

CÁLCULO NUMÉRICO COMPUTACIONAL MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES - PARTE 1

Autor: Me. Ronald R. Alves

Revisor: Raimundo Almeida

INICIAR

introdução
Introdução

As equações não lineares surgem na engenharia nas situações mais variadas e, muitas vezes, não é possível/fácil resolver essas equações de forma analítica, isto é, não conseguimos determinar uma equação que isole a variável para encontrar o seu valor. Dessa forma, como podemos calcular a solução de uma equação não linear? A resposta é dada quando consideramos os métodos numéricos de solução de equações não lineares.

Os métodos numéricos para a resolução de equações não lineares envolvem processos que vão se aproximando da solução. Esses métodos fornecem o passo a passo de como determinar tais soluções, bem como, o momento de parada em cada caso, ou seja, os métodos são capazes de nos informar quando estamos suficientemente próximos da solução para que abandonemos o processo. Nesse sentido, veremos o método gráfico para isolamento das raízes e o método da bisseção para refinamento das mesmas. Adicionalmente, trataremos das vantagens e desvantagens dos métodos.

Apresentação da Disciplina

A resolução de equações de primeiro e segundo grau, são casos simples, e podemos resolvê-los tranquilamente a partir de métodos analíticos. Entretanto, em outras situações, necessitamos recorrer a métodos numéricos. Esses métodos são muito aplicados para encontrar soluções de equações mais gerais. Começamos com uma primeira estimativa para a raiz procurada e vamos nos aproximando da solução por meio de um processo de refinamento dela. A cada iteração, avaliamos a precisão da raiz e decidimos se continuamos com o processo ou se estamos satisfeitos com o valor obtido até aquele momento.

A análise do exemplo a seguir nos leva a uma reflexão sobre a necessidade da utilização dos métodos numéricos para determinação de raízes de funções, bem como serve para contextualizar tais métodos. Em um circuito genérico, podemos estar interessados em determinar a corrente que atravessa algum nó específico. Para isso, utilizamos a equação $U = R \cdot I$, que relaciona a tensão U com a corrente I para um resistor de resistência igual a R . Dependendo da tensão aplicada aos terminais do resistor, a resistência pode não ser constante, fazendo com que a corrente dependa da tensão de uma forma não linear.

Situações como a relatada acima ocorrem com muita frequência na Engenharia e precisam ser resolvidas, aplicando-se métodos numéricos para determinação de suas raízes. Calcular as raízes de uma função significa determinar os valores da variável independente (normalmente x) que torne a variável dependente (normalmente y) igual a zero. Mais precisamente, dada uma função $y=f(x)$, queremos determinar o valor de x para o qual $y=f(x)=0$. Se a função que estamos trabalhando é um polinômio do segundo grau, então temos:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Encontrar a raiz desse polinômio também significa determinar os pontos onde o gráfico da função intercepta o eixo OX. Para descobrirmos isso, escrevemos:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

A equação acima possui soluções reais sempre que o discriminante Δ é maior ou igual a zero. Tais raízes reais são calculadas por meio das expressões a seguir:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Acabamos de ver que calcular as raízes de uma equação do segundo grau é uma tarefa relativamente simples. Entretanto, quando a equação é de grau superior a 3, pode não ser tão simples encontrar as raízes de um polinômio qualquer.

reflita
Reflita

O que fazer diante de uma equação algébrica genérica que precisamos resolver? Como ocorre com as equações do 1º e 2º grau, existem fórmulas de solução para equações de grau superior a 3?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na tentativa de responder a essas perguntas, muitos avanços ocorrem na matemática, em um período compreendido entre 1500 e 1800. Inicialmente, Tartaglia desenvolveu uma fórmula para resolução de equações de 3º grau a partir de radicais. Em seguida, Ferrari generalizou o processo para equações de 4º grau. Durante três séculos, os pesquisadores tentaram encontrar um processo de resolução para equações de grau superior a 4, mas não obtiveram sucesso. Finalmente, Abel e Galois mostraram ser impossível a obtenção de uma fórmula geral para resolução de equações de grau igual ou superior a 5 através da utilização de radicais.

Felizmente, mesmo não possuindo uma fórmula geral para resolução de equações de grau superior a 4, podemos resolvê-las com a utilização de métodos numéricos de aproximação. De fato, até as equações de grau 3 e 4 são resolvidas com a aplicação de métodos numéricos (LIMA et al., 2006).

O Problema da Embalagem

Uma fábrica de alimentos deseja confeccionar uma embalagem para uma bebida para exportação. A embalagem deve ser um veículo em formato de paralelepípedo que possui as seguintes proporções:

$$y = \frac{3}{2}x$$

$$z = 3x + 1$$

Em que x , y e z são as dimensões da embalagem. Para manter a proporção, a dimensão z deve ser uma soma de um múltiplo da dimensão x com 1, pois a empresa precisa deixar uma parte da embalagem reservada para informações do produto que são exigidas por lei.

Além disso, a empresa deseja que o volume da embalagem seja igual a 300 ml, ou seja, 300 cm^3 . Assim, a nossa missão será descobrir as dimensões da embalagem do problema.

Com a finalidade de determinar as dimensões da embalagem, temos de encontrar uma equação que modela o problema. Sabendo que o volume de uma embalagem em forma de paralelepípedo é dado pelo produto de suas três dimensões, temos:

$$V = xyz$$

Para resolver o problema, iremos reescrever essa equação em função de uma única variável. Nesse caso, escolhemos a variável x (poderia ser y ou z também). Isso é possível porque sabemos a relação entre as três variáveis ($y = \frac{3}{2}x$ e $z = 3x + 1$). Portanto, o volume fica assim:

$$V = xyz$$

$$V = x \cdot \frac{3}{2}x \cdot (3x + 1)$$

$$V = \frac{9}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

Utilizando o fato de que o volume é igual a 300 cm^3 , temos:

$$\frac{9}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 300$$

E, simplificando essa equação, ou seja, multiplicando-a por 2, obtemos:

$$9x^3 + 3x^2 = 600$$

Como desejamos descobrir as raízes de uma equação, vamos reorganizar a equação e transferir o número 600 para o lado esquerdo dela. Logo, temos uma equação algébrica do terceiro grau que precisamos encontrar as raízes; assim:

$$9x^3 + 3x^2 - 600 = 0$$

Ao analisarmos as equações entre as dimensões da embalagem, vemos que x é a menor delas. Vemos, ainda, que as dimensões devem ser positivas, isto é, maiores do que zero. Além disso, é interessante obter um valor superior para cada uma das dimensões. Se a embalagem fosse um cubo de 1 litro (1.000 cm^3), então, cada dimensão teria tamanho 10 cm.

É difícil afirmar alguma coisa sobre todas as dimensões da embalagem a ser construída, mas é fácil verificar que a menor das dimensões (x) deve ser menor que 10 cm. Em suma, sobre a equação do terceiro grau que queremos resolver, temos o seguinte:

$$0 < x < 10$$

Os métodos computacionais que veremos a seguir, fazem uma busca pela solução dentro de um intervalo de valores que indicamos. Se o intervalo for pequeno, o resultado da busca será obtido num intervalo de tempo menor. Se o intervalo de busca for maior, o resultado será obtido num intervalo de tempo maior.

Se quisermos fazer alguma economia computacional nos métodos que vamos apresentar adiante, basta fazermos algumas verificações adicionais. Como sabemos que x deve ser maior que 0 e menor do que 10, podemos testar o valor da função para valores inteiros de 1 a 9, pois fazer operações matemáticas (soma, subtração, multiplicação e exponenciação) com números inteiros é simples de ser feito. Assim, fazemos o teste que é mostrado na tabela a seguir:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x) = 9x^3 + 3x^2 - 600$	-588	-516	-330	24	600	1452	2634	4200	6204

Tabela 1.1 - Valores da função $f(x)$ em pontos diferentes, no intuito de buscar onde a função muda de sinal.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Antes de analisarmos a Tabela 1.1, sabíamos que a solução encontrava-se no intervalo (0,10). Agora, percebemos que x pertence ao intervalo (3,4). Para diminuirmos o tempo computacional com as iterações ao apresentarmos os métodos, é interessante partirmos de um intervalo menor. Assim sendo, podemos mostrar os métodos com uma convergência muito mais rápida.

