

Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Титов Владимир Борисович

**Общая задача трех тел в пространстве форм**

Научная специальность 1.3.1.

Физика космоса, астрономия

Диссертация на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2024

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Пространство форм задачи трех тел . . . . .</b>	<b>15</b>
1.1 Понижение порядка системы . . . . .	17
1.1.1 Симметрия масштаба . . . . .	18
1.1.2 Редукция по переносам. Координаты Якоби . . . . .	18
1.1.3 Редукция по поворотам. Преобразование Хопфа . . . . .	21
1.2 Геометрические свойства и особые точки . . . . .	22
1.2.1 Эйлеровы точки . . . . .	26
1.2.2 Лагранжевы точки . . . . .	29
1.2.3 Движение с неизменной конфигурацией . . . . .	30
1.3 Уравнения движения . . . . .	31
<b>Глава 2. Симметричные периодические орбиты задачи трех тел.</b>	
<b>Вариационный подход . . . . .</b>	<b>34</b>
2.1 Простая хореография – восьмерка . . . . .	37
2.2 2 – 1-хореографии . . . . .	43
2.2.1 Угловая скорость $\omega = 1/2$ . . . . .	44
2.2.2 Угловая скорость $\omega = 1/5, 2/5$ . . . . .	46
2.2.3 Угловая скорость $\omega = 1/3$ . . . . .	48
2.2.4 Орбиты с тесными двойными . . . . .	48
2.3 Тестирование полученных решений. Равнобедренная симметрия . .	51
2.4 Линейная симметрия . . . . .	53
2.4.1 Угловая скорость $\omega = 1/2$ . . . . .	54
2.4.2 Угловая скорость $\omega = 1/4$ . . . . .	56
2.4.3 Угловая скорость $\omega = 1/3$ . . . . .	57
2.5 Периодические орбиты в пространстве форм . . . . .	60
<b>Глава 3. Области возможного движения . . . . .</b>	<b>65</b>

3.1	Поверхность минимальной скорости в ограниченной круговой задаче трех тел . . . . .	71
3.2	Область возможного движения в общей плоской задаче трех тел . . . . .	80
<b>Глава 4. Регуляризация Леметра . . . . .</b>		94
<b>Глава 5. Вырожденные траектории . . . . .</b>		103
5.1	Коллинеарные траектории . . . . .	103
5.1.1	Уравнения движения . . . . .	103
5.1.2	Свойства коллинеарных траекторий . . . . .	108
5.1.3	Численные результаты . . . . .	110
5.2	Равнобедренные траектории . . . . .	117
5.2.1	Уравнения движения . . . . .	118
5.2.2	Свойства равнобедренных траекторий . . . . .	122
5.2.3	Численные результаты . . . . .	124
<b>Заключение . . . . .</b>		128
<b>Список литературы . . . . .</b>		130
<b>Приложение А. Модели для оптимизации на языке AMPL . . . . .</b>		141
<b>Приложение В. Периодические траектории главы 2 . . . . .</b>		149
B.1	Восьмерка ( $\omega = 0$ ) . . . . .	149
B.2	Хореографии 2-1 . . . . .	150
B.3	Линейная симметрия . . . . .	159

## Введение

Задача трех тел – задача, имеющая многовековую историю, блестящие достижения, но до сих пор не получившая полного аналитического решения, хотя решение это искали выдающиеся математики и астрономы. Историю задачи можно начинать с древнейших времен, но в современной постановке задача известна со времен Ньютона, или, может быть, Кеплера. Есть некая аналогия задачи трех тел с великой теоремой Ферма. И та, и другая задачи просто формулируются. Постановку и той, и другой поймет школьник старших классов. Но несмотря на простую и прозрачную формулировку, решение их чрезвычайно сложно получить. Чтобы доказать теорему Ферма, потребовалось более 350 лет. Три с половиной столетия поиск доказательства приводил к новым вершинам математики. Очень похоже на роль задачи трех тел в математике. Разумеется, задача трех тел, кроме теоретического значения, имеет и чисто практическое. Аналитическое решение позволило бы построить (более) точные теории движения небесных тел (искусственных и естественных). Это задача практическая, за отсутствием решения пришлось разработать методы возмущений, которые позволяют предсказывать положения небесных тел с очень большой точностью. Как и в случае теоремы Ферма, поиск решения задачи трех тел привел к разработке целых разделов математики: теория функций комплексного переменного, динамические системы, хаос. Эйлер, Лагранж, Лаплас, Гамильтон, Пуанкаре, … – этот список может быть списком величайших математиков и с таким же правом списком величайших астрономов. Великая теорема Ферма доказана через три с половиной столетия после ее постановки. Задача трех тел, несмотря на величайшие достижения, почти за три с половиной столетия так и не получила окончательного решения. В начале двадцатого века Карл Сундман [67–69] нашел общее аналитическое решение задачи трех тел (с ненулевым угловым моментом) в виде всюду сходящихся рядов. К сожалению, этот великолепный теоретический результат не дает никакого знания о свойствах решений, поскольку эти ряды чрезвычайно медленно сходятся. В каком-то смысле результат Сундмана это просто теорема существования (аналитического) решения задачи трех тел.

Не зная полного решения, мы, тем не менее, можем изучать свойства этих решений. Эти свойства конечно являются следствием свойств уравнений движения (симметрии, свойств силовой функции и т. д., и т. п.). Если система замкнута, то количество движения сохраняется, и мы имеем для центра масс системы  $\mathbf{r}_{\text{ц.т.}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{M} = \mathbf{C}_1 t + \mathbf{C}_0$ , ( $\mathbf{C}_0$  и  $\mathbf{C}_1$  – постоянные вектора). Для замкнутых систем сохраняется и кинетический момент  $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{J}$ . Для консервативной системы сохраняется и полная энергия  $T + \Pi = h = \text{const.}$

В конце XIX века Брунс и Пуанкаре доказали, что других первых интегралов, кроме уже известных десяти классических, не существует. Брунс доказал, что не существует других алгебраических по координатам и скоростям интегралов, чуть позже Пуанкаре доказал, что не существует других аналитических интегралов. Итак, мы имеем только десять классических первых интегралов, которые получаются, если мы рассматриваем замкнутые, консервативные системы, независимо от вида потенциальной функции, принимая во внимание только общие ее свойства. Этого достаточно для решения задачи двух тел, но недостаточно, если число тел  $N \geq 3$ .

Перечислим их еще раз

1. Первые шесть интегралов, интегралы количества движения, известны еще со времен Галилея: центр тяжести замкнутой системы тел (т. е. системы тел, на которые не действуют внешние силы) движется прямолинейно и равномерно.
2. Если момент внешних сил (относительно неподвижного центра) равен нулю, то кинетический момент системы тел постоянен, что дает еще три интеграла.
3. В консервативной системе полная энергия постоянна, и, таким образом, всего имеем десять интегралов.

Из десяти классических первых интегралов получаются важные свойства решений задачи  $N$  тел. С помощью еще одного общего свойства потенциальной функции, а именно однородности, было получено тождество Лагранжа–Якоби, из которого получаются важные следствия. Вот некоторые из них

- Если постоянная энергии системы  $N$  тел отрицательна, то хотя бы одно из взаимных расстояний ограничено.
- Если постоянная энергии системы  $N$  тел не отрицательна, то хотя бы одно из тел должно удалиться на неограниченно большое расстояние (от барицентра системы).
- Если столкновение всех  $N$  тел в одной точке произойдет, то это произойдет в конечный момент времени.
- Для одновременного столкновения  $N$  тел в одной точке пространства необходимо, чтобы момент количества движения (или постоянная площадей) системы был равен нулю.

Подчеркнем, что все перечисленные (и многие другие) свойства задачи трех тел, также как и первые интегралы, получены, исходя из самых общих свойств уравнений движения, и справедливы для любого  $N$ . Для  $N = 3$  можно получить еще такое свойство: если момент количества движения равен нулю, то движение плоское.

Посмотрим на первые интегралы задачи несколько с другой стороны. Согласно теореме Нетер каждому интегралу соответствует группа преобразований пространства  $\mathbb{R}^3$ . Для нашей задачи первой группе интегралов (галилеевых) соответствует перенос (движение) пространства, интегралу кинетического момента – группа вращений, а интегралу энергии (автономная система, потенциал не зависит от времени) – сдвиг по времени.

Таким образом, мы можем искать решения, как класс инвариантности относительно некоторой группы преобразований. В задаче двух тел, например, таким классом является коническое сечение, определяемое размером и формой (полусью и эксцентриситетом), к этому классу относятся все сечения, которые можно получить из одного его представителя с помощью вращения. Все орбиты класса можно рассматривать как одну орбиту задачи двух тел. Возможно использовать и другие группы, например, в работах [80—82] используется еще и двухпараметрическая группа переносов в (двумерном) пространстве скоростей. В задаче трех тел симметрия неявно использовалась еще Лагранжем, который искал (частное) решение, определяемое тремя взаимными расстояниями. Собственно равносто-

роннее треугольное решение Лагранжа и представляет собой класс конгруэнтных (равносторонних) треугольников. На важность рассмотрения именно конфигурации трех тел обратил внимание А. Пуанкаре (смотри [53]), эта работа подробно обсуждается в [15]; полезные ссылки можно найти в работах А. Шансине [1; 11; 12; 14; 110], Маршала [97] и Саари [40; 41; 55—57; 100]. Решение Лагранжа [29] и открытые несколькими годами раньше коллинеарное решение Эйлера [19] на протяжении более двухсот лет оставались единственными известными точными частными решениями задачи трех тел. Следующее частное решение задачи трех тел равных масс было открыто в 2000 году и тоже связано с некоторой группой симметрии. Возникает желание рассмотреть решения задачи трех тел в пространстве, инвариантном относительно групп преобразований, переводящих решения задачи трех тел в (вообще говоря, другие) решения задачи. Как оказывается, если факторизовать конфигурационное пространство по таким группам (группа переносов и группа вращений), то можно исследовать орбиты задачи трех тел в таком факторизованном пространстве. Такое пространство появилось впервые в задаче трех тел в работе Ж. Леметра, в дальнейшем, в конце прошлого века и в самом начале века двадцать первого оно стало называться *пространством форм* [24]. В плоской задаче трех тел это пространство конгруэнтных треугольников конфигурации трех тел, в пространственной задаче нужно добавить еще ориентацию плоскости трех тел.

Размерность фазового пространства общей задачи трех тел равна 18: 3 тела  $\times$  (3 координаты положения плюс 3 координаты скорости). Рассматривая барицентрические системы, мы можем уменьшить размерность до 12, а ограничившись только плоской задачей – до 8. Размерность конфигурационного пространства в этом случае равна 4. Можно свести такое конфигурационное пространство к пространству трех измерений, в котором легче представить себе, например, области возможного движения и поверхности, ограничивающие эти области, похожие области строились В. Г. Голубевым [94]. Точка такого пространства представляет собой класс конгруэнтных треугольников, с учетом того, что центр тяжести трех тел, находящихся в вершинах этого треугольника, мы размещаем в барицентре, такая точка определяет и размер, и форму треугольника, а,

зная движение этой точки, мы квадратурой легко можем получить и положение всех трех тел.

**Целью** настоящей диссертации является представление решений задачи трех тел в пространстве форм, изучение свойства решений в этом пространстве, определение области возможного движения задачи трех тел. Рассмотрение задачи в пространстве форм позволяет исследовать различные свойства, которые дают представление об общих свойствах задачи. В плоской задаче трех тел пространство форм трехмерно. Поэтому задача трех тел в этом пространстве упрощается и позволяет естественно визуализировать решения. Полученные области возможного движения имеют наглядный вид, построенные вырожденные орбиты позволяют провести простой анализ их свойств.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Получить формулы для преобразования исходных прямоугольных координат трех тел в координаты пространства форм, рассмотреть особые точки в этом пространстве.
2. Вычислить периодические орбиты, которые далее используются для исследования свойств этих орбит в пространстве форм.
3. Определить в пространстве форм области возможного движения и поверхности нулевой скорости.
4. Для вырожденных случаев регуляризовать уравнения движения в пространстве форм.
5. Получить примеры вырожденных орбит и рассмотреть их свойства.

Актуальность предлагаемой работы вытекает из актуальности задачи трех тел, решение которой имело бы не только теоретическое значение, как решение задачи, вот уже более трех веков волнующей астрономов и математиков, но и чисто практическое значение для построения теорий движения небесных тел, космонавтики и т. п. Полученные результаты дают новое представление решений задачи трех тел.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационного исследования нашли отражение в докладах на международных конференциях

- «Few-Body Problem: Theory and Computer Simulations», Турку, 2005,
- «CelMec-V» (Небесная механика-V), Витербо, Италия, 2009,
- «CelMec-VI» (Небесная механика-VI), Витербо, Италия, 2013,
- «CelMec-VII» (Небесная механика-VII), Витербо, Италия, 2017,
- «8-е поляховские чтения», Санкт-Петербург, 2018,
- «9-е поляховские чтения», Санкт-Петербург, 2021,
- «Triple Evolution and Dynamics 3» (Эволюция и динамика тройных систем-3), США (удаленно), 2021,
- «PCA-2022» (Полиномиальная компьютерная алгебра-2022), Санкт-Петербург 2022,
- «CelMec-VIII» (Небесная механика-VIII), Италия (удаленно) 2022,
- «PCA-2023», (Полиномиальная компьютерная алгебра-2023), Санкт-Петербург, 2023,
- «PCA-2024» (Полиномиальная компьютерная алгебра-2024), Санкт-Петербург, 2024.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены

1. Titov V. B. Groups of transformations of phase trajectories in the two-body problem // Astronomiya i geodeziya. – 1985. – Т. 13. – С. 11–21.
2. Titov V. B. Isoenergetic transformations in the two-body problem // Leningradskii Universitet Vestnik Matematika Mekhanika Astronomiiia. – 1986. – С. 116–118.
3. Titov V. B. О геометрическом методе определения невозмущенной орбиты из наблюдений с использованием групповых преобразований // Кинематика и физика небесных тел. – 1987. – Т. 3, № 4, С. 26–29.
4. Titov V. Symmetrical periodic orbits in the three body problem - the variational approach  
Few-Body Problem: Theory and Computer Simulations. – University of Turku, Finland, 2006. – С. 9.
5. Титов В. Б. Периодические орбиты общей задачи трех тел с нулевым кинетическим моментом // Нелинейная динамика. – 2012. – Т. 8, № 2. – С. 377–389.

