

# **SISTEMAS DIGITAIS**

## **UNIDADE 2 - PORTAS LÓGICAS**

Fernando Cortez Sica



# Introdução

Olá, prezado estudante! Bem-vindo à segunda unidade de **Sistemas Digitais**.

Você sabe como representar um circuito lógico, propriamente dito, a partir de uma expressão booleana? Nesta unidade, abordaremos a maneira pela qual podemos obter circuitos lógicos usando componentes reais. Uma outra questão que pode ocorrer é: as propriedades e leis da álgebra booleana serão empregadas neste estudo? Sim, a álgebra booleana será necessária para que possamos utilizar as portas lógicas, que constituem a abstração mais básica dos sistemas digitais, representando os operadores lógicos.

Saiba que a álgebra digital será útil para, por exemplo, realizarmos simplificações de expressões booleanas. Mas como montar a expressão lógica (booleana) para construir um circuito que atenda a um certo objetivo? Falaremos também sobre como extrair a expressão booleana de uma tabela-verdade, por exemplo, que representa o comportamento do circuito a ser criado.

Para que possamos caminhar por esses pontos, iniciaremos com a implementação de circuitos lógicos a partir de expressões booleanas conhecidas. Quando estivermos familiarizados com a forma de implementar circuitos, migrando as expressões para um mundo mais prático, será o momento de extrairmos as expressões a partir de tabelas-verdade. Como a extração de expressões pode implicar em expressões não otimizadas, fecharemos esta unidade falando sobre como otimizar, ou simplificar, as expressões usando a álgebra booleana, e, por fim, usando os mapas de Karnaugh. Com essa etapa de simplificação, obteremos circuitos reduzidos e otimizados.

Preparado para colocar as mãos na massa, ou melhor, nos circuitos? Então, vamos lá!

## 2.1 Obtenção do circuito lógico a partir de expressões booleanas

Você já deve saber como transformar as expressões em diagramas esquemáticos usando as portas lógicas básicas (“NOT”, “AND”, “OR”, “NAND”, “NOR”, “XOR” e “XNOR”), certo? Vamos, contudo, dar uma reforçada nesse ponto, pois é a base para a implementação física dos sistemas lógicos digitais. Acompanhe!

### 2.1.1 Famílias lógicas

Para a implementação física, vamos relembrar da precedência na álgebra booleana, pois teremos que segui-la para poder proceder à interligação das portas lógicas. Dessa forma, as ligações ocorrerão na seguinte ordem (TOCCI; WIDMER; MOSS, 2018), clique para ler:

•

1º: parênteses;

•

2º negação (operador NOT);

•

3º operador AND;

•

## 4º operador OU, XOR, XNOR.

Em segundo lugar, é interessante conhecermos quais os componentes que utilizaremos para a montagem de nossos circuitos. Em linhas práticas e gerais, existem dois grandes grupos de circuitos integrados (componentes eletrônicos que encapsulam vários transistores e, no nosso caso, implementam os operadores lógicos): os componentes baseados na tecnologia TTL (“*Transistor-transistor Logic*”, ou Lógica de transistor-transistor) e os baseados em CMOS (“*Complementary Metal-Oxide Semiconductors*” – Semicondutor de metal-óxido complementar).

---

## VOCÊ SABIA?

Você sabia que existem simuladores de circuitos lógicos que podem ser baixados em computadores e celulares, e que também podem ser manipulados online? Um dos simuladores que merecem destaque é o Tinkercad, que poderá ser acessado em: tinkercad.com. Com ele, você poderá montar soluções baseadas em sistemas lógicos e na utilização do Arduino.

---

Além dessas duas famílias, podemos citar:

- ECL (*emitter-coupled logic*);
- BiCMOS (*bipolar complementary metal-oxide semiconductor*);
- GaAs (*arseneto de gálio*).

Cada tecnologia tem as suas características básicas, como a velocidade de trabalho, a potência dissipada e a voltagem requerida para seu funcionamento.

---

## VOCÊ QUER LER?

Em função das características distintas entre TTL e CMOS, os circuitos lógicos não devem misturar essas duas tecnologias, ou seja, utiliza-se apenas TTL ou apenas CMOS. Porém, caso haja realmente a necessidade de “interfacear” circuitos CMOS ↔ TTL, você pode saber como proceder por meio da leitura do artigo do IFSC (2018). Disponível em: [https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/index.php/AULA\\_16\\_-\\_Eletr%C3%B4nica\\_Digital\\_1\\_-\\_Gradua%C3%A7%C3%A3o](https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/index.php/AULA_16_-_Eletr%C3%B4nica_Digital_1_-_Gradua%C3%A7%C3%A3o) ([https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/index.php/AULA\\_16\\_-\\_Eletr%C3%B4nica\\_Digital\\_1\\_-\\_Gradua%C3%A7%C3%A3o](https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/index.php/AULA_16_-_Eletr%C3%B4nica_Digital_1_-_Gradua%C3%A7%C3%A3o)).

---

Em função de praticidade, utilizaremos a linha TTL, que apresenta os seguintes parâmetros básicos:

- *Fan-out* (número de portas lógicas que poderemos conectar à saída de outra porta): geralmente 10;
- Tensão de alimentação: 5V;
- Faixas de tensões para a representação dos níveis lógicos:
  - Nível lógico “0”: de 0V a 0.8V.
  - Nível lógico “1”: de 2.4V a 5V.

Outro motivo para se adotar o TTL consiste na sugestão da utilização do Tinkercad para que possamos testar os circuitos implementados. O ambiente em questão contempla um simulador *online* de circuitos, facilitando seu manuseio em diversas situações e locais. Antes de iniciarmos nossa montagem, é interessante mencionar sobre as “pinagens” dos circuitos integrados que poderão ser utilizados. A figura a seguir ilustra dois circuitos integrados da linha TTL: o 7404 (implementa portas “NOT”) e o 7408 (que contempla portas “AND”).

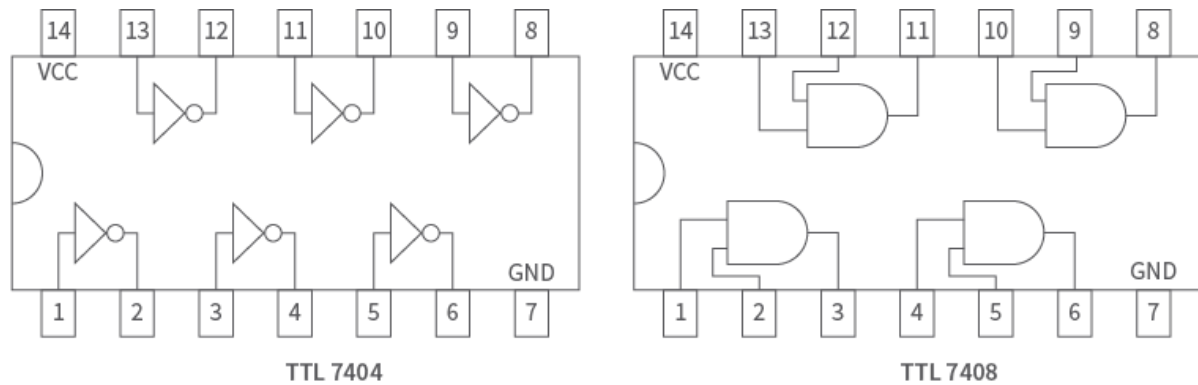


Figura 1 - Diagrama das pinagens dos circuitos integrados TTL modelos 7404 (com seis portas NOT) e 7408 (com quatro portas AND).

