

# **MECÂNICA DOS SÓLIDOS – ESTÁTICA**

## **UNIDADE 2 - RESULTANTES E EQUILÍBRIO**

Wladimir Alex Magalhães Barcha



# Introdução

Na Engenharia estrutural, o cálculo e a correta identificação dos esforços que atuam sobre um certo componente é de suma importância para o seu correto dimensionamento. Você já parou para pensar quais são os esforços que atuam sobre a roda de um carro enquanto ele está em movimento? E o que aconteceria caso um componente, que foi erroneamente dimensionado, se quebrasse? Percebe a importância do correto dimensionamento de um componente de um carro?

Esse é apenas um exemplo corriqueiro do nosso dia a dia. Poderíamos citar mais centenas e centenas de exemplos, tais como o dimensionamento de pontes, edifícios, aviões, motocicletas, eletrodomésticos, próteses, celulares etc.

Iniciaremos a unidade estudando o efeito de forças atuantes sobre partículas. Estudaremos como substituir duas ou mais forças atuantes sobre uma certa partícula por uma única força resultante. Essa resultante possui o mesmo efeito que as forças originais que atuam sobre a partícula.

Também iremos estudar o conceito de momento de uma força e de um binário. Você sabe o que é o binário de uma força? Não? Então não deixe de acompanhar esta unidade.

Por fim, vamos aprender os conceitos do diagrama de corpo livre, uma poderosa ferramenta para a análise estrutural, bem como os passos para a sua utilização.

Vamos lá? Acompanhe esta unidade com atenção!

## 2.1 Condição de equilíbrio de uma partícula

De acordo com a primeira lei de Newton, pode-se afirmar que um corpo ou partícula está em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme se a resultante das forças que atuam sobre ela é nula. Neste caso, pode-se dizer que a partícula está em equilíbrio.

Considere uma partícula  $P$  sujeita a um sistema de forças  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ :

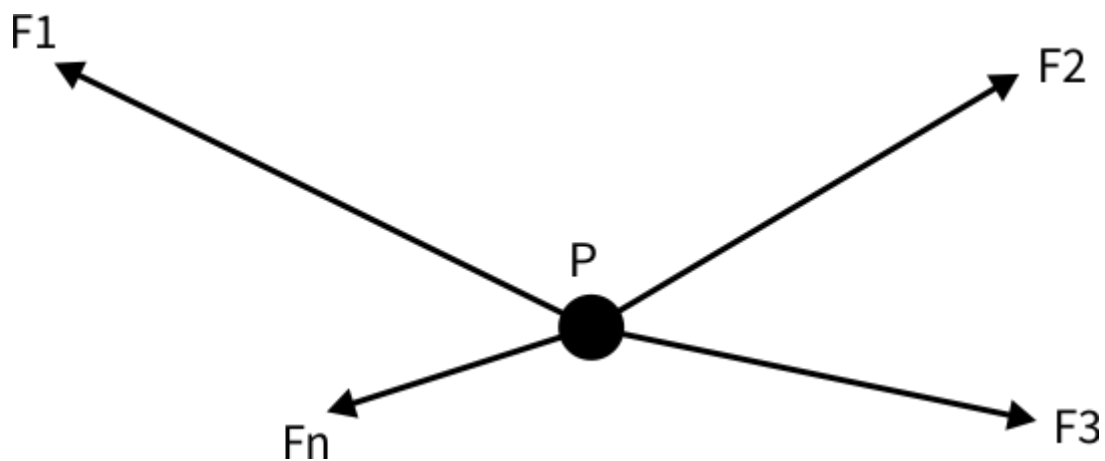


Figura 1 - Partícula sujeita a  $n$  forças.  
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

A partícula  $P$  está em equilíbrio quando é nula a resultante das forças que atuam sobre ela, isto é:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} \text{ ou } \mathbf{R} = \mathbf{F1} + \mathbf{F2} + \mathbf{F3} + \dots + \mathbf{Fn} = \mathbf{0}$$

---

## VOCÊ QUER VER?

A aula online *Me Salva! – Equilíbrio de um ponto material* é uma vídeoaula completa que aborda os principais tópicos sobre equilíbrio de um ponto material. Ficou interessado? Acesse aqui: <https://www.youtube.com/watch?v=m7Hpmh4oUhA> (https://www.youtube.com/watch?v=m7Hpmh4oUhA).

---

A condição de equilíbrio de uma partícula é uma garantia de que ela não sofrerá translação. Se as forças atuantes na partícula forem coplanares, deve-se transformar a equação vetorial da soma das forças em duas equações escalares, projetando-se as forças sobre os eixos cartesianos ortogonais X e Y.

---

## VAMOS PRATICAR?

Imagine a seguinte situação: um carro é estacionado em uma rua com um alicate, e o seu proprietário esquece de acionar o freio de mão. Imaginando o carro como uma partícula, e lembrando de sua condição de equilíbrio, explique qual é o movimento que você acha que fará com que o carro se desloque para baixo.

---

Depois de praticar um pouco, continue em frente!

## 2.2 Sistema de forças coplanares

Já aprendemos que a adição de forças pode ser realizada através das regras do paralelogramo e/ou do triângulo e também que o triângulo de forças utilizado para a obtenção da força resultante de duas forças utilizava uma solução trigonométrica.

Já quando três ou mais forças são adicionadas, não há uma solução trigonométrica prática que possa ser utilizada a partir do polígono de forças que define a resultante das forças. Assim, faz-se necessário a utilização de uma solução analítica do problema que decomponha cada força em dois componentes retangulares.

A figura a seguir mostra uma partícula A com três forças **P**, **Q** e **S** atuando sobre ela. A resultante **R** pode ser expressa como:

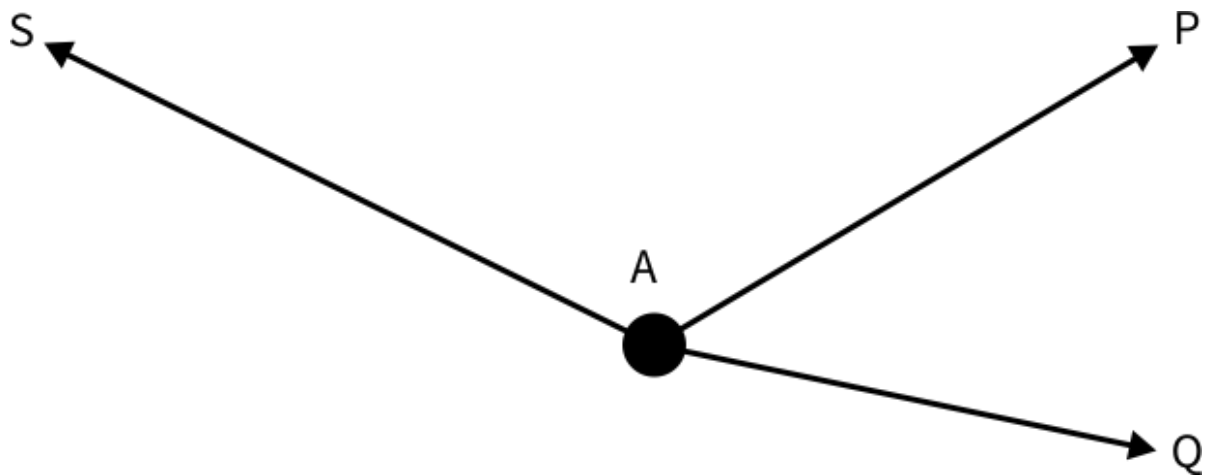


Figura 2 - Partícula com mais de duas forças aplicadas sobre ela.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S}$$

Fazendo a decomposição de cada força em dois componentes retangulares, temos:

$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + S_x\mathbf{i} + S_y\mathbf{j}$$

$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} = (P_x + Q_x + S_x)\mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y)\mathbf{j}$$

Assim,

$$R_x = P_x + Q_x + S_x \gggg R_x = \sum F_x$$

$$R_y = P_y + Q_y + S_y \gggg R_y = \sum F_y$$

Desta forma, pode-se afirmar que os componentes escalares  $R_x$  e  $R_y$  da força resultante **R** de várias forças que atuam sobre uma partícula podem ser obtidos pela adição dos respectivos componentes escalares destas forças.

De modo geral, a obtenção da força resultante **R** pode ser feita em três etapas: na primeira, as forças mostradas na figura anterior são decompostas nas componentes x e y; Na segunda etapa, é feita a adição dos componentes x e y e a consequente obtenção de  $R_x$  e  $R_y$ ; Na terceira e última etapa a resultante  $\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$  é obtida através do uso da regra do paralelogramo.

Todo esse procedimento ficará mais prático e evidente se os cálculos forem alocados em uma tabela. O exemplo a seguir demonstra a aplicação prática do procedimento proposto.

### Exemplo

A figura a seguir mostra um parafuso olhal (A) com quatro forças aplicadas sobre ele. Determine a força resultante sobre o parafuso.

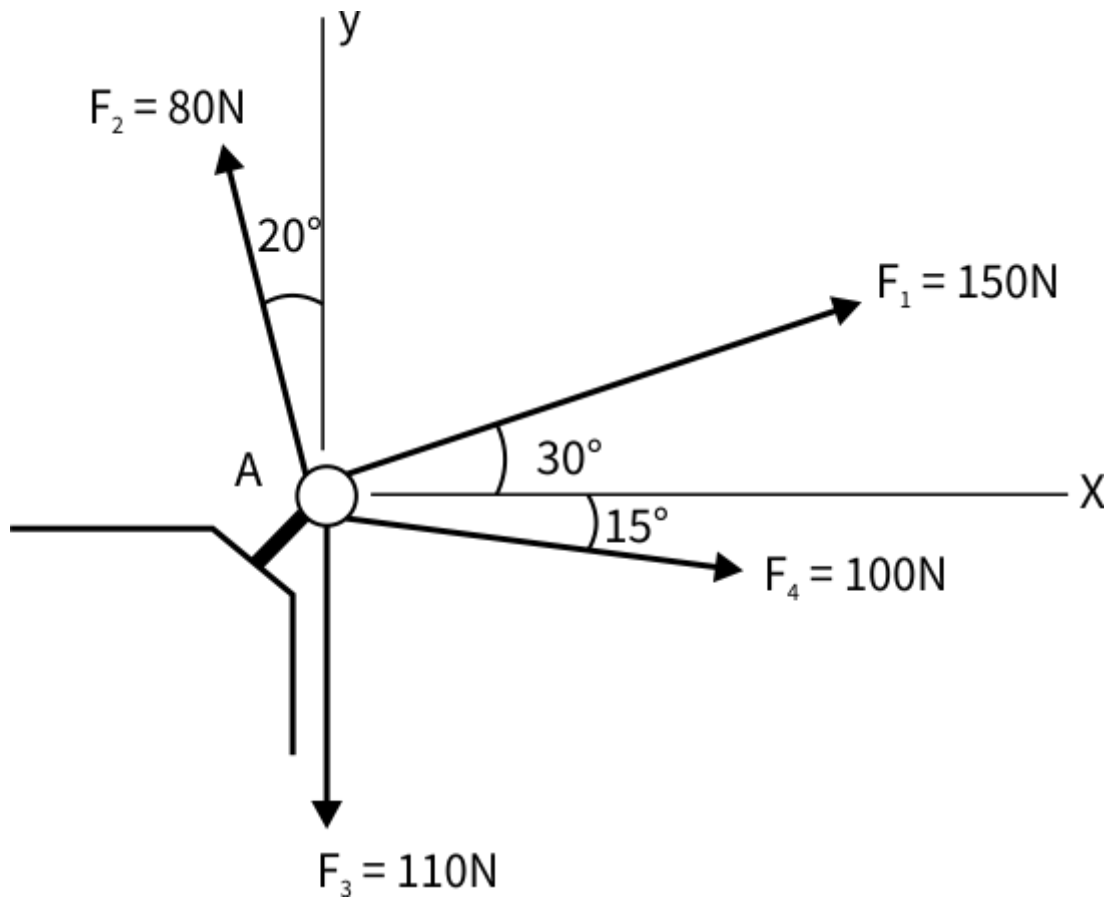


Figura 3 - Exemplo de aplicação de forças coplanares.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