6. Titov V. Three-body problem periodic orbits with vanishing angular momentum // Astronomische Nachrichten. – 2015. – T. 336, № 3. – C. 271–275.
7. Orlov V. V., Titov V. B., Shombina L. A. Periodic orbits in the free-fall three-body problem // Astronomy Reports. – 2016. – T. 60, № 12. – C. 1083–1089.
8. Titov V. Some solutions of the general three body problem in form space // 8th Polyakhov's Reading. Vol. 1959 / ed. by E. Kustova [et al.]. – USA: American Institute of Physics, 2018.
9. Холшевников К. В. [и др.] Норма смещения положения небесного тела в одной задаче динамической астрономии // Астрон. журнал. – 2020. – Т. 97, № 4. – С. 348–352.
10. Холшевников К. В. [и др.] Увод астероида с помощью двигателя малой тяги, направленной по касательной к орбите // Астрон. журнал. – 2020. – Т. 97, № 9. – С. 348–352.
11. Холшевников К. В., Титов В. Б. Поверхности минимальной скорости в круговой ограниченной задаче трех тел // Вестник С.Петербург. ун-та. Матеманика. Механика. Астрономия. – 2020. – Т. 7, № 4. – С. 734–742.
12. Titov V. Some properties of Lemaitre regularization: Collinear trajectories // Astronomische Nachrichten. – 2021. – T. 342, № 3. – C. 588–597.
13. Titov V. Some properties of Lemaitre regularization. II isosceles trajectories and figure-eight // Astronomische Nachrichten. – 2022. – T. 343, № 3. – e14006.
14. Титов В. Области возможного движения в общей задаче трех тел // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2022. – Т. 517. – С. 225–249.
15. Титов В. Поверхность нулевой скорости в общей задаче трех тел // Вестник С.Петербург. ун-та. Матеманика. Механика. Астрономия. – 2023. – Т. 10(68), № 1. – С. 165–175.

**Личный вклад.** Работы 1–6, 8, 12–15 выполнены автором. В работе 7 автору принадлежит постановка задачи в пространстве форм, и руководство вычислительной частью работы, выполненной аспиранткой Л. Шомбиной, В. В. Орлов связал эту работу со своим подходом к исследованию задачи трех тел, который реализовался в его работах и работах его учеников. В работе 9 К. В. Холшевникову принадлежит общее руководство. Автором выполнен вывод и проверка формул с использованием компьютерной алгебры. Работе 10 является продолжением предыдущей работы, в которой выведенные ранее формулы применяются к конкретной задачи увода астероида с помощью двигателя малой тяги. Работа 11 посвящена поверхностям минимальной скорости в ограниченной задаче трех тел. Идея использовать осреднение принадлежит К. В. Холшевникову, автору принадлежит анализ получающихся поверхностей, вычисление этих поверхностей в системе Плутон–Харон–спутник.

**Достоверность** полученных результатов подтверждается согласием с результатами других авторов и результатами численного интегрирования.

#### **Научная новизна:**

1. Впервые получены неизменяемые конфигурации в пространстве форм общей задачи трех тел.
2. Впервые рассмотрены проекции найденных периодических орбит на сферу форм и их свойства.
3. В пространстве форм плоской общей задачи трех тел впервые построены области возможного движения.
4. Впервые построены области минимальной скорости в ограниченной задаче трех тел, осредненной по долготе главных тел.
5. Получены новые вырожденные орбиты задачи трех тел, показан хаотический характер таких орбит.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и 2 приложений. Полный объем диссертации составляет 177 страниц, включая 67 рисунков и 11 таблиц. Список литературы содержит 110 наименований.

Во введении кратко описывается поставленная задача и методы решения.

В первой главе производится редукция по переносам и поворотам, и таким образом вводится пространство форм. Рассматриваются геометрические свойства пространства форм, выводятся уравнения движения.

Вторая глава посвящена поиску периодических решений вариационным методом. Решение ищется в виде тригонометрических рядов минимизацией функционала действия. В качестве модели берутся 3 симметрии из списка симметрий плоской задачи трех тел: простая хореография (здесь только одна орбита – восьмерка), 2-1 хореографии, в этом случае две массы должны быть равными, и линейная симметрия, где все массы отличаются друг от друга. Анализируются полученные решения.

В третьей главе строятся области возможного движения плоской задачи трех тел. Такие области хорошо известны в задаче двух тел и в круговой ограниченной задаче трех тел. Если задача не круговая, то ее можно упростить, осредняя по угловой переменной основных тел. Однако, и в случае общей задачи трех тел можно построить области возможного движения, если рассмотреть движение в пространстве форм, в котором эта задача имеет всего три измерения. Построены такие поверхности нулевой скорости в пространстве форм для различных значений масс.

В четвертой главе рассматривается регуляризация Леметра, которая будет использоваться в следующей главе при анализе вырожденных траекторий. Анализируется регуляризованное пространство форм.

В пятой главе рассматриваются вырожденные траектории: прямолинейные и равнобедренные. Для каждого случая строится параметризация, которая позволяет просто записать уравнения движения для этих вырожденных случаев, свободные от особенностей, и получить численное решение, а затем провести его анализ.

В заключении перечисляются решенные задачи.

В приложении А приведены листинги моделей, используемых при поиске периодических решений главы 2.

В приложении В показаны результирующие орбиты. Приведены разложения координат задачи в ряды Фурье во вращающейся системе координат, а также начальные координаты и скорости в барицентрической системе координат.

### **Основные научные результаты**

1. Впервые построены поверхности нулевых скоростей и области возможного движения общей задачи трех тел в пространстве форм [50; 104; 105].
2. Общая плоская задача трех тел впервые последовательно рассматривается в пространстве форм. Приводятся формулы перехода к координатам пространства форм [84; 85; 103]. В этом пространстве изучаются геометрические свойства траекторий, их особые точки, в том числе эйлеровы и лагранжевы точки, что дает возможность получить движение с неизменяемой конфигурацией. Выводятся уравнения движения и первые интегралы в пространстве форм [104; 105].
3. Впервые выявлены и описаны свойства некоторых орбит в регуляризованном по Леметру пространстве форм [84; 85].
4. Впервые численно получены вырожденные (коллинеарные и равнобедренные) траектории в регуляризованном пространстве форм. Показан их хаотический характер [84; 85].
5. С использованием вариационного подхода [78; 83; 103], найдены новые периодические орбиты, проанализированы проекции полученных орбит на сферу форм.
6. Выведены и описаны новые частные случаи, в которых симметрия или дает простые результаты (см., например, [81], задача двух тел), или существенно упрощает анализ задачи, в [109] осреднение по долготам главных тел позволяет построить поверхности минимальной скорости; использование метода осреднения дает возможность решить чисто практическую задачу увода астероида с орбиты столкновения с Землей [98; 107].

В работе [50] автору принадлежит постановка задачи в пространстве форм, и руководство вычислительной частью работы. В работе [98] К. В. Холшевникову принадлежит общее руководство. Автором выполнен вывод и проверка формул

с использованием компьютерной алгебры. Работа [107] является продолжением предыдущей работы. Работа [105] посвящена поверхностям минимальной скорости в ограниченной задаче трех тел. Идея использовать осреднение принадлежит К. В. Холшевникову, автору принадлежит анализ получающихся поверхностей, вычисление этих поверхностей в системе Плутон–Харон–спутник.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Геометрические свойства решений общей плоской задачи трех тел в пространстве форм, движения с неизменяемой конфигурацией в этом пространстве. Уравнения движения в рассматриваемом пространстве форм.
2. Периодические орбиты общей задачи трех тел, полученные вариационным методом с использованием групп симметрий (группа диэдра, симметрия 2-1 хореографий и линейная симметрия). Все полученные вариационным методом орбиты проверены численным интегрированием.
3. Области возможного движения в плоской общей задаче трех тел. Поверхности минимальной скорости в ограниченной круговой задаче трех тел, осредненной по долготе главных тел.
4. Праобразы экватора, меридиана равнобедренных конфигураций и орбиты-«восьмерки» при регуляризации Леметра. Параметризации вырожденных случаев (равнобедренные и коллинеарные конфигурации) на сфере форм, приводящие к уравнениям движения, свободным от особенностей.
5. Вырожденные (коллинеарные и равнобедренные) траектории в регуляризованном пространстве форм, полученные численным интегрированием, свойства этих траекторий. В том числе хаотические аспекты вырожденных траекторий.

## Глава 1. Пространство форм задачи трех тел

Для задачи  $N$  тел мы имеем 10 классических интегралов, 9 из них связаны с симметрией переносов и вращений, но даже для  $N = 2$  эти симметрии преобразуют конические сечения (эллипсы, параболы или гиперболы) в конические сечения с таким же значением эксцентриситета, т. е. в орбиты, если отвлечься от размера, с одинаковой формой. Для задачи двух тел нетрудно найти преобразования, которые переводят любую орбиту задачи в любую другую. Со временем Гамильтона мы знаем, что орбиты задачи двух тел в пространстве скоростей (Гамильтон называл их *годографами*) представляют собой окружности или их часть, если орбита гиперболическая или параболическая (смотри, например, [8]), любой перенос, поворот или растяжение преобразует коническое сечение в коническое сечение, и, следовательно, орбиту задачи двух тел в другую орбиту.

На рис. 1.1 изображены годографы задачи двух тел в пространстве скоростей  $u, v$ ; линия апсид в пространстве координат  $x, y$  остается направленной вдоль оси абсцисс этого пространства, в левой части все окружности имеют две общие точки, фокусы окружностей Аполлония  $(-k, 0)$  и  $(k, 0)$ , и, следовательно, большая полуось равна  $\mu/k^2$ , в правой части  $e > 1$  фокусы окружностей Аполлония находятся в точках  $(0, -k)$  и  $(0, k)$ .

Взяв за основу растяжение, повороты и переносы в пространстве скоростей, можно построить группу преобразований, переводящих решения задачи двух тел  $x, y, u, v$  в решения задачи двух тел  $x', y', u', v'$  [80; 81]:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{d(x \cos \gamma - y \sin \gamma)}{1 + x\beta - y\alpha}, y' = \frac{d(x \sin \gamma + y \cos \gamma)}{1 + x\beta - y\alpha}, \\u' &= d^{-1/2}((u + \alpha) \cos \gamma - (v + \beta) \sin \gamma), \\v' &= d^{-1/2}((u + \alpha) \sin \gamma + (v + \beta) \cos \gamma).\end{aligned}$$

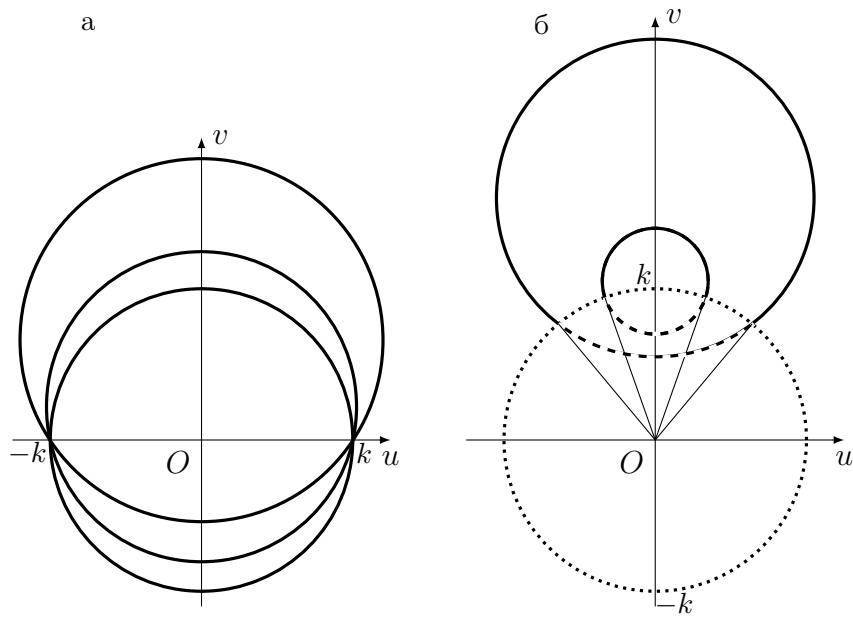


Рисунок 1.1 — Годографы скоростей задачи двух тел (орбита в пространстве скоростей), подробности см. в тексте

Здесь  $d, \gamma, \alpha, \beta$  – параметры групповых преобразований;  $x, y, u, v$  – координаты и скорости точек исходной орбиты, т. е.,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ u' \\ v' \end{pmatrix} = g(d, \gamma, \alpha, \beta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} = g_1(d)g_2(\gamma)g_3(\alpha)g_4(\beta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix},$$

$g_1$  и  $g_2$  – однопараметрические группы растяжений и поворотов соответственно, а  $g_3$  и  $g_4$  – группы сдвига по осям координат в пространстве скоростей. Групповой закон умножения:

$$\begin{aligned} g(d, \gamma, \alpha, \beta) &= g(d_2, \gamma_2, \alpha_2, \beta_2) \cdot g(d_1, \gamma_1, \alpha_1, \beta_1) \\ d &= d_1 d_2, \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \\ \alpha &= \alpha_1 + (\alpha_2 \cos \gamma_1 + \beta_2 \sin \gamma_1) d_1^{1/2}, \\ \beta &= \beta_1 + (-\alpha_2 \sin \gamma_1 + \beta_2 \cos \gamma_1) d_1^{1/2}. \end{aligned}$$

Нетрудно получить преобразования, оставляющие инвариантным значение постоянной энергии [81]. Очевидно, для отрицательных значений постоянной энергии  $h$  подходит любое преобразование, которое переводящее окружность в

окружность с сохранением длины хорды, проходящей через начало координат перпендикулярно диаметру, при этом  $e < 1$  и, если фиксировать линию апсид, то получающиеся окружности представляют семейство окружностей Аполлония в левой части рис. 1.1. В случае положительного значения  $h$  ( $e > 1$ ) соответствующие траектории представляют семейство окружностей Аполлония в правой части рис. 1.1.

Можно использовать рассмотренную группу для определения параметров группового преобразования из наблюдений [82] (и, значит, элементов орбиты). Нетрудно выделить подгруппу, преобразования которой изменяли бы только форму орбит, т. е. эксцентриситет  $e$  и полуось  $a$ , таким образом, все орбиты, имеющие одну и ту же форму ( $e$ ) и размер ( $a$ ), можно считать одинаковыми и изучать свойства классов именно таких орбит. Размерность пространства таких орбит будет меньше (в данном случае она равна двум) и изучение свойств в таком пространстве будет проще.