A afirmação de que o valor da variável x está entre 3 e 4 pode ser confirmada a partir do seguinte teorema da Álgebra para o isolamento de raízes:

Teorema: sejam $f(x)$ uma função contínua e o intervalo real $[a, b]$. Se $f(x)$ possui valores de sinais opostos nos pontos extremos do intervalo $[a, b]$ ($f(a) \cdot f(b) < 0$), então o intervalo conterá, no mínimo, uma raiz real da equação $f(x)=0$.

O teorema garante que existe pelo menos um valor $\lambda \in (a, b)$ tal que $f(\lambda) = 0$. Agora que vimos um problema concreto, podemos estudar os métodos de resolução de equações não lineares utilizando essa situação prática como base para nossos estudos.

praticar

Vamos Praticar

Retome o problema da embalagem, isto é, o problema da definição das dimensões de uma embalagem (em forma de paralelepípedo) que deve ser um veículo que possui as seguintes proporções: $y = \frac{3}{2}x$ e $z = 3x + 1$. Em vista do que discutimos no tópico e considerando um volume de 400 cm^3 , determine o intervalo $[a,b]$, a e b inteiros, que contém a raiz do problema:

- ☐ **a)** $[1,2]$.
- ☐ **b)** $[2,3]$.
- ☐ **c)** $[3,4]$.
- ☐ **d)** $[4,5]$.
- ☐ **e)** $[5,6]$

Erros de Arredondamento, Erros de Truncamento e Propagação de Erros

Você já deve ter reparado que os números que usamos no dia a dia podem ser divididos em números inteiros e números reais, não é mesmo? Porém, há uma limitação com relação aos números reais: o número limitado de dígitos em um computador. Assim, não é possível representar uma dízima periódica, por exemplo.

Na verdade, podemos representar em um computador somente uma parte dos números inteiros, pois existem infinitos números inteiros, mas nunca será possível representar um número com infinitos algarismos em um computador.

As operações com números inteiros funcionam normalmente, com uma exceção que é o *overflow*. O que é isso? O *overflow* ocorre quando não é possível realizar a operação com aquela quantidade de bits.

Ao trabalharmos com números inteiros no computador, existe a possibilidade de ocorrer *overflow*. Também existem erros que acontecem com números de ponto flutuante. Quando um número cresce muito, de tal forma que não seja possível representá-lo, esse número torna-se infinito ou menos infinito.

saiba mais

Saiba mais

Você sabia que podemos utilizar o cálculo numérico para analisar e resolver problemas ambientais? Em Arenales *et al.* (2010, p. 13-15), encontramos a descrição, a modelagem e a resolução de um problema ambiental sobre o transporte de lixo contaminado. Além disso, são tecidas algumas considerações em relação aos erros envolvidos nas fases de modelagem e resolução da situação apresentada. Confira em: Arenales, Selma Helena de Vasconcelos; Salvador, José Antonio. Cálculo Numérico: Uma Abordagem para o Ensino a Distância. São Carlos: EdUFSCar, 2010. 166 p. – (Coleção UAB-UFSCar).

Fonte: Adaptado de Arenales (2010).

ACESSAR

Outro erro que pode acontecer é com operações inválidas. Algumas dessas operações são: a raiz quadrada de um número negativo; o logaritmo de um número negativo ou nulo e zero dividido por zero. Todas essas operações resultam naquilo que é chamado de resultado não numérico (chamado de NaN – not a number).

Existe ainda outro tipo de erro, quando é impossível representarmos um número utilizando um número finito de bits. Com números na base 2, não é possível representar o número um décimo (1/10). Com 12 dígitos binários após a vírgula, podemos representar esse número assim:

$$0,000110011001_2 \approx 0,099609$$

Além desse erro de impossibilidade de representação de um número, existe outro problema que está muito relacionado a esse erro. É o problema de propagação de erros. Acompanhe o raciocínio.

Como os números de ponto flutuante estão sujeitos a não serem representados como deveriam, o erro pode aumentar ao longo de várias operações matemáticas. Vamos analisar um exemplo? Suponha que estamos tentando representar o número 0,2, mas, devido a um erro, o valor representado foi 0,18. Nesse caso, percebemos um erro de 10%. Esse erro está muito acima do erro que costumamos trabalhar em um computador, entretanto vamos utilizá-lo com o objetivo de entender o problema. Se atribuímos esse valor a uma variável x , nós já sabemos que essa variável possui um erro de 10%. Agora, vamos realizar a seguinte operação:

$$y = x \cdot x$$

Nessa operação, estamos multiplicando o x por ele mesmo e atribuindo o resultado a uma variável y ; assim, teremos uma variável com um erro de 19%, pois $0,18 \times 0,18 = 0,0324$, enquanto que $0,2 \times 0,2 = 0,04$. Portanto, o erro se propagou, chegando a 19%.

Em um computador, o erro oriundo do problema da representação de um número é consideravelmente menor do que esse que acabamos de aplicar, conseqüentemente, para que um erro possa se propagar ao nível de atrapalhar os resultados, milhões de operações precisam ser realizadas. Aparentemente, esse número gigantesco de operações parece inalcançável, mas isso pode acontecer em algoritmos para resolver problemas que envolvam muitas variáveis. E, na prática, quais as conseqüências?

Em muitas situações práticas, o erro de representação dos números pode ser positivo em alguns casos, negativo em outros. Quando ocorrem erros positivos e erros negativos em uma mesma conta, o erro final torna-se menor. Veja o exemplo a seguir:

$$x = 0,18$$

$$y = 0,22$$

Cada uma das variáveis foi representada com um erro, pois o valor de ambas deveria ser 0,2. Realize a seguinte operação:

$$z = x \cdot y$$

Podemos perceber que o erro de 10% em cada uma das variáveis causou um erro muito menor no resultado final, uma vez que:

$$z = 0,18 \times 0,22 = 0,0396$$

O resultado deveria ser 0,04, ou seja, o erro é de apenas 1%. O erro final é menor que o erro inicial, pois o erro de uma variável era positivo e o da outra variável era negativo.

Essas discussões sobre erros de arredondamento, erros de truncamento e propagação de erros são sistematizadas a seguir, conforme pode ser encontrado em Barroso (1987). Podemos evidenciar que a aplicação de métodos numéricos para encontrar uma solução de um problema físico qualquer nem sempre fornece valores que se encaixam dentro de limites razoáveis, isto é, a solução numérica da equação fornecida pode não satisfazer aos parâmetros do problema inicial. Nesse caso, teríamos uma solução matemática para a equação, a qual, entretanto não resolve o problema físico apresentado. Podemos fazer essa afirmação mesmo quando os cálculos são efetuados de forma correta e aplicamos os métodos adequadamente.

Como já percebemos, a diferença entre o valor exato e o valor calculado é chamada de erro e é inerente aos processos, não sendo possível, em diversas situações, ser evitada. Dessa forma, temos o objetivo de fornecer ao estudante dos métodos numéricos noções básicas sobre as fontes de erros, para que ele saiba como controlá-los ou, idealmente, evitá-los.

Em linhas gerais, aplicando métodos numéricos para resolver um problema físico, verificamos a existência de duas fases mais importantes, conforme podemos visualizar na figura a seguir:

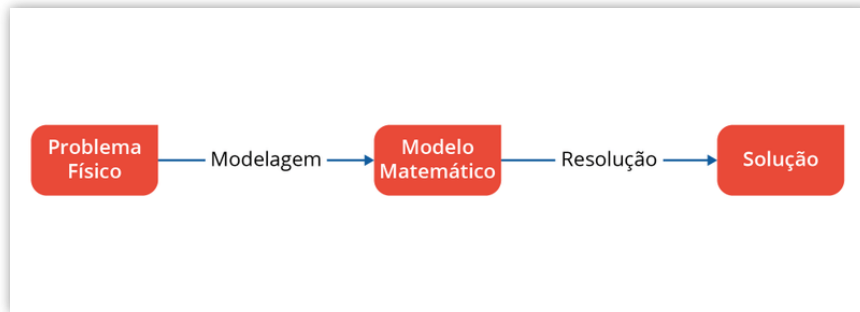


Figura 1.1 - Identificação das fases de modelagem e resolução

Fonte: Adaptada de Barroso (1987).