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Na figura, podemos observar que os circuitos integrados 7404 e 7408 possuem 14 pinos, sendo que o pino 7 deve ser ligado ao terra (GND – *Ground*) e o pino 14 ao terminal positivo da alimentação (VCC). Os pinos são numerados no sentido anti-horário e iniciam sua contagem no lado esquerdo de uma marca (chanfro – componente visto por cima). Observa-se, ainda, que o 7404 possui, encapsuladas, seis portas inversoras, e o 7408, quatro portas “AND”.

Mas, como implementar, de fato, as expressões booleanas utilizando-se portas lógicas? Conversaremos sobre isso a seguir.

### 2.1.2 Implementação de sistemas lógicos digitais a partir de expressões booleanas

Para iniciar nossa trajetória implementando circuitos a partir de expressões booleanas, vamos supor que desejamos construir um circuito cuja expressão booleana hipotética consiste em:

$$S = A \cdot B + C \cdot (\sim A + B)$$

Usando a sequência de precedência, teremos os passos listados a seguir. Confira!

- 1º Passo: aplicar a negação na variável “A”, para depois poder usar a saída da porta “NOT” na parcela “ $\sim A + B$ ”.
- 2º Passo: desenvolver, paralelamente, as parcelas “ $A \cdot B$ ” e “ $(\sim A + B)$ ”.
- 3º Passo: utilizar uma porta “AND” para integrar a variável “C” e a saída de “ $(\sim A + B)$ ”.
- 4º Passo: utilizar uma porta “OR”, recebendo as saídas da porta “AND” do terceiro passo com a saída da porta “AND” da parcela “ $A \cdot B$ ”.

Por meio da aplicação da sequência exposta acima, temos o diagrama esquemático presente na figura a seguir. A figura contém as ligações realizadas no simulador “tinkercad.com”, em que foram utilizados os circuitos integrados tais quais são encontrados no mercado.

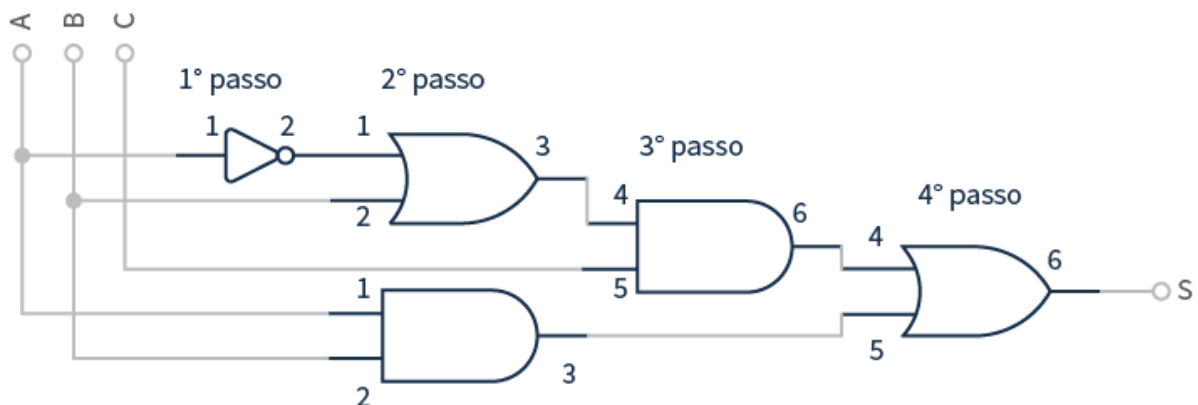
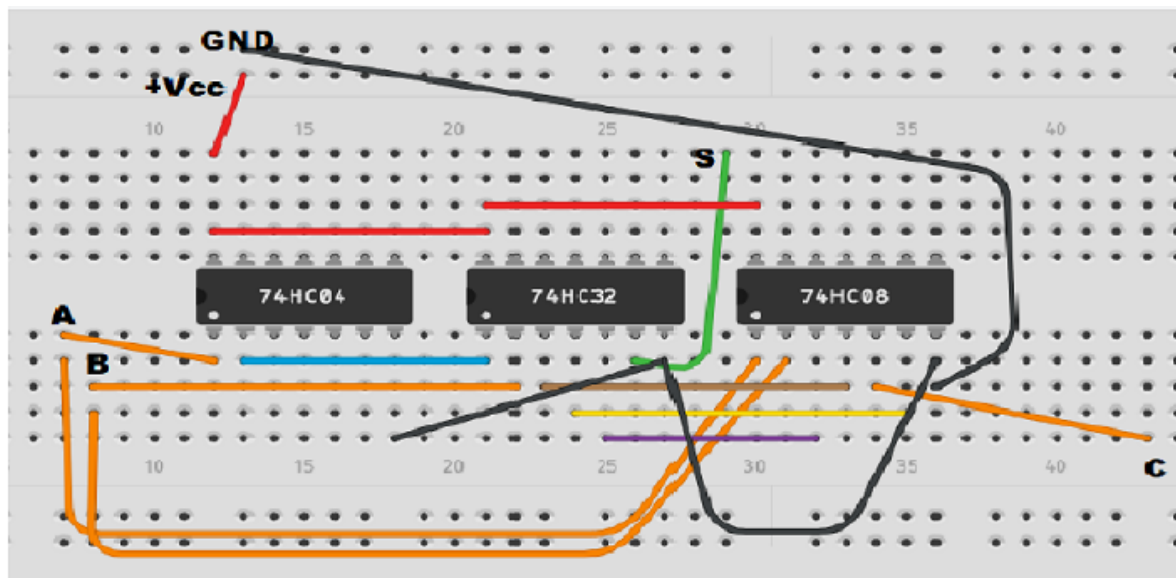


Figura 2 - Diagrama esquemático e ligações físicas (feitas no simulador tinkercad.com) relativos à expressão booleana  $S = A \cdot B + C \cdot (\sim A + B)$ .