**Solução:**

Os componentes x e y de cada força são obtidos através da trigonometria e foram inseridos na tabela:

Força	Magnitude (N)	Componente x (N)	Componente y (N)
$F_1$	150	$F_1 \cdot \cos 30^\circ = 129,90$	$F_1 \cdot \sin 30^\circ = 75$
$F_2$	80	$-F_2 \cdot \sin 20^\circ = 27,36$	$F_2 \cdot \cos 20^\circ = 75,18$
$F_3$	110	0	-110
$F_4$	100	$F_4 \cdot \cos 15^\circ = 96,59$	$-F_4 \cdot \sin 15^\circ = -25,88$
		$R_x = +199,13$	$R_y = +14,30$

Figura 4 - Tabela de alocação dos cálculos obtidos durante a execução do problema.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Assim, a resultante das quatro forças aplicadas no ponto A fica:

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} \gg \gg \gg \mathbf{R} = (199,13 \text{ N})\mathbf{i} + (14,30 \text{ N})\mathbf{j}$$

A magnitude, a direção e o sentido da resultante podem ser obtidos a partir do triângulo mostrado a seguir (construído com as componentes da resultante).

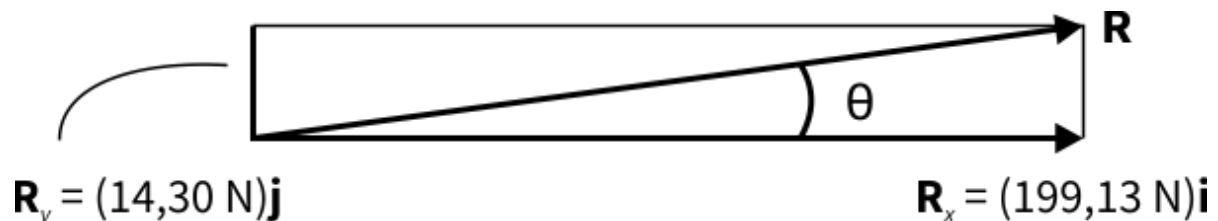


Figura 5 - Triângulo formado pelas componentes de  $\mathbf{R}$ .

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Da figura anterior temos:

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14,30 \text{ N}}{199,13 \text{ N}} \gg \gg \gg \gg \theta = 4,11^\circ$$

$$R = \frac{14,30 \text{ N}}{\sin \theta} = 199,52 \text{ N}$$

## 2.3 Momento de uma força: formulação escalar e formulação vetorial

Quando um corpo qualquer é sujeito a uma força  $\mathbf{F}$  ele tenderá a se mover na direção da aplicação da força e também poderá tender a girar em relação a um certo eixo. Esse eixo pode ser uma linha qualquer desde que não seja paralela ou intercepte a linha de aplicação da força. A essa tendência de girar o corpo damos o nome de *momento*  $\mathbf{M}$  da força  $\mathbf{F}$ , ou simplesmente *torque*.

Para exemplificar a aplicação de um momento a figura a seguir mostra a utilização de uma chave de grifo.

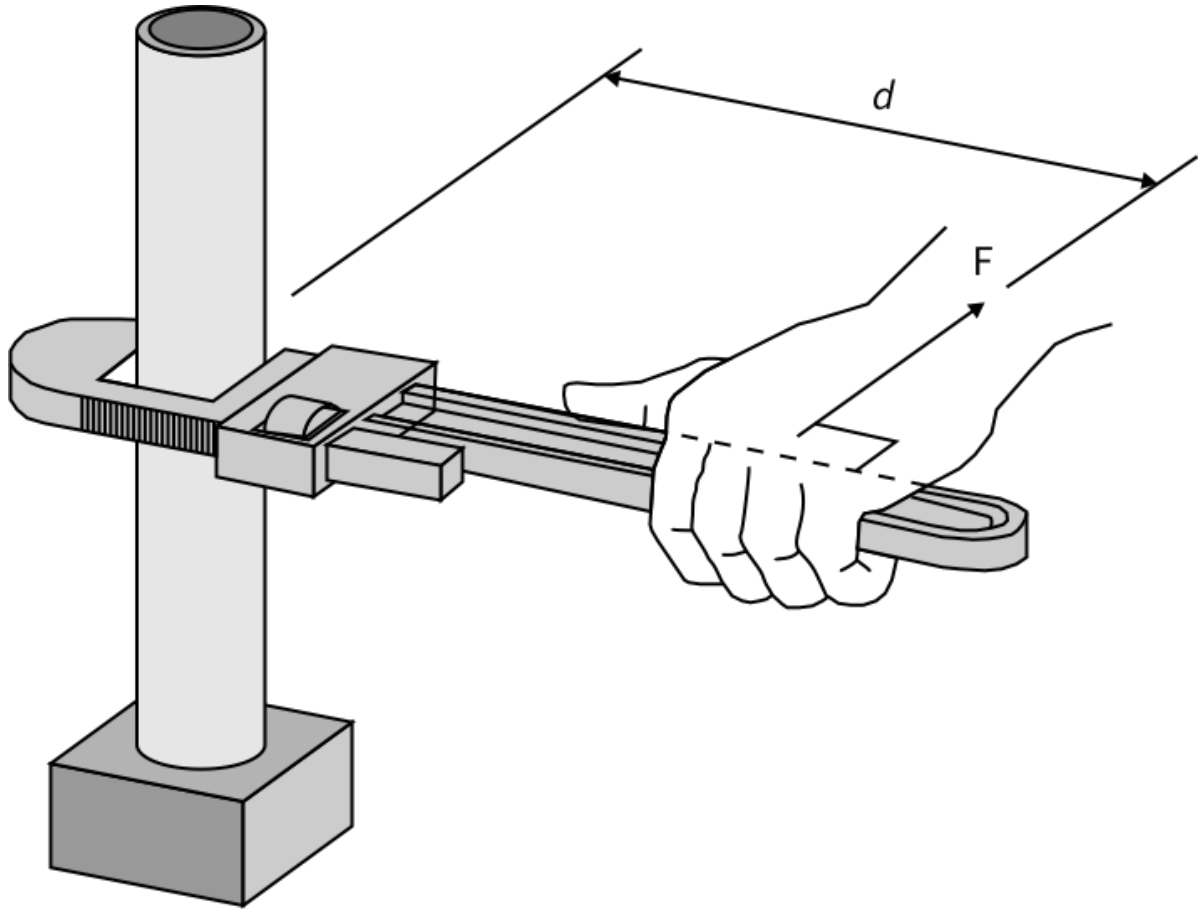


Figura 6 - Exemplo da aplicação de momento.

Fonte: MERIAM, et al., 2015, p. 29.

Quando uma força  $\mathbf{F}$  é aplicada perpendicularmente ao cabo da chave, é criada uma tendência de girar o tubo em torno do seu eixo vertical. O quanto o tubo será girado dependerá de dois fatores: da magnitude da força  $\mathbf{F}$  e do comprimento efetivo do cabo da chave (valor de  $d$  na figura anterior).

### 2.3.1 Formulação escalar

Dado um corpo bidimensional, vide figura a seguir, que é submetido a uma força  $\mathbf{F}$ , podemos dizer que o momento dessa força  $\mathbf{F}$  com relação a um ponto  $O$  (pertencente ao plano do corpo) é dado por um vetor  $\mathbf{M}_O$ , perpendicular ao plano e com magnitude  $Fd$ .

Onde  $d$  é a distância perpendicular da linha de ação da força ao eixo de aplicação do momento. Esta distância também é chamada de *braço de alavanca* do momento. Desta forma, o módulo do momento  $\mathbf{M}_O$  é dado por:

$$M = F \cdot d$$



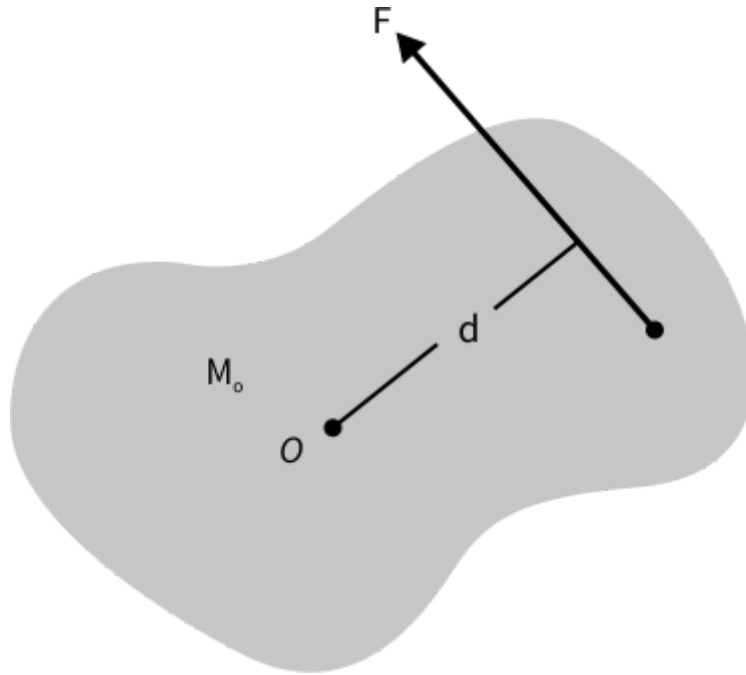


Figura 7 - Corpo bidimensional submetido a aplicação de um momento.

Fonte: Elaborada pelo autor, baseado em MERIAM; KRAIGE, 2015.