Если задача двух тел имеет полное решение, которое позволяет определить свойства решений, то в задаче трех тел полное решение неизвестно и любое упрощение задачи может оказаться полезным при изучении свойств ее решений.

## 1.1 Понижение порядка системы

Итак, чтобы исследовать сложную задачу необходимо каким-либо образом ее упростить. Например, свести задачу к задаче меньшей размерности. Тривиальное сведение задачи к меньшей размерности реализуется, если мы ограничимся плоской задачей. Любые свойства решений плоской задачи дадут нам возможность продвинуться и в решении пространственной задачи.

Для дальнейшего сведения нашей задачи к задаче меньшей размерности можно использовать известные соотношения и симметрии, впрочем согласно теореме Нетер каждому первому интегралу соответствует группа преобразований.

Если рассматривать только интегралы количества движения и кинетического момента, то группы преобразований это группа переноса и группа поворотов.

### 1.1.1 Симметрия масштаба

Начнем с другой известной группы симметрии задачи  $N$  тел – симметрии масштаба. Эта симметрия является простым следствием однородности потенциальной функции степени  $-1$  и однородности кинетической энергии степени  $2$ :

Если функции  $\mathbf{r}_i(t), \mathbf{v}_i(t), i = 1, \dots, N$ , представляют решение задачи  $N$  тел, то решением задачи также является и

$$\begin{aligned}\rho_i(t) &= \lambda \mathbf{r}_i(\lambda^{-3/2}t) \\ \dot{\rho}_i(t) &= \lambda^{-1/2} \mathbf{v}_i(\lambda^{-3/2}t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

при этом

$$\begin{aligned}h' &= \lambda^{-1} h \\ J' &= \lambda^{1/2} J,\end{aligned}\tag{1.2}$$

здесь  $h$  – постоянная энергии,  $J$  – угловой момент,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  – любое положительное вещественное число. Эта симметрия, по сути открытая еще Кеплером, справедлива в случае любого числа тел. Таким образом, имея решение для  $h$ , мы получаем решение для любого значения постоянной энергии того же знака, что позволяет нам ограничиться лишь тремя значениями постоянной энергии, например,  $h = -1/2, 0, 1/2$ . Собственно, можно выбрать любые три значения. Если энергия отрицательна, можно было бы выбрать  $h = -1$ , значение  $h = -1/2$  в некоторых задачах имеет небольшое преимущество: как мы увидим позже, если радиус сферы форм выбрать равным  $1/2$ , то при определенной стереографической проекции образом экватора сферы форм является единичная окружность, что во многих случаях весьма удобно.

### 1.1.2 Редукция по переносам. Координаты Якоби

Вернемся к группам симметрии. Начнем с переносов. Инвариантность по переносам позволяет нам среди всех инерциальных систем выбрать систему с на-

чалом в барицентре

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i = 0. \quad (1.3)$$

Условие (1.3) позволяет снизить размерность задачи на 2 (в пространственном случае на 3). Другой способ избавиться от переносов, который применял еще Лежандр – использовать в качестве переменных взаимные расстояния. В этом случае в пространственной задаче потребуются еще две переменные, отвечающие за ориентацию плоскости трех тел.

Использование (1.3) напрямую легко дает уравнения относительного движения, но уменьшив размерность задачи, мы получаем несимметричные выражения с возмущающей функцией различной для каждого тела. Чтобы избавиться от этого недостатка в небесной механике используют координаты Яакоби (рис. 1.2): координаты каждого следующего тела отсчитываются от центра тяжести всех предыдущих. Такая конструкция работает для любого числа  $N$  тел, для трех тел имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \\ \mathbf{Q}_2 &= \mathbf{r}_3 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \end{aligned}$$

Из трех векторов  $\mathbf{r}_i$  мы получили два:  $\mathbf{Q}_1$  и  $\mathbf{Q}_2$ , подразумевая

$$\mathbf{Q}_3 = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0,$$

и тем самым, рассматривая движение  $\mathbf{r}_i$  в барицентрической системе координат, по известным  $\mathbf{Q}_1$ ,  $\mathbf{Q}_2$  (и  $\mathbf{Q}_3 \equiv 0$ ) легко записать обратное преобразование, чтобы получить  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= -\frac{m_2}{m_1+m_2} \mathbf{Q}_1 - \frac{m_3}{M} \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3, \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{m_1}{m_1+m_2} \mathbf{Q}_1 - \frac{m_3}{M} \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3, \\ \mathbf{r}_3 &= \frac{m_1+m_2}{M} \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3. \end{aligned} \quad (1.4)$$

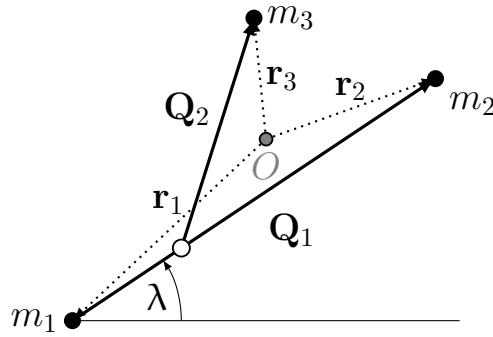


Рисунок 1.2 — Координаты Якоби,  $\lambda$  — угол направления  $m_1 - m_2$  к неподвижной оси

В пространстве координат Якоби мы можем получить взаимные расстояния  $r_{ij}$

$$\begin{aligned} r_{12} &= |\mathbf{Q}_1|, \\ r_{13} &= \left| \mathbf{Q}_2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{Q}_1 \right|, \\ r_{23} &= \left| \mathbf{Q}_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{Q}_1 \right|, \end{aligned}$$

кинетическую энергию  $T$ , лагранжиан  $L$  и угловой момент  $J$ :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 + m_3\dot{\mathbf{r}}_3^2) = \frac{1}{2}\left(\mu_1\dot{\mathbf{Q}}_1^2 + \mu_2\dot{\mathbf{Q}}_2^2\right), \\ L &= T(\dot{\mathbf{Q}}_1, \dot{\mathbf{Q}}_2) + V(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2), \\ J &= \mu_1\mathbf{Q}_1 \times \dot{\mathbf{Q}}_1 + \mu_2\mathbf{Q}_2 \times \dot{\mathbf{Q}}_2. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь  $\mu_1 = m_1m_2/(m_1+m_2)$ ,  $\mu_2 = m_3(m_1+m_2)/(m_1+m_2+m_3)$ , а потенциальная функция  $V$  легко выражается через  $Q_1$ ,  $Q_2$ .

Симметрия по телам кажется нарушенной, поскольку мы начинаем построение координат Якоби, выбирая какое-то одно тело. Это оправдано в планетных задачах, где центральное тело (Солнце) имеет массу существенно большую масс остальных тел. В общей же задаче трех тел это не так, но следующее приведение делает все тела равноправными.

### 1.1.3 Редукция по поворотам. Преобразование Хопфа

Теперь обратимся к следующей симметрии, которая связана с интегралом кинетического момента, т. е. сохранением вектора кинетического момента, – симметрией по поворотам (в трехмерном пространстве по вращениям).

Сфера в пространстве координат Якоби  $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$  есть  $\mathbb{S}^3$ , а, избавившись от поворотов, получаем  $\mathbb{S}^2$ , таким образом, мы естественно приходим к классическому преобразованию Хопфа ( $\mathcal{S}^1 \hookrightarrow \mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{S}^2$ ).

Будем рассматривать  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$  как точки комплексного пространства,  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{C}$ . Тогда, следуя Хопфу, можно ввести новые переменные:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2}\mu_1|\mathbf{Q}_1|^2 - \frac{1}{2}\mu_2|\mathbf{Q}_2|^2, \\ \xi_2 + i\xi_3 &= \sqrt{\mu_1\mu_2}\mathbf{Q}_1\bar{\mathbf{Q}}_2.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Правая часть первого уравнения вещественна, правая часть второго уравнения – комплексное число. Таким образом, получаем три вещественные переменные  $\xi_1, \xi_2$  и  $\xi_3$ .

Обратное преобразование:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \operatorname{tg} \lambda \end{pmatrix} \sqrt{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1} / (\sqrt{2\mu_1} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda}), \\ \mathbf{Q}_2 &= \begin{pmatrix} \xi_2 - \xi_3 \operatorname{tg} \lambda \\ \xi_2 \operatorname{tg} \lambda + \xi_3 \end{pmatrix} / (\sqrt{2\mu_2} \sqrt{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda}),\end{aligned}\tag{1.7}$$

Трехмерное пространство  $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  – пространство ориентируемых конгруэнтных треугольников, каждая точка этого пространства представляет собой класс таких ориентируемых конгруэнтных треугольников. Это пространство называется *пространством форм*, именно в этом пространстве мы будем изучать свойства решений задачи трех тел.

Получим в этом пространстве выражение для момента инерции  $I$ :

$$\begin{aligned}
 I &= m_1|\mathbf{r}_1|^2 + m_2|\mathbf{r}_2|^2 + m_3|\mathbf{r}_3|^2 \\
 &= \frac{(m_1 m_2 r_{12}^2 + m_1 m_3 r_{13}^2 + m_2 m_3 r_{23}^2)}{(m_1 + m_2 + m_3)} = \\
 &= \mu_1|\mathbf{Q}_1|^2 + \mu_2|\mathbf{Q}_2|^2 = \\
 &= \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Таким образом, *расстояние от начала координат до точки в пространстве форм равно моменту инерции*. Заметим, что момент инерции играет важную роль в качественных исследованиях задачи  $N$  тел. Хорошо известно тождество Лагранжа–Якоби:

$$\ddot{I} = 2(2T - V) = 2(T + h) = 2(V + 2h). \tag{1.9}$$

В нашем случае это уравнение является уравнением Лагранжа для переменной  $\rho$  ( $\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} = I$ ). Оно будет рассмотрено в разделе 1.3. Из тождества (1.9) непосредственно следует много качественных выводов, касающихся решений задачи 3 ( $N$ ) тел. Они рассматриваются в следующей главе.

## 1.2 Геометрические свойства и особые точки

Рассмотрим геометрические свойства пространства форм.

В XX–XXI веках сфера форм использовалась Шансине и Монтгомери [16] для доказательства существования знаменитой орбиты-восьмерки. Пространство форм теперь используется при рассмотрении различных аспектов задачи трех тел [11; 22–24; 47], включая поиск новых хореографий [18; 25; 26; 70–73], регуляризацию [44; 45; 50; 78; 79] и другие аспекты [27].

Введем в пространстве  $\Xi$  сферические координаты  $\rho, \varphi, \theta$ . Координату  $\rho$  естественно считать размером треугольника, а  $\varphi, \theta$  угловыми переменными, определяющими его форму. Тогда координата  $\rho$ , как это следует из (1.8), совпадает с моментом инерции. В пространстве форм все свойства, касающиеся момента инерции системы естественным образом связаны с размером треугольника.

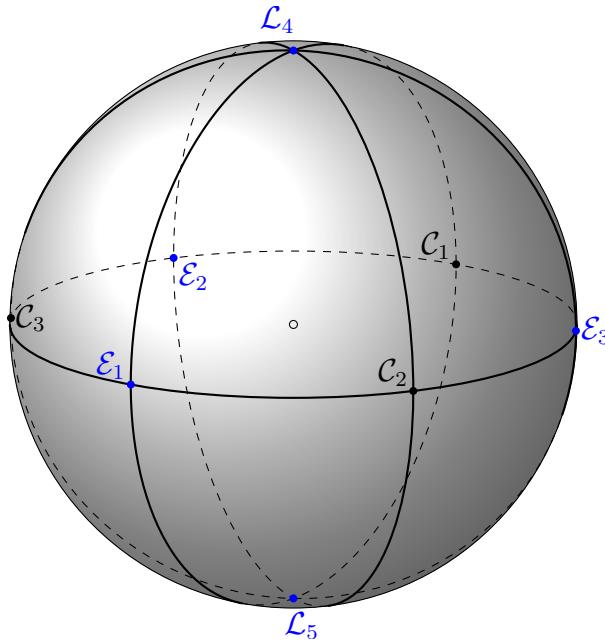


Рисунок 1.3 — Сфера форм,  $\mathcal{C}_i$  – точки двойных соударений,  $\mathcal{E}_i$  – эйлеровы коллинеарные конфигурации

Можно за размер треугольника принять квадратный корень из  $\rho$ , тогда единица измерения совпадет с единицей длины. В любом случае точки сферы фиксированного радиуса, например,  $\rho = 1$  или  $\rho = 1/2$ , будут отвечать именно за форму треугольника, такая сфера называется *сферой форм*, а все пространство форм есть конус над этой сферой с вершиной в точке тройного соударения  $(0,0)$ . Таким образом, точка на сфере форм представляет собой класс подобных треугольников, все точки на луче в пространстве форм, исходящем из начала координат, отвечают подобным конфигурациям трех тел и отличаются только размером.

На рисунке 1.3 изображена сфера форм. Для наглядности и иллюстрации свойств различных точек сферы форм здесь принято  $m_1 = m_2 = m_3$ , в случае неравных масс положение точек изменится и это будет указано.

Из второго уравнения (1.6) очевидно, что экватор сферы форм, (и плоскость  $\xi_3 = 0$ ), отвечают коллинеарным конфигурациям ( $\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2 = 0$ ). Таким образом, все точки двойных соударений при любых значениях масс лежат на экваторе, на рисунке 1.3 это точки  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  и  $\mathcal{C}_3$ . Заметим, что из-за симметрии по поворотам не имеет значения, где мы выберем начало отсчета угла  $\varphi$ , на рисунке он выбран так, что точке  $\mathcal{C}_3$  (соударению тел  $m_1$  и  $m_2$ ), отвечает значение  $\varphi = \pi$ , тогда соударению  $m_1$  и  $m_3$  ( $\mathcal{C}_2$ ) в случае равных масс  $\varphi = -\pi/3$ , а соударению  $m_2$  и  $m_3$  ( $\mathcal{C}_1$ )  $\varphi = \pi/3$ . В случае равных масс точки, диаметрально противоположные точ-

кам  $\mathcal{C}_i$ , отвечают эйлеровым конфигурациям  $\mathcal{E}_i$ , а полюса  $\mathcal{L}_4$  и  $\mathcal{L}_5$  – лагранжевым равносторонним конфигурациям. Меридианы проходящие через полюса и одну из точек двойных соударений проходят в этом случае и через соответствующую эйлерову точку, точки этого меридиана отвечают равнобедренным конфигурациям. Если равны только две массы, то равнобедренным конфигурациям отвечает только один меридиан.