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Na figura anterior, temos o diagrama esquemático e as ligações físicas relativas à expressão  $S = A \cdot B + C \cdot (\sim A + B)$ . No diagrama esquemático, os números associados às portas lógicas representam os números dos pinos associados aos circuitos integrados (7404 = portas NOT; 7432 = portas OR; 7408 = portas AND). As colunas (linhas verticais) do *protoboard* (placa para ligações) são barramentos, ou seja, constituem os mesmos pontos para ligações. Os fios em laranja são as entradas e o fio verde, a saída “S”. Os demais fios são responsáveis pelas ligações entre as portas. Por exemplo, o fio azul, ligado no pino 2 do 7404, representa a saída de uma porta NOT. A outra extremidade do fio azul está conectada ao pino 1 do 7432, ou seja, em uma entrada de uma das portas OR encapsuladas nesse circuito integrado.

---

## CASO

Um projetista e implementador de sistemas lógicos digitais foi incumbido de realizar um certo projeto. Porém, ele deseja fazer um teste do circuito produzido a fim de verificar se o circuito funciona como definido em relação às questões de tempo e de propagação de sinais. Ele também deseja testar algumas versões distintas do projeto, envolvendo tecnologias distintas de circuitos integrados e também envolvendo uma versão desenvolvida em HDL (*Hardware Description Language* – Linguagem de Descrição de Hardware).

Como existem várias alternativas, e para não perder tempo e dinheiro construindo vários circuitos lógicos antes de tomar a decisão, ele resolveu simular todas as possibilidades. Com o resultado da simulação, pôde verificar o verdadeiro comportamento das versões implementadas. Como lição desse caso, sugerimos que, independentemente da complexidade e tamanho do circuito a ser produzido, é conveniente realizar simulações prévias do circuito sob desenvolvimento.

---

Já que mencionamos a implementação em simuladores, mencionamos aqui uma dica de como produzir os valores das variáveis por meio de um botão. O circuito a seguir ilustra uma das formas que poderá ser usada no circuito. No caso, seriam necessários três circuitos idênticos, cada um produzindo uma das variáveis.

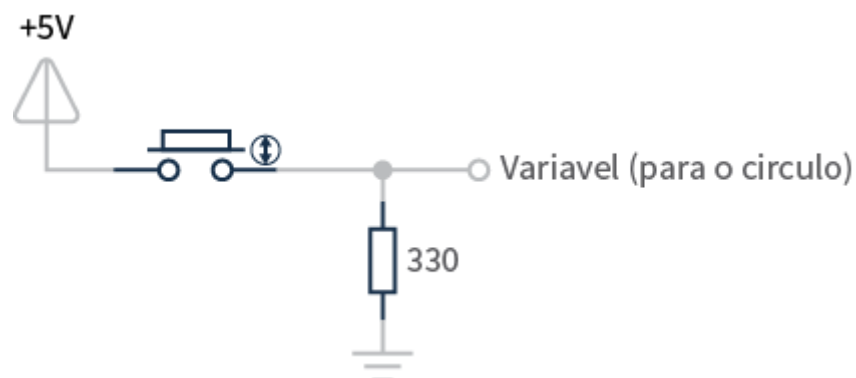


Figura 3 - Forma de inserir um botão para gerar os níveis lógicos “1” ou “0” relativos a uma variável a ser manipulada pelo circuito digital.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.



Perceba que quando o botão for pressionado, a tensão de +5V é externada do circuito, fazendo com que a variável represente o nível lógico “1”. Por outro lado, quando o botão não estiver pressionado, o circuito produzirá o nível lógico “0”, em que o referencial de terra é externado por intermédio do resistor de 300 ohms. Tal resistor é denominado como “*pull-down*” (em uma tradução literal, “puxar para baixo”) devido à sua derivação do referencial terra (GND - Ground).

Até aqui, fizemos a implementação de uma expressão booleana que já se encontrava formada. Mas como obter uma expressão booleana? É o que você saberá a seguir. Continue acompanhando!

---

## VAMOS PRATICAR?

Para essas sugestões, crie uma conta no Tinkercad e implemente as seguintes expressões booleanas:

a)  $S = (\sim(A + B) \cdot (C + D)) \cdot B$

b)  $S = (A + \sim(B \cdot C)) + (B \cdot \sim(A \cdot C))$

---

## 2.2 Obtenção da expressão booleana pela interpretação do circuito lógico

Você já deve saber que uma tabela-verdade representa o comportamento de um sistema lógico diante de todas as combinações possíveis das variáveis de entrada envolvidas, certo? Mas como efetivamente extrair uma expressão booleana a partir da tabela-verdade para, depois, implementar fisicamente o circuito? Veremos esse ponto a seguir, porém, antes, conversaremos sobre formas padrões das expressões booleanas.

### 2.2.1 Formas padrões de expressões booleanas

Antes de conversarmos sobre o processo de obtenção da expressão, vamos colocar o conceito de formas padrões: **soma de produtos** e **produto de somas** (IDOETA; CAPUANO, 2012).

•

#### Soma de produtos

A expressão booleana representada na forma de soma de produtos é constituída pela interconexão, via porta OR, de parcelas. Cada parcela, denominada “*mintermo*”, é formada por variáveis interconectadas por portas AND. Como exemplo, temos:  $S = A \cdot B \cdot C + \sim A \cdot B \cdot C + A \cdot \sim B \cdot C$ .

### Produto de somas

A expressão booleana representada na forma de produto de somas é constituída pela interconexão, via porta AND, de parcelas. Cada parcela, denominada “maxtermo”, é formada por variáveis interconectadas por portas OR. Como exemplo, temos:  $S = (A+B+C) \cdot (\sim A+B+C) \cdot (A+\sim B+C)$ .

Quando temos todas as variáveis presentes em todas as parcelas (mesmo que elas apareçam de forma complementadas), dizemos que a expressão está em sua forma canônica. Expressões derivadas diretamente de tabelas-verdade (antes de qualquer manipulação algébrica) sempre estarão em sua forma canônica. Exemplos e contraexemplos de formas canônicas:

- Exemplos de expressões canônicas:
  - $S = A.B.C + \sim A.B.C + \sim A.B.\sim C$
  - $S = (A+B+C) \cdot (\sim A+\sim B+C) \cdot (A+\sim B+C)$
- Contraexemplos de expressões canônicas:
  - $S = A.B.C + \sim A.B.C + \sim A.\sim C$
  - $S = (A+B+C) \cdot (\sim A+C) \cdot (A+\sim B+C)$

Mas como obter a expressão a partir da tabela-verdade? Dialogaremos, agora, sobre essa questão.

### 2.2.2 Extração da expressão booleana a partir da tabela-verdade

Conversamos sobre tabelas-verdade e sobre formas padrões de representação das expressões booleanas. Mas como juntar esses dois assuntos para que possamos extrair expressões a partir de tabelas-verdade?