O momento de uma força  $F$  que atua no plano do corpo bidimensional deve ser perpendicular a esse plano. Dessa forma, precisamos definir apenas a sua magnitude (dada por  $M = F \cdot d$ ) e o seu sentido. De acordo com o sentido do momento  $M_o$ , atribuímos o sinal positivo ou negativo à sua magnitude. Se o sentido do momento aponta para fora do plano, utilizamos o sinal positivo. Se o sentido aponta para dentro do plano, utilizamos o sinal negativo. Para a definição do sentido do momento, utiliza-se a regra da mão direita, de acordo com a figura a seguir.

---

## VOCÊ SABIA?

A regra da mão direita, também conhecida como Regra de Fleming, foi definida pelo físico John Ambrose Fleming. Esta regra é um recurso que auxilia o estabelecimento da orientação espacial do vetor resultante de um produto vetorial.

---

A regra diz que, utilizando a mão direita, com os dedos curvados na direção da tendência da rotação, o sentido do momento  $M_o$  é dado pela direção do dedo polegar.

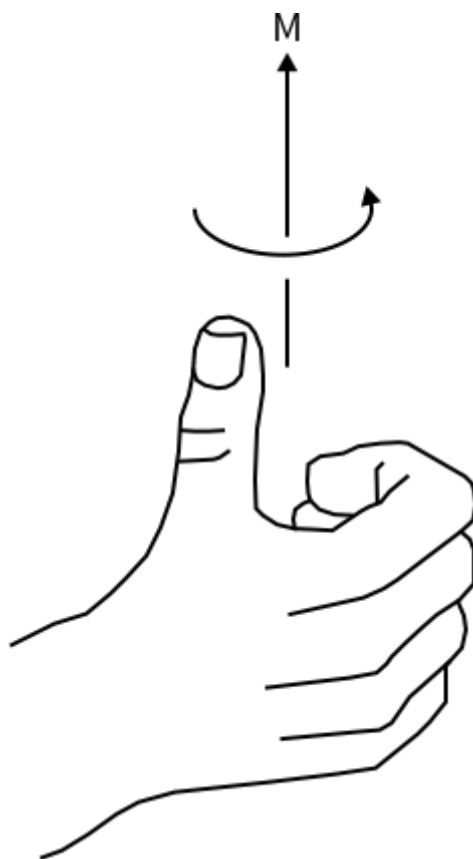


Figura 8 - Regra da mão direita.  
Fonte: MERIAM; KRAIGE, 2015, p. 29.

---

## VOCÊ SABIA?

A regra da mão direita, também conhecida como Regra de Fleming, foi definida pelo físico John Ambrose Fleming. Esta regra é um recurso que auxilia o estabelecimento da orientação espacial do vetor resultante de um produto vetorial.

---

Prezado estudante, lembre-se: utilizando o Sistema Internacional de Unidades (SI) a unidade do momento é o Newton.metro (N.m).

### **2.3.2 Formulação vetorial**

Até aqui vimos como obter o momento de uma força aplicada em corpos bidimensionais. Para a determinação do momento de uma força no espaço utilizaremos a formulação vetorial. O momento de  $\mathbf{F}$  em relação ao ponto  $O$  da figura 6 pode ser definido pela expressão do produto vetorial:  $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ .

Onde  $\mathbf{r}$  é o vetor de posição que vai do ponto de referência do momento,  $O$ , até a linha de ação de  $\mathbf{F}$ .

Para facilitar o processo, a força e o vetor de posição do seu ponto de aplicação são decompostos em componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$ . A figura a seguir mostra uma força  $\mathbf{F}$  com suas componentes  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  aplicada em um ponto  $A$  de coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

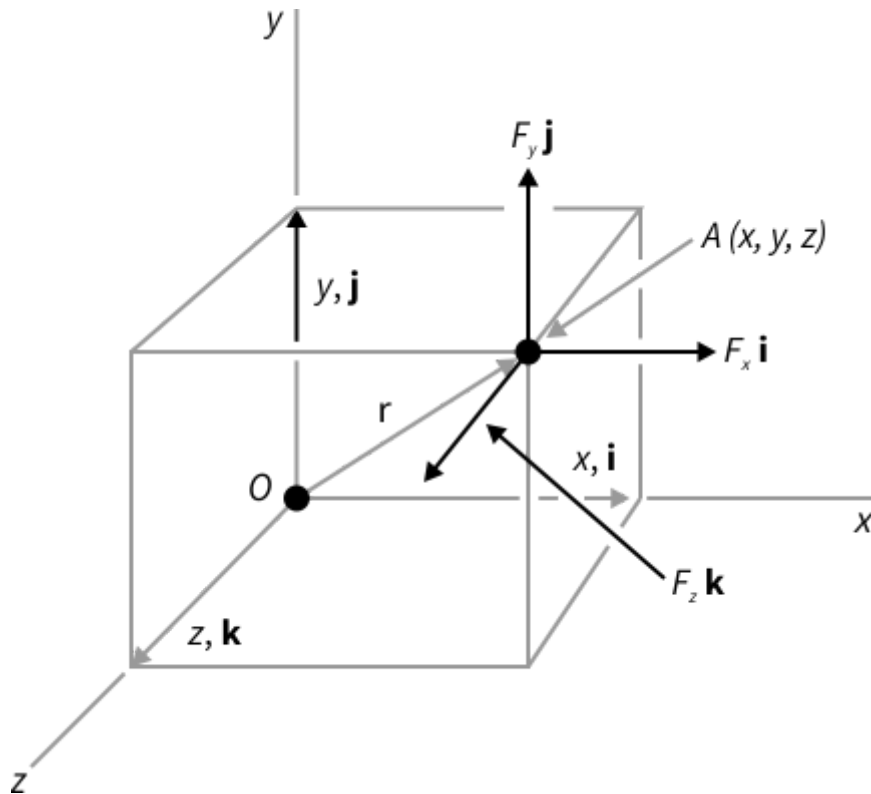


Figura 9 - Força  $\mathbf{F}$  e suas componentes  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$ .

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Note que os componentes do vetor de posição  $\mathbf{r}$  são iguais às coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  do ponto  $A$ . Assim, temos:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

Substituindo  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{F}$  em  $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  temos:

$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}$$

Onde os componentes  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$  são definidos pelas relações:

$$M_x = yF_z - zF_y$$

$$M_y = zF_x - xF_z$$

$$M_z = xF_y - yF_x$$

Os componentes escalares  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$  do momento  $\mathbf{M}_O$  medem a tendência da força  $\mathbf{F}$  de imprimir a um corpo rígido uma rotação em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

### Exemplo

A figura a seguir mostra uma alavanca onde uma força de 450N é aplicada em uma de suas extremidades e que tem a outra extremidade ligada a um eixo em  $O$ . Determine:

- o momento da força de 450N em relação a  $O$ ;
- a força horizontal aplicada em  $A$  que gera o mesmo momento em relação a  $O$ ;
- a força mínima aplicada em  $A$  que gera o mesmo momento em relação a  $O$ ;
- a distância do eixo que deve atuar uma força vertical de 1.080N para gerar o mesmo momento em relação a  $O$ ;
- se alguma das forças obtidas em  $b$ ,  $c$  e  $d$  é a força original.

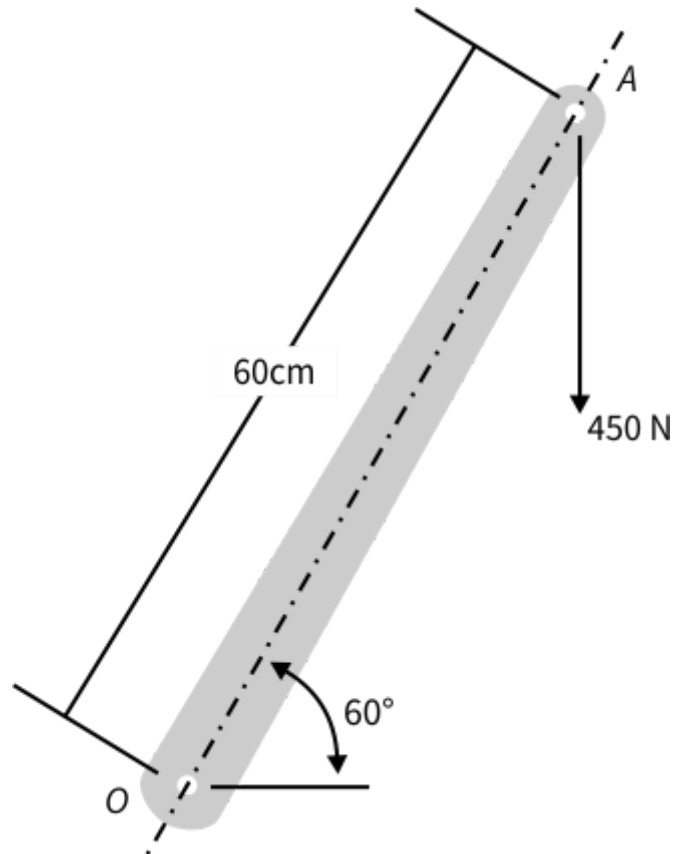


Figura 10 - Alavanca pivotada em  $O$  submetida a uma força de 450 N.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

**Solução:**

Momento em relação a  $O$ . A distância perpendicular de  $O$  até a linha de ação da força de 450 N é:

$$d = 60 \cdot \cos 60^\circ = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$$

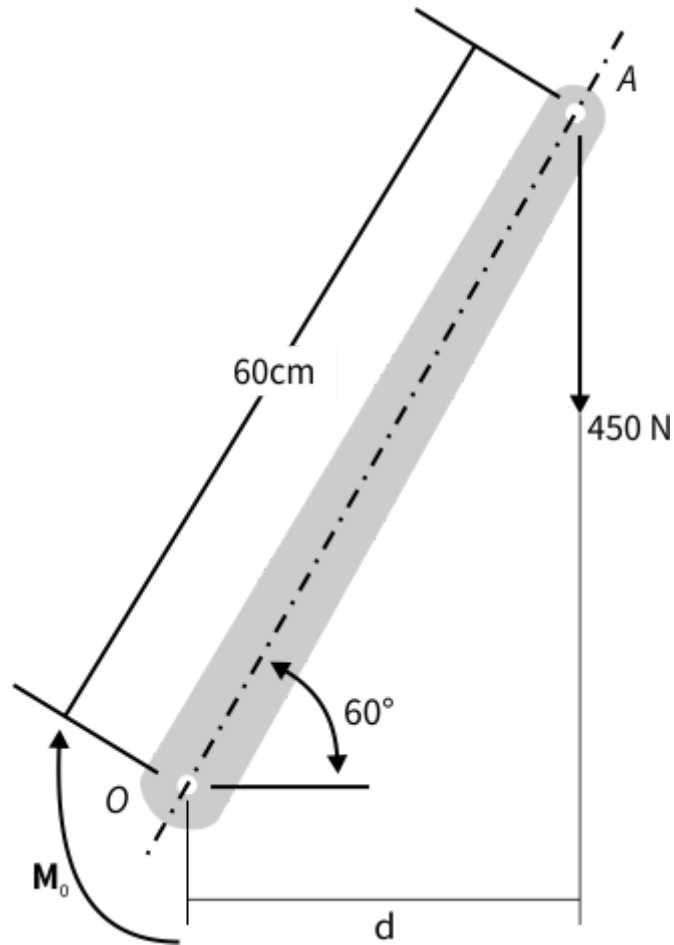


Figura 11 - Distância  $d$  utilizado com braço de alavanca no cálculo do momento da força de 450 N em relação ao ponto  $O$ .

