ÁLGEBRA LINEAR COMPUTACIONAL
MATRIZES

Autor: Me. Ricardo Noboru Igarashi
Revisor: Raimundo Almeida

INICIAR

introdução

Introdução

Processing math: 79%

ex.: {1x8 , 3x3 , 3x2 , 3x6}

Nesta parte do nosso estudo de Álgebra Computacional, apresentaremos o conceito de matrizes. Começaremos a apresentar como escrever uma matriz e depois apresentaremos os vários tipos de matrizes. Também apresentaremos as operações envolvendo matrizes: adição, subtração e multiplicação. Além disso, usaremos essas operações em equações matriciais. Após isso, apresentaremos as técnicas para o cálculo do determinante. Calcularemos os determinantes desde 1x1 até ordens maiores. Essas técnicas serão importantes no caso de sistemas lineares, pois serão usadas para a resolução desses sistemas, por exemplo, usaremos a regra de Cramer para isso. Por fim, apresentaremos a técnica de escalonamento para a resolução de sistemas lineares. A importância para a parte computacional seria que essas técnicas são aplicadas em algoritmos para sistemas muito grandes (muitas incógnitas).

Matrizes

Podemos definir uma matriz como sendo uma tabela retangular formada por números dispostos ordenadamente em linhas e colunas (WINTERLE, 2000). Por exemplo, se uma matriz possui m linhas e n colunas, dizemos que ela é do tipo $m\,x n$, ou de ordem $m\,x n$.

Dentro de uma matriz, colocamos, geralmente, números que são chamados elementos ou termos da matriz. Se consideramos uma matriz A do tipo $m\,x n$ será escrita do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

Podemos escrever matematicamente a matriz como:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{mxn} \quad com \quad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n \quad i, j \in \mathrm{N}$$

Em que representa a posição da linha onde o elemento se encontra na matriz e   a posição da coluna em que o elemento se encontra na matriz.

Matriz Quadrada

A partir dos conceitos de matriz apresentados, uma matriz especial para o nosso estudo seria a matriz quadrada. A matriz quadrada é toda matriz que tem o mesmo número de linhas e colunas (WINTERLE, 2000). Por exemplo, a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2x2}$$

é uma matriz quadrada de ordem 2.

Há, também, uma matriz

$11 \to$ primeira coluna
$\to$ primeira linha

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3x3}$$

$12 \to$ segunda coluna
$\to$ primeira linha ...

que é uma matriz quadrada de ordem 3.

No nosso curso de Álgebra, essas matrizes quadradas, 2x2 e 3x3 serão de suma importância para o nosso estudo de sistema linear.

Outros conceitos que são de importância em uma matriz quadrada são os elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, …, a_{nn}, que formam a diagonal principal da matriz. A outra diagonal da matriz quadrada denomina-se diagonal secundária. $\to$ muito usado para determinantes

Matriz Triangular

Vamos considerar uma matriz quadrada de ordem n.

Quando todos os elementos que estão acima ou abaixo da diagonal principal são nulos, dizemos que a matriz é triangular. Temos dois exemplos, a seguir. No primeiro exemplo, temos representada uma Matriz triangular inferior e, no segundo, uma Matriz triangular superior.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular

Matriz triangular inferior — Matriz triangular superior

Processing math: 79% …iangular, $a_{ij} = 0$ para $i > j$ ou $a_{ij} = 0$ para $i < j$

Matriz Diagonal

Considere uma matriz quadrada de ordem n.

Se todos os elementos situados acima ou abaixo da diagonal principal são nulos, podemos afirmar que a matriz é diagonal.

Matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Em uma matriz diagonal $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$

Matriz Identidade

Nas nossas definições de matriz, temos de definir a chamada matriz identidade $\mathbf{I_n}$. No caso, a matriz identidade será uma matriz quadrada de ordem n, em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1, e os outros elementos são iguais a zero (WINTERLE, 2000). A seguir, mostramos exemplos de matiz identidade de ordem $2x2$, $3x3$ e nxn.

Matriz Identidade

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3} \quad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{nxn}.$$

Igualdade de Matrizes

Vamos considerar duas matrizes A e B, que possuam a mesma ordem. Considere como exemplo uma matriz 3x2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

Quando acontece de haver matrizes de mesma ordem, os elementos que ocupam a mesma

Processing math: 79% ...ados correspondentes.

Desse modo, as matrizes A e B, consideradas acima, têm seus elementos correspondentes dados por:

a11 e b11 a12 e b12

a21 e b21 a22 e b22

a31 e b31 a32 e b32

têm o mesmo endereço

Assim, podemos afirmar que duas matrizes A e B são iguais se, e somente se, têm a mesma ordem e seus elementos correspondentes são iguais

Considerando as matrizes A=(aij)mxn e B=(bij)mxn , simbolicamente, podemos escrever:

A=B aij = bij com 1 ≤ i ≤ m e 1 ≤ i ≤ n

Exemplo :

Sabendo que $\begin{bmatrix} a+b & b+c \\ 2b & 2a-3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}$ determine a , b , c e d .

$2b = 6$
$b = 3$
$a + 3 = 9$
$a = 6$

$3 + c = -1$
$c = -1 - 3$
$c = -4$
$12 - 3d = 18$
$-3d = 18 - 12$
$-3d = 6$
$d = \frac{6}{-3}$
-2

Solução: como as duas matrizes são iguais, seus elementos correspondentes devem ser iguais, também. Assim, teremos:

$a + b = 9 \qquad b + c = -1 \qquad 2b = 6 \qquad 2a - 3d = 18$

$2b = 6 \text{ b} = 3 \qquad a + b = 9 \text{ a} + 3 = 9\text{a} = 6$

$2a - 3d = 18 \;\; 2.6 - 3\text{d} = 18 \; - 3\text{d} = 6\text{d} = -2$

$b + c = -1 \, 3 + \text{c} = -1\text{c} = -4$

Operações com Matrizes

Definidas as matrizes, apresentaremos algumas operações usando matrizes. Aqui, trabalharemos com a adição, subtração, multiplicação entre matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar.

Adição de Matrizes

Para somarmos duas matrizes, devemos considerar que devem ter a mesma ordem. Por exemplo: considere as matrizes e de mesma ordem. Denomina-se soma da matriz com a matriz que representamos por . A matriz também será da mesma ordem de e .

 te, teremos:

$A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{mxn}$

podemos definir a matriz C da seguinte maneira:

$C = \left[c_{ij}\right]_{mxn}$ onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

→ Vamos somar os mesmos endereços

Exemplo:

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calcule $C = A + B$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1=0 & -3+6=3 \\ 5+2=7 & 4+0=4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Subtração de Matrizes

Na subtração de matrizes, usaremos o mesmo conceito da adição de matrizes, isto é, elas têm de ser da mesma dimensão. Por exemplo:

Se $A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{mxn}$ podemos definir a matriz C da seguinte maneira:

$C = \left[c_{ij}\right]_{mxn}$ onde $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

Exemplo:

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calcule $C = A - B$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1=2 & -3-6=-9 \\ 5-2=3 & 4-0=4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Multiplicação de Matrizes

Na multiplicação de matrizes, devemos considerar uma matriz $A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ e uma matriz $B = \left[b_{ij}\right]_{nxp}$. O produto da matriz A por B é a matriz $C = \left[c_{ij}\right]_{mxp}$, tal que c_{ij} é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i da matriz A pelos elementos da coluna j da matriz B e somando-se os produtos obtidos (WINTERLE, 2000). Podemos verificar que, para que ocorra a multiplicação de matrizes, é necessário que os “meios” sejam iguais. Por exemplo, no caso das matrizes A e B, devemos ter $n = p$.