Erros na Fase de Modelagem

Como já mencionado, os erros estão intrinsecamente relacionados aos métodos numéricos. Dessa forma, é necessário que estudemos os erros que ocorrem na fase de modelagem, pois, ao se tentar representar um fenômeno físico por meio de um modelo matemático, dificilmente se tem uma descrição perfeita desse fenômeno. Na maioria das vezes, são necessárias muitas simplificações do mundo físico para que se tenha um modelo matemático com o qual possamos efetuar as operações requeridas. Por exemplo, no Ensino Médio, aprendemos as leis da mecânica a partir de diversas simplificações:

- Em muitas situações, a gravidade é considerada constante.
- Desprezam-se os atritos.
- Não são levadas em consideração a temperatura e a umidade do ar.
- Não se considera a dilatação dos corpos.

Erros na Fase de Resolução

Na fase de resolução, também são necessárias que sejam feitas algumas aproximações. Tais aproximações ocorrem devido à inevitável utilização de instrumentos de cálculo como as calculadoras e computadores. Assim, os seguintes problemas podem surgir: erros de arredondamento, erros de truncamento e propagação de erros.

Sabemos que os números são representados na base 2, ou binária, num computador ou calculadora, isto é, através de uma sequência única de impulsos elétricos que indicam apenas dois estados: 0 ou 1. Sabe-se que nem todos os números reais podem ser representados nesses sistemas de computação, uma vez que necessitamos de infinitos algarismos para representar alguns números nessa base, o que não é factível. Quando essas situações ocorrem, denominamos de erros de arredondamento. A quantidade de algarismos que podem ser utilizados depende da precisão de cada máquina calculadora ou computador. Assim, ressaltamos a importância de se conhecer o número de dígitos significativos do sistema de

representação da máquina em questão para que se tenha controle da precisão do resultado obtido.

Por sua vez, os erros de truncamento são originados da utilização de processos que em teoria são infinitos ou muito grandes para a determinação de um valor, mas, por razões de limitações práticas, são truncados, isto é, são parados em determinado ponto ou “cortados”. Algumas expressões ou equações matemáticas possuem infinitos termos, tais como as progressões aritméticas (P.A.), as progressões geométricas (P.G.), a exponenciação, os logaritmos, as funções trigonométricas etc. Por exemplo, quando calculamos o seno de um ângulo desejado, uma calculadora científica utiliza a seguinte série de potências para executar a tarefa:

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Nesses casos, a calculadora científica possui um algoritmo interno com uma quantidade finita de termos dessa série. O algoritmo utiliza os primeiros termos da série e trunca os demais. Você poderia estar se perguntando: como esse processo fornece valores confiáveis? A resposta é que se pode mostrar que os termos de ordem mais elevadas tendem a zero. Assim, é suficiente trabalhar com os termos iniciais. A representação, em sistemas de computação, das funções citadas acima é de fundamental importância na vida acadêmica e profissional de um estudante da área de exatas, e a sua aplicação ocorre toda vez que utilizamos uma calculadora ou computador. De maneira geral, pode-se dizer que o erro de truncamento pode ser diminuído até chegar à ordem do erro de arredondamento e, a partir desse ponto, não faz sentido diminuir mais, pois o erro de arredondamento será dominante.

Conforme foi apresentado no início deste tópico, a propagação de erros ocorrerá devido ao acúmulo dos erros de arredondamento e truncamento ao longo de várias operações matemáticas.

praticar

Vamos Praticar

Leia o excerto a seguir:

“Em geral, os números não são representados de forma exata nos computadores. Isto nos leva ao chamado erro de arredondamento. Quando resolvemos problemas com técnicas numéricas, estamos sujeitos a este e outros tipos de erros”.

UFRGS. **Tipos de erros.**

Disponível em : https://www.ufrgs.br/reatmat/CalculoNumerico/livro-py/rdneadm-tipos_de_erros.html.

Acesso em : 5 nov. 2019.

Considerando o excerto apresentado, sobre erros, analise as afirmativas a seguir:

- I. Os erros de arredondamento são oriundos das limitações existentes na forma de representar números em máquinas.
- II. Os erros de truncamento aparecem quando aproximamos um conceito matemático formado por uma sequência infinita de passos por um procedimento finito.
- III. A propagação de erros ocorrerá devido ao acúmulo dos erros de arredondamento e truncamento ao longo de várias operações matemáticas.
- IV. Nos computadores atuais, não precisamos nos preocupar com a ocorrência do *overflow* .

Está correto o que se afirma em:

- ☐ **a)** I e II, apenas.
- ☐ **b)** II e III, apenas.
- ☐ **c)** II, III e IV, apenas.
- ☐ **d)** I, II e III, apenas.
- ☐ **e)** I, II e IV, apenas.

Isolamento de Raízes

Neste tópico, estudaremos o **método gráfico** para efetuar o isolamento das raízes das funções obtidas como modelo matemático de algum problema físico. Assim, estamos agora focados na fase de resolução das equações encontradas na fase de modelagem. Inicialmente, utilizamos o método gráfico para isolar as raízes e, posteriormente, algum método de refinamento de raízes. Os métodos de refinamento de raízes incluem o método da bisseção, o método de Newton e o método da iteração linear.

Resolver as equações significa encontrar as raízes de uma equação do tipo $f(x)=0$, ou seja, determinar todos os valores da variável independente que fazem com que a variável dependente seja igual a zero.

Podemos ainda dizer que uma raiz real da equação $f(x)=0$ é um ponto onde a função $f(x)$ toca o eixo OX, conforme pode ser visualizado a seguir:

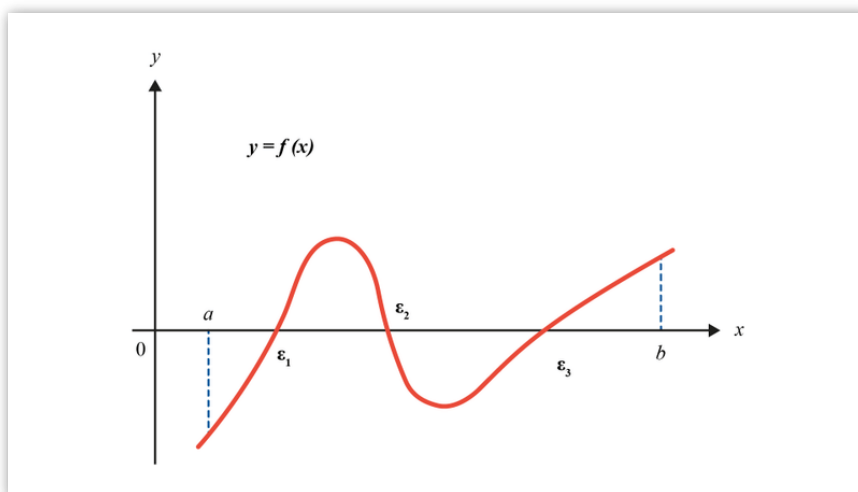


Figura 1.2: Raízes são os pontos de interseção da função com o eixo OX
Fonte: Barroso (1987, p. 84).

Dessa forma, podemos dizer que, para determinar as raízes de uma função, “basta” que se construa o gráfico da função e verifique os pontos de interseção do gráfico com o eixo OX. Entretanto, construir o gráfico de uma função qualquer não costuma ser uma tarefa fácil. Nos cursos iniciais de Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo, os estudantes aprendem uma série de passos necessários para a construção de gráficos de funções:

1. Determinação do domínio da função.
2. Interseção com os eixos coordenados.
3. Assíntotas: horizontais, verticais e oblíquas.
4. Pontos críticos.
5. Intervalos de crescimento e decréscimo.
6. Máximos e mínimos locais.
7. Concavidade e pontos de inflexão.
8. Esboço da curva.