В случае неравных масс коллинеарные конфигурации, как эйлеровы так и конфигурации двойных соударений, разумеется, остаются на экваторе, но смещаются от положений, показанных на рис. 1.3. Более того, точки, отвечающие лагранжевым конфигурациям, перестают быть полюсами, хотя и остаются симметричными относительно экватора.

Выразим взаимные расстояния в координатах  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ :

$$\begin{aligned} r_{12}^2 &= \frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2} (\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1) \\ r_{13}^2 &= \frac{m_1 + m_3}{2m_1 m_3} \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \\ &\quad + \frac{m_2 m_3 - m_1(m_1 + m_2 + m_3)}{2m_1 m_3(m_1 + m_2)} \xi_1 + \frac{\sqrt{m_1 m_2 m_3(m_1 + m_2 + m_3)}}{m_1 m_3(m_1 + m_2)} \xi_2 \\ r_{23}^2 &= \frac{m_2 + m_3}{2m_2 m_3} \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \\ &\quad + \frac{m_1 m_3 - m_2(m_1 + m_2 + m_3)}{2m_2 m_3(m_1 + m_2)} \xi_1 - \frac{\sqrt{m_1 m_2 m_3(m_1 + m_2 + m_3)}}{m_2 m_3(m_1 + m_2)} \xi_2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Отсюда легко получим выражения для лучей двойных соударений:

$$\begin{aligned} c_{12} &= \frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2} R (-1, 0, 0)^T, \\ c_{13} &= \frac{m_1 + m_3}{2m_1 m_3} R \left( -\frac{m_2 m_3 - m_1(m_1 + m_2 + m_3)}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)}, -\frac{2\sqrt{m_1 m_2 m_3(m_1 + m_2 + m_3)}}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)}, 0 \right)^T, \\ c_{23} &= \frac{m_2 + m_3}{2m_2 m_3} R \left( -\frac{m_1 m_3 - m_2(m_1 + m_2 + m_3)}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}, \frac{2\sqrt{m_1 m_2 m_3(m_1 + m_2 + m_3)}}{(m_2 + m_3)(m_1 + m_2)}, 0 \right)^T, \end{aligned} \quad (1.11)$$

здесь  $R \in \mathbb{R}^+$  – любое вещественное положительное число. Выражения в круглых скобках дают нам координаты точек двойных соударений на сфере форм. В случае равных масс точки двойных соударений располагаются на экваторе равномерно.

Точки двойных соударений 1.11 можно перевести в три равноотстоящие точки  $\pm 2\pi/3, \pi$ , выполнив дробно-линейное преобразование. Такое преобразование

отображает единичную окружность в единичную окружность, и, следовательно, его можно представить виде

$$z = \lambda \frac{w - a}{1 - \bar{a}w} \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_1^2 m_2 + m_1 m_2^2 - m_2^2 m_3 - m_1^2 m_3 - i(m_2 - m_1) \sqrt{m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3)}}{(m_1 + m_2) \left( \sqrt{3m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3)} + m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3 \right)} \\ \lambda &= \left( 2(m_1 + m_2) \sqrt{3m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3)} \right. \\ &\quad \left. + m_2^2 m_3 + 6m_1 m_2 m_3 + m_1^2 m_3 + 2m_1 m_2^2 + 2m_1^2 m_2 \right. \\ &\quad \left. + i(m_2 - m_1) (2\sqrt{m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3)} + \sqrt{3}m_2 m_3 + \sqrt{3}m_1 m_3) \right) / \\ &\quad \left( 2(m_1 + m_2) (\sqrt{3m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3)} + m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3) \right) \end{aligned}$$

разумеется,  $|\lambda| = 1$ ,

Эйлеровы точки получаются не так просто, они будут рассматриваться в следующем разделе, а формулы для лучей лагранжевых точек  $L_{4,5}$  легко получить из условия  $r_{12} = r_{13} = r_{23}$ :

$$L_{4,5} = \frac{R}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3} \begin{pmatrix} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2) - m_3 (m_1^2 + m_2^2)}{m_1 + m_2} \\ \frac{(m_1 - m_2) \sqrt{m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3)}}{m_1 + m_2} \\ \pm \sqrt{3m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3)}, \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

При  $R = 1$  имеем две точки на сфере форм, симметричные относительно плоскости экватора.

Ясно, что в случае равных масс эйлеровы точки равноотстоят друг от друга на угол  $2\pi/3$ , если же массы не равны, то эйлеровы точки очевидно располагаются неравномерно, да и лагранжевые точки  $L_{4,5}$  располагаются не в полюсе. Мы можем перевести эйлеровы точки в три равноотстоящие точки, при этом лагранжевые точки окажутся в полюсах, с помощью преобразования (1.12)

Конечно, дробно-линейным преобразованием мы можем перевести эйлеровы точки в три равноотстоящие точки, при этом лагранжевые точки окажутся в полюсах. В каких-то приложениях это может оказаться полезным, но в рассматриваемых нами задачах получающиеся выражения намного сложнее, и поэтому соответствующее преобразование не выполнялось.

### 1.2.1 Эйлеровы точки

Рассмотрим в пространстве  $\Xi$  сферические координаты:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \rho \cos \varphi \cos \theta, \\ \xi_2 &= \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ \xi_3 &= \rho \sin \theta,\end{aligned}\tag{1.14}$$

Единица измерения переменной  $\rho$  равна квадрату единицы длины, умноженной на единицу массы, поскольку  $\rho$  есть момент инерции трех тел. В этих координатах взаимные расстояния можно записать

$$\begin{aligned}r_{12}^2 &= \frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2} \rho(1 + \cos \varphi \cos \theta), \\ r_{13}^2 &= \frac{m_1 + m_3}{2m_1 m_3} \rho(1 - \cos(\varphi - \varphi_{13}) \cos \theta), \\ r_{23}^2 &= \frac{m_2 + m_3}{2m_2 m_3} \rho(1 - \cos(\varphi - \varphi_{23}) \cos \theta).\end{aligned}\tag{1.15}$$

Здесь выражения для косинуса и синуса  $\varphi_{ij}$  получаются из (1.11) для координат двойного соударения  $ij$  на сфере форм. Для потенциальной функции  $V$  имеем

$$V(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left( \frac{\nu_{12}}{\sqrt{1 + \cos \theta \cos \varphi}} + \frac{\nu_{13}}{\sqrt{1 - \cos \theta \cos(\varphi - \varphi_{13})}} + \frac{\nu_{23}}{\sqrt{1 - \cos \theta \cos(\varphi - \varphi_{23})}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} D(\theta, \varphi),\tag{1.16}$$

здесь  $\nu_{ij} = \sqrt{2}(m_i m_j)^{3/2} / \sqrt{m_i + m_j}$ . Заметим, что потенциальная функция разбивается на два множителя, один из них зависит только от размера системы (момента инерции), а второй – только от формы треугольника.

Попробуем найти такие конфигурации, которые могут оставаться неизменными [79],  $\theta = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$ . Таким образом, будем искать особые точки  $D$ , то есть

$$\begin{aligned}\frac{\partial D(\varphi, \theta)}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial D(\varphi, \theta)}{\partial \varphi} &= 0\end{aligned}$$

При этом размер конфигурации может меняться, не изменяется только форма, т. е. треугольник трех тел с течением времени остается подобным.

Рассмотрим сначала коллинеарные конфигурации. Частная производная по  $\theta$  имеет множитель  $\sin \theta$  и, следовательно, равна нулю для всех точек экватора, чтобы вычислить частную производную по  $\varphi$ , и избавимся от радикалов в выражении (1.16), для этого необходимо фиксировать порядок тел, пусть, например, тело  $m_3$  располагается между  $m_1$  и  $m_2$ . Плоскость экватора пространства  $\Xi$  показана на рис. 1.4 ( $m_1 = m_2 = 3/5, m_3 = 9/5$ ):

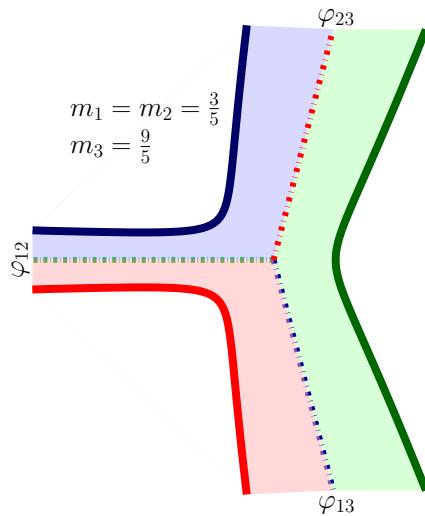


Рисунок 1.4 — Расположение конфигурации трех тел на плоскости экватора

На рис. 1.4 нарисована также область возможного движения, точнее ее сечение плоскостью экватора. Область ограничена кривыми нулевых скоростей. Эти кривые будут определены ниже, линии же двойных соударений уже определены: штрих-пунктирная линия зеленого цвета – линия соударения тел  $m_1$  и  $m_2$ , синего цвета – линия соударения тел  $m_1$  и  $m_3$ , и красного тела – линия соударения тел  $m_2$  и  $m_3$ . Соответственно заштрихованная зеленым область отвечает порядку  $m_1-m_3-m_2$ , заштрихованная синим –  $m_1-m_2-m_3$ , и красным –  $m_2-m_1-m_3$ . Для рассматриваемого порядка  $m_1-m_3-m_2$  взаимные расстояния для точек на экваторе

можно записать так:

$$\begin{aligned} r_{12} &= \sqrt{\rho} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2}} \cos \varphi/2, \\ r_{13} &= \sqrt{\rho} \sqrt{\frac{m_1 + m_3}{2m_1 m_3}} \sin(\varphi - \varphi_{13})/2, \\ r_{23} &= -\sqrt{\rho} \sqrt{\frac{m_2 + m_3}{2m_2 m_3}} \sin(\varphi - \varphi_{23})/2, \end{aligned} \quad (1.17)$$

тогда

$$D(0, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\nu_{12}}{\cos \varphi/2} + \frac{\nu_{13}}{\sin(\varphi - \varphi_{13})/2} - \frac{\nu_{23}}{\sin(\varphi - \varphi_{23})/2} \right),$$

и

$$\frac{\partial D(0, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left( \nu_{12} \frac{\sin \varphi/2}{\cos^2 \varphi/2} - \nu_{13} \frac{\cos(\varphi - \varphi_{13})/2}{\sin^2(\varphi - \varphi_{13})/2} + \nu_{23} \frac{\cos(\varphi - \varphi_{23})/2}{2 \sin^2(\varphi - \varphi_{23})/2} \right).$$

Знаменатели в последнем выражении равняются нулю только в точках двойных соударений, которые очевидно не могут иметь неизменяемую конфигурацию, и выражение  $\partial D(0, \varphi)/\partial \varphi = 0$  эквивалентно выражению

$$\begin{aligned} 0 &= m_1^{5/2} m_2^{5/2} \sqrt{(m_1 + m_3)(m_2 + m_3)} (m_1 + m_2 + m_3)^2 \operatorname{tg}^5 \varphi/2 + \\ &+ 2m_1^2 m_2^2 (m_2 - m_1) \sqrt{m_3(m_1 + m_3)(m_2 + m_3)} (m_1 + m_2 + m_3)^{3/2} \operatorname{tg}^4 \varphi/2 + \\ &+ m_1^{3/2} m_2^{3/2} m_3 \sqrt{(m_1 + m_3)(m_2 + m_3)} (m_1 + m_2 + m_3) \\ &\quad (2m_2 m_3 + 2m_1 m_3 + m_2^2 - 4m_1 m_2 + m_1^2) \operatorname{tg}^3 \varphi/2 + \\ &+ m_1 m_2 (m_2 - m_1) m_3^{3/2} \sqrt{(m_1 + m_3)(m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3)} \\ &\quad (3m_2 m_3 + 3m_1 m_3 + m_2^2 + m_1^2) \operatorname{tg}^2 \varphi/2 + \\ &\quad + \sqrt{m_1 m_2 (m_1 + m_3)(m_2 + m_3)} m_3^2 \\ &(3(m_1 + m_2)(m - 1^2 + m - 2^2)m_3 + 2(m_1^2 + m_2^2)^2 + m_1 m_2 (4m_2^2 + m_1 m_2 + 4m_1^2)) \operatorname{tg} \varphi/2 + \\ &+ (m_2 - m_1)(m_1 + m_2)(m_2^2 + m_1 m_2 + m_1^2) m_3^{5/2} \sqrt{(m_1 + m_3)(m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3)} \end{aligned}$$

Значение  $\varphi = \pi$  отвечает двойному соударению и уже исключено из рассмотрения. вещественный корень этого уравнения даст нам исковую точку. Сведем уравнение к известному полиному пятой степени по отношению  $z = r_{13}/r_{23}$ , из (1.17) имеем:

$$z = r_{13}/r_{23} = -\frac{\sqrt{m_1 m_2 (m_1 + m_2 + m_3)} \operatorname{tg} \varphi/2 + m_2 \sqrt{m_3}}{\sqrt{m_1 m_2 (m_1 + m_2 + m_3)} \operatorname{tg} \varphi/2 - m_1 \sqrt{m_3}}$$

Выразив из этого уравнения  $\operatorname{tg} \varphi/2$  через  $z$ , получим полином пятой степени

$$(m_3+m_2)z^5 + (2m_3+3m_2)z^4 + (m_3+3m_2)z^3 - (m_3+3m_1)z^2 - (2m_3+3m_1)z - (m_3+m_1) \quad (1.18)$$

единственный положительный корень которого определяет отношение  $z$ , а значит, и угол  $\varphi$ , отвечающий неизменяемой коллинеарной конфигурации, вычисляется из

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{m_3}(m_1 z - m_2)}{\sqrt{m_1 m_2(m_1 + m_2 + m_3)}(z + 1)}.$$

Для другого порядка, например,  $m_1-m_2-m_3$  мы получаем такой же полином, только в его коэффициентах нужно циклически переставить массы. Таких перестановок три, и, следовательно, мы имеем три неизменяемые коллинеарные конфигурации.