De uma maneira genérica, devemos fazer a seguinte operação entre as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

Observe que a matriz A é de ordem $2x2$, sendo a matriz B $2x3$. Nesse caso, as duas matrizes podem ser multiplicadas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}.$$

Repare que multiplicamos as linhas da matriz *A* pela coluna da matriz *B* . Esse mecanismo serve para o conceito de multiplicação de matrizes. O resultado final é uma matriz $2x3$, isto é, a quantidade de linhas da matriz *A* e a quantidade de colunas da matriz *B* .

Temos que multiplicar todos elementos da coluna pelos da linha

Exemplo:

Considere a seguintes matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.2 = 2 & 1.3 = 3 \\ 2.2 = 4 & 2.3 = 6 \end{bmatrix}$$

faça a multiplicação AB e depois BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 = 2 & 1.3 = 3 \\ 2.2 = 4 & 2.3 = 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Veja que a matriz $2x1$ multiplicada pela matriz $1x2$ fornece um resultado $2x2$. Repare que a multiplicação entre BA não é possível, pois os "meios" não são iguais. Isso mostra que, geralmente, a multiplicação entre as matrizes não é comutativa.

Multiplicação de um Número Real por uma Matriz

No módulo anterior, estudamos a multiplicação de um vetor por um escalar. Naquele caso, todas as componentes do vetor têm de ser multiplicadas por esse escalar. Aqui, temos uma situação um pouco parecida, pois todos os elementos da matriz têm de ser multiplicados por esse número.

Exemplo:

Faça a multiplicação da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ pelo número 3.

Processing math: 79%

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$3 \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$$

Matriz Transposta de uma Matriz Dada

Vamos definir um conceito de matriz chamado matriz transposta. Para isso, consideraremos uma matriz A do tipo mxn. Assim, podemos afirmar que uma matriz é chamada matriz transposta de A , indicada por A^t , a matriz nxm onde as linhas são ordenadamente as colunas de A (WINTERLE, 2000). Vejamos um exemplo:

Exemplo:

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Encontre a matriz transposta.

$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

deita ela

$\begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}$

$A^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Com esse exemplo, mostramos que na matriz de ordem $2x1$ a sua transposta fica com ordem $1x2$.

Matriz Inversa de uma Matriz Dada

Na seção de multiplicação de duas matrizes, verificamos que, geralmente, não existe a propriedade comutativa. Por exemplo, AB muitas vezes difere de BA. Contudo, a propriedade comutativa ocorre em matrizes quadradas, quando $B = A^{-1}$. A matriz A^{-1} é chamada matriz inversa de A.

Multiplicando a matriz A pela sua inversa A^{-1}, teremos a matiz identidade, matematicamente:

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Quando existe a matriz inversa de A, dizemos que A é invertível ou não singular.

Exemplo:

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível e sua matriz inversa é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Podemos verificar que A^{-1} é a matriz inversa verificando a igualdade $A.A^{-1} = I_2$

Processing math: 79%

Note que: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Para determinar a matriz inversa, resolveremos um sistema linear associado ao problema.

Equação Matricial

Definimos as operações de adição, subtração e multiplicação de matrizes e multiplicação de um número real por uma matriz. Com isso, já é possível realizar equações matriciais.

Exemplo:

Calcule o valor de X na seguinte expressão matricial

$$X - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Verificamos que temos a operação de subtração, lembrando que as matrizes têm de ser da mesma ordem. Assim, escrevemos a matriz X como:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

o nosso objetivo será encontrar os valores a, b, c e d.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+3 & b-0 \\ c-5 & d-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

$a - (-3) = 2$
$a + 3 = 2$
$a = 2 - 3$
$a = -1$

$b - 0 = 5$
$b = 5 + 0$
$b = 5$

$c - 5 = 11$
$c = 11 + 5$
$c = 16$

$d - 1 = 12$
$d = 12 + 1$
$d = 13$

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 16 & 13 \end{bmatrix}$$

Usando o conceito de igualdade de matrizes:

$a + 3 = 2 \rightarrow a = 2 - 3 = -1$

$b = 5$

$c - 5 = 11 \rightarrow c = 11 + 5 = 16$

Processing math: 79% $+ 1 = 13.$

A matriz X vai ser escrita como:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}.$$

Exemplo:

Calcule a matriz X da seguinte equação $AX = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Observamos que, para que ocorra a multiplicação, a matriz X terá de ter a seguinte forma:

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a - b \\ 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

usando o conceito de igualdade de matrizes

$$2a = 3 \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

substituíndo esse valor em $a - b = 2 \rightarrow \frac{3}{2} - b = 2 \rightarrow b = \frac{3}{2} - 2 \rightarrow b = -\frac{1}{2}$.

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Aplicação de Matrizes na Computação Gráfica

Na computação gráfica, uma aplicação interessante das matrizes seria nas operações de translação, rotação e mudança de escala nas imagens. Isso tudo é feito por operações de matrizes, e, em computação gráfica, é o que se chama transformação geométrica (SANTOS, 2012). Para um entendimento melhor dessas operações, observe a Figura 2.1:

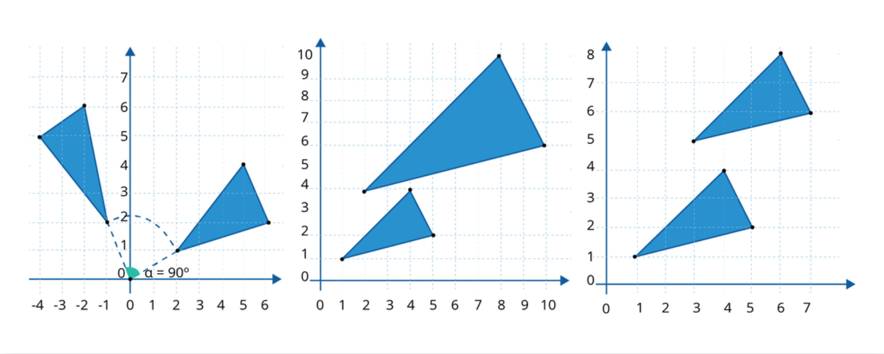


Figura 2.1 - Transformação de rotação, mudança de escala e translação
Fonte: Elaborada pelo autor.

Rotação : uma rotação de α graus de um ponto (x,y) no sentido anti-horário e em torno da origem é feita a partir da multiplicação da matriz $R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ pela matriz $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, gerando uma matriz P' com a nova posição do ponto (x,y) após a rotação.

Translação : uma translação de um ponto (x,y) de Tx unidades para a direita na coordenada x e Ty unidades para cima na coordenada y é feita pela soma da matriz $T = \begin{bmatrix} Tx \\ Ty \end{bmatrix}$ com a matriz $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, gerando uma matriz com as coordenadas do novo ponto após a translação.