Diante dos pontos apresentados, fica nítido que a construção dos gráficos de uma função qualquer demanda uma quantidade de tempo muito maior do que desejamos nessa etapa. E, de fato, em geral, não dependemos do gráfico da função para resolvermos os problemas. Portanto, se possível, devemos trilhar outros caminhos para encontrar as raízes da equação $f(x)=0$.

Uma forma alternativa para contornar esse problema é substituir $f(x)=0$ por uma equação $g(x)-h(x)=0$ equivalente, ou seja, uma equação que tem as mesmas raízes de $f(x)=0$. Em outras palavras, resolvemos a equação $f(x)=g(x)-h(x)=0$, ou, ainda, determinamos as raízes da função $f(x)=g(x)-h(x)$.

Mais precisamente, construímos os gráficos de $y_1 = g(x)$ e $y_2 = h(x)$ e, se houver interseção entre esses gráficos, eles se interceptam em um ponto de abscissa $x = x_0$. Nesse ponto:

$$g(x_0) = h(x_0)$$

E, portanto:

$$f(x_0) = g(x_0) - h(x_0) = 0$$

Consequentemente, pode-se concluir que $x = x_0$ é uma raiz da equação $f(x)=0$.

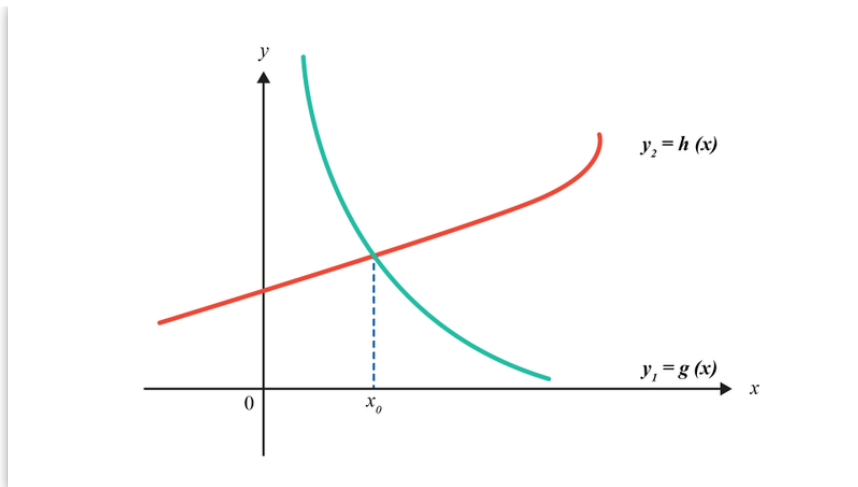


Figura 1.3: As interseções entre as curvas g e h são as raízes da função f .

Fonte: Barroso et al.(1987, p. 101).

Agora, o nosso problema não mais consiste em encontrar diretamente as raízes da função $f(x)$, mas sim em determinar os pontos de interseção entre as funções $g(x)$ e $h(x)$. Tais pontos de interseção são as raízes da função $f(x)$. Para isso, precisamos construir os gráficos das funções $g(x)$ e $h(x)$. Você pode estar pensando que trocou seis por meia dúzia. Se é difícil construir o gráfico da função $f(x)$, será mais fácil construir os gráficos das funções $g(x)$ e $h(x)$? Sim. A ideia central do método gráfico é que devemos escolher convenientemente as funções $g(x)$ e $h(x)$ de tal forma que os seus gráficos sejam simples de construir. Normalmente, usando técnicas de translação de eixos coordenados, devemos construir gráficos elementares de funções bem conhecidas, como funções quadráticas, cúbicas, exponenciais, logarítmicas, modulares, seno, cosseno, tangente etc.

Finalmente, a partir da análise dos gráficos das funções $g(x)$ e $h(x)$ esboçados num mesmo sistema de eixos coordenados, construiremos uma tabela com os valores dessas funções para alguns pontos próximos às interseções das curvas e, com isso, determinaremos intervalos que contêm as interseções entre as curvas, isto é, isolarmos as raízes da função $f(x)$ nesses intervalos.

EXEMPLO : isole todas as raízes da função $f(x) = e^x - \cos(x) - 10$.

Apenas olhando para a lei de $f(x)$, você saberia dizer quantas são as raízes dessa função? Rapidamente, você construiria o gráfico dessa função? Nos dois casos, a resposta para cada pergunta seria, não. Em geral, não conseguimos dizer quantas raízes uma função dada possui. Da mesma forma, a construção de gráficos de funções não é tarefa rápida ou fácil. Conforme discussões anteriores, precisamos seguir os oito passos para termos um gráfico devidamente construído. Utilizando um software gráfico, podemos construir o gráfico da função $f(x)$:

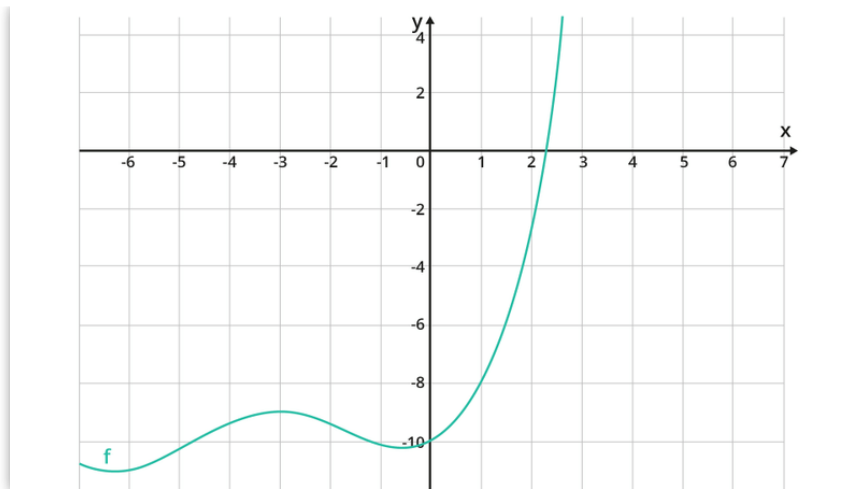


Figura 1.4: Gráfico da função $f(x)$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Por meio da análise do gráfico da função $f(x)$ (Figura 1.4), podemos perceber que a função possui uma única raiz. Nesse caso, a raiz é positiva e encontra-se no intervalo $(2,3)$. Entretanto, normalmente, não dispomos do gráfico da função; assim, vamos utilizar o método gráfico para isolamento da raiz.

Para aplicar o método gráfico, necessitamos separar a função $f(x)$ em duas funções $g(x)$ e $h(x)$ de tal forma que $f(x)=g(x)-h(x)$. Logo, temos:

$$g(x) = e^x$$

$$h(x) = \cos(x) + 10$$

Em seguida, constroem-se os gráficos das funções $g(x)$ e $h(x)$ num mesmo sistema de eixos coordenados, conforme pode ser visualizado no gráfico a seguir:

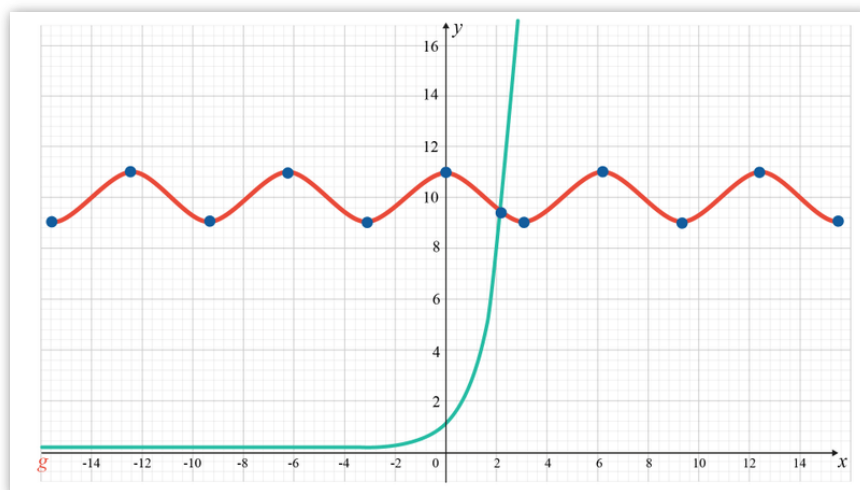


Figura 1.5: Gráficos das funções $g(x)$ e $h(x)$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Você pode perceber facilmente que existe um único ponto de interseção entre as curvas plotadas. Numa situação de sala de aula, o aluno dispõe apenas de calculadora científica, papel e caneta/lápis. Assim, ele precisará conhecer os gráficos de funções elementares mais usuais, como funções quadráticas, cúbicas, exponenciais, logarítmicas, modulares, seno, cosseno, tangente, etc.

