & 1 \\ 2010^2 & 2675656 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Va_0 = \begin{bmatrix} 1991^2 & 1991 & 2072058 \\ 2000^2 & 2000 & 2440828 \\ 2010^2 & 2010 & 2675656 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$det\left(Va_2\right) = 1574248$$

$$det\left(Va_1\right) = -6352890068$$

$$det\left(Va_0\right) = 6,40461 \cdot 10^{12}$$

Consequentemente,

Processing math: 100%

$$a_2 = \frac{det\left(Va_2\right)}{det(V)} = \frac{1574248}{-1710} = -920,6128655$$

$$a_1 = \frac{det\left(Va_1\right)}{det(V)} = \frac{-6352890068}{-1710} = 3715140,391$$

$$a_0 = \frac{det\left(Va_0\right)}{det(V)} = \frac{6,40461 \cdot 10^{12}}{-1710} = -3745388491$$

Com isso,

$$P_2(x) = -920,6128655x^2 + 3715140,391x - 3745388491$$

E, finalmente,

$$P_2(2005) = -920,6128655 \cdot 2005^2 + 3715140,391 \cdot 2005 - 3745388491 = 2581257,321$$

Como a quantidade de habitantes é um número inteiro, ficamos com **2581257** habitantes aproximadamente na cidade de Salvador no ano de 2005. Perceba que esse resultado é ligeiramente maior do que o valor encontrado com a interpolação linear: **2558242** habitantes.

Os cálculos desse exemplo foram realizados no Excel, embora pudessem também ser feitos com uma calculadora científica (com mais dificuldade). Utilizaram-se as operações elementares da plataforma, como soma, multiplicação e potência. Além disso, para o cálculo dos determinantes, usamos a função

"=MATRIZ.DETERM(X:Y)"

Para usá-la, basta inserir cada elemento da matriz em uma célula, clicar em uma célula vazia, digitar "=MATRIZ.DETERM", selecionar a matriz e "enter". O resultado será o determinante da matriz descrita.

Outra possibilidade de resolução é determinar uma função quadrática a partir do próprio Excel. No programa, basta criarmos e selecionarmos a tabela a seguir (Tabela 1.6) e clicarmos em **Inserir** . Selecione **Dispersão com Linhas Suaves e Marcadores** . Para exibir a equação, clicamos com o botão direito na linha exibida e escolhemos **Adicionar Linha de Tendência** . Finalmente, nas opções, marcamos as opções **Polinomial** , **ordem 2** e **Exibir Equação no gráfico** .

Ano	1991	2000	2010
Habitantes	2072058	2440828	2675656

Tabela 3.6 - Exemplo de interpolação de valores para cálculo do número aproximado de habitantes em 2005, usando interpolação quadrática e o Excel
Fonte: Elaborada pelo autor.

O gráfico que pode ser observado a seguir será gerado:

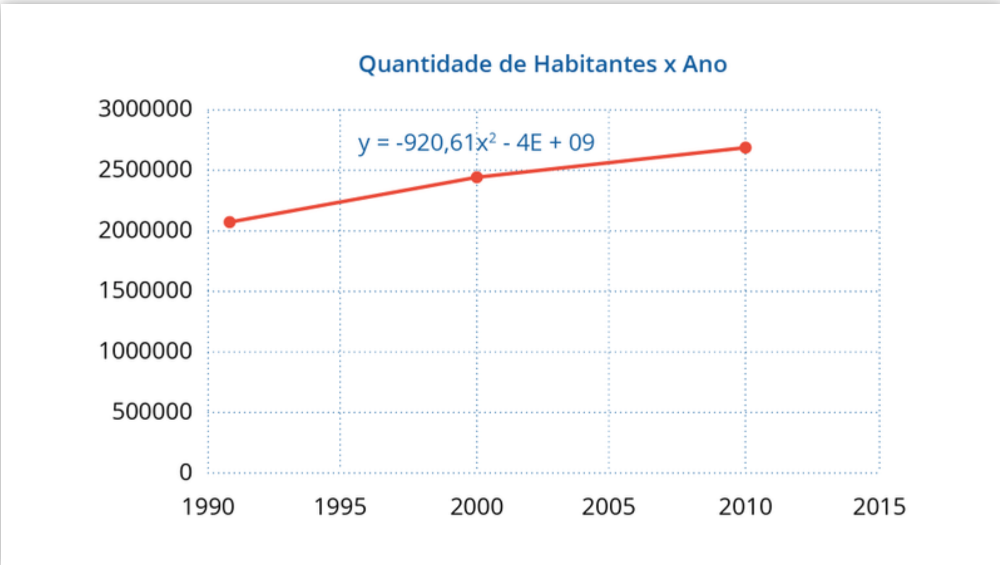


Gráfico 3.2 - Gráfico de $P_2(x)$ construído no Excel
Fonte: Elaborado pelo autor.