Escala : uma mudança de escala de um ponto (x,y) em relação à origem das coordenadas – usando um fator multiplicativo Sx para a coordenada x e um fator Sy para a coordenada y – é feita usando-se a matriz $E = \begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix}$ e a matriz $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, gerando uma matriz com as coordenadas do novo ponto a mudança de escala.

Exemplos das operações de translação, rotação e mudança de escala:

1. Determine a nova posição do ponto (2,3), após uma rotação de 90° no sentido anti-horário, em torno da origem

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90° & -sen\,90° \\ sen\,90° & \cos 90° \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. Determine a nova posição do ponto (2, 3), após uma ampliação em relação à origem das coordenadas em 100%

Processing math: 79%

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

3. Determine a nova posição do ponto (2, 3), após uma translação de 4 unidades para cima e 3 unidades para a esquerda.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Vamos Praticar

As matrizes podem obedecer a leis de formação que são expressas em termos da linha (i) e coluna (j). Lembrando que os elementos de uma matriz podem ser escritos como a_{ij}. Escreva a matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{2x2}$ tal que $a_{ij} = i^2 + j^2$.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2+1^2 & 1^2+2^2 \\ 2^2+1^2 & 2^2+2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Processing math: 79%

Determinantes

Toda matriz quadrada tem associada um número chamado determinante da matriz, que é obtido por meio de operações que envolvem todos os elementos da matriz.

As aplicações dos determinantes estão associadas aos seguintes tópicos:

- cálculo de matriz inversa;
- resolução de sistemas lineares pelo método de Cramer;
- cálculo de área de triangulo, quando são conhecidas as coordenadas do vértice;
- cálculo de produto vetorial e produto misto, dentre outros.

Determinante de uma Matriz Quadrada de Ordem 2

Se A é uma matriz quadrada de ordem 2, calculamos seu determinante fazendo o produto dos elementos da diagonal principal, menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

Dada a Matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2x2}$ $det\ A = \underbrace{a_{11} . a_{22}}_{\text{Diagonal principal}} - \overbrace{a_{12} . a_{21}}^{\text{Diagonal secundária}}$

Determinante de uma Matriz Quadrada de Ordem 3

Considere a matriz genérica de ordem três $A \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3x3}$

Define-se o determinante da matriz de ordem 3 no seguinte número

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

D − D

$$\det A = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{12}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32}$$

Para obter esses seis produtos de uma forma prática, usaremos a regra de Sarrus indicada na Figura 2.2, que consiste em repetir as duas primeiras colunas à direita da matriz e efetuar as multiplicações, como indicado no esquema a seguir:

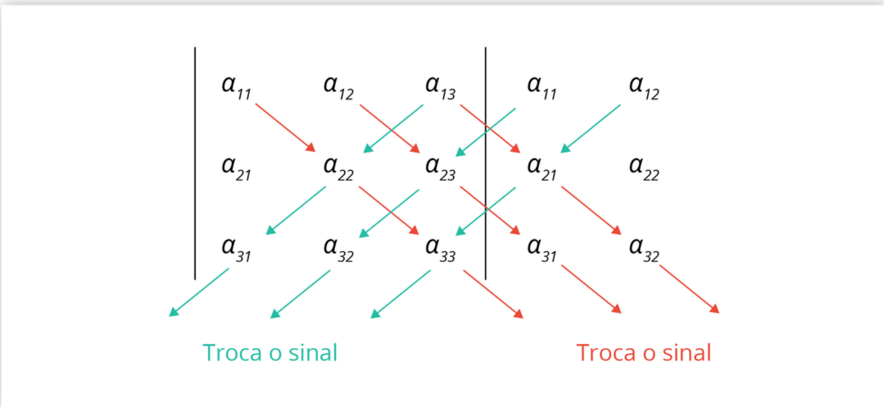


Figura 2.2 - Aplicação da regra de Sarrus
Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo: aplique a regra de Sarrus, para calcular o determinante da matriz dada.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 2 & -3 \end{matrix} = 16 + 15 + 36 - 10 = 57$$

Determinante de uma Matriz Quadrada de Ordem 4 ou Mais

Para calcular o determinante de uma matriz de ordem maior ou igual a 4, podemos usar o teorema de Laplace ou a regra de Chio. Veremos cada um deles, a seguir:

Teorema de Laplace

Antes de mostrar a definição do teorema de Laplace, vamos definir algumas propriedades.

I – Menor complementar

Chamamos de menor complementar relativo o elemento a_{ij} de uma matriz M quadrada de ordem $n > 1$ o determinante MC_{ij} de ordem $n - 1$ associado à matriz obtida de M quando suprimimos a linha e a coluna que passa por a_{ij}.

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2x2}$ determine o menor complementar do elemento a_{21}.

Suprimindo a linha e a coluna do elemento a_{21}, como mostra a figura a seguir obtemos a matriz quadrada de ordem 1

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2x2}$ obtemos a matriz menor complementar a_{12}

II – Cofator

Chamamos de cofator relativo o elemento a_{ij} de uma matriz quadrada de ordem n, o número A_{ij}, tal que $A_{ij} = (-1)^{i+j}. MC_{ij}$

Exemplo:

Considere a matriz $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 5 & 8 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ calcule A_{12}

Usando a definição

Processing math: 79%

$\ldots C_{ij} \to A_{12} = (-1)^{1+2} MC_{12} = -1 \cdot \begin{matrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{matrix} = -1 \cdot 2 = -2.$

III – Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz quadrada de ordem $n > 1$ pode ser obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) da matriz M pelo respectivo cofator. Assim, fixando um jN, tal que $1 \leq j \leq m$

$$\det M = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}A_{ij}$$

Exemplo:

Calcule o determinante da matriz a seguir, usando a regra de Laplace

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando o Teorema de Laplace temos de considerar uma linha ou coluna da matriz acima, que tem o maior número de zero. Nesse caso, usaremos a coluna 2 ($j = 2$).

A expressão da Teorema de Laplace

$$\det M = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$\det M = 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det M = -2(5-8) + 3(12+5) = 6 + 51 = 57.$$

Observamos que a escolha da linha ou coluna que tem maior número zero facilita o método de cálculo.

Exemplo:

Calcule o determinante da matriz a seguir, usando o Teorema de Laplace:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Nesse caso, escolheremos a linha 4 ($i = 4$).

Processing math: 79%

$$\ldots a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44}$$

$$\det M = 1(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det M = -1(9) + 2(24) - 1(15) = -9 + 48 - 15 = 24$$

Regra de Chió

Veremos, agora, uma regra que nos permite também calcular o determinante de uma matriz de ordem n usando uma matriz de ordem menor $n - 1$.

A regra de Chió somente poderá ser usada se o elemento da matriz $a_{11} = 1$.