Cada linha da tabela-verdade gera um “mintermo” ou um “maxtermo”, conforme ilustra a tabela a seguir, em que temos uma tabela-verdade de duas variáveis.

A	B	mintermos	maxtermos
0	0	$\sim A \cdot \sim B$	$A + B$
0	1	$\sim A \cdot B$	$A + \sim B$
1	0	$A \cdot \sim B$	$\sim A + B$
1	1	$A \cdot B$	$\sim A + \sim B$

Tabela 1 - Mintermos e maxtermos associados a cada linha de uma tabela-verdade envolvendo duas variáveis.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Podemos notar, na tabela-verdade, que para construirmos um mintermo, temos que complementar as variáveis que estiverem associadas ao valor lógico “0” — deixando sem inverter as variáveis que estiverem sinalizadas como “1”. Por outro lado, para construirmos um maxtermo, temos que complementar as variáveis que estiverem associadas ao valor lógico “1”, deixando sem inverter as variáveis que estiverem sinalizadas como “0”.

Para exemplificarmos o processo de obtenção de uma expressão booleana a partir de uma tabela-verdade, imagine que há a necessidade de criar um circuito que produzirá o resultado de uma votação envolvendo três pessoas votantes “A”, “B” e “C”. O primeiro passo será a criação da tabela-verdade. Em tal tabela-verdade, vamos fazer algumas considerações:

- **Para cada votante**, o valor “0” denota um voto contrário, e, portanto, “1” representa o voto a favor.
- **Para o resultado**, o resultado valendo “1” significa que o assunto votado foi aprovado, já o valor “0” indica a rejeição do ponto apreciado na votação.

A partir dessas considerações, vamos construir a tabela-verdade. Aproveitando a oportunidade para facilitar nossa conversa, já associaremos o mintermo e o maxtermo a cada linha da tabela-verdade. A figura a seguir mostra a tabela-verdade resultante.

	A	B	C	V	mintermos	maxtermos
0	0	0	0	0	$\sim A . \sim B . \sim C$	$A + B + C$
1	0	0	1	0	$\sim A . \sim B . C$	$A + B + \sim C$
2	0	1	0	0	$\sim A . B . \sim C$	$A + \sim B + C$
3	0	1	1	1	$\sim A . B . C$	$A + \sim B + \sim C$
4	1	0	0	0	$A . \sim B . \sim C$	$\sim A + B + C$
5	1	0	1	1	$A . \sim B . C$	$\sim A + B + \sim C$
6	1	1	0	1	$A . B . \sim C$	$\sim A + \sim B + C$
7	1	1	1	1	$A . B . C$	$\sim A + B + \sim C$

Tabela 2 - Mintermos e maxtermos associados a um circuito para a exibição do resultado de votação envolvendo três pessoas votantes (“A”, “B” e “C”).

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Na tabela-verdade, perceba, temos a saída “V” sinalizada em “1” quando dois ou mais votantes votarem a favor (nível lógico “1”). Para extrairmos a expressão booleana, escolhemos as linhas que tiverem resultado em “V” sinalizado em “1” para obter a expressão na forma de soma de produtos, ou escolhemos as linhas cujo valor “V” seja “0” para extrairmos a expressão na forma de produto de somas.

A cada linha escolhida, faremos com que o mintermo ou o maxtermo integre a expressão resultante. Assim, teremos:

#### Soma de produtos

Linhas escolhidas: 3, 5, 6 e 7. Expressão resultante:  $V = \sim A.B.C + A.\sim B.C + A.B.\sim C + A.B.C$

### Produto de somas

Linhas escolhidas: 0, 1, 2 e 4. Expressão resultante:  $V = (A+B+C).(A+B+\sim C).(A+\sim B+C).(\sim A+B+C)$

Como mencionado anteriormente, toda expressão obtida da tabela-verdade é uma expressão escrita em sua forma canônica. Assim, é passível de simplificação. Veremos, a seguir, como poderemos simplificá-la.

---

## VAMOS PRATICAR?

Suponha uma tabela-verdade de 8 linhas (envolvendo as variáveis “A”, “B” e “C”). A primeira coluna de saída é: 01101101 (o bit “0” mais à esquerda corresponde à linha “B=0” e “C=0” e, conseqüentemente, o valor “1” mais à direita, corresponde a “A=1”, “B=1” e “C=1”). Extraia a expressão a partir da tabela-verdade na forma de soma de produtos e, depois, na forma de produto de somas.

---

## 2.3 Simplificação de circuitos lógicos

O processo de simplificação de circuitos lógicos visa diminuir o número de portas lógicas ou tentar, pelo menos, diminuir o tempo de transição do sinal entre os componentes que fazem parte do circuito. Uma redução do número de portas ou da extensão do caminho que o sinal deverá trafegar gera várias consequências, como:

- diminuição no custo dos circuitos;
- diminuição do espaço utilizado pelo circuito;
- diminuição do consumo e da potência dissipada;
- possibilidade de utilizar frequências mais altas de operação.

Veremos, a seguir, como poderemos proceder à simplificação, utilizando as propriedades da lógica booleana e aplicando o mapa de Karnaugh.

### 2.3.1 Simplificação pela aplicação de propriedades e teoremas da álgebra de Boole

Como efetuar a simplificação do circuito? Aplicando os teoremas e propriedades da lógica booleana. Em algumas ocasiões, vale também o bom senso para aplicar as propriedades, como:

- tentar colocar os termos complementados juntos. Dessa forma, conseguimos obter: “ $\sim A + A = 1$ ” ou “ $\sim A.A = 0$ ”.
- tentar fazer com que apareça alguma variável isolada de modo a colocá-la em evidência e anular as demais parcelas nas quais tal variável se faz presente.

Vamos iniciar a exemplificação da simplificação, tomando por base o nosso circuito da votação entre três votantes. Para tanto, vamos partir da expressão obtida pelo uso dos mintermos, ou seja, a expressão na forma de soma de produtos.