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

A magnitude do momento da força de 450N em relação a  $O$  é:

$$M_o = F \cdot d = 450 \cdot 0,3 = 135 \text{ N.m}$$

Pela regra da mão direita, concluímos que o valor da magnitude é negativa. Assim,

$$M_o = -135 \text{ N.m}$$

Força horizontal. Para esse caso, a distância perpendicular de  $O$  até a linha de ação da força de  $\mathbf{F}$  é:

$$d = 60 \cdot \sin 60^\circ = 52 \text{ cm} = 0,52 \text{ m}$$

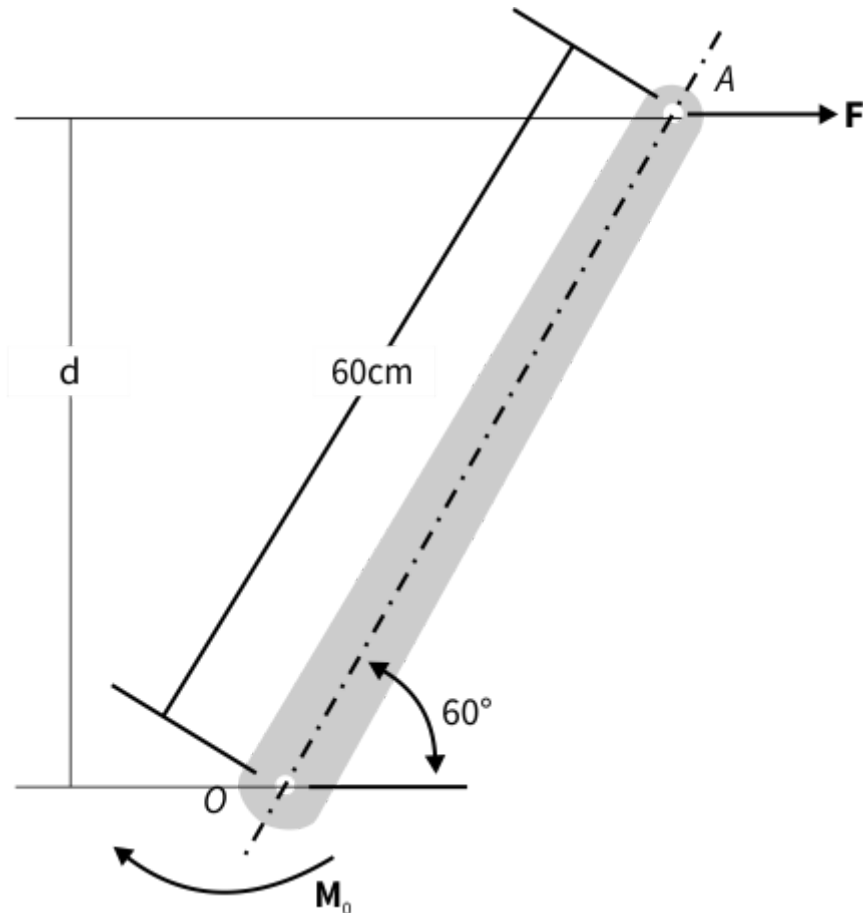


Figura 12 - Distância  $d$  utilizado com braço de alavanca no cálculo do momento da força de  $\mathbf{F}$  em relação ao ponto  $O$ .

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

A magnitude do momento de  $\mathbf{F}$  em relação a  $O$  deve ser de 135N.m. Desta forma temos:

$$M_o = F.d = F.0,52 = 135\text{N.m} \gg \gg F = 259,6\text{N}$$

Força mínima. Como já dito anteriormente, o menor valor de  $F$  ocorrerá quando  $d$  for máximo. A maior distância  $OA$  acontece quando  $\mathbf{F}$  é aplicada perpendicularmente (com  $d = 60\text{cm} = 0,6\text{m}$ ).

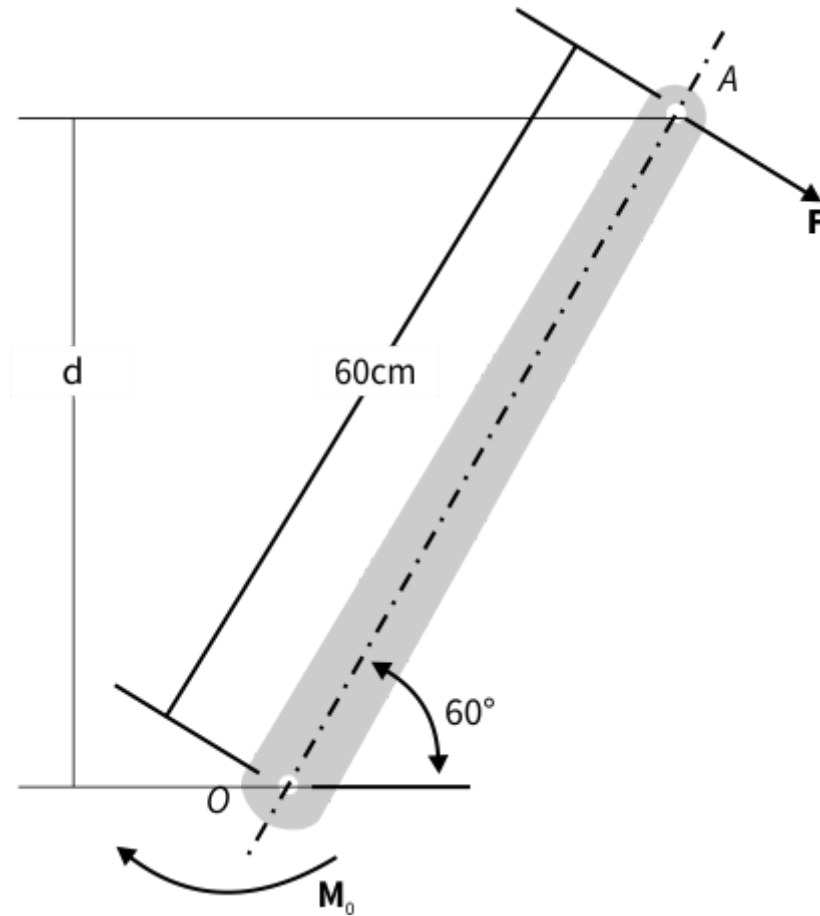


Figura 13 - Posição da força F para cálculo de mínimo valor.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Assim temos,

$$M_o = F.d = F.0,6 = 135\text{N.m} \gggg F = 225\text{N}$$

Força vertical de 1.080N. Para esse caso temos:

$$M_o = F.d = 1080.d = 135\text{N.m} \gggg d = 0,125\text{m} = 12,5\text{cm}$$



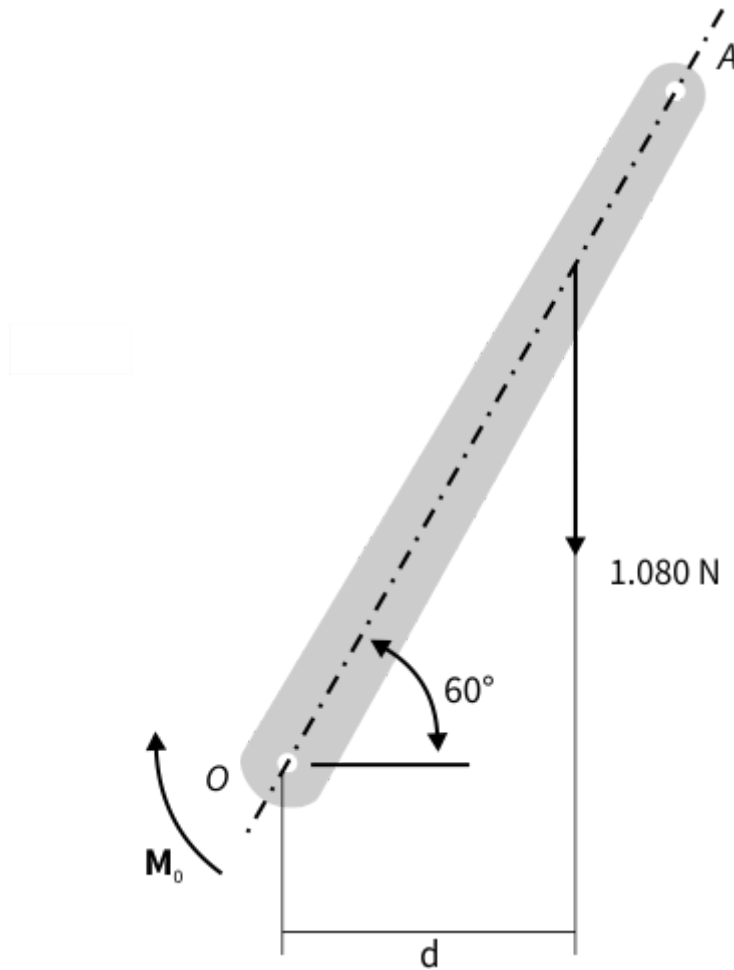


Figura 14 - Distância  $d$  utilizado com braço de alavanca no cálculo do momento da força de 1.080 N em relação ao ponto  $O$ .

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

O valor de  $OB$  é:

$$OB \cdot \cos 60^\circ = d = 12,5\text{cm} \ggggg OB = 25\text{cm}$$

Nenhuma das forças obtidas em  $b$ ,  $c$  e  $d$  é equivalente à força original de 450N. Embora tenham o mesmo momento em relação a  $O$ , as forças têm diferentes componentes em  $x$  e  $y$ .

## 2.4 Princípios dos momentos

O Princípio dos Momentos, também conhecido como teorema de *Varignon* (desenvolvido por Pierre Varignon que foi um matemático francês (1654-1722), diz que o momento de uma força resultante de várias forças concorrentes, em relação a um ponto  $O$ , é igual à somatória dos momentos das várias forças em relação ao ponto  $O$ .