Veremos a regra aplicada em uma matriz de ordem 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} - \left(a_{12}.\, a_{21}\right) & a_{23} - \left(a_{13}.\, a_{21}\right) & a_{24} - \left(a_{14}.\, a_{21}\right) \\ a_{32} - \left(a_{12}.\, a_{31}\right) & a_{33} - \left(a_{13}.\, a_{31}\right) & a_{34} - \left(a_{14}.\, a_{31}\right) \\ a_{42} - \left(a_{12}.\, a_{41}\right) & a_{43} - \left(a_{13}.\, a_{41}\right) & a_{44} - \left(a_{14}.\, a_{41}\right) \end{vmatrix}$$

Exemplo:

Calcule o determinante da matriz a seguir, usando a regra de Chió:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Usando a fórmula da regra de Chió, teremos:

Processing math: 79%

$$\begin{vmatrix}1&2&0&-2\\0&2&1&3\\3&0&2&4\\3&-1&0&-2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2-(2.0)&1-(0.0)&3-(-2.0)\\0-(2.3)&2-(0.3)&4-(-2.3)\\-1-(2.3)&0-(0.3)&-2-(-2.3)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&1&3\\-6&2&10\\-7&0&4\end{vmatrix} = 12.$$

Propriedade dos Determinantes de uma Matriz

Nesta seção, vamos apresentar algumas propriedades de determinantes que podem facilitar muito os cálculos.

Teorema de Jacobi

O Teorema de Jacobi implica que se multiplicarmos todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz A por um mesmo número não nulo, e somarmos os resultados dos elementos aos seus correspondentes de outra fila (linha ou coluna), obteremos outra matriz B. Após essas operações, teremos que $det\,A = det\,B$ (MOCCIO, 2018).

Exemplo)

Nesse exemplo, mostraremos como funciona o teorema de Jacobi. Considere uma matriz A

$$A = \begin{pmatrix}2&4&-1\\-3&2&5\\1&6&3\end{pmatrix}$$

Construiremos outra matriz, que chamaremos de B, considerando a segunda linha de A mais o triplo da terceira linha de A

$$B = \begin{pmatrix}2&4&-1\\-3+3.1&2+3.6&5+3.3\\1&6&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&4&-1\\0&20&14\\1&6&3\end{pmatrix}.$$

Se calcularmos os determinantes das matrizes A e B, serão iguais.

Teorema de Binet

Outro teorema importante seria o Teorema de Binet. Para entender esse teorema, considere A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem e AB a matriz produto, então $det\,AB = det\,A\,.\,det\,B$ (MOCCIO, 2018).

Como exemplo, considere duas matrizes A e B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculando os determinantes das duas matrizes, teremos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -15.$$

Multiplicando as duas matrizes, teremos:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.3 + 1.2 + 2.2 & 1.(-1) + 1.1 + 2.1 & 1.(-2) + 1.1 + 2.(-2) \\ 2.3 + 1.2 + 3.2 & 2.(-1) + 1.1 + 3.1 & 2.(-2) + 1.1 + 3.(-2) \\ 1.(3) + 4.2 + 2.2 & 1.(-1) + 4.1 + 2.1 & 1.(-2) + 4.1 + 2.(-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 2 & -5 \\ 14 & 2 & -9 \\ 15 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculando o determinante da matriz AB:

$$\det AB = \begin{vmatrix} 9 & 2 & -5 \\ 14 & 2 & -9 \\ [illegible] & [illegible] & -2 \end{vmatrix} = -45.$$

Assim, mostramos que $det\,AB = det\,A.\;\, detB.$

A seguir, colocamos algumas outras propriedades de determinantes:

- Se trocarmos duas linhas ou duas colunas de uma matriz quadrada, seu determinante troca somente de sinal.

Exemplo)

Considere a matriz A a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 3$$

Trocando as duas linhas da matriz, teremos:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow detA' = -3.$$

- Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz quadrada por um número k, seu determinante será multiplicado por este número k.

Exemplo:

Considere a matriz A a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 3$$

Se multiplicamos toda a matriz por 2, teremos:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow det2A = 24.$$

Observe que multiplicamos todas as linhas por 2. Desse modo, 2.2.2.3=24.

- Se todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada forem iguais a zero, seu determinante será nulo.

Processing math: 79%

Exemplo:

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 0.$$

- O determinante de uma matriz quadrada é igual ao determinante da matriz transposta.

Exemplo:

Considere a matriz A a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \det A^T = 3.$$

- O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo:

Considere a matriz triangular a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 9 & 7 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 20.$$

Verificamos que o determinante da matriz anterior será apenas a multiplicação da diagonal principal.

- Seja A uma matriz quadrada invertível e A-1 sua inversa. Então $det\, A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Exemplo:

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível e sua matriz inversa é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Calculando $\det A = 2$ e $\det A^{-1} = \frac{1}{2}$. Isso mostra que $det\, A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Vamos Praticar

$2(x+1)$
$3(2x+2)$
$6x+6$

Nesta seção, aprendemos a usar a regra de Sarrus para calcular determinante de matrizes 3x3. O método de cálculo consiste na repetição das duas primeiras colunas da matriz 3x3. Usando esse conceito, calcule o valor de x para que o determinante a seguir tenha valor igual a 6.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & x & x+1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = 6.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & x & 1 & 2 \\ -1 & x & x+1 & -1 & x \\ 3 & 2 & x & 3 & 2 \end{array}\right.$$

$3x^2 \quad 2x+1 \quad -2x \qquad x^2+6x+6 \quad (-2x)$

- a) $x = 0$
- b) $x = 1$
- c) $x = 2$
- d) $x = 3$
- e) $x = 4$

$x^2+6x+6-2x-(3x^2+2x+2-2x)$

$x^2+\cancel{6x}+6-\cancel{2x}-3x^2-\cancel{2x}-2+\cancel{2x}$

$-3x^2+x^2+6x-2x-\cancel{2x}+\cancel{2x}+6-2$

$-2x^2+4x+4=6$

$-2x^2+4x-2=0$

$\frac{1}{} + \frac{1}{} = 2$

$\frac{1}{} \cdot \frac{1}{} = 1$

$\frac{-b}{a} = \frac{-4}{-2} = 2$

$\frac{c}{a} = \frac{-2}{-2} = 1$

Processing math: 79%

Sistemas Lineares

De um modo geral, denomina-se equação linear, toda equação que pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

na qual:

x_1, x_2 , x_3, ..., x_n são as incógnitas;

$a_1, a_2,\ a_3,\ \ldots.\ , a_n$ são números reais, chamados coeficientes das incógnitas;

b é o termo independente.

Sistema Linear

Sistema linear é um conjunto de m equações e n incógnitas.

$A_{m \times n}$ → linha → coluna

Representaremos esse conjunto da seguinte forma:

Processing math: 79%

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Para solucionar esse sistema, temos de encontrar valores para $x_1,\ x_2, x_3,\ \ldots,\ x_n$ que satisfaçam todas as equações.

Um sistema linear pode ser classificado de três maneiras:

- SPI – Sistema possível e indeterminado;
- SPD – Sistema possível e determinado;
- SI – Sistema impossível.

Exemplo: classifique os sistemas a seguir como SPD, SPI ou SI e conjunto solução, quando o sistema for possível.