$$V = \sim A.B.C + A.\sim B.C + A.B.\sim C + A.B.C$$

Inicialmente, podemos observar que alguns membros são comuns a algumas parcelas. Assim, poderemos colocar em evidência:

$$(I) V = \sim A.B.C + A.\sim B.C + A.B.\sim C + A.B.C$$

$$(II) V = \sim A.B.C + A.\sim B.C + A.B.\sim C + A.B.C$$

$$(III) V = \sim A.B.C + A.\sim B.C + A.B.\sim C + A.B.C$$

Notamos que existem três possibilidades de colocação em evidência. Em (I), podemos colocar em evidência “**B.C**”; em (II), podemos colocar “**A.C**”; e, em (III), podemos evidenciar “**A.B**”. Será que podemos fazer uso das três possibilidades? A resposta é sim! Lembrando da propriedade da identidade: “**A+A=A**”, podemos fazer o caminho contrário, ou seja, “**A=A+A**”. Assim, poderemos replicar a parcela que é referenciada três vezes na evidência (“**A.B.C**”):

$$V = \sim A.B.C + A.\sim B.C + A.B.\sim C + A.B.C + A.B.C + A.B.C$$

Agora, poderemos colocar em evidência “**B.C**”, “**A.C**” e “**A.B**”:

$$V = \sim A.B.C + A.\sim B.C + A.B.\sim C + A.B.C + A.B.C + A.B.C$$

$$V = B.C(\sim A + A) + A.C(\sim B + B) + A.B(C + \sim C)$$

Observando o conteúdo dos parênteses, notamos que as variáveis aparecem de forma complementada, portanto, poderemos aplicar o postulado do complemento “ **$\sim x + x = 1$** ”:

$$V = B.C.1 + A.C.1 + A.B.1$$

Por fim, aplicamos o postulado do elemento neutro “ **$x.1=x$** ”:

$$V = B.C + A.C + A.B$$

Nesse ponto, temos a expressão final simplificada para o circuito de votação envolvendo três votantes:

$$V = B.C + A.C + A.B$$

## VOCÊ QUER VER?

Para efetuar simplificações de expressões lógicas, existem diversas ferramentas automáticas disponíveis, tanto gratuitas quanto pagas. A videoaula disponibilizada por Maganha (2017) aborda algumas alternativas para facilitar a vida dos projetistas/desenvolvedores de circuitos baseados em lógica digital. Confira em: <https://www.youtube.com/watch?v=H9qKIHYHV8k>. (<https://www.youtube.com/watch?v=H9qKIHYHV8k>.)

Para melhor apresentarmos o processo de simplificação, vamos partir para outro exemplo de expressão booleana passível de ser otimizada:

$$S = \sim X . (X + Y) + \sim Z + Z.Y$$

Inicialmente, a fim de colocarmos juntos termos complementados, podemos aplicar a distribuição do termo “ **$\sim X$** ” sobre “ **$(X+Y)$** ” e, também, aplicar a distributiva “ **$\sim Z + Z.Y$** ”:

$$S = \sim X . (X + Y) + \sim Z + Z.Y$$

$$S = \sim X . X + \sim X.Y + (\sim Z + Z).(Y)$$

Aplica-se o postulado do complemento em “ **$\sim X . X$** ” e em “ **$(\sim Z + Z)$** ”:

$$S = \sim X . X + \sim X.Y + (\sim Z + Z).(Y)$$

$$S = 0 + \sim X.Y + (1).(Y)$$

Podemos retirar os elementos neutros (“0” no operador OR e “1” no operador AND):

$$S = 0 + \sim X.Y + (1).(\sim Z + Y)$$

$$S = \sim X.Y + (\sim Z + Y)$$

$$S = \sim X.Y + \sim Z + Y$$

Agora, podemos colocar o “Y” em evidência:

$$S = \sim X.Y + \sim Z + Y$$

$$S = Y(\sim X + 1) + \sim Z$$

Por fim, aplicamos o postulado da absorção sobre o operador OR no termo “ $\sim X + 1$ ”:

$$S = Y(\sim X + 1) + \sim Z$$

$$S = Y + \sim Z$$

Para realizar a simplificação de uma expressão booleana, podemos ainda utilizar outra técnica de simplificação: o “mapa de Karnaugh” — assunto que debateremos no próximo item!

### 2.3.2 Simplificação pela aplicação de Mapa de Karnaugh

Como mencionamos há pouco, podemos utilizar o mapa de Karnaugh para simplificar expressões escritas como soma de produtos. Mas o que vem a ser o mapa de Karnaugh? De acordo com Vahid e Laschuk (2011), os mapas de Karnaugh constituem uma ferramenta visual, na forma de uma matriz, para a simplificação de expressões que possuem poucas variáveis. Para expressões que manipulam cinco ou mais variáveis, torna-se inviável a utilização dessa ferramenta. Os mapas de Karnaugh permitem um entendimento básico de outros métodos existentes para a simplificação de expressões booleanas.

---

## VOCÊ SABIA?

Tenha em mente que o problema de otimização pode ser resolvido por diversas técnicas e ferramentas além dos mapas de Karnaugh. Uma alternativa para simplificar expressões com um número maior de variáveis consiste na utilização do método de Quine-McCluskey. Porém, a simplificação pode ir além, inclusive empregando técnicas baseadas em inteligência artificial. No trabalho de monografia de Oliveira (2015), você encontrará uma solução baseada em evolução artificial. Disponível em: [http://bdm.unb.br/bitstream/10483/11045/1/2015\\_VitorCoimbraDeOliveira.pdf](http://bdm.unb.br/bitstream/10483/11045/1/2015_VitorCoimbraDeOliveira.pdf) ([http://bdm.unb.br/bitstream/10483/11045/1/2015\\_VitorCoimbraDeOliveira.pdf](http://bdm.unb.br/bitstream/10483/11045/1/2015_VitorCoimbraDeOliveira.pdf)).

---

O mapa de Karnaugh faz um mapeamento direto da tabela-verdade. Cada célula da matriz representada pelo mapa corresponde a uma linha da tabela-verdade. A figura a seguir ilustra os mapas para 2, 3 e 4 variáveis.

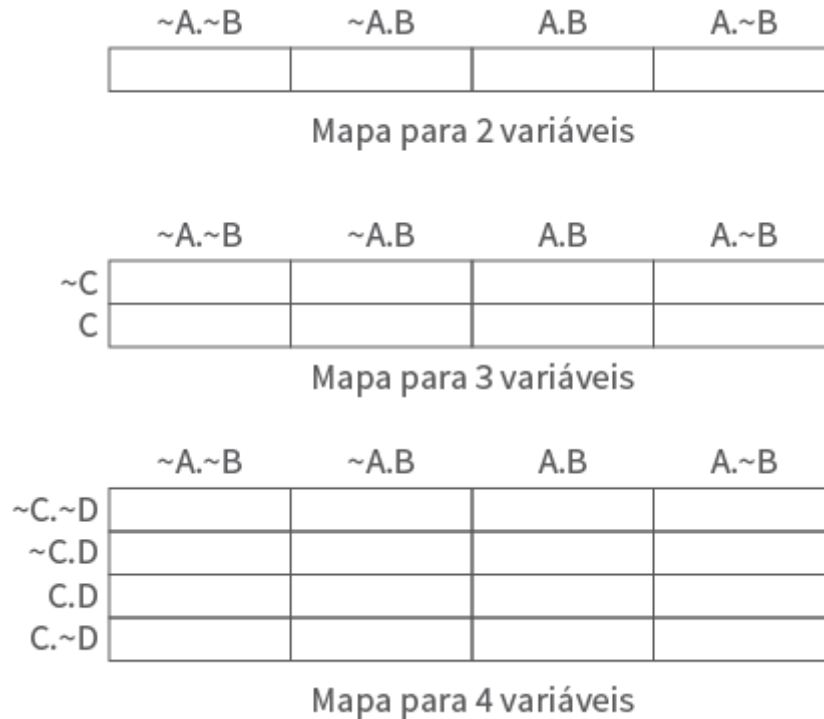


Figura 4 - Mapas de Karnaugh para 2, 3 e 4 variáveis. A sequência das variáveis é fixa, podendo apenas as células serem rotacionadas sem alterar o sentido de células vizinhas.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Para realizar simplificações utilizando o mapa de Karnaugh, precisamos conhecer a ideia de “vizinhança” e de “grupo”. Para isso, tomemos um mapa para quatro variáveis, conforme ilustrado a seguir.