Além disso, podemos perceber pelos gráficos de $g(x)$ e $h(x)$ (Figura 1.5) que o ponto de interseção entre as curvas está próximo de $x=2$, entretanto essa informação também não estará disponível ao aluno. Dessa forma, o estudante deverá elaborar uma tabela com valores para g e h e analisar uma mudança de comportamento nos valores determinados. Mais claramente, podemos notar no gráfico que para valores antes do ponto de interseção a função g assume valores menores do que os valores da função h . Por outro lado, após o ponto de interseção, os valores de g são maiores do que os valores de h . Portanto, o ponto de interseção encontra-se no interior do intervalo no qual ocorreu a inversão do comportamento entre as funções g e h , ou seja, a raiz de f encontra-se no interior desse intervalo.

Pelo gráfico, podemos perceber que o ponto de interseção é positivo. Logo, basta nos concentrarmos para os valores de x maiores ou iguais a zero:

x	$g(x)$	$h(x)$
0	1	11
1	2,71828183	10,5403023

2	7,3890561	9,58385316
3	20,0855369	9,0100075

Tabela 1.2 - Tabela com os valores das funções g e h.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Diante da análise dos dados da tabela 1.2, conclui-se que o ponto de interseção está entre 2 e 3. Em outras palavras, a raiz da função f pertence ao intervalo (2,3). Note que fizemos x variar a cada 1 unidade. Essa variação depende da percepção da magnitude dos valores envolvidos. Se a variação dos valores para g e h estiver pequena, pode-se aumentar a variação para x, acelerando o processo. Por outro lado, quanto menor a variação de x, menor será o comprimento do intervalo encontrado para a raiz isolada, assim aumentando a velocidade de convergência nos processos seguintes de refinamento da raiz. Por exemplo, podemos fazer x variar a cada 0,5. O resultado pode ser visto na tabela 1.3 a seguir. Consequentemente, obtemos um intervalo menor contendo a raiz, a saber, (2;2,5).

x	g(x)	h(x)
0	1	11
0,5	1,64872127	10,8775826
1	2,71828183	10,5403023
1,5	4,48168907	10,0707372
2	7,3890561	9,58385316
2,5	12,182494	9,19885638
3	20,0855369	9,0100075

Tabela 1.3 - Tabela com os valores das funções g e h.

Fonte: Elaborada pelo autor.

As Tabelas 1.2 e 1.3 podem ser construídas através da utilização de uma calculadora científica apenas. Entretanto, se disponível, o Excel pode ser usado a fim de agilizar o processo, principalmente no casos em que a quantidade de operações é elevada. Na Tabela 1.2, as duas primeiras linhas são obtidas a partir das seguintes fórmulas, conforme podemos verificar na Figura 1.6 e Tabela 1.4 abaixo:

	A	B	C
1	x	$g(x)$	$h(x)$
2	0	1	11

Figura 1.6: Construção da Tabela 1.2 no Excel.

Fonte: Elaborada pelo autor.

x	$g(x)$	$h(x)$
0	=EXP(A2)	=COS(A2)+10

Tabela 1.4: Fórmulas utilizadas no Excel para a construção da Figura 1.6.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na sequência, digitamos 1 (variação de x) na célula A3 e selecionamos as células B2 e C2 para que possamos "arrastar" para baixo e calcularmos automaticamente os valores de $g(1)$ e $h(1)$:

	A	B	C
1	x	$g(x)$	$h(x)$
2	0	1	11
3	1		

Figura 1.7: Processo para calcular os valores de $g(1)$ e $h(1)$ automaticamente.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a execução do etapa anterior, as fórmulas utilizadas e a sua planilha eletrônica serão como na Figura 1.8 e Tabela 1.5 abaixo:

	A	B	C
1	x	$g(x)$	$h(x)$
2	0	1	11
3	1	2,7182818	10,540302

Figura 1.8: Processo para calcular os valores de $g(1)$ e $h(1)$ automaticamente.

Fonte: Elaborado pelo autor.

x	$g(x)$	$h(x)$
0	=EXP(A2)	=COS(A2)+10
1	=EXP(A3)	=COS(A3)+10

Tabela 1.5: Fórmulas no Excel para a determinação da Tabela 1.2.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Finalmente, a fim de calcularmos os valores de $g(x)$ e $h(x)$ para x variando a cada 1 unidade, segundo o padrão desejado, devemos selecionar as células das linhas 2 (de A2 até C2) e 3 (de A3 até C3) e "arrastar" para baixo até o valor de x requerido:

	A	B	C
1	x	$g(x)$	$h(x)$
2	0	1	11
3	1	2,7182818	10,540302

Figura 1.9: Processo para calcular todos os valores de $g(x)$ e $h(x)$ desejados, automaticamente.

Fonte: Elaborado pelo autor.

No caso da Tabela 1.2, foram necessários apenas os valores de $g(x)$ e $h(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3$, entretanto, esse processo poderia se estender até um valor arbitrário de x ou utilizar uma variação diferente de 1 (como no caso da Tabela 1.3). Portanto, após a aplicação da última etapa descrita acima, a sua planilha eletrônica e as fórmulas serão como abaixo:

	A	B	C
1	x	g(x)	h(x)
2	0	1	11
3	1	2,7182818	10,540302
4	2	7,3890561	9,5838532
5	3	20,085537	9,0100075

Figura 1.10: Planilha eletrônica completa com os valores de $g(x)$ e $h(x)$ desejados.

Fonte: Elaborado pelo autor.

x	g(x)	h(x)
0	=EXP(A2)	=COS(A2)+10
1	=EXP(A3)	=COS(A3)+10
2	=EXP(A4)	=COS(A4)+10
3	=EXP(A5)	=COS(A5)+10

Tabela 1.6: Todas as fórmulas no Excel para a determinação da Tabela 1.2.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Cabe ainda mencionar que o método gráfico deve ser utilizado apenas como uma aproximação inicial para a raiz exata λ . Um método de aproximação da raiz exata será visto em detalhes no próximo tópico: **método da bisseção**.

praticar

Vamos Praticar

Retome o problema da embalagem, isto é, o problema da definição das dimensões de uma embalagem (em forma de paralelepípedo) que deve ser um veículo que possui as seguintes proporções: $y = \frac{3}{2}x$ e $z = 3x + 1$. Aplicando o método gráfico e considerando um volume de 400 cm^3 , determine qual dos intervalos a seguir contém a raiz do problema.

- ☐ **a)** [4;4,2].
 - ☐ **b)** [4,2;4,4].
 - ☐ **c)** [4,4;4;6].
 - ☐ **d)** [4,6;4,8].
 - ☐ **e)** [4,8;5].
-

Método da Bisseção

Em vários problemas de ciência e engenharia, temos a necessidade de determinar um número λ para o qual uma função $f(x)$ seja igual a zero, ou seja, $f(\lambda)=0$. Esse número é chamado raiz da equação $f(x)=0$ ou zero da função $f(x)$.

Quando trabalhamos com equações algébricas de 1º e 2º graus, algumas classes de 3º e 4º graus e poucas equações não lineares podemos calcular suas raízes (exatas) por meio de métodos analíticos, entretanto, para polinômios de grau superior a quatro e para a grande maioria das equações não lineares, o problema pode ser resolvido somente por métodos que aproximam as soluções, isto é, por métodos numéricos.