## 1.2.2 Лагранжевы точки

Рассмотрим теперь случай  $\theta \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial D(\theta, \varphi)}{\partial \theta} &= \frac{\sin \theta}{2} \left( \mathbf{v}_{12} \frac{\cos \varphi}{(1 + \cos \varphi \cos \theta)^{3/2}} - \mathbf{v}_{13} \frac{\cos(\varphi - \varphi_{13})}{(1 - \cos(\varphi - \varphi_{13}) \cos \theta)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{v}_{23} \frac{\cos(\varphi - \varphi_{23})}{(1 - \cos(\varphi - \varphi_{23}) \cos \theta)^{3/2}} \right) \\ \frac{\partial D(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} &= \frac{\cos \theta}{2} \left( \mathbf{v}_{12} \frac{\sin \varphi}{(1 + \cos \varphi \cos \theta)^{3/2}} - \mathbf{v}_{13} \frac{\sin(\varphi - \varphi_{13})}{(1 - \cos(\varphi - \varphi_{13}) \cos \theta)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{v}_{23} \frac{\sin(\varphi - \varphi_{23})}{(1 - \cos(\varphi - \varphi_{23}) \cos \theta)^{3/2}} \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Прямыми вычислением проверяется, что точки (1.13) являются искомыми особыми точками.

Таким образом, особые точки функции  $D$  совпадают с точками Эйлера и Лагранжа. В пространстве форм, если интерпретировать его как конус над сферой форм, лагранжевы и эйлеровы точки есть лучи через соответствующие точки на сфере форм.

Обычно и коллинеарные и треугольные особые точки называют лагранжевыми. В пространстве форм они естественным образом разделяются на эйлеровы, коллинеарные точки (соответствующие решения были открыты Эйлером в 1767 году [19]), которые, следовательно, располагаются на экваторе, и равносторонние (решение дано Лагранжем в 1772 году [29]). Заметим, что в пространстве форм направления лучей и тех, и других конфигураций зависит от значений масс тел.

### 1.2.3 Движение с неизменной конфигурацией

В предыдущем разделе были получены условия, при которых конфигурация трех тел остается неизменной (с точностью до подобия), т. е.  $\theta = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$ . Это эйлеровы  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  и лагранжевы  $L_4$ ,  $L_5$  конфигурации. В этом случае потенциальная функция имеет простой вид:

$$V = \frac{C_1}{\sqrt{\rho}},$$

а тождество Лагранжа–Якоби (1.9):

$$\ddot{I} = 2 \left( \frac{C_1}{\sqrt{I}} + 2h \right),$$

здесь  $C_1$  – постоянная, определяемая положением неизменной конфигурации; т. е. в конечном итоге только массами трех тел. Используя хорошо известную замену переменной  $r^2 = I$  и времени  $\frac{dt}{d\tau} = r = \sqrt{I}$ , получим

$$r'' = 2hr + C_1,$$

здесь ' означает дифференцирование по переменной  $\tau$ ,  $h$  – постоянная интеграла энергии (1.23), полученного в следующем разделе. Решение этого уравнения в случае  $h < 0$  очевидно

$$r = \sqrt{I} = A \cos(n\tau - \vartheta) - \frac{C_1}{2h}, \quad n = \sqrt{-2h}.$$

$A$  и  $\vartheta$  – постоянные интегрирования.

### 1.3 Уравнения движения

Выражение для кинетической энергии  $T$  в координатах Якоби хорошо известно (1.5). Чтобы записать выражение для  $T$  в пространстве форм воспользуемся преобразованием (1.7), получим

$$T = \frac{\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2}{8\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} + \frac{\xi_3^2 \dot{\xi}_2^2 + \xi_2^2 \dot{\xi}_3^2}{8\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1)^2} - \frac{\xi_2 \dot{\xi}_2 \xi_3 \dot{\xi}_3}{4\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1)^2} + \frac{\dot{\lambda}^2 \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}}{2} + \frac{\dot{\lambda}(\xi_2 \dot{\xi}_3 - \xi_3 \dot{\xi}_2)}{2(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1)} \quad (1.20)$$

Силовая функция  $V$  зависит только от взаимных расстояний, которые не зависят (1.10) от угла  $\lambda$ . Значит,  $\lambda$  – циклическая переменная. Интересно что сопряженный импульс переменной  $\lambda$ :

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \dot{\lambda} + \frac{\xi_2 \dot{\xi}_3 - \xi_3 \dot{\xi}_2}{2(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1)} \quad (1.21)$$

совпадает с постоянной углового момента  $J$ , в чем мы можем убедиться, подставив в выражение (1.5) обратное преобразование для  $\mathbf{Q}_1$  и  $\mathbf{Q}_2$  (1.7). Итак,  $\lambda$  – циклическая переменная задачи, а угловой момент  $J$  – сопряженный ей импульс, следовательно, можно воспользоваться методом Раяса игнорирования циклических координат, определив функцию Раяса  $R$  [99]:

$$\begin{aligned} R &= T + V - J\dot{\lambda} = \\ &= \frac{\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2 - 4J^2}{8\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} + \frac{J(\xi_2 \dot{\xi}_3 - \xi_3 \dot{\xi}_2)}{2\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1)} + V \end{aligned}$$

Зная решение задачи, т. е. функции  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$ ,  $\xi_3(t)$ , мы можем найти функцию  $\lambda(t)$  из квадратуры

$$\lambda(t) = \int_0^t \frac{J - \frac{\xi_2 \dot{\xi}_3 - \xi_3 \dot{\xi}_2}{(2\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1)^2}}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} d\tau.$$

Далее удобно заменить координаты  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  их сферическими аналогами:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \rho \cos \varphi \cos \theta, \\ \xi_2 &= \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ \xi_3 &= \rho \sin \theta.\end{aligned}$$

В этих координатах функция Payса запишется

$$R = \frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \rho^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2 - 4J^2}{8\rho} + \frac{J(\sin \varphi \dot{\theta} - \cos \varphi \dot{\varphi} \cos \theta \sin \theta)}{2(1 + \cos \varphi \cos \theta)} + \frac{D(\varphi, \theta)}{\sqrt{\rho}}, \quad (1.22)$$

а обобщенный интеграл энергии:

$$\frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \rho^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2 + 4J^2}{8\rho} - \frac{D(\varphi, \theta)}{\sqrt{\rho}} = h. \quad (1.23)$$

Тот факт, что кинетическая энергия представляется как сумма квадратичной формы относительно позиционных скоростей  $\xi_i, i = 1, 3$  и квадратичной формы относительно обобщенных импульсов  $p_\lambda$  (в данном случае присутствует только одно слагаемое  $p_\lambda = J$ ), показал еще Payс.

Уравнения движения для позиционных переменных есть уравнения Лагранжа с функцией Payса в качестве лагранжиана, для  $\rho$  получаем уравнение:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial R}{\partial \rho} = 0,$$

Из функции Payса (1.22), воспользовавшись интегралом (1.23), получаем:

$$\ddot{\rho} = \frac{2D(\varphi, \theta)}{\rho^{3/2}} + 4h,$$

что совпадает с тождеством Лагранжа–Якоби (1.9) ( $\ddot{I} = 2(V + 2h)$ ).

Силовая функция (1.16) уже получена. Зная выражение для кинетической энергии, получим гамильтониан. Сопряженные импульсы:

$$\begin{aligned}
 p_{\xi_1} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_1} = \frac{\dot{\xi}_1}{4\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}}, \\
 p_{\xi_2} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_2} = \frac{\dot{\xi}_2}{4\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} + \frac{\xi_3(\dot{\xi}_2 \xi_3 - \dot{\xi}_3 \xi_2)}{4\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1)^2} \\
 &\quad - \frac{2(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1)}{2(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1)}, \\
 p_{\xi_3} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_3} = \frac{\dot{\xi}_3}{4\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} - \frac{\xi_2(\dot{\xi}_2 \xi_3 - \dot{\xi}_3 \xi_2)}{4\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1)^2} \\
 &\quad + \frac{\xi_2 \lambda}{2(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1)}, \\
 p_\lambda &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \frac{\xi_2 \dot{\xi}_3 - \xi_3 \dot{\xi}_2}{2(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1)}.
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

Гамильтониан ( $p_\lambda = J$ ):

$$\begin{aligned}
 H &= 2\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}(p_{\xi_1}^2 + p_{\xi_2}^2 + p_{\xi_3}^2) \\
 &\quad + \frac{p_\lambda^2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_1}} - 2p_\lambda \frac{p_{\xi_2}\xi_3 - p_{\xi_3}\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_1}} - V(\xi_1, \xi_2, \xi_3)
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

В сферических координатах  $\rho, \varphi, \theta, \lambda$ :

$$\begin{aligned}
 H &= 2\rho p_\rho^2 + 2\frac{p_\varphi^2}{\rho \cos^2 \theta} + 2\frac{p_\theta^2}{\rho} + \frac{p_\lambda^2}{\rho(1 + \cos \varphi \cos \theta)} \\
 &\quad + 2p_\lambda \frac{p_\varphi \cos \varphi \sin \theta - p_\theta \sin \varphi \cos \theta}{\rho \cos \theta(1 + \cos \varphi \cos \theta)} - V(\rho, \varphi, \theta).
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Описав пространство форм и некоторые его свойства, мы можем теперь приступить к изучению свойств траекторий в этом пространстве.

## Глава 2. Симметричные периодические орбиты задачи трех тел. Вариационный подход

В 2000 году, более чем через двести лет после открытия частных решений Эйлера [19] и Лагранжа [29], Шансине и Монтгомери [16] доказали существование еще одного частного решения, так называемой орбиты-восьмерки. Впервые эта орбита была найдена за десять лет до этого численно [48], но Шансине и Монтгомери математически строго доказали существование восьмёрки. В своем доказательстве они использовали вариационный метод с ограничениями, налагаемыми симметрией. Три тела равной массы двигаются по одной орбите, по форме, напоминающей восьмерку со сдвигом по фазе на треть периода  $T/3$ .

Решение уравнений Эйлера  $\mathbf{q}_i(t)$  с лагранжианом  $L(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t)$  является стационарной экстремалью функционала действия Гамильтона:

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t) dt. \quad (2.1)$$

В случае задачи трех тел, и если на решении отсутствуют соударения, мы можем искать минимизатор функционала (2.1).

Чтобы найти периодическое решение задачи трех тел, достаточно найти (локальный) минимизатор функционала действия задачи в пространстве  $2\pi$ -периодических функций, периодические решения с периодом, отличным от  $2\pi$ , можно найти с помощью симметрии масштаба (1.1).

Построенная Шансине и Монтгомери орбита и была минимизатором функционала действия. Вслед за статьей [16] последовало большое количество работ, посвященных использованию вариационного метода для поиска частных решений задачи  $N$ -тел. Много орбит (для трех и большего числа тел) было построено К. Симо [63; 64], ряд траекторий с нулевым угловым моментом для 3 тел найден в [72].

В семидесятые годы орбиты общей задачи трех тел исследовались численно в [74] (пифагорейская задача), [5; 6; 52] (периодические орбиты), [20; 21] и других, но в более поздних работах существенную роль при поиске периодических

решений начинает играть симметрия (смотри, например, [10; 13; 17; 49; 54]). Принимая во внимание ограничения, накладываемые симметрией, можно получить, используя вариационный подход, множество периодических орбит.

Если мы численно найдем минимизатор функционала  $\mathcal{A}$ , мы получаем не только начальные условия для периодической орбиты, мы получаем все решение как функцию, например, в виде тригонометрических рядов. Поэтому получение решений в виде функции весьма полезно.

Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} x_j(t) &= C_x^0 + \sum_{k=1} C_{xk}^j \cos kt + S_{xk}^j \sin kt \\ y_j(t) &= C_y^0 + \sum_{k=1} C_{yk}^j \cos kt + S_{yk}^j \sin kt, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $j$  – номер тела.

Разумеется, чтобы найти решение, мы должны определить коэффициенты  $C_x^0, C_{xk}^j, S_{xk}^j, C_y^0, C_{yk}^j, S_{yk}^j$ . Ограничим количество учитываемых членов, скажем, числом  $n$ , для простых периодических орбит число членов рядов (2.2) оказывается невелико: в случаях с рассматриваемыми симметриями для  $|C_{x,yk}^j| < 10^{-7}$ ,  $|S_{x,yk}^j| < 10^{-7}$  достаточно рассмотреть  $k < 20$ . Используя симметрию, мы можем сократить число определяемых переменных  $C_x^0, C_{xk}^j, S_{xk}^j, C_y^0, C_{yk}^j, S_{yk}^j$ , поскольку часть коэффициентов тождественно равна нулю, а часть связана известными соотношениями. К тому же некоторые симметрии исключают соударения, а симметрии, приводящие к соударениям, не рассматриваются, поскольку в этом случае вариационный подход неприменим.

Мы рассматриваем инерциальное пространство, следовательно, мы можем искать функции  $x_j, y_j$  только для двух тел  $j = 1, 2$ , а координаты третьего тела получить из условия  $0 = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3$ , или искать решение в координатах Якоби.

Все определяемые решения имеют период  $2\pi$ , но получаемые решения-минимизаторы благодаря симметрии масштаба (1.1) покрывают все плоские решения задачи трех тел.

Барутелло и др. [2] показали, что все конечные группы симметрии лагранжева функционала действия в плоской задаче трех тел содержат всего десять элементов, авторы доказали следующую теорему

**Теорема** (Barutello,Ferrario,Terracini). Пусть  $G$  — группа симметрии функционала действия Лагранжа задачи 3 тел. Тогда  $G$  или связана с соударениями, полностью не коэрцитивна, гомографическая, или с точностью до вращения системы координат является одной из групп симметрии, приведенных в таблице 1 (*RCP* означает Свойство Вращающейся Окружности, *Rotating Circle Property*), а *HGM* — Гомографический Глобальный Минимизатор, *Homographic Global Minimizer*).

Таблица 1 — Группы симметрии плоской задачи трех тел (из работы [2])

Name	$ G $	type R	act. type	trans. dec.	RCP	HGM
Тривиальная	1	yes		$1 + 1 + 1$	yes	yes
(Прямо)линейная	2	yes	brake	$1 + 1 + 1$	(no)	no
2 – 1-хореография	2	yes	cyclic	$2 + 1$	yes	no
Равнобедренная	2	yes	brake	$2 + 1$	no	yes
Хилла	4	yes	dihedral	$2 + 1$	no	no
3-хореография	3	yes	cyclic	3	yes	yes
Лагранжа	6	yes	dihedral	3	no	yes
$C_6$	6	no	cyclic	3	yes	no
$D_6$	6	no	dihedral	3	yes	no
$D_{12}$	12	no	dihedral	3	no	no

Таблица 1 может служить основой при поиске периодических решений плоской задачи трех тел. Выбрав группу симметрии, можно наложить на коэффициенты тригонометрических рядов условия, обеспечивающие симметрию этой группы, и далее определить минимизатор в классе этих симметричных функций; согласно принципу симметричной критичности Пале [51], найденный минимизатор будет минимизатором в классе всех функций, т. е. решением задачи.