Selecionada entre uma das técnicas de interpolação numérica, a interpolação quadrática mostrou-se eficaz da determinação de uma aproximação para a quantidade de habitantes na cidade de Salvador em determinado ano. Ademais, essa técnica pode ser empregada nas mais diversas situações, desde que conheçamos três pontos distintos de uma função qualquer. Finalmente, o estudante pode aplicar diferentes resultados para resolver o sistema com três equações e três incógnitas que surge quando utilizamos a interpolação quadrática.

Reflita

Além da Regra de Cramer, qual outro método de resolução direta podemos utilizar para resolver um sistema de equações lineares? Por que devemos nos preocupar em aprender outros métodos?

Segundo Sperandio et al. (2015), o número de operações que esse método envolve é da ordem de n!. Assim, é inviável o seu uso, a menos que o sistema tenha poucas equações e incógnitas. Por outro lado, o método de eliminação de Gauss envolve uma quantidade polinomial de operações, sendo, portanto, mais indicado quando possuímos um número maior de equações e incógnitas.

Fonte: Sperandio et al. (2015, p. 69-70).

Interpolação de Lagrange

Agora, estudaremos uma técnica mais geral de interpolação numérica, a qual denominamos de interpolação de Lagrange ou fórmula de Lagrange. Essa técnica abrange as interpolações do tipo linear e quadrática; sendo assim, podemos pensá-las como casos particulares da fórmula de Lagrange. Apresentaremos um [illegible]l é possível encontrarmos um polinômio interpolador de grau menor ou igual a n, sendo dados $n + 1$ pontos distintos.

Teorema: Sejam $\left(x_i, y_i\right)$, i=0, 1, 2, ..., n, n+1 pontos distintos, isto é, $x_i \neq x_j$ para i≠j. Existe um único polinômio P(x) de grau não maior que n, tal que $P\left(x_i\right) = y_i$, para todo i.

Esse teorema garante a existência e a unicidade do polinômio interpolador. Além disso, a fórmula de Lagrange mostra a forma de como encontrá-lo:

FÓRMULA DE LAGRANGE

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{j=0\ (j \neq i)}^{n} \frac{\left(x - x_j\right)}{\left(x_i - x_j\right)}$$

Seja $f(x)$ uma função dada e $P_n(x)$ o polinômio interpolador. Como já vimos nos outros casos, o erro de truncamento cometido no ponto x é dado pela fórmula:

$$E_T(x) = f(x) - P_n(x)$$

Em geral, pode-se mostrar que ele pode ser calculado por:

$$E_T(x) = \left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right) \cdot \cdots \cdot \left(x - x_n\right) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\epsilon)}{(n+1)!}$$

Onde $\epsilon \in \left(x_0, x_n\right)$.

A última fórmula pode ser usada para calcular o erro de truncamento de todos os tipos de interpolação desta unidade, tendo em vista que essa é uma fórmula genérica para a interpolação polinomial.

Exemplo 4: vamos retomar o problema da aproximação do número de habitantes na cidade de Salvador. Na tabela a seguir, é apresentado o número de habitantes na cidade de Salvador nos censos dos anos de 1980, 1991, 2000 e 2010. A partir da **interpolação de Lagrange** , calcule uma aproximação para a quantidade de habitantes em 2005 na cidade de Salvador. Utilize os valores da tabela referentes aos anos de 1980, 1991, 2000 e 2010.