Apesar de os métodos numéricos não fornecerem raízes exatas, elas podem ser calculadas com a exatidão que o problema requeira, bastando que certas hipóteses sobre a função f sejam satisfeitas. Com o objetivo de calcular uma raiz, duas etapas devem ser seguidas:

1. Isolar a raiz, ou seja, determinar um intervalo $[a,b]$, o menor possível, que contenha uma única raiz da equação $f(x)=0$.
2. Aprimorar o valor da raiz aproximada, isto é, refiná-la até o grau de exatidão desejado.

Considere uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$. Desenvolveremos um processo que será capaz de determinar nossa raiz com o grau de exatidão requerido. Inicialmente, dividimos o intervalo $[a,b]$ ao meio, obtendo $x_0 = \frac{a+b}{2}$; assim, ficamos com dois subintervalos para considerar: $[a,x_0]$ e $[x_0,b]$.

Em seguida, verificamos se $f(x_0)=0$ e, caso isso ocorra, temos que $\lambda=x_0$ é a raiz procurada da função $f(x)$; caso $f(x_0) \neq 0$, a raiz estará no subintervalo onde a função tem sinais opostos nos pontos extremos. Em outras palavras, se $f(a) \cdot f(x_0) < 0$, então $\lambda \in (a,x_0)$; senão, $f(b) \cdot f(x_0) < 0$ e $\lambda \in (x_0,b)$.

Dessa forma, encontramos o intervalo $[a_1, b_1]$ que contém a raiz λ e tem comprimento igual à metade do intervalo inicial $[a, b]$. Repetimos o processo e dividimos o novo intervalo ao meio, obtendo $x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. O processo deve continuar até que se obtenha uma aproximação para a raiz exata λ , com a tolerância ϵ desejada.

Para cada aproximação x_n da raiz exata λ , usamos o critério $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon$ e comparamos o resultado com a tolerância ϵ prefixada. O valor $|x_n - x_{n-1}|$ representa o erro máximo que se pode cometer ao utilizar a raiz aproximada x_n como a raiz exata λ . Geometricamente, encontramos uma sequência de intervalos encaixantes e uma sequência de raízes aproximadas que converge para a raiz exata λ .

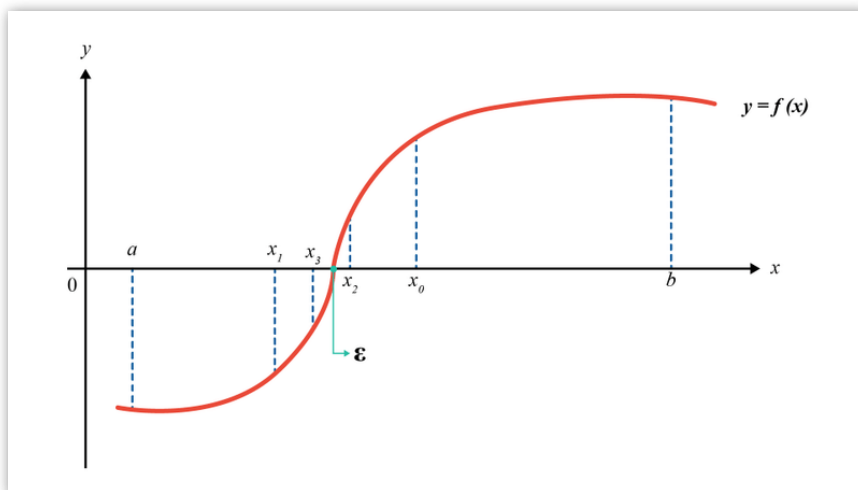


Figura 1.11: Interpretação geométrica do método da bisseção

Fonte: Barroso (1987, p. 107).

Pode-se mostrar que, dado um intervalo $[a, b]$, são necessárias, no mínimo, n iterações para se calcular a raiz λ com tolerância ϵ :

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{\ln(2)} - 1$$

Se dispomos apenas de uma calculadora científica, o método da bisseção deve ser utilizado **preferencialmente** para diminuir o comprimento do intervalo que contém a raiz, o que possibilita a aplicação de outro método de refinamento, pois o custo computacional aumenta consideravelmente quando desejamos a raiz com uma precisão elevada. Entretanto, se utilizarmos outras ferramentas de computação numérica, como o Excel, por exemplo, podemos aplicar o método da bisseção satisfatoriamente para refinar a raiz até o grau de exatidão requerido.

EXEMPLO : No **problema da embalagem** discutido na Apresentação da disciplina, encontramos a equação $9x^3 + 3x^2 - 600 = 0$. O valor de x que torna a equação verdadeira é a raiz da função $f(x) = 9x^3 + 3x^2 - 600$ e representa uma das dimensões da embalagem em forma de

paralelepípedo (uma caixa). A partir do método da bisseção, determine a raiz da função com uma tolerância $\epsilon \leq 0,01$. Posteriormente, calcule o valor das demais dimensões.

Inicialmente, aplicamos o método gráfico para isolar as raízes. Logo, fazemos $g(x) = 9x^3$ e $h(x) = -3x^2 + 600$ e construímos os gráficos num mesmo sistema de eixos coordenados.

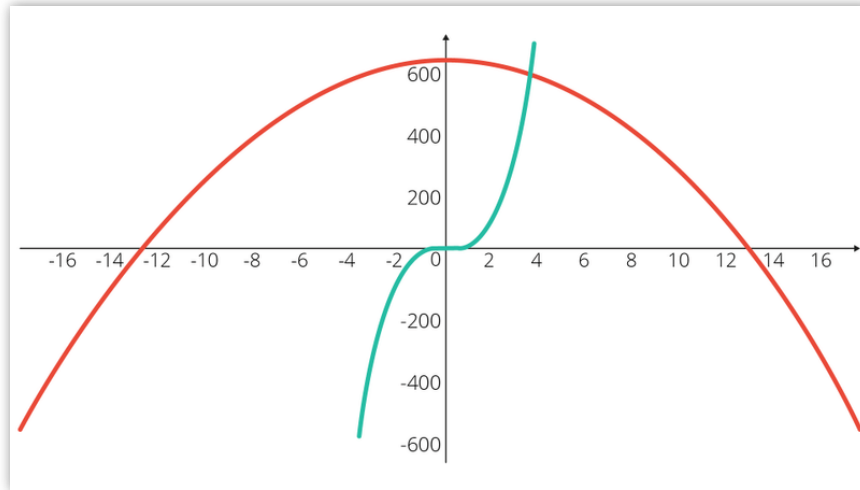


Figura 1.12: Gráficos das funções g e h .

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para isolar a raiz num intervalo $[a,b]$, é necessário construir a tabela com os valores para g e h e observar o momento no qual ocorre a interseção entre as curvas. Acompanhe a tabela 1.7 a seguir:

x	$g(x)$	$h(x)$
1	9	597
2	72	588
3	243	573
4	576	552

Tabela 1.7: Tabela para análise do método gráfico

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que, para $x=1$, $x=2$ e $x=3$, o valor de $g(x)$ é menor do que o valor de $h(x)$. Quando fazemos $x=4$, o comportamento se inverte e temos $g(x)$ maior do que $h(x)$. Portanto, pelo método gráfico, o ponto de interseção entre g e h pertence ao intervalo $(3,4)$, ou seja, a raiz de f está contida nesse intervalo. Lembre que, anteriormente, chegamos a esse mesmo intervalo por meio de outros argumentos.

Agora, já sabemos que $\lambda \in (3,4)$ e podemos utilizar o método da bisseção para nos aproximarmos da raiz exata. Observe que $f(a) = f(3) = -330$ e $f(b) = f(4) = 24$; assim,

$f(a) \cdot f(b) = f(3) \cdot f(4) = -7920 < 0$. Além disso, a função f é contínua em $[a, b]$, portanto, as hipóteses para a utilização do método da bisseção são satisfeitas e a sequência de raízes aproximadas x_n vai convergir para a raiz exata λ . Antes da aplicação do método da bisseção, convém que calculemos o número mínimo de iterações necessárias para determinar a raiz aproximada com a tolerância dada:

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{\ln(2)} - 1$$

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{4-3}{0,01}\right)}{\ln(2)} - 1$$

$$n \geq 5,64$$

Isso significa que são necessárias, pelo menos, seis iterações para determinar a raiz com a tolerância $\epsilon \leq 0,01$. Esse argumento será comprovado com a construção da tabela completa do método da bisseção. Atenção: antes de aplicar o método, sugerimos testar a quantidade mínima de iterações por meio dessa fórmula, pois, com a diminuição da tolerância (aumento da precisão), temos o aumento do número de iterações e, conseqüentemente, a elevação do tempo computacional. Com o uso do Excel, por exemplo, isso não seria um problema, entretanto, com uma calculadora científica apenas, você enfrentaria grandes dificuldades.