Ограничимся лишь нескольким группами из списка 1, рассмотрим симметрии 2 – 1-хореографий, линейную и симметрию диэдра  $D_{12}$ , последняя кстати дает те же решения, что и  $D_6$ .

Третья колонка, *tip R*, означает следующее: для любой угловой скорости  $\omega$  соответствующая группа является группой симметрии для функционала Лагран-

жа во вращающейся системе координат. Если группа этим свойством не обладает, то угловой момент всех эквавариантных траекторий равен нулю.

Таким образом, мы будем искать периодические орбиты, на коэффициенты разложения координат которых в тригонометрические ряды, наложены такие условия, чтобы получающиеся решения удовлетворяли условиям рассматриваемой симметрии [83].

## 2.1 Простая хореография – восьмерка

Начнем с восьмерки. Эта орбита, открытая численно К. Муром и существование которой было строго доказано А. Шансине и Р. Монтгомери является так называемой *простой хореографией*: все три тела двигаются по одной и той же траектории со сдвигом на треть периода, и, таким образом, восьмерка связана с группой диэдра  $D_{12}$ , решение не изменяется при сдвиге на  $\pi/3$ , отражении относительно осей и перестановкой масс (т. е., все массы должны быть равными). Поскольку группа не типа  $R$ , то угловой момент равен нулю. Как оказалось [65], эта орбита обладает важным и неожиданным для орбиты с нулевым угловым моментом свойством: она устойчива.

Итак, мы имеем одну траекторию, по которой двигаются массы со сдвигом  $T/3$ , и, следовательно, ряды (2.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_j(t) &= \sum_{i=k} C_{xk} \cos k(t + 2(j-1)\pi/3) + S_{xk} \sin k(t + 2(j-1)\pi/3) \\ y_j(t) &= \sum_{i=k} C_{yk} \cos k(t + 2(j-1)\pi/3) + S_{yk} \sin k(t + 2(j-1)\pi/3), \end{aligned} \tag{2.3}$$

Таким образом, нам необходимо определить набор коэффициентов  $C_{xk}, S_{xk}, C_{yk}, S_{yk}$  только для одного разложения  $x$  и  $y$ . В этом случае мы определяем координаты третьего тела из тех же рядов, что и для первого (со сдвигом на  $4\pi/3$ ), а не из условия неподвижности барицентра, но это условие должно удовлетворяться, т. е.,

$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = 0$  и  $y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = 0$ , отсюда:

$$\begin{aligned} C_{xk} (\cos kt + \cos k(t + 2\pi/3) + \cos k(t + 4\pi/3)) &= \\ &= C_{xk} (3 - 4 \sin^2 2k\pi/3) \cos(kt + 2k\pi/3) = 0, \\ S_{xk} (\sin kt + \sin k(t + 2\pi/3) + \sin k(t + 4\pi/3)) &= \\ &= S_{xk} (3 - 4 \sin^2 2k\pi/3) \sin(kt + 2k\pi/3) = 0 \end{aligned}$$

Следовательно, чтобы барицентр оставался в начале координат коэффициенты тригонометрических рядов (2.3) должны удовлетворять условию:

$$C_{xk} = S_{xk} = 0 \text{ при } k = 3m, m = 0, \dots$$

Симметрия диэдра  $D_{12}$  предполагает симметрию относительно осей, и, значит, можно искать разложения (2.3) только по синусам (траектория проходит через начало координат, образуя эйлерову конфигурацию, таким образом, будем искать траекторию в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq 3m}}^N S_{xk} \sin kt, \\ y(t) &= \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq 3m}}^N S_{yk} \sin kt, \\ x_j(t) &= x(t + 2\pi(j-1)/3), \quad j = 1, 2, 3, \\ y_j(t) &= y(t + 2\pi(j-1)/3), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Итак, чтобы определить решение-восьмерку, сохраняя в разложениях гармоники до порядка  $N$ , необходимо найти  $4N/3$  переменных.

Вернемся к функционалу действия (2.1). Минимизация функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  это основная задача линейного программирования

$$\min f(\xi_1, \dots, \xi_n), i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

$$g_j(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0, j = 1, \dots, m \quad (2.5)$$

$$g_k(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq 0, j = m + 1, \dots, l \quad (2.6)$$

с ограничениями  $g_i$ . Если число переменных  $n$  и/или число ограничений  $l$  достаточно велико, это сложная задача даже для линейных функций  $f$  и  $g_i$ . В

случае линейных функций, однако, задача решается, т. е. для поиска решений или доказательства того, что решения не существует, разработаны алгоритмы, по возможности не требующие больших ресурсов.

Задача (2.4) имеет много вариантов в зависимости от свойств решаемой задачи: например, системы большой размерности, нелинейная оптимизация с линейными ограничениями, глобальная оптимизация, целочисленное оптимизация и т. д. Кроме линейного случая, задача имеет решение, если функции  $f$  и  $g_i$  выпуклы, т. е.

$$f(a\xi_1 + b\xi_2) > af(\xi_1) + bf(\xi_2)$$

К сожалению, лагранжиан задачи  $N$  тел и функционал действия не являются выпуклыми функциями. Тем не менее, некоторые методы, разработанные для выпуклых функций нередко дают хорошие результаты и в общих задачах, в том числе в задаче  $N$  (трех) тел. Однако, поскольку в общем случае эти методы не гарантируют результатов, все полученные решения нуждаются в проверке.

Разработано множество разных алгоритмов для поиска решений задачи (2.4): различные варианты градиентных методов, метода внутренней точки, метода Ньютона и т. д. Разнообразие приложений и методов решения задачи оптимизации послужило стимулом для создания языка формального описания задачи (2.4), решение которой можно было бы затем выполнить с помощью программ, реализующих тот или иной метод, так называемых «решателях». В данной работе использовался «решатель» LOQO, созданный Р. Вандербеем [86], с помощью которого методом внутренней точки ищется «минимизатор» рассматриваемой задачи. Для формулировки задачи используется широко-известный язык математического программирования AMPL (A Mathematical Programming Language). В работе [87] автор LOQO дает пример модели для нахождения периодических решений, но начальные значения коэффициентов этих решений выбираются случайным образом. Описание модели для восьмерки можно найти в приложении А.1, здесь приведем основные шаги. Прежде всего задаются параметры:

- число тел  $N$  (ищутся решения только задачи трех тел, поэтому всегда  $N = 3$ , но число тел задается как параметр);

- число членов, сохраняемых в рядах Фурье  $n$ , остальные слагаемые отбрасываются, как правило это число лежит в пределах двух–трех десятков; именно это число определяет количество определяемых неизвестных, в общем случае равное  $2(N - 1)(2n + 1)$  (в задаче трех тел  $4(2n + 1)$ ), что в конечном итоге определяет трудоемкость задачи.
- число узлов  $m$ , используемых для вычисления интеграла (функционала действия), интеграл вычисляется простейшим методом прямоугольников, поскольку ищутся решения, в которых нет двойных соударений, а увеличение точности можно обеспечить увеличением этого параметра  $m$ , что не сильно влияет на эффективность вычислений; все величины вычисляются на сетке  $m$  равноотстоящих моментов.

С помощью симметрий, рассматриваемых для той или иной орбиты, число коэффициентов ряда Фурье можно сильно уменьшить, например, для восьмерки  $4(2n + 1)$  членов разложений Фурье сводится всего к  $4n/3$ . Задача полностью определяется структурой коэффициентов, которая задается в модели, например, для восьмерки

```
5
set C3X := {1..n} diff {3..n by 3}; # задает множество индексов
var x {i in Bodies, t in Times} =
    sum{k in C3X} as[k]*sin(k*theta[i,t]);
var y {i in Bodies, t in Times} =
    sum{k in C3Y} bs[k]*sin(k*theta[i,t]);
```

Здесь  $\theta[i, t]$  – моменты времени для  $i$ -го тела (со сдвигом  $2\pi/3$ ). По заданным таким образом координатам  $x[i]$  и  $y[i]$  мы определяем функционал действия  $A$  (определив предварительно кинетическую энергию и потенциальную функцию), и, наконец, задаем целевую функцию:

```
minimize A: sum {t in Times} (K[t] - P[t])*dt;
# в начальный момент первая точка находится на оси абсцисс
subject to inity1 : y[1,0] = 0;
```

С заданными параметрами и начальными значениями  $as[k]$ ,  $bs[k]$  мы запускаем решение задачи:

```
option solver loqo;
option loqo_options "verbose=2 timing=1 iterlim=120";
solve;
```

Заданные начальные значения  $as[k]$ ,  $bs[k]$ , как правило, не отвечают решению рассматриваемой задачи, результатом решения (в данном случае работает «решатель» LOQO с заданными параметрами, например, `iterlim` определяет максимальное число итераций при поиске решения) являются значения  $as[k]$ ,  $bs[k]$ , такие что целевая функция (функционал действия) принимает локально минимальное значение, если такое решение найдено. При каждом выборе начальных значений коэффициентов такое решение, разумеется, одно, но при разных начальных значениях мы можем получить разные решения, причем для одной и той же орбиты разные наборы коэффициентов, отвечающие минимуму функционала, это разные решения вариационной задачи, но не обязательно разные траектории, сдвиг по траектории представляет собой другое решение вариационной задачи, но ту же орбиту, или поворот траектории вокруг центра тяжести на произвольный угол тоже дает другое решение вариационной задачи, но ту же орбиту.

С приведенным ограничением (`subject to inity1 : y[1,0] = 0;`) мы получаем орбиту, первая точка на которой в начальный момент лежит в начале координат. На всех рисунках этой главы начальные точки каждой орбиты отмечаются белым кружком, а чтобы показать направление движения, показаны цветным кружком (цвета соответствующей орбиты) положения тел через небольшой промежуток времени. Поскольку в случае восьмерки все три тела двигаются по одной орбите, каждое тело показано только на трети периода. В зависимости от заданных начальных значений орбиты составят семейство решений, пять таких решений приведены на рисунке 2.1.

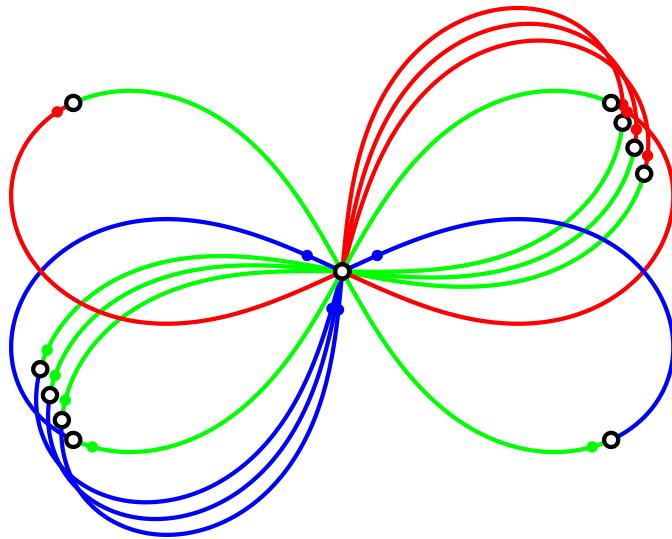


Рисунок 2.1 — Семейство «восьмерок» с приведенным ограничением

Чтобы избежать такого дублирования решений, можно либо задать более адекватную структуру коэффициентов или/и определить дополнительные ограничения, например,

```
# все точки в начальный момент находятся на оси абсцисс
subject to inity1 : y[1,0] = 0;
subject to inity2 : y[2,0] = 0;
```

В таком случае тела находятся в сизигии, т. е. на одной прямой. Такое ограничение, как доказано Монтгомери [46], выполняется для любых орбит задачи трех тел с нулевым угловым моментом (кроме решения Лагранжа, в котором все тела находятся в вершинах равностороннего треугольника) и фиксирует положения тел в начальный момент на оси абсцисс. Хотя это ограничение уменьшает количество решений, очевидно тем не менее, что мы можем получить четыре различных варианта решения, отличающиеся ветвью восьмерки, по которой движется первое тело, в частности, если мы заменим  $t \rightarrow -t$ , движение будет происходить в противоположном направлении. Конечно, с помощью дополнительных ограничений можно получить одну орбиту, но при рассматриваемой симметрии в любом случае мы получаем одну и ту же орбиту, которая характеризуется значением функционала действия  $A = 24.37193$  или постоянной энергии  $h = -1.29297$ . Постоянная кинетического момента (площадей) равна 0.

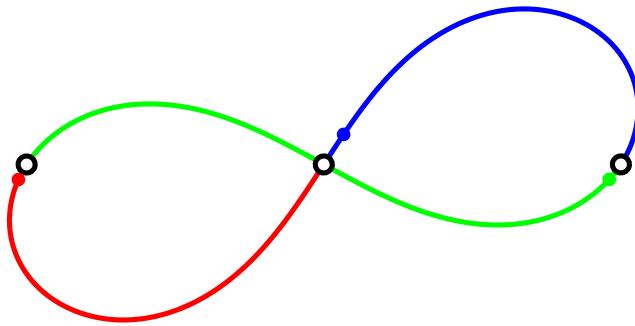


Рисунок 2.2 — Восьмерка – решение задачи (2.4)

Для восьмерки (т. е. для заданной модели и начальных значений параметров) получаем такой результат (приводятся слагаемые с амплитудой  $> 0.0001$ ):

$$\begin{aligned}x(t) &= 0.4082 \sin t + 0.1973 \sin 2t + 0.0326 \sin 4t - 0.0094 \sin 5t - 0.0022 \sin 7t \\&\quad - 0.0017 \sin 8t - 0.0005 \sin 10t + 0.0002 \sin 11t, \\y(t) &= -0.6409 \sin t + 0.1256 \sin 2t + 0.0208 \sin 4t + 0.0148 \sin 5t + 0.0034 \sin 7t \\&\quad - 0.0011 \sin 8t - 0.0003 \sin 10t - 0.0002 \sin 11t - 0.0001 \sin 13t.\end{aligned}$$

## 2.2 2 – 1-хореографии

Теперь рассмотрим другую симметрию: 2 – 1-хореографии. Соответствующая циклическая группа является группой типа R (см. табл. 1), а орбиты, минимизирующие во вращающейся системе функционал действия в пространстве эквивариантных относительно группы путей, являются искомыми минимизаторами. Согласно принципу Пале [51] минимизаторы в пространстве эквивариантных путей будут минимизаторами и в пространстве всех путей, и значит, решениями задачи.