ANO	1980	1991	2000	2010
Nº DE HABITANTES	1 531 242	2 072 058	2 440 828	2 675 656

Tabela 3.7 -Exemplo de interpolação de valores para cálculo do número aproximado de habitantes em 2005, usando interpolação de Lagrange.
Fonte: Brasil (2010, *on-line*)

Como pode ser visto no enunciado do exemplo, devemos utilizar os dados dos anos de 1980, 1991, 2000 e 2010, nos quais a quantidade de habitantes é igual a 1531242, 2072058, 2440828 e 2675656, respectivamente. Assim, analisando a expressão da interpolação de Lagrange, $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{j=0\ (j \neq i)}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$, colocaremos a quantidade de habitantes como a variável dependente $P_n(x)$ e o ano como variável independente x. Além disso, para clarear as ideias, os dados serão organizados da seguinte forma:

i	x_i	y_i
0	1980	1531242
1	1991	2072058
2	2000	2440828
3	2010	2675656

Tabela 3.8 - Organização dos dados para cálculo do número aproximado de habitantes em 2005, usando interpolação de Lagrange
Fonte: Elaborada pelo autor.

Consequentemente, o nosso problema consiste em desenvolver o somatório e o produtório presentes na expressão dada. Como temos quatro pontos distintos, o

Processing math: 100%

grau máximo possível para o nosso polinômio interpolador será $n = 3$. Assim, ficamos com

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i \cdot \prod_{j=0\ (j \neq i)}^{3} \frac{\left(x - x_j\right)}{\left(x_i - x_j\right)}$$

$$P_3(x) = y_0 \cdot \frac{\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\left(x - x_3\right)}{\left(x_0 - x_1\right)\left(x_0 - x_2\right)\left(x_0 - x_3\right)} + y_1 \cdot \frac{\left(x - x_0\right)\left(x - x_2\right)\left(x - x_3\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_1 - x_2\right)\left(x_1 - x_3\right)} + y_2$$

$$\cdot \frac{\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\left(x - x_3\right)}{\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 - x_3\right)} + y_3 \cdot \frac{\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)}{\left(x_3 - x_0\right)\left(x_3 - x_1\right)\left(x_3 - x_2\right)}$$

Nessa expressão, vamos substituir os valores de x_i, y_i, i=0,1,2,3, e reescrever as parcelas de uma forma conveniente:

$$P_3(x) = \frac{1531242}{-6600}\left(x^3 - 6001x^2 + 12003910x - 8003820000\right) +$$

$$+\frac{2072058}{1881}\left(x^3 - 5990x^2 + 11959800x - 7959600000\right) +$$

$$+\frac{2440828}{-1800}\left(x^3 - 5981x^2 + 11923890x - 7923781800\right) +$$

$$+\frac{2675656}{5700}\left(x^3 - 5971x^2 + 11884180x - 7884360000\right)$$

Finalmente, podemos determinar o polinômio interpolador somando os termos semelhantes:

$$P_3(x) = -17,03601808x^3 + 101312,5316x^2 - 200783687x + 1,32608 \cdot 10^{11}$$

De posse do polinômio interpolador, substituímos x=2005 e encontramos uma aproximação para a população de Salvador no ano de 2005:

$$P_3(2005) = -17,03601808 \cdot 2005^3 + 101312,5316 \cdot 2005^2 - 200783687 \cdot 2005 + 1,32608 \cdot 10^{11}$$

Processing math: 100%

$$P_3(2005) = 2587219,93$$

Como a quantidade de habitantes é um número inteiro, ficaremos com 2587220 habitantes na cidade de Salvador no ano de 2005. Encontramos um valor maior do que os valores determinados com a interpolação linear e a interpolação de Lagrange.

Novamente, os cálculos desse exemplo foram realizados no Excel, embora pudessem também ser feitos com uma calculadora científica (com mais dificuldade). Utilizaram-se as operações elementares da plataforma, como soma, multiplicação e potência. Nós determinamos o polinômio interpolador e depois o utilizamos para calcular a aproximação da quantidade de habitantes em 2005, entretanto poderíamos ter realizado o mesmo cálculo sem determinar o polinômio interpolador inicialmente, economizando bastante tempo computacional. De fato, partindo da fórmula de Lagrange

$$P_3(x) = y_0 \cdot \frac{\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\left(x - x_3\right)}{\left(x_0 - x_1\right)\left(x_0 - x_2\right)\left(x_0 - x_3\right)} + y_1 \cdot \frac{\left(x - x_0\right)\left(x - x_2\right)\left(x - x_3\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_1 - x_2\right)\left(x_1 - x_3\right)} + y_2$$

$$\cdot \frac{\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\left(x - x_3\right)}{\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 - x_3\right)} + y_3 \cdot \frac{\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)}{\left(x_3 - x_0\right)\left(x_3 - x_1\right)\left(x_3 - x_2\right)}$$

Podemos substituir os valores de x_i, y_i, i=0,1,2,3, $x = 2005$ e calcular o valor de $P_3(2005)$ diretamente:

$$P_3(2005) = 1531242 \cdot \frac{-350}{-6600} + \ 2072058 \cdot \frac{-625}{1881} + \ 2440828 \cdot \frac{-1750}{-1800} + \ 2675656 \cdot \frac{1750}{5700}$$

$$P_3(2005) = \ 2587219,928 \simeq \ 2587220$$

Portanto, a não ser que seja **explicitamente** solicitado o cálculo do polinômio interpolador, determine diretamente a aproximação desejada, conforme acabamos de mostrar.