Acompanhe o passo a passo para a construção da tabela que culminará com a raiz desejada:

n	$a_n(-)$	$b_n(+)$	x_n	$f(x_n)$	E_n
0	3	4	3,5	-177,375	

Tabela 1.8: Passo a passo para a construção da tabela do método da bisseção

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em que n é o contador da quantidade de iterações, a_n e b_n são os extremos dos intervalos encaixantes, x_n são as raízes aproximadas, $f(x_n)$ é a imagem de cada raiz aproximada e E_n representa o erro máximo cometido no cálculo de x_n . Para $n=0$, temos que

- $a_0 = a = 3$
- $b_0 = b = 4$
- $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{3+4}{2} = 3,5$
- $f(x_0) = f(3,5) = 9(3,5)^3 + 3(3,5)^2 - 600 = -177,375$.
- só é possível calcular o valor de E_n a partir da primeira iteração.

Da mesma forma que fizemos no método gráfico, a construção da tabela do método da bisseção pode ser realizada com a utilização apenas de uma calculadora científica ou do Excel (o que

automatiza o processo). Sendo assim, no Excel, inicialmente, precisamos inserir as fórmulas para x_n e $f(x_n)$, conforme podemos visualizar na Figura e Tabela abaixo:

	A	B	C	D	E	F
1	n	$a_n(-)$	$b_n(+)$	x_n	$f(x_n)$	E_n
2	0	3	4	3,5	-177,375	

Figura 1.13: Passos iniciais para construção da tabela do método da bisseção.

Fonte: Elaborado pelo autor.

n	$a_n(-)$	$b_n(+)$	x_n	$f(x_n)$	E_n
0	3	4	$=(B2+C2)/2$	$=9*D2*D2+3*D2*D2-600$	

Tabela 1.9: Fórmulas utilizadas no Excel para aplicação do método da bisseção.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Cabe mencionar que $x_0 = 3,5$ é a primeira aproximação para a raiz exata λ , contudo a primeira iteração, x_1 , ainda será calculada na próxima linha da tabela. Observe também que o sinal de menos (-) ao lado do valor de a_n indica que naquela coluna teremos apenas valores para os quais as imagens da função são negativas. De forma análoga, o sinal de mais (+) ao lado do valor de b_n indica que naquela coluna teremos apenas valores para os quais as imagens da função são positivas. Como $f(x_0) = -177,375 < 0$, colocamos $a_1 = x_0 = 3,5$ e $b_1 = b_0 = 4$, pois, a cada passo, devemos ter $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$; assim, vamos reduzindo o comprimento do intervalo que contém a raiz exata e nos aproximando dela. Dessa forma, construímos mais uma linha da tabela desejada:

n	$a_n(-)$	$b_n(+)$	x_n	$f(x_n)$	E_n
0	3	4	3,5	-177,375	
1	3,5	4	3,75	-83,203125	0,25

Tabela 1.10: Determinação da primeira iteração da sequência de raízes aproximadas, $x_1 = 3,75$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para $n=1$, temos

- $a_1 = x_0 = 3,5$
- $b_1 = b_0 = 4$
- $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{3,5+4}{2} = 3,75$
- $f(x_1) = 9(3,75)^3 + 3(3,75)^2 - 600 = -83,203$

- $E_1 = |x_1 - x_0| = |3,75 - 3,5| = 0,25$

Nesta etapa, no Excel, precisamos inserir as fórmulas para a_n , b_n e E_n , uma vez que as fórmulas para x_n e $f(x_n)$ já foram inseridas no passo anterior. Para calcularmos x_1 e $f(x_1)$, basta selecionar as células D2 e E2 e "arrastar" para baixo:

	A	B	C	D	E	F
1	n	$a_n(-)$	$b_n(+)$	x_n	$f(x_n)$	E_n
2	0	3	4	3,5	-177,375	
3	1	3,5	4	3,75	-83,20313	0,25

Figura 1.14: Cálculo automatizado de x_1 e $f(x_1)$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

n	$a_n(-)$	$b_n(+)$	x_n	$f(x_n)$	E_n
0	3	4	$= (B2+C2)/2$	$= 9*D2*D2*D2 + 3*D2*D2 - 600$	
1	$=SE(E2<0;D2;B2)$	$=SE(E2>0;D2;C2)$	$= (B3+C3)/2$	$= 9*D3*D3*D3 + 3*D3*D3 - 600$	$=ABS(D3-D2)$

Tabela 1.11: Fórmulas utilizadas no Excel para aplicação do método da bisseção.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Esse processo deve continuar até que o erro máximo E_n se torne menor ou igual à tolerância prefixada $\epsilon = 0,01$. Logo, a tabela completa pode ser visualizada a seguir:

n	$a_n(-)$	$b_n(+)$	x_n	$f(x_n)$	E_n
0	3	4	3,5	-177,375	
1	3,5	4	3,75	-83,203125	0,25
2	3,75	4	3,875	-31,283203	0,125
3	3,875	4	3,9375	-4,0686035	0,0625
4	3,9375	4	3,96875	9,85812378	0,03125
5	3,9375	3,96875	3,953125	2,86796951	0,015625
6	3,9375	3,953125	3,9453125	-0,6070018	0,0078125

Tabela 1.12 - Tabela completa com seis iterações

Fonte: Elaborada pelo autor.

Conseguimos atingir a tolerância $\epsilon = 0,01$ desejada na questão e, assim, a menor dimensão da nossa caixa é igual a $x_6 = 3,9453\text{cm} = 39,453\text{ mm}$. Provavelmente, a empresa não trabalhará com uma precisão na casa dos décimos de milímetros e o valor $x = 39\text{ mm}$ já atenda à necessidade da situação. De fato, se trabalhássemos com uma tolerância igual a 0,0001, obteríamos o valor $x_{13} = 3,9467\text{ cm} = 39,467\text{ mm}$ e, continuaríamos com $x = 39\text{ mm}$. Evidentemente, a precisão desejada deve ser analisada caso a caso e de acordo com a necessidade/custo computacional envolvidos. Portanto, as outras dimensões são $y=59\text{mm}$ e $z=128\text{mm}$.

Finalmente, para conseguir a última tabela acima, de forma automatizada no Excel, devemos selecionar as células da linha 3 (de A até F) e "arrastar" para baixo até a precisão requerida ser alcançada. As Figuras do antes e depois dessa ação, bem como a tabela com as fórmulas, seguem abaixo:

	A	B	C	D	E	F
1	n	$a_n(-)$	$b_n(+)$	x_n	$f(x_n)$	E_n
2	0	3	4	3,5	-177,375	
3	1	3,5	4	3,75	-83,20313	0,25

Figura 1.15: Passo a passo para o cálculo automatizado dos elementos das linhas da tabela do método da bisseção.

Fonte: Elaborada pelo autor.

	A	B	C	D	E	F
1	n	$a_n(-)$	$b_n(+)$	x_n	$f(x_n)$	E_n
2	0	3	4	3,5	-177,375	
3	1	3,5	4	3,75	-83,20313	0,25
4	2	3,75	4	3,875	-31,2832	0,125
5	3	3,875	4	3,9375	-4,068604	0,0625
6	4	3,9375	4	3,96875	9,8581238	0,03125
7	5	3,9375	3,96875	3,953125	2,8679695	0,015625
8	6	3,9375	3,953125	3,9453125	-0,607002	0,0078125

Figura 1.16: Tabela completa do método da bisseção (seis iterações).