Таким образом, искомые функции координат задают координаты тел в некоторой системе, назовем ее основной, а, чтобы получить их в инерциальной системе, нам нужно повернуть найденные координаты на угол  $\omega t$ . Если  $\omega$  – рациональное число, то мы получаем периодическую орбиту, если нет – условно-периодическую. Поиск периодических орбит во вращающейся системе известен

давно, смотри, например, [3], для группы типа R такие орбиты должны получаться почти в любой равномерно вращающейся системе.

В случае 2 – 1-хореографии два тела равной массы двигаются по одной траектории со сдвигом на  $\pi$ . Модель задачи приведена в приложении А.2. В этой модели ряды для координат во вращающейся системе ищутся в общем виде (2.2). При вычислении функционала действия используются координаты (и скорости) в инерциальной системе координат, а ограничения задаются так, что все три начальные точки находятся на оси абсцисс.

Для 2-1 конфигураций две точки, движущиеся во вращающейся системе координат по одной траектории должны иметь равные массы, в приводимых далее результатах приняты такие значения масс  $m_1 = m_2 = 0.95, m_3 = 1.1$ . Одну 2-1-орбиту мы знаем со времен Эйлера, это коллинеарное решение задачи трех тел, найденное Эйлером еще в 1767 году: третья точка находится посередине между двумя равными массами, тогда при соответствующих скоростях мы, следуя Эйлеру, можем получить коллинеарное решение. Это решение, конечно, получается и как минимизатор функционала действия с моделью 2-1.mod. Такие решения, далее не приводятся, поскольку известно аналитическое решение.

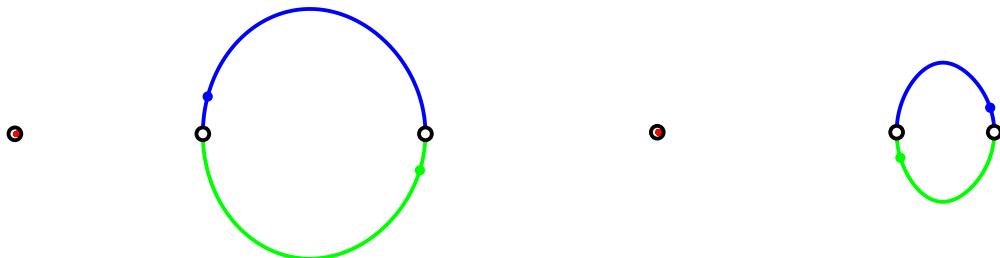


Рисунок 2.3 — Две 2-1-орбиты во вращающейся системе координат ( $\omega = 1/2$ ).

### 2.2.1 Угловая скорость $\omega = 1/2$

Итак, во вращающейся со скоростью  $\omega = 1/2$  системе координат мы ищем орбиту, по которой со сдвигом в пол-периода ( $\pi$ ) двигаются два тела равной массы, положение третьего тела находится из условия неподвижности барицентра.

На рис. 2.3 показаны две разные орбиты в основной (вращающейся) системе координат: два тела в основной системе двигаются по одной орбите, но это не всегда так в инерциальной системе (пример такой орбиты можно увидеть на рис. 2.6 слева). Для всех орбит с симметрией 2-1 орбиты тел с равными массами нарисованы синим и зеленым цветом, а орбита третьего тела – красным.

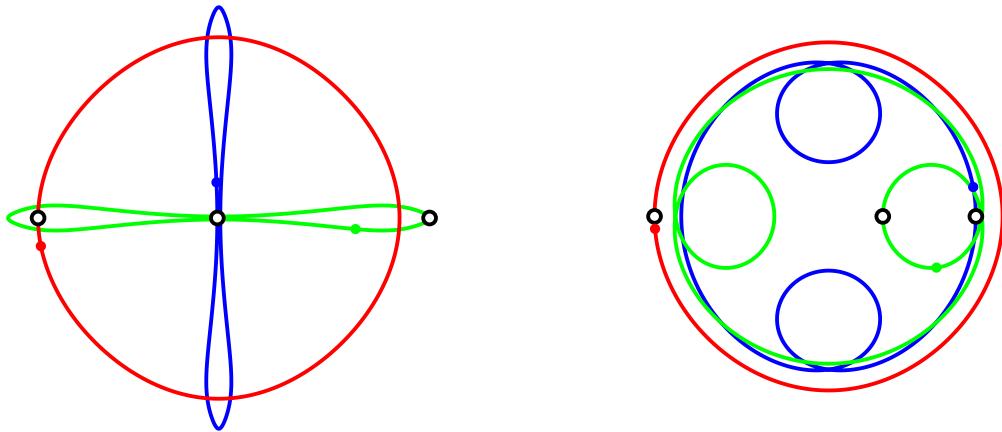


Рисунок 2.4 – Две 2-1-орбиты в инерциальной системе координат ( $\omega = 1/2$ ).

Эти же орбиты в инерциальной системе приведены на рис. 2.4, для этих орбит получены решения-минимизаторы: для левой орбиты:

$$\begin{aligned} x(t) = & \quad 0.8613454 - 0.8866 \cos t + 0.0129 \cos 2t - 0.0009 \cos 3t + \\ & + 0.0006 \cos 4t + 0.0001 \cos 5t + 0.0001 \cos 6t, \end{aligned}$$

$$y(t) = 0.9902 \sin t + 0.0056 \sin 2t - 0.0051 \sin 3t + 0.0005 \sin 4t + 0.0003 \sin 5t.$$

и для правой:

$$\begin{aligned} x(t) = & \quad 0.8360497 + 0.3582 \cos t + 0.0063 \cos 2t + 0.0275 \cos 3t + \\ & + 0.0002 \cos 4t + 0.0031 \cos 5t + 0.0004 \cos 7t + 0.0001 \cos 9t, \\ y(t) = & \quad 0.9794 \sin t - 0.0061 \sin 2t - 0.0274 \sin 3t - 0.0002 \sin 4t + 0.0031 \sin 5t + \\ & + 0.0004 \sin 7t + 0.0001 \sin 9t. \end{aligned}$$

Естественно желание классифицировать эти орбиты. Период всех орбит фиксирован, он равен  $2\pi$  и задается моделью, поскольку мы ищем решение в виде тригонометрических рядов. В этом случае будет отличаться постоянная энергии. Воспользовавшись симметрией масштаба мы можем привести ее к фиксированному значению  $h = -1/2$ , но мы будем отождествлять орбиты по значению

функционала действия (и, разумеется, по значению угловой скорости вращения  $\omega$ ). Для двух приведенных орбит значения функционала действия равно  $A = 13.13826$  и  $A = 17.61955$  соответственно. Прежде, чем перейти к другим значениям  $\omega$ , заметим, что замена, например,  $\omega = 1/2$  на  $\omega = 3/2$  приведет к тем же орбитам, происходит поворот на целое число оборотов, но мы можем изменить модель, рассматривая ряды Фурье лишь начиная с некоторого слагаемого  $k$ :

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=k}^N \begin{pmatrix} \mathbf{C}_j \\ \mathbf{S}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} j t,$$

Такие орбиты (вместе с орбитами, получающимися для других значений  $\omega$ ) будут рассмотрены ниже.

### 2.2.2 Угловая скорость $\omega = 1/5, 2/5$

Рассмотрим орбиты для  $\omega = 1/5$  и  $2/5$ .

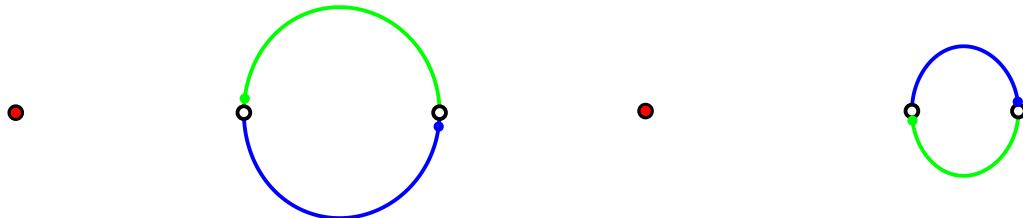
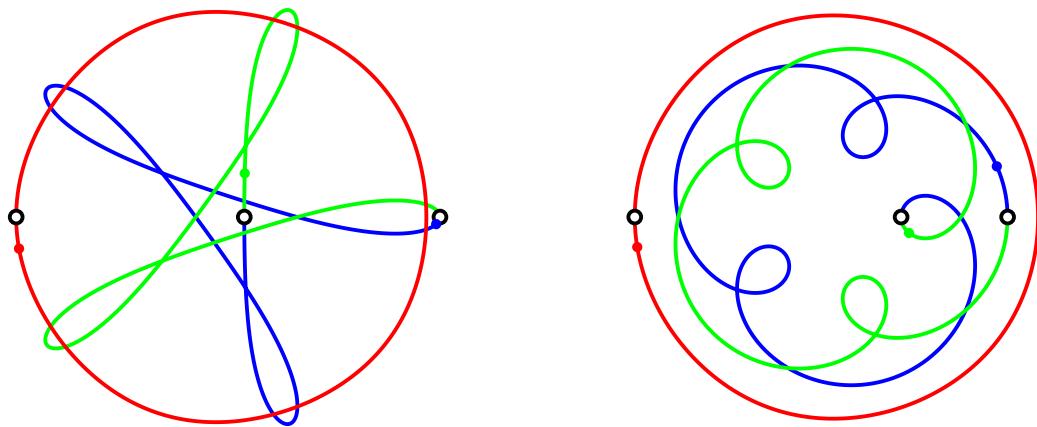
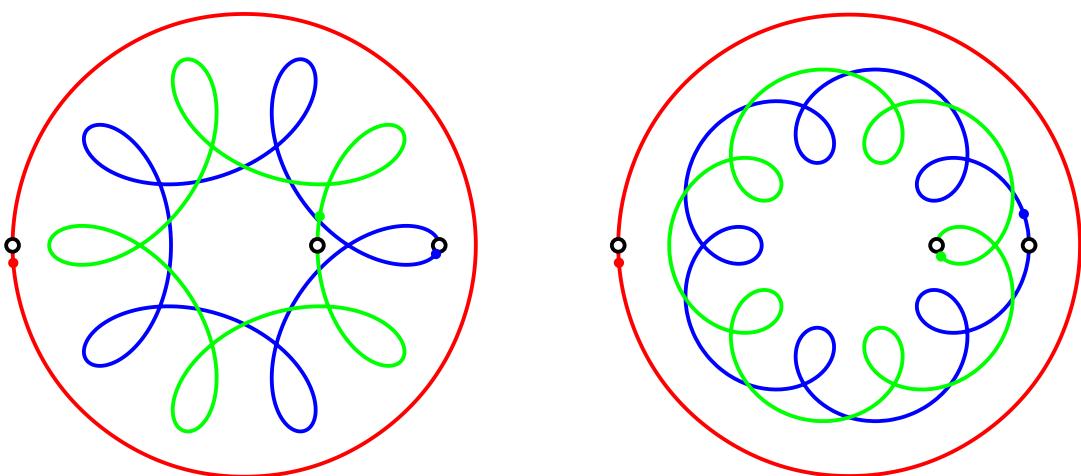


Рисунок 2.5 — 2-1-орбиты:  $\omega = 2/5$ .

На рис. 2.5 показаны орбиты для  $\omega = 2/5$  во вращающейся системе координат. На рис. 2.6 приведены эти же орбиты в инерциальной системе. По-прежнему, орбиты можно отождествлять со значением функционала действия. Конечно, эти значения будут различаться.

Если взять скорость вращения базовой системы (в которой ищутся разложения Фурье) вдвое меньше,  $\omega = 1/5$ , получим орбиты, приведенные на рис. 2.7.

Пары орбит на рис. 2.4, 2.6 и 2.7 отличаются направлением вращения равных масс: слева движение ретроградное, справа — прямое. Разумеется, и значение

Рисунок 2.6 — 2-1-орбиты:  $\omega = 2/5$ .Рисунок 2.7 — 2-1-орбиты:  $\omega = 1/5$ .

функционала действия, и значение постоянных энергии в паре различаются. Такие пары обнаруживаются и для других значений  $\omega$  (смотри например, две левые орбиты рис.2.8 и 2.9, пары орбит на рис. 2.10 и 2.11).

В качестве решений-минимизаторов мы можем получить решения, траектории которых совпадают, но отличаются только направлением движения по ним. Разумеется, это симметрия обращения времени,  $t \rightarrow -t$ , но мы считаем такие траектории одинаковыми. Симметрия обращения времени в используемых моделях приводит еще к одному эффекту: рассмотрение значений угловой скорости вращающейся системы, например,  $\omega = 3/5$ , приводит к тем же траекториям, что и  $\omega = 1 - 3/5 = 2/5$ , в результате суперпозиции обращения времени и замены  $\omega' = 1 - \omega$  при вращении базовой системы. То же самое относится при замене  $\omega$  на  $\omega = n + \omega$ , где  $n$  — любое целое число. По этой причине при поиске

решений-минимизаторов рассматриваемым способом естественно рассматривать только  $\omega \leqslant 1/2$ .

### 2.2.3 Угловая скорость $\omega = 1/3$

Рассмотрим также орбиты, получающиеся для  $\omega = 1/3$ .

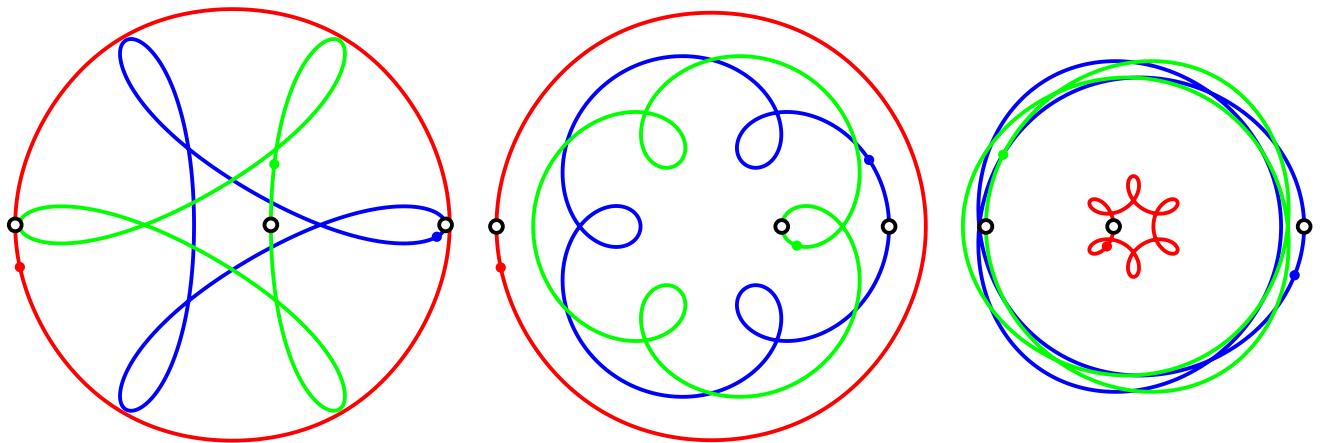


Рисунок 2.8 — 2-1-орбиты:  $\omega = 1/3$ .