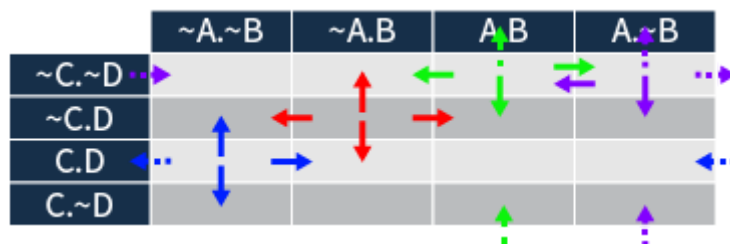


Figura 5 - Exemplos de vizinhos em um mapa para quatro variáveis. As vizinhanças são exibidas pelas colorações das setas. Por exemplo, a célula “ $A.B.C.D$ ” tem como vizinhos: “ $\sim A.B.C.D$ ”, “ $A.B.\sim C.D$ ”, “ $\sim A.B.\sim C.D$ ” e “ $\sim A.B.C.D$ ”.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.



Na figura anterior, perceba que a linha “ $\sim C \cdot \sim D$ ” é vizinha da linha “ $C \cdot \sim D$ ” e a coluna “ $\sim A \cdot \sim B$ ” é vizinha da coluna “ $A \cdot \sim B$ ”. Isso porque o mapa de Karnaugh não é plano, ou seja, é como se criássemos uma esfera conectando as extremidades. Assim, cada célula terá, no caso do mapa para quatro variáveis, sempre quatro vizinhos. A ideia de conectar as colunas da extremidade também se aplica aos mapas para 2 e 3 variáveis.

---

## VOCÊ O CONHECE?

Muito se fala dos Mapas de Karnaugh para realizar o processo de simplificação de expressões booleanas. Para saber um pouco mais sobre seu idealizador, Maurice Karnaugh, leia o artigo de Martins (2009), disponível em: <https://mauromartins.wordpress.com/2009/05/31/maurice-karnaugh-e-os-mapas-de-karnaugh/> (<https://mauromartins.wordpress.com/2009/05/31/maurice-karnaugh-e-os-mapas-de-karnaugh/>).

---

Outro conceito relacionado aos mapas de Karnaugh é relacionado à formação de grupos. Veremos que serão transpostos os valores “1” presentes na coluna de saída da tabela-verdade. Os agrupamentos a serem realizados terão o objetivo de envolver as células que contiverem o valor “1”. Considerando, ainda, um mapa para quatro variáveis, veremos a ideia de grupos na figura a seguir.

	$\sim A.\sim B$	$\sim A.B$	$A.B$	$A.\sim B$
$\sim C.\sim D$				
$\sim C.D$		1	1	
$C.D$				
$C.\sim D$				

	$\sim A.\sim B$	$\sim A.B$	$A.B$	$A.\sim B$
$\sim C.\sim D$				
$\sim C.D$		1	1	
$C.D$		1		
$C.\sim D$				

	$\sim A.\sim B$	$\sim A.B$	$A.B$	$A.\sim B$
$\sim C.\sim D$				
$\sim C.D$		1		
$C.D$		1		
$C.\sim D$		1		

	$\sim A.\sim B$	$\sim A.B$	$A.B$	$A.\sim B$
$\sim C.\sim D$		1	1	
$\sim C.D$		1	1	
$C.D$		1	1	
$C.\sim D$				

	$\sim A.\sim B$	$\sim A.B$	$A.B$	$A.\sim B$
$\sim C.\sim D$		1		
$\sim C.D$		1		
$C.D$		1		
$C.\sim D$	1	1		1

	$\sim A.\sim B$	$\sim A.B$	$A.B$	$A.\sim B$
$\sim C.\sim D$	1			1
$\sim C.D$				
$C.D$				
$C.\sim D$	1			1

Figura 6 - Exemplos de agrupamentos em um mapa de Karnaugh para quatro variáveis. Nota-se que um elemento “1” pode pertencer a mais de um grupo.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Na figura, temos exemplos de alguns agrupamentos em um mapa de Karnaugh para quatro variáveis. Algumas observações poderão ser feitas em relação à construção dos grupos:

cada grupo pode ter  $2^i$  elementos “1”, ou seja, cada grupo poderá ser formado por um elemento “1” sozinho, por 2, 4, 8 ou 16 integrantes;

- um grupo não pode ter “arestas”, por exemplo, ou a forma da letra “L” e nem a forma da letra “T”;
- cada elemento “1” pode pertencer a mais de um grupo, desde que ele agrupe algum outro “1” que não foi ainda englobado por outro grupo;
- cria-se o menor número de agrupamentos e cada grupo deve ter o maior número possível de elementos “1”. Cada grupo representará uma parcela na expressão simplificada resultante, e em cada parcela serão eliminadas  $k$  variáveis. Sendo  $k = \log_2(N)$ , em que  $N$  representa a quantidade de elementos “1” dentro do grupo.

A partir das observações feitas, vamos, agora, apresentar a sequência de passos que devem ser feitos para o processo de simplificação de uma expressão booleana. Confira!

- Passo 1: transcrever os valores “1” da coluna de saída da tabela-verdade. Cada valor “1” deverá ser colocado na célula correspondente à coordenada de sua linha.
- Passo 2: formar grupos com os elementos vizinhos, observando-se as regras descritas anteriormente.
- Passo 3: em cada grupo, eliminar as variáveis que apareçam de forma complementada, ou seja, preservar aquelas que apareçam de forma idêntica em todas as células envolvidas. Por exemplo, caso tivermos uma dupla nas coordenadas “ $\sim A.B.\sim C.D$ ” e “ $A.B.\sim C.D$ ”, deve-se eliminar 1 variável ( $k=\log_2(2)=1$ ). No caso, a variável “A” aparece negada em uma célula e não negada na outra. Assim, o resultado da simplificação dessa dupla é “ $B.\sim C.D$ ”. Outro exemplo, caso tivéssemos uma quádrupla formada pelas células “ $\sim A.B.\sim C.D$ ”, “ $A.B.\sim C.D$ ”, “ $\sim A.B.C.D$ ” e “ $A.B.C.D$ ”, encontramos “A” e “C” como variáveis que aparecem complementadas, eliminando-as. A partir dessa eliminação de “A” e “C”, restarão somente as variáveis “B.D” na composição final da parcela. Nesse segundo caso, como formamos uma quádrupla, foram eliminadas duas variáveis ( $\log_2(4)=2$ ).