Processing math: 100%

saiba mais

Saiba mais

Neste vídeo, você poderá aprender outra forma de determinar um polinômio interpolador de grau maior do que 1 para uma situação genérica apresentada. De forma mais precisa, a técnica apresentada é a determinação do polinômio interpolador de grau $n \geq 1$ mediante a resolução do sistema de equações lineares, levando em consideração a existência e unicidade de tal polinômio. Para saber mais, acesse o link a seguir.

ASSISTIR

Outra possibilidade de resolução é determinar uma função polinomial de grau 3 a partir do próprio Excel. No programa, basta criarmos e selecionarmos a tabela a seguir e clicamos em **Inserir** . **Selecione Dispersão com Linhas Suaves e Marcadores** . Para exibir a equação, clicamos com o botão direito na linha exibida e escolhemos **Adicionar Linha de Tendência** . Finalmente, nas opções, marcamos as opções **Polinomial, ordem 3** e **Exibir Equação no gráfico** .

Ano	1980	1991	2000	2010
Habitantes	1531242	2072058	2440828	2675656

Tabela 3.9 - Exemplo de interpolação de valores para cálculo do número aproximado de habitantes em 2005, usando interpolação de Lagrange e o Excel
Fonte: Elaborada pelo autor.

O gráfico a seguir será gerado:

Processing math: 100%

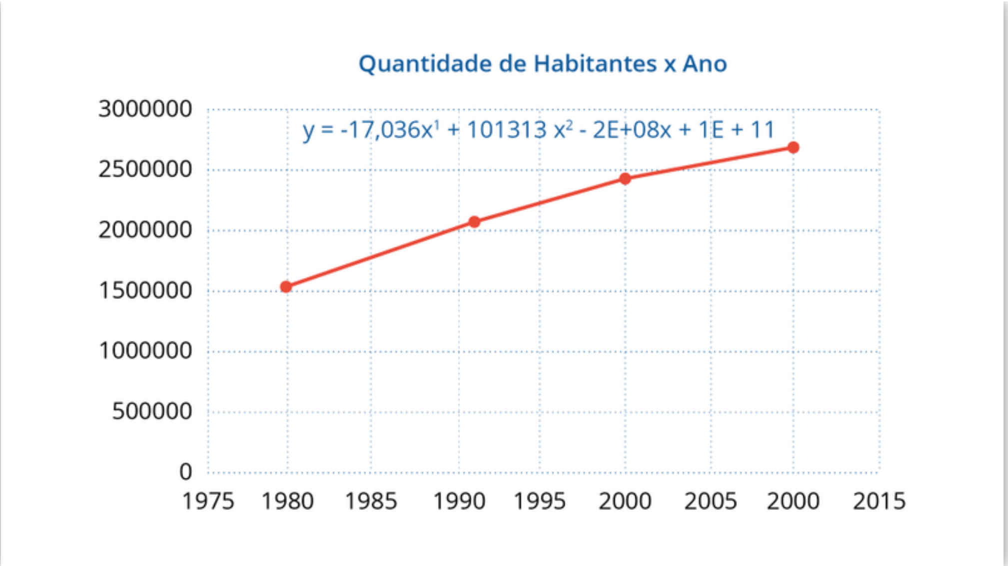


Gráfico 3.3 - Gráfico de $P_3(x)$ construído no Excel

Fonte: Elaborado pelo autor.

Apresentada como uma das técnicas de interpolação numérica, a interpolação de Lagrange mostrou-se eficaz na determinação de uma aproximação para a quantidade de habitantes na cidade de Salvador em determinado ano.