Fonte: Elaborada pelo autor.

n	$a_n(-)$	$b_n(+)$	x_n	$f(x_n)$	E_n
0	3	4	$= (B2+C2)/2$	$=9*D2*D2*D2+3*D2*D2-600$	
1	$=SE(E2<0;D2;B2)$	$=SE(E2>0;D2;C2)$	$= (B3+C3)/2$	$=9*D3*D3*D3+3*D3*D3-600$	$=ABS(D3-D2)$
2	$=SE(E3<0;D3;B3)$	$=SE(E3>0;D3;C3)$	$= (B4+C4)/2$	$=9*D4*D4*D4+3*D4*D4-600$	$=ABS(D4-D3)$
3	$=SE(E4<0;D4;B4)$	$=SE(E4>0;D4;C4)$	$= (B5+C5)/2$	$=9*D5*D5*D5+3*D5*D5-600$	$=ABS(D5-D4)$
4	$=SE(E5<0;D5;B5)$	$=SE(E5>0;D5;C5)$	$= (B6+C6)/2$	$=9*D6*D6*D6+3*D6*D6-600$	$=ABS(D6-D5)$
5	$=SE(E6<0;D6;B6)$	$=SE(E6>0;D6;C6)$	$= (B7+C7)/2$	$=9*D7*D7*D7+3*D7*D7-600$	$=ABS(D7-D6)$
6	$=SE(E7<0;D7;B7)$	$=SE(E7>0;D7;C7)$	$= (B8+C8)/2$	$=9*D8*D8*D8+3*D8*D8-600$	$=ABS(D8-D7)$

Tabela 1.13: Fórmulas utilizadas no Excel para aplicação do método da bisseção.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Encontramos apenas uma raiz para a equação, mas é importante notar que uma equação do terceiro grau possui até três raízes reais. Isso significa que as outras raízes são números complexos e, portanto, não resolvem o nosso problema que só admite soluções reais. Esse fato pôde ser observado quando construímos os gráficos das funções $g(x)$ e $h(x)$, no método gráfico. Adicionalmente, o gráfico da própria função $f(x)$ corrobora o que discutimos até aqui.

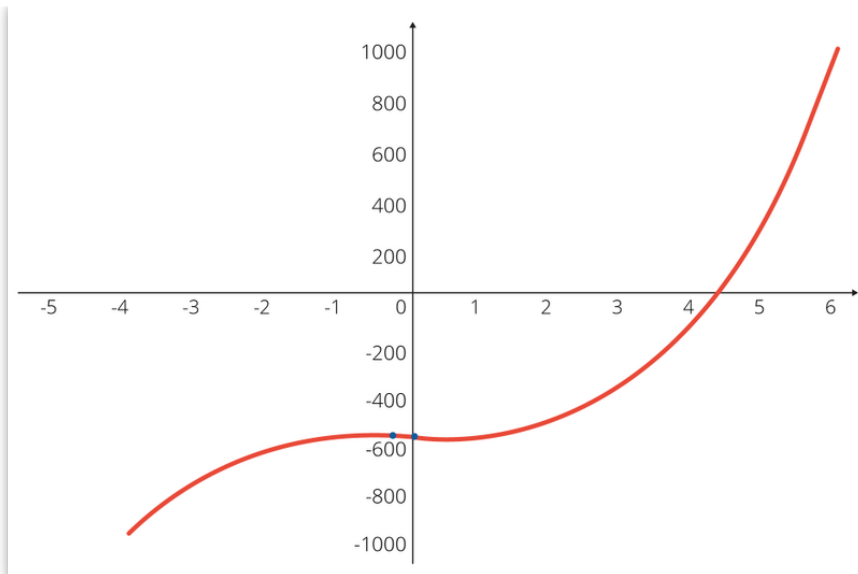


Figura 1.17 - Gráfico da função $f(x)$, evidenciando a unicidade da solução encontrada
Fonte: Elaborado pelo autor.

praticar

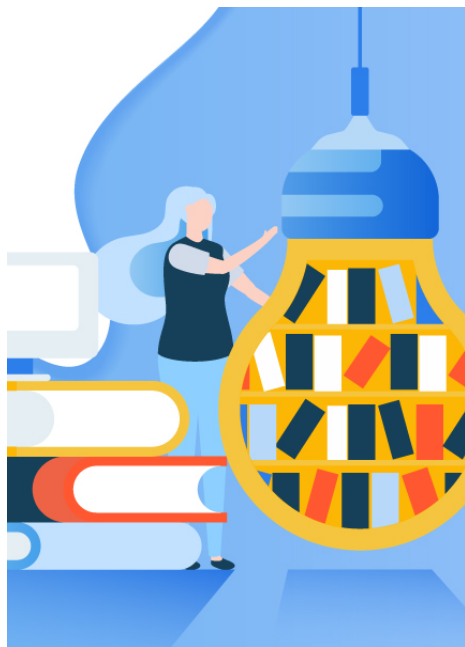
Vamos Praticar

Retome o problema da embalagem, isto é, o problema da definição das dimensões de uma embalagem (em forma de paralelepípedo) que deve ser um veículo que possui as seguintes proporções: $y = \frac{3}{2}x$ e $z = 3x + 1$. Usando o intervalo que você determinou na atividade anterior para a raiz, ou seja, $\lambda \in [4, 2; 4, 4]$, aplique o método da bisseção e, considerando um volume de 400 cm^3 , calcule a raiz do problema com uma tolerância $\epsilon \leq 0,01$.

- ☐ a) $x = 4,35313$
- ☐ b) $x = 4,37500$
- ☐ c) $x = 4,35459$
- ☐ d) $x = 4,36250$
- ☐ e) $x = 4,35625$

indicações

Material Complementar



LIVRO

Cálculo Numérico Aplicado

José Viriato Coelho Vargas e Luciano Kiyoshi Araki

Editora: Manole

ISBN: 8520445780

Comentário: Além dos conteúdos tradicionais do cálculo numérico, o livro aborda mais fortemente os conteúdos sobre as equações algébricas não lineares e, uma vez que a modelagem dos fenômenos físicos normalmente nos remete a equações não lineares, é de suma importância o conhecimento desse tema.



FILME

O Jogo da Imitação

Ano: 2014

Comentário: Levando em consideração a combinação numérica, essa história conta uma parte da vida do formidável matemático Alan Turing e de alguns dos seus trabalhos no período da Segunda Guerra Mundial. Turing e sua equipe conseguiram decifrar a máquina Enigma, a qual foi utilizada pelo exército alemão para enviar mensagens criptografadas aos seus soldados.

TRAILER

conclusão

Conclusão

A disciplina Cálculo Numérico Computacional foi introduzida como um componente essencial ao pleno desenvolvimento aos estudantes das diversas engenharias e áreas afins. Buscamos justificar a necessidade de compreensão dos métodos numéricos para a resolução de equações por meio de problemas práticos que ocorrem em empresas/indústrias, como o problema das embalagens.

Na resolução de um problema através da aplicação de métodos numéricos, devemos estar atentos aos erros inerentes e indissociáveis aos processos numéricos: erros de arredondamento, erros de truncamento e propagação de erros. É de fundamental importância o conhecimento das aproximações envolvidas tanto na fase de modelagem quanto na fase de resolução, uma vez que a confiabilidade das respostas depende fortemente desses aspectos.

O método gráfico mostrou-se como uma ferramenta muito útil no isolamento das raízes das equações encontradas na modelagem de algum problema específico, fornecendo um intervalo que contém a raiz procurada. Por sua vez, após o isolamento da raiz procurada, o método da bisseção possibilitou a obtenção de tal raiz com uma tolerância prefixada. Finalmente, o método da bisseção pode refinar a raiz até a precisão requerida em cada problema e, portanto, além de simples, mostrou-se robusto e eficiente.

referências

Referências Bibliográficas

BARROSO, L. C. *et al* . **Cálculo numérico** (com aplicações). 2. ed. São Paulo: Harbra, 1987.

LIMA, E. L. *et al* . **A matemática do Ensino Médio** . 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. v. 3.