Vamos, agora, voltar ao exemplo da votação envolvendo quatro votantes. A seguir, na figura, temos a tabela-verdade, o mapa de Karnaugh e o diagrama esquemático do circuito relacionado ao projeto.

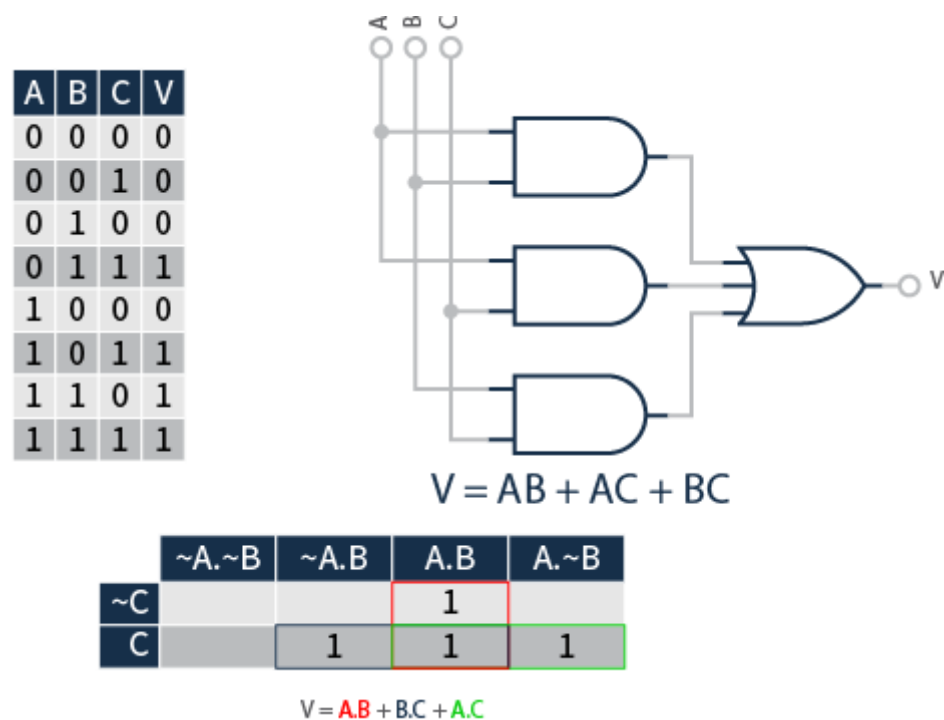


Figura 7 - Processo de simplificação do circuito de votação retratando a tabela-verdade, o mapa de Karnaugh, além da expressão e o diagrama esquemático do circuito resultante.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Perceba que a célula com a coordenada “A.B.C” pertence a três agrupamentos; exatamente o que acontece quando simplificamos a expressão por meio da álgebra booleana, replicando a parcela para que aparecesse três vezes. Nos sistemas lógicos digitais, além dos níveis “0” e “1”, também podemos usar a identificação de valores “X” e “Z”. Mas o que são eles?

Valor lógico “X”	Esse valor, também chamado de “tanto faz”, serve para identificar casos nos quais uma certa informação é irrelevante para o resultado da expressão lógica e, conseqüentemente, para o circuito.
Valor lógico “Z”: o “Z”	Indica o estado de “alta impedância”, ou seja, um desacoplamento de parte do circuito com o restante. Esse estado é utilizado, por exemplo, em sistemas de memória em que encontramos os “buffers 3-state”. Os três estados são representados por: “operação de leitura”, “operação de escrita” e “não utilizado/desacoplado”. Esse último estado é exatamente o estado “Z”.

Para um melhor esclarecimento, vamos apresentar um caso no qual é utilizado o valor lógico “X”. Imagine um sistema que manipula duas variáveis (“A” e “B”) e que, por questões de implementações externas, nunca receberá essas duas variáveis valendo “1” simultaneamente. Desse modo, o projetista do circuito não precisa se preocupar com a situação com “A=1” e “B=1” simultaneamente. A figura a seguir ilustra a tabela-verdade, o mapa de Karnaugh e o diagrama esquemático desse circuito hipotético.

A	B	V
0	0	0
0	0	0
0	1	1
0	1	x

$\sim A \cdot \sim B$	$\sim A \cdot B$	$A \cdot B$	$A \cdot \sim B$
	1	X	

$V = A$

Figura 8 - Tabela-verdade, mapa de Karnaugh e diagrama esquemático de um circuito hipotético em que as variáveis de entrada nunca assumirão o valor “1” simultaneamente.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Perceba que o valor “X” foi utilizado para auxiliar na simplificação da célula “ $\sim A \cdot B$ ”. Porém, caso a célula vizinha já tivesse sido englobada por algum outro agrupamento, ou caso o elemento “X” estivesse isolado, faríamos com que o “X” valesse “0”. Assim, podemos ressaltar que o elemento “X” somente valerá “1” caso ele seja útil na simplificação de algum elemento “1” que faça vizinhança.

Para possibilitar uma melhor abstração de quando é viável a utilização do “X” no processo de agrupamentos, vamos analisar a figura a seguir, que contempla uma tabela-verdade de um circuito hipotético que manipula três variáveis:

A	B	C	S
0	0	0	X
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	X

	$\sim A \cdot \sim B$	$\sim A \cdot B$	$A \cdot B$	$A \cdot \sim B$
$\sim C$	X	1	1	
C		1	X	

Figura 9 - Dois momentos da utilização do valor booleano “X” (“tanto faz”) no processo de simplificação, utilizando mapa de Karnaugh.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Na figura, o “X” localizado na coordenada “ $A \cdot B \cdot C$ ” foi utilizado como elemento “1”, pois ele possibilita uma maior otimização dos itens presentes nas coordenadas “ $\sim A \cdot B \cdot \sim C$ ”, “ $A \cdot B \cdot \sim C$ ” e “ $\sim A \cdot B \cdot C$ ”, estabelecendo-se, assim, uma quádrupla. Por outro lado, caso tivéssemos feito o “X” presente na coordenada “ $\sim A \cdot \sim B \cdot \sim C$ ”, faríamos com que aparecesse uma parcela a mais na expressão resultante otimizada. Essa parcela seria redundante, pois a célula contendo o “1” da coordenada “ $\sim A \cdot B \cdot \sim C$ ” já pertenceria a um agrupamento.