Além disso, devido à sua robustez, essa técnica pode ser empregada nas mais diversas situações, desde que conheçamos $n+1$ pontos distintos de uma função qualquer. Nesse caso, o polinômio interpolador terá grau n. É ainda interessante dizer que, na maioria dos problemas, não é necessário determinar tal polinômio, mas sim apenas uma aproximação para um valor desconhecido. Logo, podemos calcular diretamente o valor desejado pela aplicação da fórmula de Lagrange, sem determinar o polinômio interpolador, economizando bastante tempo.

Vamos Praticar

Diante dos nossos estudos e de tudo o que foi explorado até aqui, utilizando os valores $f(0,5)$, determine uma aproximação para $f(0,35)$, em que $f(x) = \frac{2\cos(x)}{x+1}$

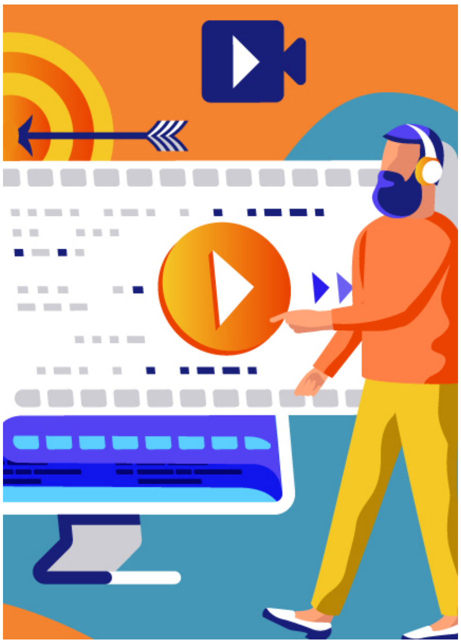
.

- **a)** $P_3(0,35) = 1,3915$
- **b)** $P_3(0,35) = 1,3914$
- **c)** $P_3(0,35) = 1,3916$
- **d)** $P_3(0,35) = 1,3917$
- **e)** $P_3(0,35) = 1,3918$

Processing math: 100%

indicações

Material Complementar



FILME

A Rede Social

Ano: 2010

Comentário: O filme mostra o processo de idealização, criação e desenvolvimento da rede social que veio a se tornar uma das mais conhecidas e utilizadas no mundo. No filme, você pode relacionar conceitos sobre administração, economia, gestão de negócios, relações interpessoais, sistemas operacionais, programação e segurança da informação, entre outros.

TRAILER

Processing math: 100%

LIVRO

Cálculo Numérico

Organizadora Daniela Barude Fernandes

Editora: Editora Pearson

ISBN: 9788543017129

Comentário: Essa obra didática diferencia-se por utilizar uma abordagem baseada em exemplos concretos, buscando mostrar como os métodos funcionam na prática. Vários exemplos de situações da engenharia e ciência são utilizados para iniciar a apresentação dos conteúdos.

Processing math: 100%

conclusão

Conclusão

Na presente unidade, dedicamo-nos ao conhecimento e aplicação dos métodos numéricos para a interpolação de valores nos casos em que vimos a lei de funções/equações, bem como nos casos em que não dispomos de tais leis para descrever uma situação específica. Obrigatoriamente, nas situações que não possuímos uma lei para descrever o fenômeno observado, como no caso do censo na cidade de Salvador, precisamos utilizar algum método numérico de interpolação para estimar valores da quantidade de habitantes em determinado ano.

Aprendemos o ferramental teórico básico de três métodos de interpolação numérica: a interpolação linear, a interpolação quadrática e a interpolação de Lagrange. Para os três métodos, vimos como determinar o polinômio interpolador, calcular as aproximações, bem como calcular o erro de truncamento associado aos métodos. Adicionalmente, com o exemplo do censo na cidade de Salvador, pudemos perceber que tanto o grau do polinômio interpolador quanto a aproximação calculada dependem da quantidade de pontos utilizados.

referências

Referências Bibliográficas

Processing math: 100%

BARROSO, L. C. et al. **Cálculo numérico** (com aplicações). 2. ed. São Paulo: Harbra, 1987.

BRASIL. IBGE. **Sinopse do Censo Demográfico** , 2010. Disponível em: https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=6 . Acesso em: 10 fev. 2020.

SPERANDIO, D. et al. **Cálculo numérico** . 2. ed. São Paulo: Pearson, 2015.

TRAILER OFICIAL PORTUGUÊS – A REDE SOCIAL. 2010. 1 vídeo (2 min.). Publicado pelo canal da **Sony Pictures Portugal** . Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=6VtX6przSlI . Acesso em: 10 fev. 2020.