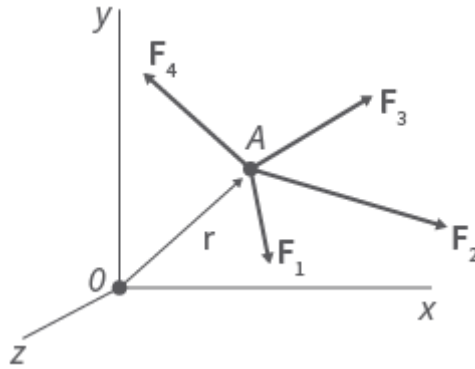


Figura 15 - Momento de várias forças concorrentes.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Se várias forças  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$ , são aplicadas em um mesmo ponto A, vide Figura anterior, e se tivermos o vetor  $\mathbf{r}$  como o vetor de posição de A, pode-se afirmar que:

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_3 + \dots$$

Dessa forma, ao invés de determinarmos diretamente o momento da força resultante, determina-se os momentos das várias forças aplicadas ao ponto A e faz-se a somatória deles.

Para casos bidimensionais, pode-se utilizar o princípio dos momentos através da decomposição da força aplicada em suas componentes x e y e depois determinar o momento através da análise escalar:

$$M_O = F_x y - F_y x$$

## 2.5 Momento de binário

Binário é o momento produzido por duas forças  $\mathbf{F}$  e  $-\mathbf{F}$  de igual magnitude, linhas de ação paralelas e sentidos opostos, vide figura a seguir.



Figura 16 - Forças de um binário.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Mesmo que a soma das componentes das duas forças seja zero, a soma dos momentos das duas forças em relação a um ponto qualquer não é zero. As duas forças atuando em um corpo farão com que ele tenha uma tendência de girar.

A figura na sequência mostra duas forças  $\mathbf{F}$  e  $-\mathbf{F}$  e seus respectivos vetores de posição  $\mathbf{r}_A$  e  $\mathbf{r}_B$ .

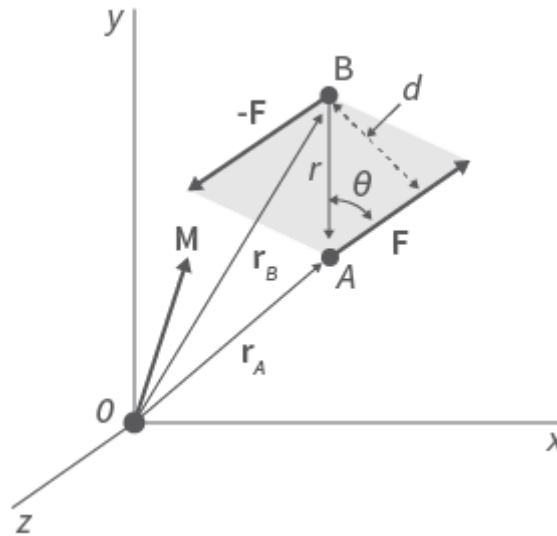


Figura 17 - Momento de um Binário.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

A soma dos momentos das duas forças com relação a  $O$  é dada por:

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

Fazendo  $(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) = \mathbf{r}$ , onde  $\mathbf{r}$  é o vetor que une os pontos de aplicação das duas forças, conclui-se que a soma dos momentos das duas forças com relação a  $O$  é dada pelo vetor:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Onde  $\mathbf{M}$  é o momento do binário, um vetor perpendicular ao plano que contém as duas forças e sua magnitude é dada por:

$$M = rF \sin \theta = Fd$$

Onde  $d$  é a distância perpendicular entre as linhas de ação de  $\mathbf{F}$  e  $-\mathbf{F}$ . A regra da mão direita, vista anteriormente, define o sentido de  $\mathbf{M}$ .

Assim, podemos afirmar que o momento de um binário é um vetor livre pois ele pode atuar em qualquer ponto, uma vez que  $\mathbf{M}$  depende apenas do vetor de posição  $\mathbf{r}$  direcionado entre as duas forças e não dos vetores de posição  $\mathbf{r}_A$  e  $\mathbf{r}_B$ . Desta forma, pode-se afirmar que o mesmo resultado seria obtido se os momentos de  $\mathbf{F}$  e  $-\mathbf{F}$  tivessem sido calculados em relação a um ponto diferente de  $O$ .

### 2.5.1 Binários equivalentes

A figura a seguir mostra quatro configurações diferentes do mesmo binário  $\mathbf{M}$  que atuam sobre a mesma caixa retangular. Como já mencionado anteriormente, o único movimento que um binário pode causar em um corpo rígido é a rotação. Alterar os valores de  $F$  e  $d$  não altera um binário, desde que o produto  $Fd$  permanecer o mesmo. Da mesma forma, um binário não é alterado se as forças atuarem em um plano diferente, desde que paralelos.

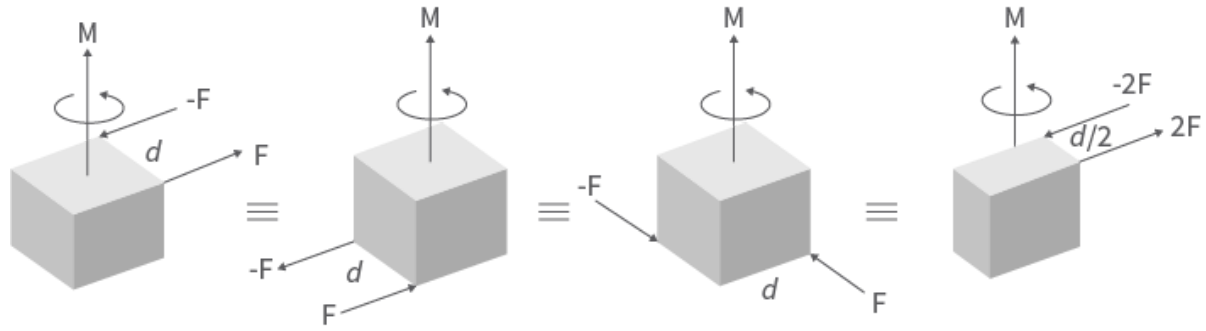


Figura 18 - Diferentes configurações do mesmo binário  $\mathbf{M}$ .

Fonte: MERIAM; KRAIGE, 2015, p. 38.

**Exemplo de Meriam e Kraige (2015, p. 39):**

A figura a seguir apresenta a estrutura rígida, submetida a um binário composto por duas forças de 100N. Substitua o binário composto pelas forças de 100N por um binário equivalente, composto pelas duas forças  $\mathbf{P}$  e  $-\mathbf{P}$ , de 400N. Para isto, determine o ângulo  $\theta$  necessário para esta equivalência.

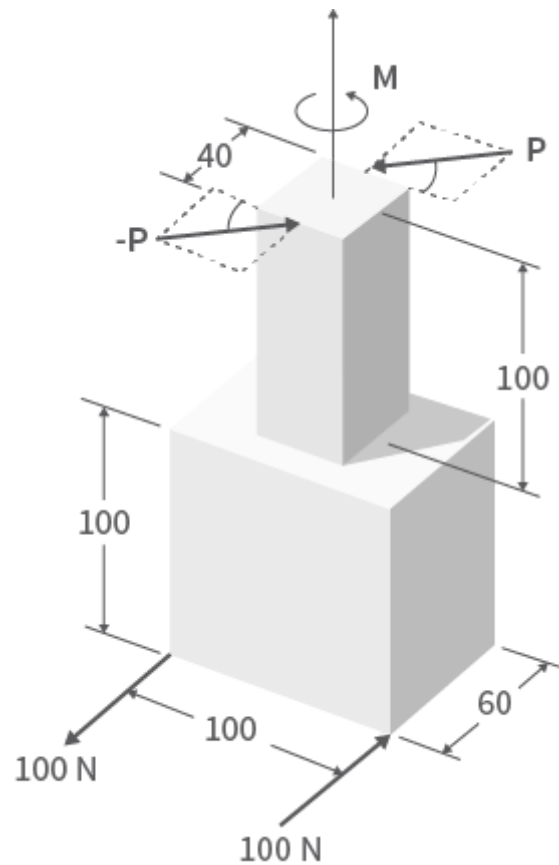


Figura 19 - Estrutura Rígida submetida a binário (medidas em mm).

Fonte: MERIAM; KRAIGE, 2015, p. 39.

Solução:

O binário gerado pelas forças de 100N é anti-horário (regra da mão direita) e seu módulo pode ser obtido por:

$$M = F \cdot d = 100 \cdot (0,1) = 10 \text{ N.m}$$

As forças  $P$  e  $-P$ , de 400N cada, também geram um binário anti-horário e seu módulo pode ser obtido por:

$$M = F \cdot d = 400 \cdot d = 400 \cdot (0,040) \cos \theta$$

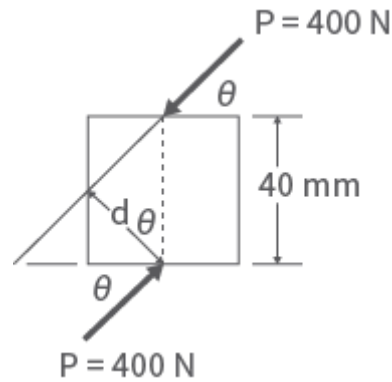


Figura 20 - Esboço para facilitar o cálculo da distância  $d$ .

Fonte: MERIAM; KRAIGE, 2015, p. 39.

Igualando os dois binários temos:

$$10 = 400 \cdot (0,040) \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{10}{16} \quad \theta = 51,3^\circ$$

## 2.6 Simplificação de sistemas de forças e momentos

Dado um corpo rígido onde uma força  $\mathbf{F}$  atua em um ponto  $A$  definido pelo vetor de posição  $\mathbf{r}$ , vide figura a seguir (a). Suponha que queiramos mover a força  $\mathbf{F}$  atuando no ponto  $O$ . Para isso, podemos mover a força  $\mathbf{F}$  mas a sua ação sobre o corpo rígido será alterada.

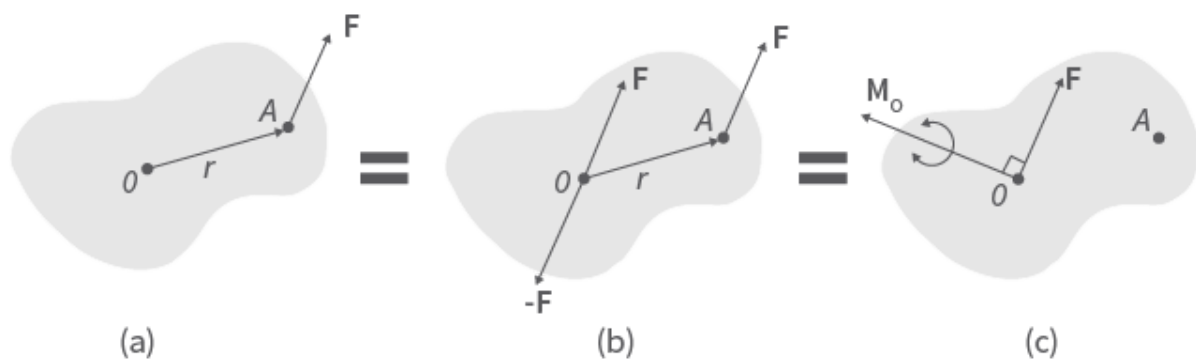


Figura 21 - Corpo Rígido submetido à força e binário.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Para que a ação de  $\mathbf{F}$  não seja alterada, podemos aplicar duas forças no ponto  $O$ , uma igual a  $\mathbf{F}$  e outra igual a  $-\mathbf{F}$ , vide figura anterior (b). O sistema resultante desta operação apresenta uma força  $\mathbf{F}$  aplicada em  $O$  e um binário de momento  $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , vide figura anterior (c).