$a)\begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ 5x + 6y = 8 \end{cases}$ $c)\begin{cases} 5x - 10y = 15 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$

Vamos classificar os sistemas lineares, usando a interpretação geométrica

Para montar o gráfico de uma reta, basta determinar dois pontos. Para isso, atribuiremos valores para x, determinando y. Vamos analisar os gráficos a seguir:

a) Sistema impossível: as retas não têm valores em comum

a) $\begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 2x + y = 5\ (2) \end{cases}$

$\cancel{4x} + 2y = 10$

$\cancel{2x} + \cancel{5} - \cancel{2x} = \cancel{5}$

Não conseguimos resolver

$2x + y = 5$

$y = 5 - 2x$

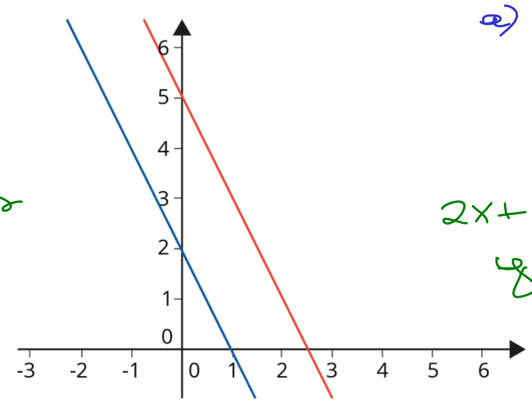


Figura 2.3 - Sistema impossível
Fonte: Elaborada pelo autor.

b) Sistema possível e determinado SPD, pois as retas se cortam em apenas 1 ponto, que é a solução do sistema.

Resolução

Prova real

$3(-2) - 2(3) =$
$-6 - 6 = -12$

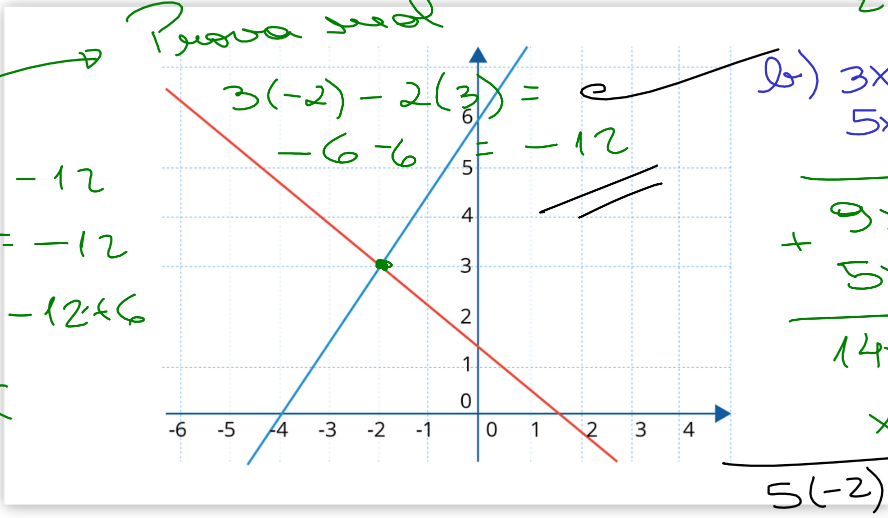
$3(-2) - 2y = -12$
$-6 - 2y = -12$
$-2y = -12+6$
$y = \frac{-6}{-2}$
$y = 3$

b) $3x - 2y = -12 \; (3)$
$5x + 6y = 8$

$9x - \cancel{6y} = -36$
$+ \; 5x + \cancel{6y} = 8$

$14x = 28$
$x = -2$

$5(-2) + 6(3) =$
$-10 + 18 = 8$



Quando $x = 2$ e $y = 3$ satisfazemos as equações

Figura 2.4 - Sistema possível e determinado
Fonte: Elaborada pelo autor.

c) Sistema possível e determinado SPD, pois as duas retas se intersectam em todos os pontos. Existem infinitas soluções.

$2x - 4y = 6$
$-4y = 6 - 2x$

c) $5x + 10y = 15$
$2x - 4y = 6$

$2x - (6 - 2x) = 6$
$2x + 2x - 6 = 6$
$4x = 12$
$x = 3$

$2(3) - 4y = 6$
$6 - 4y = 6$
$4y = 0$
$y = 0$

Prova real:
$5(3) + 10(0) =$
$= 15 + 0$
$= 15$

$2(3) - 4(0) =$
$= 6 - 0$
$= 6$

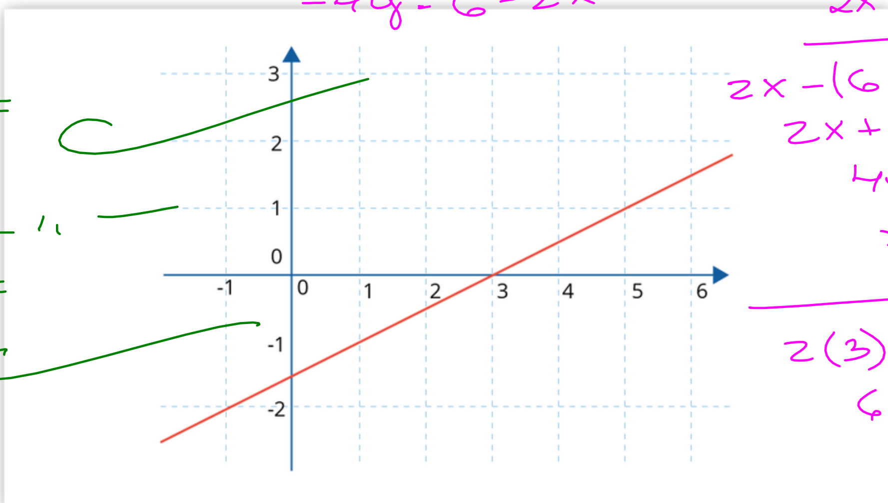


Figura 2.5 – Sistema possível e indeterminado com infinitas soluções
Fonte: Elaborado pelo autor.

Processing math: 79%

saiba mais

Saiba mais

Existe um site onde você pode resolver inúmeros exercícios de Matrizes. Nesse site, você pode fazer provas diagnósticas que possibilitam avançar mais no campo da Álgebra.

ACESSAR

Resolução de Sistemas Lineares – Regra de Cramer

A regra de Cramer só pode ser utilizada quando o sistema tiver o mesmo número de incógnitas e de equações.

Dado o sistema $2x2$, temos:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

Exemplo1:

Determine a solução dos sistemas lineares a seguir, usando a regra de Cramer:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

Processing math: 79%

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2 \qquad D_x = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} = -14 \qquad D_y = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} = 2$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{-2} = 7 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{2}{-2} = -1$$

Exemplo 2:

Dado o sistema $3x3$, vamos determinar a regra de Cramer de forma análoga ao sistema $2x2$:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

{{D}_{z}}=\left| \begin{matrix} {{a}_{1}} & {{b}_{1}} & {{d}_{1}} \\ {{a}_{2}} & {{b}_{2}} & {{d}_{2}} \\ {{a}_{3}} & {{b}_{3}} & {{d}_{3}} \\ \end{matrix} \right|~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~x=\frac{{{D}_{x}}}{D}~~~~~y=\frac{{{D}_{y}}}{D}~~~~~z=\frac{{{D}_{z}}}{D}~

Reflita

Em problemas de Estática, existem forças que estarão em três direções ortogonais (x,y,z). Nessa situação, quando modelarmos as equações de força para cada direção, obteremos um sistema de equações que pode ser colocado em uma forma matricial e resolvido usando as técnicas aqui apresentadas.

Fonte: Adaptado de Hibbeler (2011).