Como mencionado, o mapa de Karnaugh é ideal para manipular um número pequeno de variáveis, pois a partir da quinta variável, um novo plano deve ser aberto, de modo que teremos que identificar grupos de elementos “1” vizinhos nos planos que estão sendo manipulados. Para finalizar, é conveniente passar a dica de que podemos realizar agrupamentos dos elementos “0” em vez de agrupamentos de “1”. Porém, nesse caso, deveremos inverter a expressão resultante. Esse macete é útil quando se tem uma grande quantidade de elementos “1” e poucos elementos “0” bem posicionados.

Por exemplo, imagine que em um mapa de quatro variáveis (16 células) temos apenas dois elementos “0”, formando uma dupla. Podemos obter a expressão booleana dessa dupla, e, depois, complementar a expressão resultante.

---

## VAMOS PRATICAR?

- a) Extraia a expressão na forma de soma de produtos e na forma de produto de partir de uma tabela-verdade de 8 linhas (envolvendo as variáveis “A”, “B” e “C”). A coluna de saída é: 11101010 (o bit “1” mais à esquerda corresponde à linha “B=0” e “C=0”, e, consequentemente, o valor “0” mais à direita, corresponde a “A=1”, “B=1” e “C=1”). Extraia a expressão a partir da tabela-verdade na forma de soma de produtos e, depois, na forma de produto de somas. Após extrair expressões, aplique as propriedades da álgebra booleana para provar que as expressões são equivalentes.
- b) Utilizando o mapa de Karnaugh, simplifique a expressão booleana cuja tabela-verdade é expressa pela seguinte coluna de saída: 10X011010010XX0X (o bit “1” mais à esquerda corresponde à linha “A=0”, “B=0”, “C=0” e “D=0”, e, consequentemente, o valor “X” mais à direita corresponde à linha “A=1”, “B=1”, “C=1” e “D=1”).
- 

## Síntese

Chegamos ao fim desta unidade. Nessa nossa conversa, pudemos colocar um pouco de prática em nossos circuitos, pois vimos como passar os sistemas lógicos digitais das expressões para os circuitos propriamente ditos. Pudemos, ainda, extrair as próprias expressões booleanas a partir das tabelas-verdade para, depois, aplicarmos técnicas de simplificação de modo a otimizar os circuitos obtidos. Com os pontos abordados, você está apto a desenvolver os seus primeiros circuitos digitais, podendo comprovar suas funcionalidades por meio de simuladores, ou realizando a sua implementação física.

Nesta unidade, você teve a oportunidade de:

- ter um contato inicial com os componentes físicos que implementam os componentes básicos da eletrônica digital;
- colocar em prática as teorias vistas até o momento em Sistemas Digitais;
- saber identificar e manusear os componentes da eletrônica digital;
- projetar e modelar circuitos por meio de suas tabelas-verdade e expressões booleanas;
- aplicar as teorias acerca da lógica booleana para simplificar expressões lógicas.



◀ Clique para baixar o conteúdo deste tema.

## Bibliografia

- GV ENSINO. **Eletrônica Digital #61: Software para simplificar expressões booleanas**, 22 maio 2017. Disponível em (<https://www.youtube.com/watch?v=H9qKIHV8k>)<https://www.youtube.com/watch?v=H9qKIHV8k> (<https://www.youtube.com/watch?v=H9qKIHV8k>). Acesso em: 16/09/2019.
- IDOETA, I.V.; CAPUANO, F. G. **Elementos de Eletrônica Digital**. 41 Ed. São Paulo: Érica, 2012.
- INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA. **Aula 16 – Eletrônica Digital 1 – Graduação**. Disponível em: ([https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/index.php/AULA\\_16\\_-\\_Eletr%C3%B4nica\\_Digital\\_1\\_-\\_Gradua%C3%A7%C3%A3o](https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/index.php/AULA_16_-_Eletr%C3%B4nica_Digital_1_-_Gradua%C3%A7%C3%A3o))[https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/index.php/AULA\\_16\\_-\\_Eletr%C3%B4nica\\_Digital\\_1\\_-\\_Gradua%C3%A7%C3%A3o](https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/index.php/AULA_16_-_Eletr%C3%B4nica_Digital_1_-_Gradua%C3%A7%C3%A3o) ([https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/index.php/AULA\\_16\\_-\\_Eletr%C3%B4nica\\_Digital\\_1\\_-\\_Gradua%C3%A7%C3%A3o](https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/index.php/AULA_16_-_Eletr%C3%B4nica_Digital_1_-_Gradua%C3%A7%C3%A3o)). Acesso em: 16/09/2019.
- MARTINS, M. **Maurice Karnaugh e os Mapas de Karnaugh**. Publicado em 31/05/2009. Disponível em: (<https://mauromartins.wordpress.com/2009/05/31/maurice-karnaugh-e-os-mapas-de-karnaugh/>)<https://mauromartins.wordpress.com/2009/05/31/maurice-karnaugh-e-os-mapas-de-karnaugh/> (<https://mauromartins.wordpress.com/2009/05/31/maurice-karnaugh-e-os-mapas-de-karnaugh/>). Acesso em: 16/09/2019.
- OLIVEIRA, V. C. **Projeto e otimização de circuitos digitais por técnicas de evolução artificial**. Monografia (Graduação em Bacharelado em Ciência da Computação) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2015. Disponível em: ([http://bdm.unb.br/bitstream/10483/11045/1/2015\\_VitorCoimbraDeOliveira.pdf](http://bdm.unb.br/bitstream/10483/11045/1/2015_VitorCoimbraDeOliveira.pdf))[http://bdm.unb.br/bitstream/10483/11045/1/2015\\_VitorCoimbraDeOliveira.pdf](http://bdm.unb.br/bitstream/10483/11045/1/2015_VitorCoimbraDeOliveira.pdf) ([http://bdm.unb.br/bitstream/10483/11045/1/2015\\_VitorCoimbraDeOliveira.pdf](http://bdm.unb.br/bitstream/10483/11045/1/2015_VitorCoimbraDeOliveira.pdf)). Acesso em: 16/09/2019.
- TINKERCAD. **Homepage**. Disponível em: [tinkercad.com](http://tinkercad.com). Acesso em: 16/09/2019.
- TOCCI, R. J.; WIDMER, N. S.; MOSS, G. L. **Sistemas Digitais: Princípios e Aplicações**. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2018.
- VAHID, F.; LASCHUK, A. **Sistemas Digitais: Projeto, otimização e HDLs**. Porto Alegre: Grupo A, 2011.