Desta forma, qualquer força  $\mathbf{F}$  que atue sobre um corpo rígido pode ser movida para um ponto qualquer  $O$ , desde que seja adicionado um binário com momento igual ao momento de  $\mathbf{F}$  em relação a  $O$ . Assim, o binário tenderá aplicar ao corpo rígido a mesma rotação em  $O$  que a força  $\mathbf{F}$  tendia a produzir antes de ser transferida para o ponto  $O$ . O binário é representado por um vetor  $\mathbf{M}_O$ , perpendicular ao plano que contém  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{F}$ . Por ser um vetor livre, como já visto anteriormente,  $\mathbf{M}_O$  pode ser aplicado em qualquer ponto mas por conveniência, o vetor binário é geralmente aplicado em  $O$ , juntamente com  $\mathbf{F}$ . Essa combinação é conhecida como *sistema força-binário* (figura anterior (c)).

De forma similar, um sistema força-binário que consista de uma força  $\mathbf{F}$  e um vetor binário  $\mathbf{M}_O$ , que sejam perpendiculares pode ser substituído por uma única força equivalente. Isso pode ser feito movendo-se a força  $\mathbf{F}$  no plano perpendicular a  $\mathbf{M}_O$  até que seu momento em relação a  $O$  fique igual ao momento do binário a ser eliminado.

## 2.7 Redução de um carregamento distribuído

Até aqui vimos somente a ação de forças concentradas, isto é, que atuam apenas em um certo ponto de um corpo. Neste tópico, iremos estudar a ação de forças distribuídas, isto é, aquelas forças que não atuam somente em um ponto mas sim ao longo da superfície de um corpo.

Esses tipos de força são, por exemplo, aquelas devido a distribuição do peso sobre uma viga, ou da pressão que o vento exerce sobre uma placa de propaganda, entre outras.

Uma força distribuída pode ser definida por uma função que representa a força  $\omega$  por unidade de comprimento, vide figura a seguir, e é expressa em N/m.

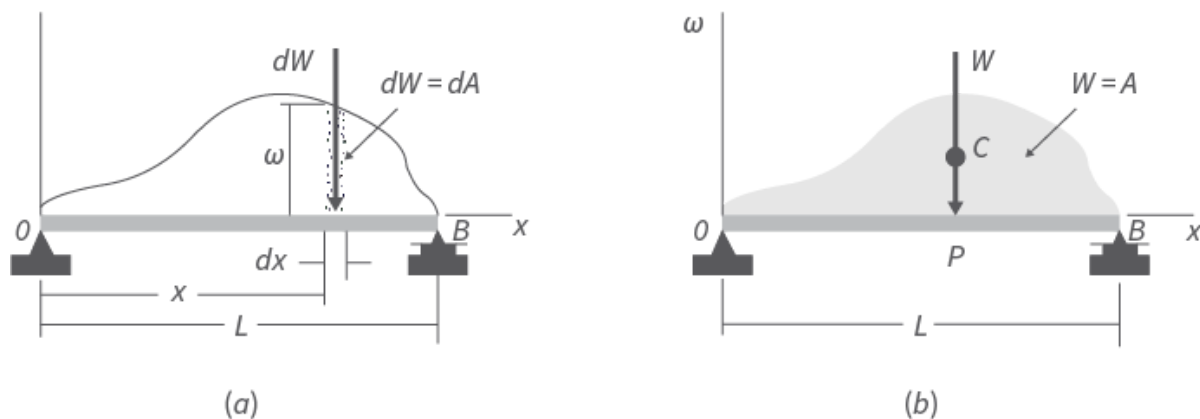


Figura 22 - Sistema de forças distribuídas.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

A magnitude da força sobre um pequeno comprimento da viga,  $dx$ , é  $dW = \omega dx$ , e a força total sobre a viga é dado por:

$$W = \int_0^L \omega dx$$

Na figura anterior, notamos que o produto  $\omega dx$  tem a mesma magnitude que o elemento de área  $dA$ . Dessa forma, podemos afirmar que a força resultante total  $W$  tem a mesma magnitude que a área total abaixo da curva da função que representa a força. Assim, temos:

$$W = \int dA = A$$

Uma vez determinada a força resultante concentrada  $\mathbf{W}$ , com magnitude  $W$  e que representa a força distribuída, precisamos definir qual o seu ponto de aplicação  $P$ , vide figura anterior (b).

Podemos obter o ponto de aplicação  $P$  da força resultante  $\mathbf{W}$  através da igualdade dos momentos de  $\mathbf{W}$  em relação ao ponto  $O$  com a soma dos momentos das forças elementares  $d\mathbf{W}$  também em relação ao ponto  $O$ :

$$OP \cdot W = \int x dW$$

Onde:

$$dW = \omega dx = dA \text{ e } W = A,$$

$$OP \cdot A = \int_0^L x dA$$

Assim, a posição  $P$  da força resultante, dada por  $OP$  é:

$$OP = \frac{\int_0^L x dA}{\int dA}$$

A distância  $OP$  também é a distância do eixo  $\omega$  até o centróide  $C$  da superfície  $A$  formada pela curva da função da força distribuída.

Assim, podemos concluir que uma força distribuída sobre uma viga pode ser substituída por uma força concentrada resultante, com magnitude igual à área formada pela função de distribuição. Também podemos afirmar que a linha de ação da força concentrada resultante passa pelo centróide dessa área.

## 2.8 Condições e equações de equilíbrio

Vimos anteriormente que as forças externas que atuam em um corpo rígido podem ser reduzidas a um sistema força-binário e um ponto qualquer  $O$ . Quando essa força e o binário são iguais a zero, podemos dizer que as forças externas formam um sistema equivalente a zero, e que o corpo rígido está em equilíbrio.

Desta forma, as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de um corpo rígido podem ser descritas como:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0$$

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0$$

Se fizermos a decomposição de cada força e momento em seus componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$ , as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de um corpo rígido podem ser descritas como:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0$$

Com as equações acima, podemos determinar as forças desconhecidas aplicada em um corpo rígido bem como as reações exercidas sobre ele por seus apoios.

De acordo com as expressões, as forças externas e seus momentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  estão em equilíbrio e desta forma, não produzem nenhum movimento de translação ou rotação no corpo.

Para obtermos as equações de equilíbrio de um corpo rígido primeiro precisamos identificar todas as forças que atuam sobre ele e depois desenhar o seu *diagrama de corpo livre*. Além das forças que atuam sobre o corpo rígido, também precisamos identificar as reações exercidas sobre o corpo pelos seus apoios.

Cada apoio exerce uma reação específica sobre o corpo. Mais adiante iremos estudar como saber se o corpo está adequadamente apoiado e se as equações de equilíbrio podem ser resolvidas para forças e reações desconhecidas.

## 2.9 Membros de duas ou três forças



Existem alguns casos particulares de equilíbrio de um corpo rígido, cujo interesse é a simplificação de sua solução. Neste tópico, iremos exemplificar dois casos de muito interesse: o de um corpo rígido sujeito à ação de duas forças e o de um corpo rígido sujeito à ação de três forças aplicadas em três pontos diferentes.

### 2.9.1 Membros de duas forças

Um corpo rígido sujeito à ação de duas forças pode ser considerado um caso particular de equilíbrio. Dois exemplos são apresentados na figura a seguir.

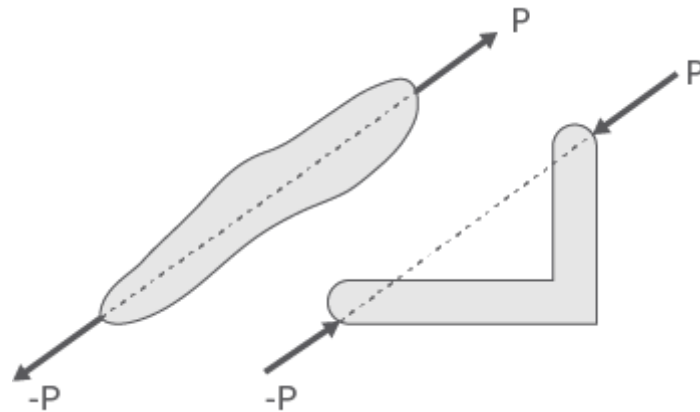


Figura 23 - Membros de duas forças.

Fonte: MERIAM; KRAIGE, 2015, p. 90.

De acordo com a figura, para um corpo rígido estar em equilíbrio as forças aplicadas a ele devem ser iguais, opostas e colineares. A forma do corpo rígido não altera essa condição.

### 2.9.2 Membros de três forças

Um corpo rígido sujeito à ação de três forças também pode ser considerado um caso particular de equilíbrio, vide figura.

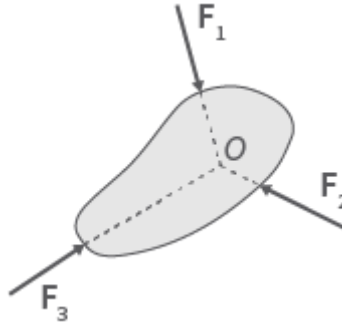


Figura 24 - Membros de três forças.

Fonte: MERIAM; KRAIGE, 2015, p. 90.

Para que o equilíbrio ocorra é necessário que as linhas de ação das três forças sejam concorrentes. Caso elas não sejam concorrentes, uma das forças poderia exercer um momento resultante em torno do ponto de intersecção das outras duas forças. Isso violaria a condição do momento ser zero em relação a todos os pontos e consequentemente a condição de equilíbrio.

A única exceção ocorre para o caso das três forças serem paralelas entre si. Nesse caso, o ponto de concorrência das linhas de ação das três forças é considerado estar no infinito.

## 2.10 Diagrama de corpo livre

Para a solução de um problema relacionado ao equilíbrio de um corpo rígido é necessário que todas as forças que atuam sobre o corpo sejam consideradas. Também é importante excluir qualquer força que não esteja diretamente aplicada ao corpo.

Desta forma, o primeiro passo é desenhar o *diagrama de corpo livre* do corpo rígido que será analisado. A seguir, são propostos cinco passos necessários para a criação de um diagrama de corpo livre, de acordo com Beer, et al., (2013). Clique nos itens e veja.

•

### Primeiro passo

O primeiro passo é em relação ao corpo livre que será utilizado. Assim, o corpo é separado do solo e de todos os outros corpos. Feito isso, é feito um esboço do contorno do corpo a ser analisado.