Uma das aplicações em problemas de engenharia seria análise de circuitos elétricos, para calcular as correntes elétricas (i) que passam nesse circuito. Por exemplo, na Figura 2.6, mostramos um circuito que contém resistores (R) e fontes de tensão (Ɛ). Se aplicarmos as leis de Kirchhoff (HALLIDAY, 2016) nesse circuito, vamos obter:

(x, y, z, w)
D

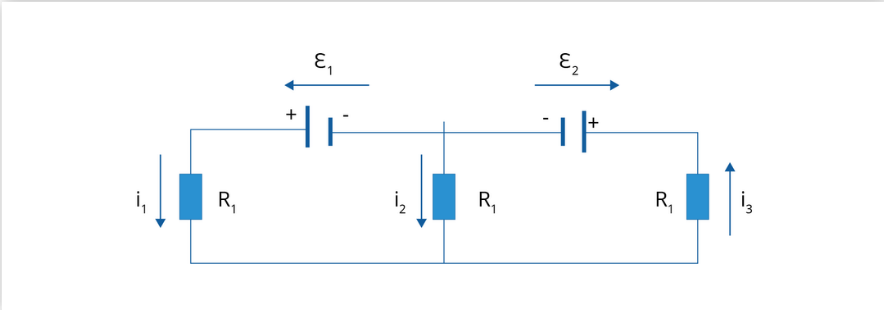


Figura 2.6 - Circuito elétrico com Resistores (R) e fontes (Ɛ)

Fonte: Elaborada pelo autor.

\left(\begin{matrix} {{R}_{1}} & -{{R}_{2}} & 0 \\ 0 & {{R}_{2}} & {{R}_{3}} \\ -1 & -1 & 1 \\ \end{matrix} \right)\left(\begin{matrix} {{I}_{1}} \\ {{I}_{2}} \\ {{I}_{3}} \\ \end{matrix} \right)=\left(\begin{matrix} {{\varepsilon }_{1}} \\ -{{\varepsilon }_{2}} \\ 0 \\ \end{matrix} \right)

Veja que o método de Cramer pode ser usado para calcular as correntes do circuito acima.

praticar

Vamos Praticar

Nesta seção, aprendemos usar a regra de Cramer e vimos que elas podem ser aplicadas para a análise de circuitos elétricos. Considere a Figura 2.6 e use a lei de Kirchhoff. Encontramos a seguinte expressão:

\left(\begin{matrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ \end{matrix} \right)\left(\begin{matrix} {{I}_{1}} \\ {{I}_{2}} \\ {{I}_{3}} \\ \end{matrix} \right)=\left(\begin{matrix} 60 \\ 14 \\ 0 \\ \end{matrix} \right)

O valor das correntes {{I}_{1}},~{{I}_{2}} e {{I}_{3}}, respectivamente, são, em Ampere:

- **a)** 5, 3 e 8.

Processing math: 79%

- **c)** 8, 5 e 3.

Nesse caso o exercício, pede que encontremos o valor da corrente I_1, I_2 e I_3

○ **d)** 8, 3 e 5.

○ **e)** 3, 8 e 5.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 5 & 4 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

$0 \quad 10 \quad 0 \quad -20 \quad -8 \quad 0$

$$-20-8+0-(10)$$

$$-28-10=-38$$

$$\left|\begin{matrix} 60 & 4 & 0 \\ 14 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 60 & 4 \\ 14 & 4 \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

$0 \quad 120 \quad -56 \quad -240 \quad 0 \quad 0$

$$-240-(120-56)$$

$$-240-120+56$$

$$-304$$

$$I_1 = \frac{D_1}{D}$$

$$I_1 = \frac{-304}{-38}$$

$$I = 8$$

$$\left|\begin{matrix} 5 & 60 & 0 \\ 0 & 14 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 5 & 60 \\ 0 & 14 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad -70 \quad -120 \quad 0$

$$-70-120-(0)$$

$$-190$$

$$I_2 = \frac{D_2}{D}$$

$$I_2 = \frac{-190}{-38}$$

$$I_2 = 5$$

Como já achei dois valores e só há uma questão com a sequência $I_1 = 8$ e $I_2 = 5$ o exercício está resolvido!

Resposta é C

Processing math: 79%

Resolução de Sistemas Lineares: Método da Eliminação de Gauss–Jordan (Escalonamento)

A eliminação de Gauss, ou método de escalonamento, é um método para se resolver sistemas de equações lineares, como no sistema a seguir:

$$\left\{ \begin{matrix} {{a}_{1}}x+{{b}_{1}}y+{{c}_{1}}z={{d}_{1}} \\ {{a}_{2}}x+{{b}_{2}}y+{{c}_{2}}z={{d}_{2}} \\ {{a}_{3}}x+{{b}_{3}}y+{{c}_{3}}z={{d}_{3}} \\ \end{matrix} \right.~~~~~~~~\to \left(\begin{matrix} {{a}_{1}} & {{b}_{1}} & \begin{matrix} {{c}_{1}} & {{d}_{1}} \\ \end{matrix} \\ {{a}_{2}} & {{b}_{2}} & \begin{matrix} {{c}_{2}} & {{d}_{2}} \\ \end{matrix} \\ {{a}_{3}} & {{b}_{3}} & \begin{matrix} {{c}_{3}} & {{d}_{3}} \\ \end{matrix} \\ \end{matrix} \right).$$

Esse método consiste em aplicar sucessivas operações no sistema linear, para que a matriz completa fique com a seguinte forma:

$$\left(\begin{matrix} {{a}_{4}} & {{b}_{4}} & \begin{matrix} {{c}_{4}} & {{d}_{4}} \\ \end{matrix} \\ 0 & {{b}_{5}} & \begin{matrix} {{c}_{5}} & {{d}_{5}} \\ \end{matrix} \\ 0 & 0 & \begin{matrix} {{c}_{6}} & {{d}_{6}} \\ \end{matrix} \\ \end{matrix} \right)$$

Repare que na última linha podemos obter o valor de z e, depois, subindo as linhas, obteremos y e x.

Para usar esse método, devemos considerar as seguintes propriedades, que não se modificam em um sistema de equações (WINTERLE, 2000):

1. permutar as posições de duas equações quaisquer do sistema;
2. multiplicar ambos os membros de qualquer uma das equações do sistema, por um número real não nulo;
3. substituindo uma equação qualquer por outra obtida pela adição membro a membro dessa equação, com outra na qual foi aplicada a transformação em (b).

Exemplo:

Resolva o sistema linear a seguir, usando o método de Gauss-Jordan:

Solução: inicialmente, devemos escolher um pivô (elemento a11 do sistema) diferente de zero e que seja preferencialmente igual a 1, para facilitar os cálculos.

Devemos montar a matriz associada dos coeficientes e zerar todos os elementos que estão abaixo da diagonal principal.

\left\{ \begin{matrix}   x+2y+z=3~~~~~ \\   2x-3y-z=4~~ \\   3x-1y-2z=1 \\ \end{matrix} \right.

\left[\begin{matrix}   1 & 2 & \begin{matrix}   1 & 3 \\ \end{matrix} \\   2 & -3 & \begin{matrix}   -1 & 4 \\ \end{matrix} \\   3 & -1 & \begin{matrix}   -2 & 1 \\ \end{matrix} \\ \end{matrix} \right]~\left(-2 \right).l1+l2~=~~ \left[\begin{matrix}   1 & 2 & \begin{matrix}   1 & 4   \\ \end{matrix} \\   0 & -7 & \begin{matrix}   -3 & -2 \\ \end{matrix} \\   3 & -1 & \begin{matrix}   -2 & 1 \\\end{matrix} \\ \end{matrix} \right]\left(-3 \right).l1+l3

=~\left[\begin{matrix}   1 & 2 & \begin{matrix}   1 & 4   \\ \end{matrix}   \\   0 & -7 & \begin{matrix}   -3 & -2 \\ \end{matrix} \\   0 & -7 & \begin{matrix}   -5 & -8 \\ \end{matrix} \\\end{matrix} \right]\left(-1 \right).l2+l3

=~\left[\begin{matrix}   1 & 2 & \begin{matrix}   1 & 4   \\ \end{matrix}   \\   0 & -7 & \begin{matrix}   -3 & -2 \\ \end{matrix} \\   0 & 0 & \begin{matrix}   -2 & -6 \\ \end{matrix} \\ \end{matrix} \right]

\left\{ \begin{matrix}   x+2y+z=3~~~~~~~~~~~~   \\   -7y-3z=-2~~   \\   ~~~~~~~~~-2z=-6~   \\ \end{matrix} \right.

-2z=-6~\Rightarrow z=3

Substituindo na segunda equação

-7.y-3.3=-2~~\Rightarrow ~-7.y=7~~\Rightarrow ~~y=-1

Processing math: 79%

Substituindo na primeira equação.

$x+2.\left(-1 \right)+3=3~~\Rightarrow ~~x-2+3=3~~\Rightarrow ~~x=2$

A solução pode ser representada de duas maneiras

$S=\left(2,~-1,~3 \right)\text{ou}~X=\left[\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ \end{matrix} \right]$

Uma das aplicações de sistemas lineares pode ocorrer no estudo de Química, por exemplo, no balanceamento de reações químicas. Mostramos, na atividade a seguir, a aplicação desse conceito.

Vamos Praticar

Considere a equação para a reação química a seguir:

$${{C}_{3}}{{H}_{8}}+{{O}_{2}}\to C{{O}_{2}}+{{H}_{2}}O$$

Sejam x, y, z e w inteiros positivos que equilibram a equação

$$x{{C}_{3}}{{H}_{8}}+y{{O}_{2}}\to zC{{O}_{2}}+w{{H}_{2}}O.$$

Igualando o número de átomos de cada tipo de ambos os lados, resulta

Hidrogênio: $8x=2w$

Carbono: $3x=z$

Oxigênio: $2y=2z+w$

Obteremos o sistema linear

$$\left\{ \begin{matrix} 8x & + & 0y & + & 0z & - & 2w & = & 0 \\ 3x & + & 0y & - & z & + & 0w & = & 0 \\ 0x & + & 2y & - & 2z & - & w & = & 0 \end{matrix} \right.$$

Levorato (2017).

E[illegible]ento do sistema anterior e assinale a opção correta do balanceamento:

- **a)** $2{{C}_{3}}{{H}_{8}}+5{{O}_{2}}\to 2C{{O}_{2}}+3{{H}_{2}}O$
- **b)** ${{C}_{3}}{{H}_{8}}+5{{O}_{2}}\to 3C{{O}_{2}}+3{{H}_{2}}O$
- **c)** $5{{C}_{3}}{{H}_{8}}+{{O}_{2}}\to 3C{{O}_{2}}+{{H}_{2}}O$
- **d)** ${{C}_{3}}{{H}_{8}}+5{{O}_{2}}\to 3C{{O}_{2}}+4{{H}_{2}}O$
- **e)** ${{C}_{3}}{{H}_{8}}+{{O}_{2}}\to C{{O}_{2}}+{{H}_{2}}O$

Resolvendo Sistema Lineares com o Uso do Excel

Nesta seção, usaremos o software Excel para a resolução de sistemas lineares. Para isso vamos considerar o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

Veja que esse sistema linear pode ser escrito na forma $Ax=b$, a seguir:

$$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ \end{matrix} \right]\left[\begin{matrix} x \\ y \\ z \\ \end{matrix} \right]=\left[\begin{matrix} 8 \\ 3 \\ 2 \\ \end{matrix} \right]$$

Nosso objetivo será resolver $x={{A}^{-1}}b$. Verificamos que, para encontrar os valores de x, temos de multiplicar a inversa da matriz A pela matriz b. Mostraremos o passo a passo:

1) Escrevemos a matriz A no Excel:

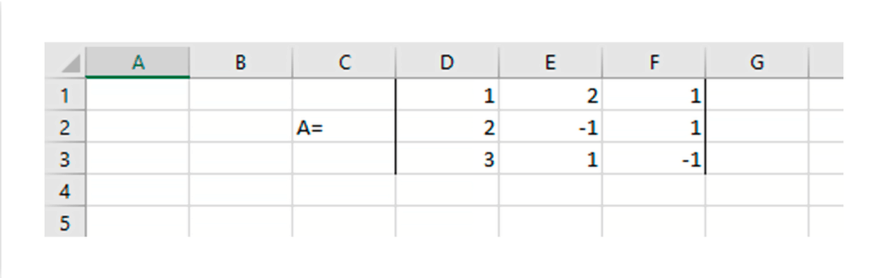


Figura 2.7 - Construindo a matriz A no Excel

Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Calculamos a inversa da matriz A no Excel, usando o comando matriz.inverso( ). Entre parênteses, devemos selecionar a matriz A.

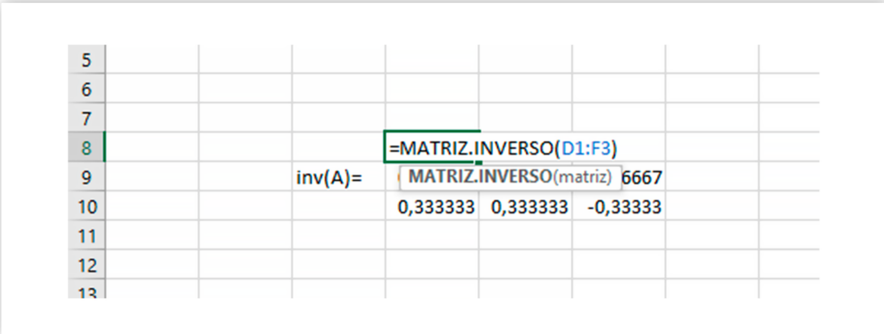


Figura 2.8 - Uso do comando matriz.inverso

Fonte: Elaborada pelo autor.

O resultado da matriz inversa será dado por

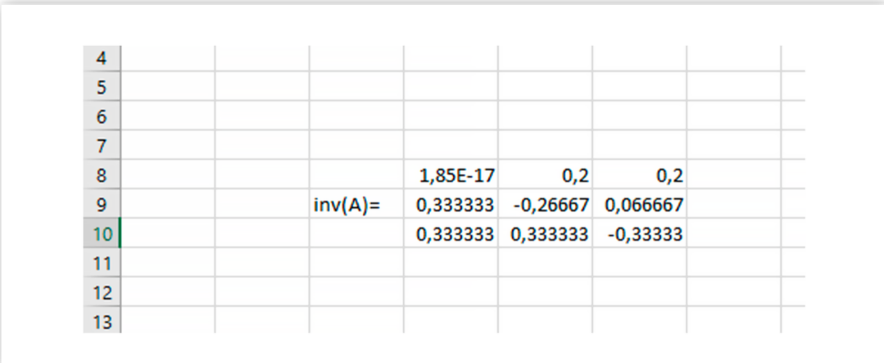


Figura 2.9 - Resultado da matriz inversa de A

Fonte: Elaborada pelo autor.