•

### Segundo passo

No segundo passo todas as forças externas devem ser incluídas no diagrama de corpo livre, tanto as forças exercidas pelo solo como as forças exercidas pelos corpos que foram destacados. Elas devem ser aplicadas nos pontos em que o corpo rígido estava apoiado sobre o solo e/ou conectado a outros corpos.

O peso do corpo livre também deve ser incluído no diagrama e deve ser aplicado no seu centro de gravidade. Quando o diagrama for composto por várias partes, as forças que as várias partes exercem umas sobre as outras não devem ser consideradas pois não são forças externas.

- 

### **Terceiro passo**

No terceiro passo todas as forças externas conhecidas devem ser bem representadas no diagrama de corpo livre, isto é, a sua magnitude, direção e sentido devem ser representadas. Quando indicamos as direções das forças conhecidas é importante lembrar que as forças mostradas no diagrama de corpo livre são aquelas que são exercidas sobre o corpo e não pelo corpo livre. Geralmente, as forças externas conhecidas são o peso do corpo livre e aquelas forças aplicadas com uma dada finalidade.

- 

### **Quarto passo**

No quarto passo são detalhadas as reações. São por meio das reações que o solo e/ou outros corpos se opõem a um possível movimento do corpo livre. São elas que garantem que o corpo livre permaneça na mesma posição e também são conhecidas como forças vinculares.

As reações, que devem ser explicitamente indicadas, são exercidas nos pontos em que o corpo livre é apoiado e/ou conectado a outros corpos. Mais adiante discutiremos as reações detalhadamente.

- 

### **Quinto passo**

No quinto passo são incluídas as dimensões do corpo livre pois elas são úteis no cálculo dos momentos das forças.

---

## VOCÊ QUER LER?

“Engenharia Mecânica: Estática” livro de E. W. Nelson et al, da coleção Schaum, editor Bookman, no capítulo 5, aborda mais detalhes de como proceder para a criação de um diagrama de corpo livre, este é um material muito interessante em que você pode aprender mais sobre o assunto.

---

A seguir veremos como são as forças de reação em apoios de estruturas bidimensionais.

### ***2.10.1 Reações em apoios para estrutura bidimensional***

As reações exercidas sobre estruturas bidimensionais podem ser divididas em três grupos (MERIAM, KRAIGE, 2015), que correspondem também a três tipos de apoios ou conexões.

**1- Reações equivalentes a uma força com linha de ação conhecida.** Os apoios e conexões com reações deste tipo são suportes, roletes, superfícies sem atrito, hastes de conexão, basculantes, cursor em hastes sem atrito e pinos sem atrito em fendas. Esses apoios e conexões podem impedir o movimento em apenas uma direção e envolvem apenas uma incógnita, a magnitude da reação. Já a linha de ação da reação é conhecida e deve ser indicada no diagrama de corpo livre. A figura a seguir mostra o sentido da reação que, no caso de uma superfície sem atrito é em direção ao corpo livre, e no caso de um cabo é afastando-se do corpo;

**2- Reações equivalentes a uma força de direção, sentido e magnitude desconhecidos.** Os apoios e conexões com reações deste tipo são os pinos sem atrito ajustados em furos, articulações e superfícies rugosas. Esses apoios e conexões podem impedir a translação do corpo em todas as direções, mas não o impedem de girar em torno da conexão. Envolvem duas incógnitas e em casos de superfícies rugosas, a componente normal à superfície sai para fora da superfície, e consequentemente, em direção ao corpo livre;

**3- Reações equivalentes a uma força e a um binário.** Os apoios e conexões com reações deste tipo são os engastes. Esses apoios e conexões podem impedir a translação e rotação do corpo em todas as direções, imobilizando-o completamente. Os engastes geram forças ao longo de toda estrutura e podem ser substituídos por sistema força-binário. Envolvem três incógnitas, que geralmente são as duas componentes da força e o momento do binário.

---

## CASO

Hoje em dia, o profissional que atua na área de engenharia estrutural tem à sua disposição uma ferramenta de cálculo poderosíssima: são os softwares de análise por elementos finitos. Com essa ferramenta, o engenheiro pode avaliar se o dimensionamento de um certo componente está correto sem ao menos ter que tê-lo em mãos. Tudo isso é feito virtualmente com o uso de softwares de engenharia assistida por computador (do inglês CAE, Computer Aided Engineering). Com esse tipo de software, o engenheiro modela o componente que deseja estudar (modelo matemático) e aplica as condições de contorno (esforços e apoios, tipo de material etc.) sobre o mesmo. O software então calcula como o componente irá se comportar mediante o efeito desses esforços.

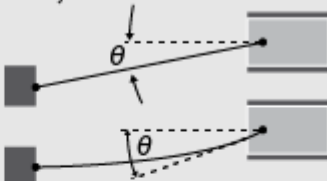
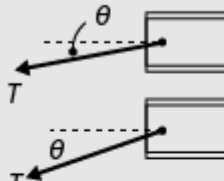

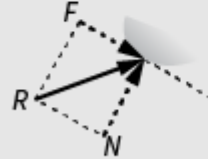







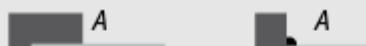
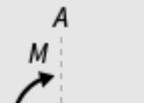
Hoje em dias existem diversos softwares, comerciais ou não, disponíveis para utilização no dia a dia da engenharia estrutural. Os mais difundidos mundialmente são: Ansys, Abaqus, Nastram etc.

---

As duas figuras a seguir trazem alguns exemplos de reações em apoios e conexões muito utilizados no dia a dia.





Modelagem da ação de forças na análise bidimensional	
Tipo de contato e origem da força	Ação sobre o corpo a ser isolado
<p>1. Cabo flexível, correia, corrente ou corda</p> <p>O peso do cabo é desprezível</p> <p>O peso do cabo não é desprezível</p> 	 <p>A força exercida por um cabo flexível é sempre trativa e direcionada do corpo para a direção do cabo.</p>
<p>2. Superfícies lisas</p> 	 <p>A força de contato é compressiva e normal à superfície.</p>
<p>3. Superfícies rugosas</p> 	 <p>Superfícies rugosas são capazes de suportar um componente tangencial <math>F</math> (força de atrito), assim como um componente normal <math>N</math> da força de contato resultante <math>R</math>.</p>
<p>4. Suporte deslizante</p> 	 <p>Apoios de rolete, oscilantes ou de esfera transmitem uma força compressiva normal à superfície de apoio.</p>
<p>5. Guia com deslizamento livre</p> 	 <p>Buchas com movimentos livres ao longo de guias lisas só podem suportar forças normais à guia.</p>
<p>6. Conexão com pino</p> 	<p>Pino com liberdade de rotação</p>  <p>Pino sem liberdade de rotação</p>  <p>Uma conexão com pino, com articulação, é capaz de suportar uma força em qualquer direção no plano normal ao eixo do pino. Podemos mostrar ou duas componentes, <math>R_x</math> e <math>R_y</math>, ou um módulo <math>R</math> e uma direção <math>\theta</math>. Uma conexão com pino sem liberdade de rotação também suporta um momento <math>M</math>.</p>
<p>7. Suporte fixo ou engastado</p> 	 <p>Um suporte engastado ou fixo é capaz de sustentar uma força axial <math>F</math>, uma força</p>



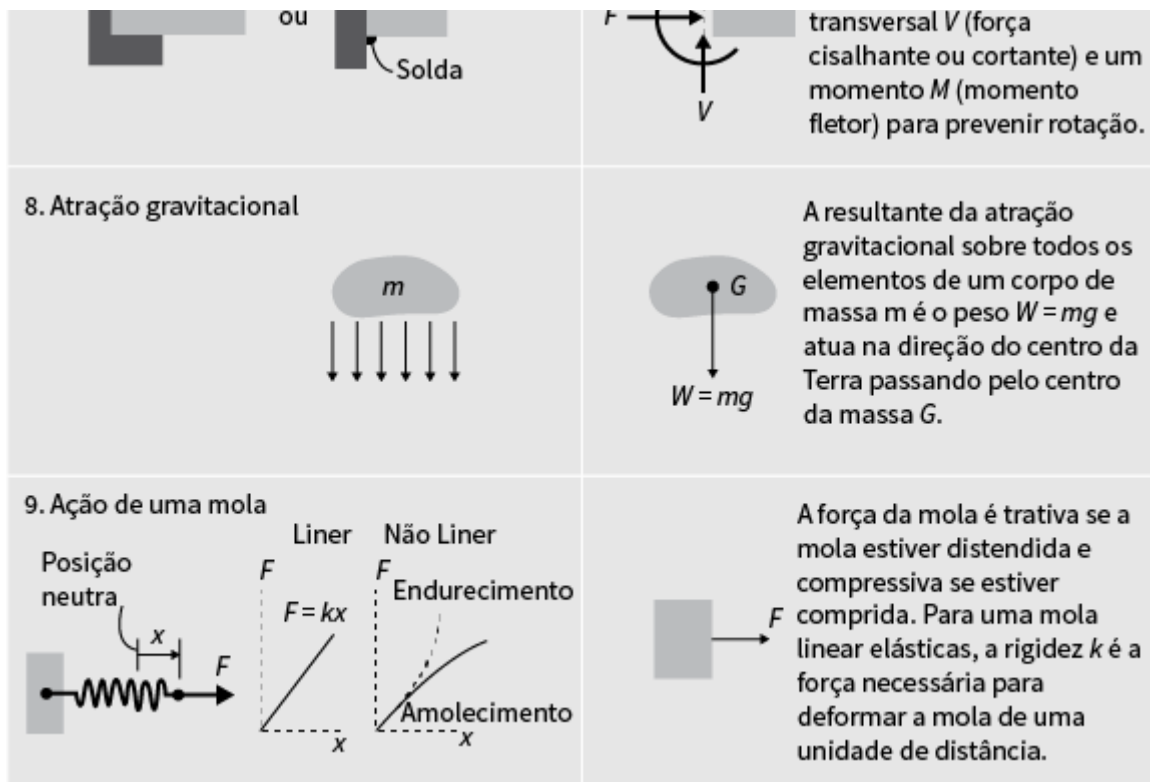


Figura 25 - Reações em apoios e conexões.

Fonte: MERIAM; KRAIGE, 2015, p. 82.

**O exemplo 1** da figura acima mostra a ação de um cabo flexível, de uma corda, correia ou corrente sobre o corpo ao qual estiver preso. Devido à flexibilidade, exerce apenas uma força de tração, em direção tangente ao cabo, no seu ponto de conexão e para longe do corpo.

**No exemplo 2**, as superfícies lisas de dois corpos estão em contato e a força exercida por um corpo no outro é normal à tangente e é de compressão. Apesar de na vida real nenhuma superfície ser perfeitamente lisa, podemos fazer essa consideração em algumas situações.

**No exemplo 3**, as superfícies rugosas de dois corpos estão em contato e a força exercida por um corpo no outro não é necessariamente normal à tangente, mas pode ser dividida em uma componente tangencial ou de fricção  $F$  e outra em uma componente normal  $N$ .

**No exemplo 4**, diversas formas de apoios mecânicos que eliminam forças de fricção tangenciais são mostradas. Nesses casos, a reação resultante é normal à superfície de contato.

**No exemplo 5**, é mostrado a ação de uma guia lisa sobre o corpo que é sustentado por ela. Nenhuma resistência paralela à guia é exercida.

**No exemplo 6**, é mostrado a ação de uma conexão com um pino. Este tipo de conexão pode sustentar uma força em qualquer direção normal ao eixo do pino. Se a junta for livre para girar em torno do pino, a conexão irá suportar apenas a força  $R$ . Se a junta não puder girar, a conexão pode também suportar um momento de reação  $M$ .

**No exemplo 7**, é mostrado as resultantes da distribuição de forças na seção transversal de uma barra ou viga engastada ou com um apoio rígido. O sentido das reações  $F$  e  $V$  e do momento  $M$  em um dado problema depende de como o elemento for carregado.

**No exemplo 8**, é mostrado uma das forças mais comuns, a força devido à atração gravitacional. A resultante é o peso  $W = mg$  do corpo, que passa pelo centro de massa  $G$  e está direcionada para o centro da Terra.

**No exemplo 9**, é mostrado a ação de uma mola linear elástica e de uma mola não linear. A força exercida por uma mola linear, de tração ou compressão, é dada por  $F = kx$ , onde  $k$  é a rigidez da mola e  $x$  é a sua deformação.

Vale lembrar que os exemplos apresentados nas figuras anteriores não são diagramas de corpo livre e sim apenas elementos utilizados para construir diagramas de corpo livre (MERIAM; KRAIGE, 2015).

---

## VOCÊ O CONHECE?

John A. Swanson, engenheiro mecânico com mestrado e doutorado em engenharia mecânica, foi o fundador da ANSYS, Inc., um desenvolvedor de programas de simulação para engenharia sediado em Canonsburg, Pensilvânia, Estados Unidos. A companhia foi fundada em 1970, denominada originalmente como Swanson Analysis Systems, Inc., para desenvolver, suportar e comercializar o software de simulação computacional Ansys.

---

### Exemplo

A figura a seguir mostra um guindaste fixo com massa de 1.000kg que é utilizado para suspender uma carga de 2.400kg. O guindaste é mantido na posição indicada na figura por um pino em  $A$  e um suporte basculante em  $B$ . O centro de gravidade  $G$  do guindaste também é mostrado. Determine as componentes das reações em  $A$  e  $B$ .

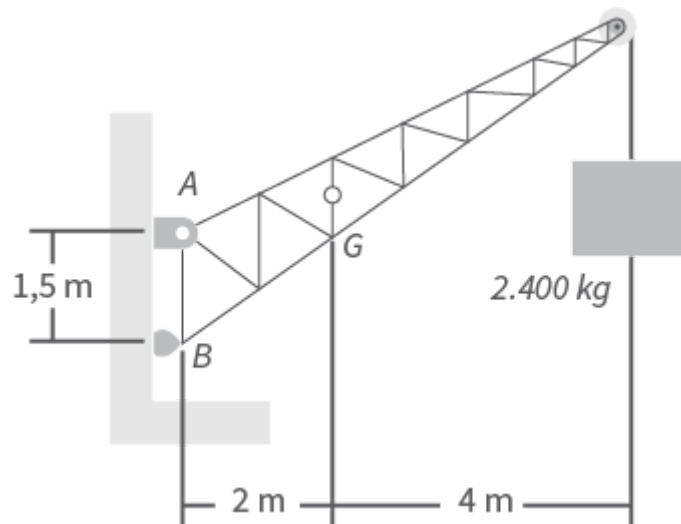


Figura 26 - Guindaste fixo.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

**Solução:**

A primeira coisa a ser feita é criar o diagrama de corpo livre do guindaste. As forças devido às massas do guindaste e carga, obtidas através da multiplicação da massa pela aceleração da gravidade ( $g = 9,81\text{m/s}^2$ ), são 9.810N e 23.500N respectivamente.

A reação no pino A é uma força de direção desconhecida e é decomposta em suas componentes  $A_x$  e  $A_y$ . A reação no suporte basculante B é perpendicular à sua superfície, isto é, na direção horizontal. Assim, o diagrama de corpo livre é mostrado na figura a seguir.

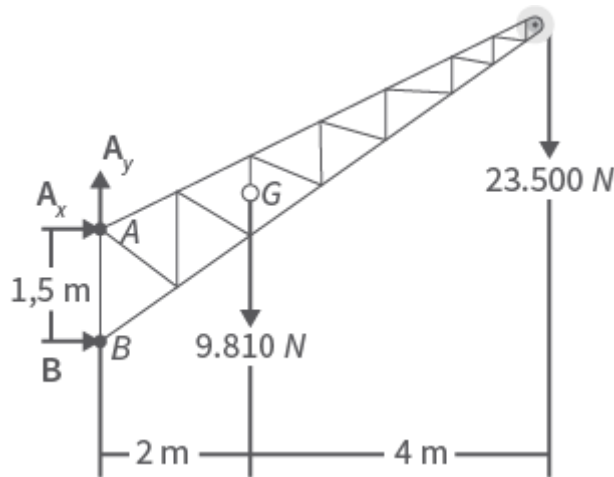


Figura 27 - Diagrama de Corpo Livre.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Cálculo de **B**: A soma dos momentos de todas as forças com relação ao ponto A é zero. Como os momentos de **Ax** e **Ay** em relação à A são nulos, a expressão ficará assim:

$$\Sigma M_A = 0 : \quad + B \cdot (1,5\text{m}) - (9.810\text{N}) \cdot (2\text{m}) - (23.500\text{N}) \cdot (6\text{m}) = 0$$

$$B = +107.080\text{N}$$

Como o resultado é positivo, podemos afirmar que a reação tem a direção que foi atribuída ao diagrama.

Cálculo de **Ax**: A soma das forças na direção horizontal é nula. Assim, temos a expressão:

$$\Sigma F_x = 0 : \quad A_x + B = 0$$

$$A_x + 107.080\text{N} = 0$$

$$A_x = -107.080\text{N}$$

Como o resultado é negativo, podemos afirmar que o sentido de **Ax** é oposto àquele que foi atribuído ao diagrama.

Cálculo de **Ay**: A soma das forças na direção vertical também deve ser nula. Assim, temos a expressão:

$$\Sigma F_y = 0 : \quad A_y - 9.810\text{N} - 23.500\text{N} = 0$$

$$A_y = +33.310\text{N}$$

Como o resultado é positivo, podemos afirmar que o sentido de **Ay** é igual àquele que foi atribuído ao diagrama.

---

## VAMOS PRATICAR?

Imagine a seguinte situação: Uma ponte atravessa um rio de 100 m comprimento. Sobre essa ponte estão 3 carros de massa 1000kg cada um. Agora esboço do diagrama de corpo livre desta ponte.

---

O exemplo mostrado anteriormente, também poderia ser resolvido através de simulação computacional, utilizando-se um software de auxílio à engenharia. Porém, como vimos, a sua resolução é simples e pode ser facilmente obtida através de cálculos manuais.

A simulação computacional normalmente é utilizada para casos mais complexos, onde o cálculo manual demandaria muito esforço.

## Síntese

Chegamos ao final desta unidade, onde foram abordados os principais conceitos de equilíbrio de uma partícula, forças e momentos, bem como as condições e equações de equilíbrio e diagrama de corpo livre. Tudo isso servirá de embasamento para avançarmos para a próxima unidade de análise estrutural.

Nesta unidade, você teve a oportunidade de:

- aprender que uma partícula  $P$  está em equilíbrio quando é nula a resultante das forças que atuam sobre ela;
- aprender que a condição de equilíbrio de uma partícula é uma garantia de que ela não sofrerá translação;
- aprender que os componentes escalares  $R_x$  e  $R_y$  da força resultante  $\mathbf{R}$  de várias forças que atuam sobre uma partícula podem ser obtidos pela adição dos respectivos componentes escalares destas forças;
- aprender que uma força, quando aplicada a um corpo, além da tendência de mover o corpo na direção de sua aplicação, também pode tender a girar o mesmo em relação a um certo eixo e que

essa tendência de girar o corpo é chamada de momento da força, ou também conhecido como torque;

- aprender que para a definição do sentido de um momento, utiliza-se a regra da mão direita, que diz que, utilizando-se a mão direita, com os dedos curvados na direção da tendência da rotação, o sentido do momento é dado pela direção do dedo polegar;
- aprender o Princípio dos Momentos, também conhecido como teorema de *Varignon*, que diz que o momento de uma força resultante de várias forças concorrentes, em relação a um ponto  $O$ , é igual à somatória dos momentos das várias forças em relação ao ponto  $O$ ;
- aprender que Binário é o momento produzido por duas forças  $\mathbf{F}$  e  $-\mathbf{F}$  de igual magnitude, linhas de ação paralelas e sentidos opostos;
- aprender como transformar uma força distribuída aplicada em um corpo em uma força resultante concentra em um ponto;
- aprender a criar um diagrama de corpo livre para a solução de um problema relacionado ao equilíbrio de um corpo bem como os vários passos necessários para a criação de um diagrama de corpo livre.



◀ Clique para baixar o conteúdo deste tema.

## Bibliografia

AMARAL, O. **Estática**. Porto Alegre: Instituto Estadual do Livro, 2006. p. 134 (Coleção 2000) ISBN 8570632983.  
BEER, F. P. et al. **Estática e mecânica dos materiais**. Porto Alegre: AMGH, 2013. ISBN 9788580551655.  
\_\_\_\_\_. **Mecânica vetorial para engenheiros: estática**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. ISBN 9788580550481.  
HIBBELER, R. C. **Estática: mecânica para engenharia**. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. 512 p. ISBN 978-85-7605-815-1.  
LEET, K. M.; UANG, C.; GILBERT, A. **Fundamentos da análise estrutural**. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009. xxii, 790 p. ISBN 978-85-7726-059-1.

ME SALVA ENEM 2019. **Me salva! ESM01** - Equilíbrio de um ponto material: Diagrama de Corpo Livre, Cabos, Polias e Molas. 2015. 9 min. son., color. Disponível em: . Acesso em: 12/09/2019.

MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. **Mecânica para engenharia**, v. 1: estática. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. ISBN 978-85-216-3040-1.

NELSON, E. W. et al. **Engenharia mecânica: Estática**. Porto Alegre: Bookman, 2013;

ONOUYE, B.; KANE, K. **Estática e resistência dos materiais para arquitetura e construção de edificações**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. xv, p. 543. ISBN 978-85-216-2763-0.

SINGER, F. L. **Mecânica para engenheiros: estática**. São Paulo: Harbra & Row do Brasil, 1977. 351 p.

SORIANO, H. L. **Estática das estruturas**. 3.ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014. xv, 422 p. ISBN 978-85-399-0458-7.