3) Por fim, multiplicamos a inversa da matriz A pela matriz b, usando o comando matriz.mult( )

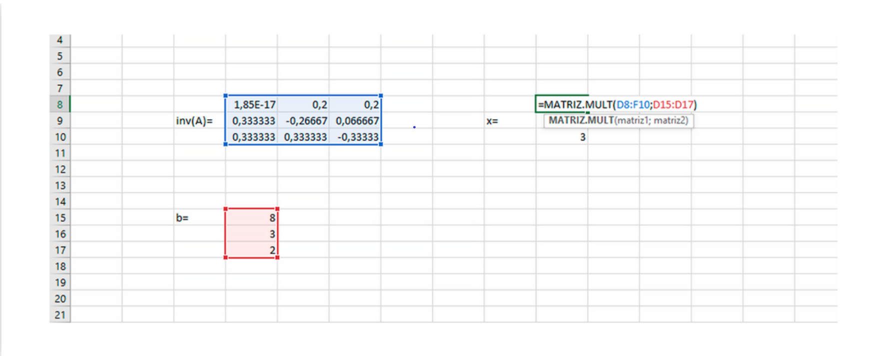


Figura 2.10 - Uso do comando matriz.mult( )
Fonte: Elaborada pelo autor.

O resultado será dado por:

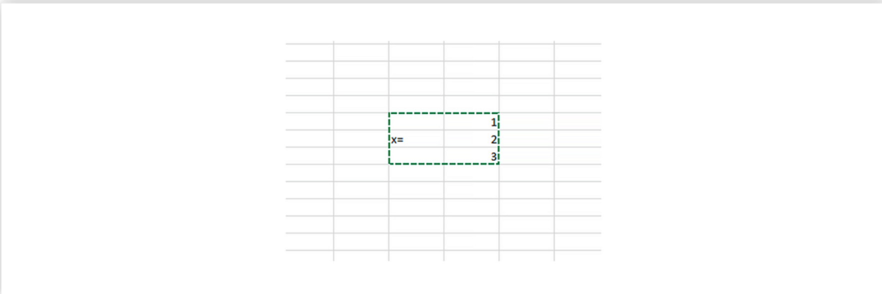
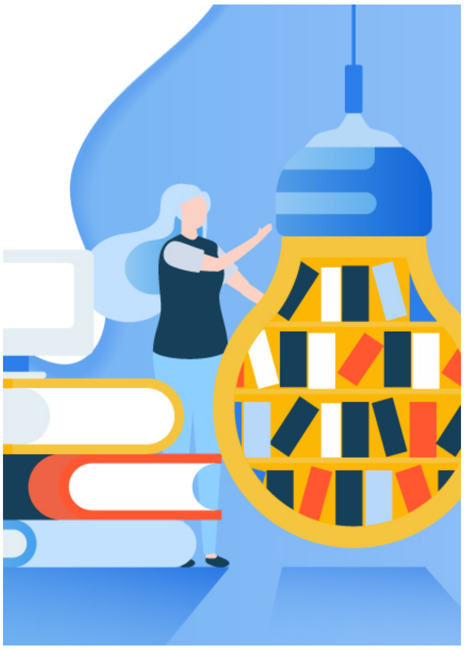


Figura 2.11 - Resultado final, resolvendo sistema linear com Excel
Fonte: Elaborada pelo autor.

Processing math: 79%

indicações

Material Complementar



LIVRO

História da Matemática

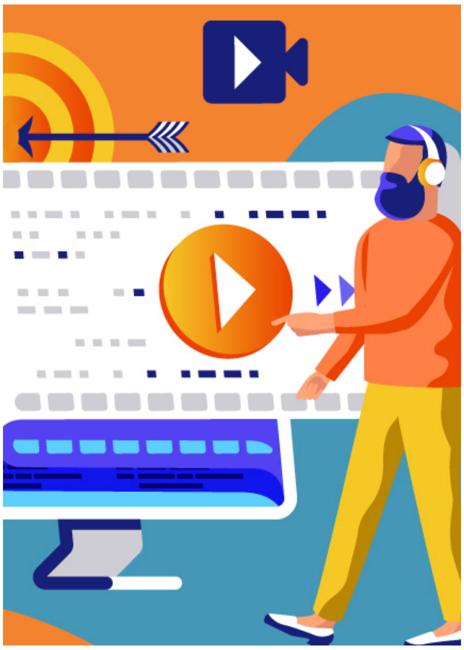
Carl B. Boyer

Editora: Blucher

ISBN: 978-85-212-0023-9

Comentário: esse livro contribuirá para sua formação e conhecimento cultural sobre a Matemática. Trata da relação da nossa sociedade com os números. Um ponto interessante é quando o autor afirma: “foi a Matemática pura de Apolônio que permitiu, cerca de 1800 anos mais tarde, os Princípios de Newton”..

Processing math: 79%



FILME

O Homem que Mudou o Jogo

Ano: 2012

Comentário: o filme conta a história de um técnico de um time de beisebol, que usa técnicas matemáticas para fazer seu time ser campeão.

Para saber mais sobre o filme, acesse o *trailer* .

TRAILER

Processing math: 79%

conclusão

Conclusão

Neste material, tratamos do conceito de matrizes. Definimos o que seria uma matriz e, depois, apresentamos as operações básicas com o uso de matrizes: adição, subtração e multiplicação por um escalar e multiplicação entre duas matrizes. Esses conceitos foram usados em expressões algébricas, usando matrizes. Posteriormente, apresentamos os métodos de cálculos de determinantes que podem ser de ordem nxn. Para isso, apresentamos a regra para determinante $2x2$, Sarrus para $3x3$ e, para matrizes de ordem maior, usamos Laplace e Chió. O conceito de determinante foi aplicado na resolução de sistemas lineares. Nessa parte, apresentamos as regras de Cramer e Escalonamento, para calcular as variáveis do sistema linear. Lembrando que essas técnicas são o início para um tratamento computacional.

referências

Referências Bibliográficas

HALLIDAY, D. **Fundamentos de física** : eletromagnetismo. 10. ed. São Paulo: LTC, 2016.

HIBBELER, R. C. **Estática** : mecânica para engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

LEVORATO, G. B. P. **Matrizes, determinantes e sistemas lineares** : aplicações na Engenharia e Economia. 2017. 180 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2017.

MOCCIO, C. R. C. Notas de aula. **Matrizes** : determinantes, mar./jul. 2018. 20 p.

SANTOS, A. M. Aplicação de Matrizes à Computação Gráfica. **IEEE Academic** , mar. 2012. Processing math: 79% tps://academic.ieee.org/docs/4h . Acesso em: 3 jan. 2020.

WINTERLE, P. **Vetores e geometria analítica** . São Paulo, Pearson; Makron Books, 2000.

Processing math: 79%