2-1-хореографии требуют равенства только двух масс, которые и двигаются в базовой системе по одной траектории, третья масса может отличаться от двух других. Приведем пример с массами  $m_1 = m_2 = 1.05$ ;  $m_3 = 0.9$ : рис. 2.9 приведены три такие орбиты для  $\omega = 1/3$ .

Заметим, что небольшое изменение масс не меняет качественно траектории.

### 2.2.4 Орбиты с тесными двойными

Все рассмотренные до сих пор орбиты имеют сравнимые взаимные расстояния, попробуем получить таким же способом иерархические орбиты, где тесная пара вращается вокруг удаленной третьей компоненты, таким образом, частота

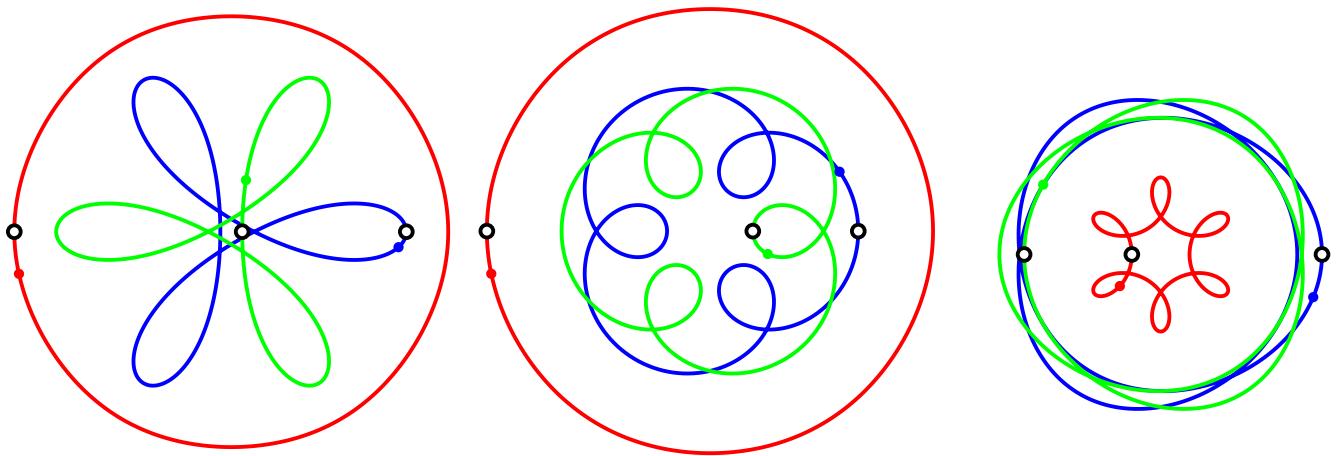


Рисунок 2.9 — 2-1-орбиты ( $m_1 = m_2 = 1.05$ ;  $m_3 = 0.9$ ):  $\omega = 1/3$ .

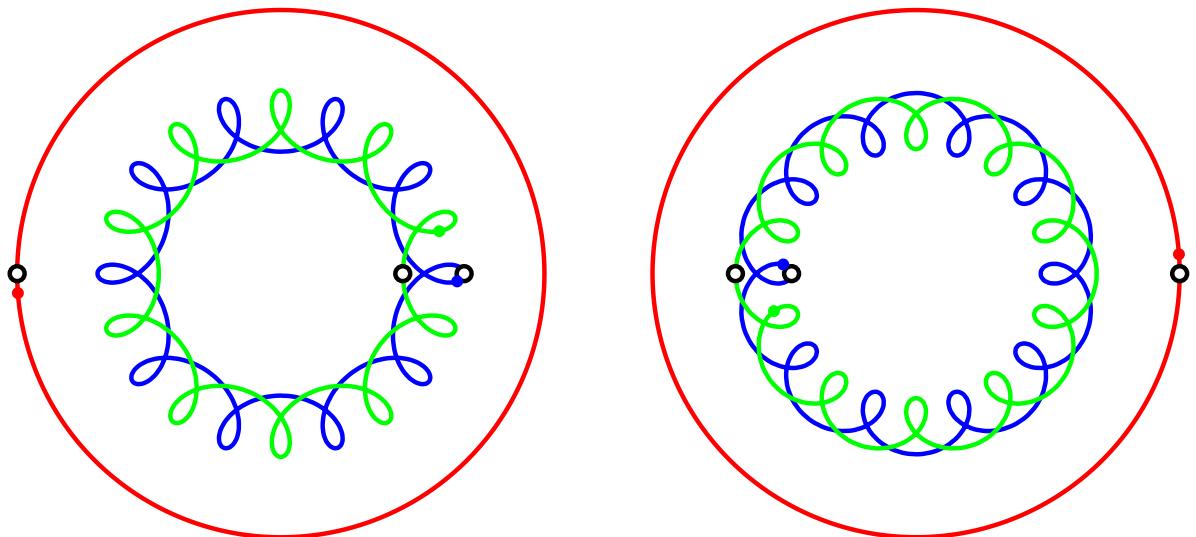


Рисунок 2.10 — 2-1-орбиты: Равные массы образуют тесную двойную,  $\omega = 1/3, k = 5$ .

обращения в паре существенно больше частоты обращения самой пары относительно третьего тела. Такие траектории получатся, если мы в разложении Фурье для координат пары положим первые гармоники, равными нулю, начав разложение, например, со слагаемых с аргументом  $kt$ , где  $k$  некоторое целое число, большее единицы. На рис. 2.10 изображены траектории, разложения которых начинаются со слагаемых  $k = 5$ .

На рис. 2.11 приведены орбиты, разложения которых начинаются с  $k = 3$ .

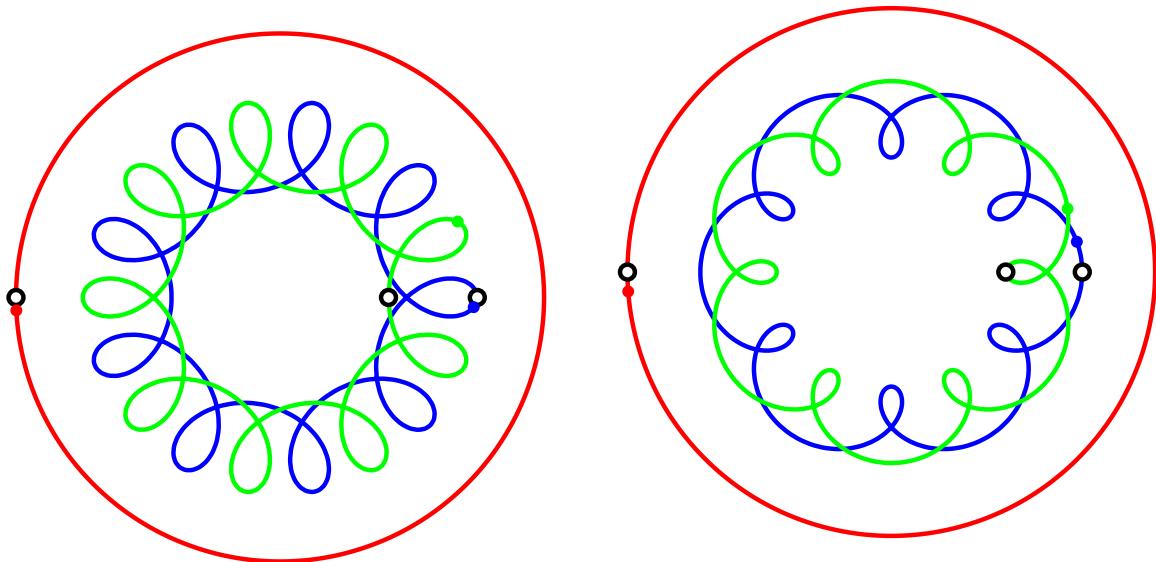


Рисунок 2.11 — 2-1-орбиты: Равные массы образуют тесную двойную,  $\omega = 1/3, k = 3$ .

Еще раз отметим, что на рис. 2.10 и 2.11 движение тесной пары на левом рисунке является ретроградным, а на правом — прямым.

Очевидно, что чем больше значение  $k$ , тем теснее пара и тем удаленнее третья компонента. В реальных иерархических тройных системах внутренняя пара намного теснее, можно считать, что  $k$  в лучшем случае имеет порядок в несколько десятков, а то и намного больше.

Такой же прием позволяет найти траектории при различных рациональных значениях  $\omega$ .

В табл. 2 приведены рассмотренные орбиты с симметрией 2-1. Каждая строка содержит значения функционала действия, постоянной энергии, постоянной углового момента, значение  $\omega$ , интервалы изменения размера системы (момента инерции), номер рисунка с орбитой, «+» или «-»: «+», если орбиты сохраняются в течение большого времени (порядка нескольких тысяч периодов) или «-» в противном случае. Последние три строчки показывают эти же величины для немного измененных масс  $m_1 = m_2 = 1.05, m_3 = 0.9$ .

Все решения перечислены в табл. 2, а в приложении В приведены полностью (разложения и начальные условия).

Таблица 2 — Орбиты с симметрией 2-1

$m_1 = m_2 = 0.95, m_3 = 1.1$						
$A$	$E$	$ C $	$\omega$	$[I_{\min}, I_{\max}]$	Рис	Уст
10.61083	-0.562922	1.73204	1/5	[3.38488,3.97924]	2.7л	+
11.87886	-0.630193	1.34061	1/3	[2.59540,2.68433]	2.8л	+
12.41405	-0.658586	1.22094	2/5	[2.39094,2.50262]	2.6л	+
12.43822	-0.850687	3.17929	1/5	[3.27315,3.308455]	2.7п	+
13.13826	-0.697007	1.09433	1/2	[2.19634,2.34595]	2.4л	+
14.90941	-0.790968	2.76171	1/3	[2.39013,2.45279]	2.8с	+
16.03507	-0.850687	2.61695	2/5	[2.12957,2.21161]	2.6п	+
16.57031	-0.879082	2.44831	1/3	[1.83954,1.90829]	2.8п	-
17.61955	-0.934746	2.43060	1/2	[1.83522,1.95725]	2.4п	-
19.78460	-1.049610	1.57727	1/3	[2.28883,2.30208]	2.11л	+
21.89957	-1.161810	2.58582	1/3	[2.26047,2.27089]	2.11п	+
25.74992	-1.366082	1.65989	1/3	[2.22605,3.34307]	2.10л	+
27.53447	-1.460752	2.51159	1/3	[2.21422,2.21935]	2.10п	+
$m_1 = m_2 = 1.05, m_3 = 0.9$						
12.20094	-0.647280	0.98928	1/3	[2.52298,2.61020]	2.9л	+
15.79177	-0.837779	2.68412	1/3	[2.27099,2.33355]	2.9с	+
16.61662	-0.881539	2.33447	1/3	[1.81034,1.93278]	2.9п	-

### 2.3 Тестирование полученных решений. Равнобедренная симметрия

Как было отмечено в предыдущем разделе, методы нелинейного программирования гарантируют решение задачи минимизации, если рассматриваемые функции являются выпуклыми. В противном случае решение задачи не гарантируется. Поэтому каждое полученное решение необходимо протестировать. Самое простое – проверить сохранение интегралов движения, интеграла энергии  $h$  и интеграла площадей  $J$ . Разумеется, поскольку мы представляем решение усеченными рядами Фурье, то вычисленные на полученном решении значения интегралов в небольших пределах должны колебаться. Во всех приведенных выше решениях эти колебания (относительные отклонения значений постоянных

от их средних значений,  $\delta h/\bar{h}$  и  $\delta J/\bar{J}$ ) не превосходят  $2 \cdot 10^{-7}$  и уменьшаются при увеличении порядка тригонометрических полиномов в используемой модели и точности вычисления интеграла при определении функционала действия. Решения с колебаниями постоянных более  $10^{-5}$ , например для 2-1 хореографии с  $\omega = 1/2$ , не приводятся. Самая простая проверка – численное интегрирование. Из полученного решения мы знаем начальные условия (на любой момент), проинтегрировав уравнения движения на один период ( $2\pi$ ), мы должны получить замкнутую траекторию.

Условие равнобедренной симметрии согласно [2] заключается в том, что в моменты  $0$  и  $\pi$  конфигурация трех тел представляет собой равнобедренный треугольник с вершиной на прямой, относительно которой траектории тел симметричны. «Восьмерка» таким свойством конечно обладает, диэдralная симметрия существенно строже равнобедренной. В рассматриваемом здесь случае необходимо равенство только двух масс  $m_1 = m_2$ , а траектория не будет простой хореографией. Будем искать траектории в виде

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sum_{k=1} C_{2k-1} \cos(2k-1)t + S_{2k-1} \sin(2k-1)t \\ y_1(t) &= b_0 + \sum_{k=1} C_{2k} \cos 2k t + S_{2k} \sin 2k t \\ x_2(t) &= \sum_{k=1} C_{2k-1} \cos(2k-1)t - S_{2k-1} \sin(2k-1)t \\ y_2(t) &= -b_0 - \sum_{k=1} C_{2k} \cos 2k t + S_{2k} \sin 2k t \end{aligned} \tag{2.7}$$

Чтобы определить разложение решения в ряд Фурье до  $N$  гармоники включительно, нужно определить  $2N+1$  коэффициентов. Мы рассматриваем траектории в барицентрической системе координат и это дает нам разложения для координат третьего тела.

Описание такой модели приведено приложении А.3. Попытки построить вариационным методом орбиту с такой симметрией [78; 103] положительных результатов не дали. Получающееся с помощью этой модели «решение» решением не является: колебание значений интегралов составляет  $\sim 10^{-3}$  и больше. Численное интегрирование дает траектории близкие к замкнутым, но, тем не менее, замкнутыми не являющиеся. Пример такой траектории приведен на рис. 2.12. В

в этом примере  $m_1 = m_2 = 1.0$  (красная и зеленая кривые) и  $m_3 = 0.97$  (синяя кривая), красная кривая является отражением зеленой относительно оси абсцисс, а синяя кривая сама симметрична относительно этой оси. Для сравнения штриховой линией нарисована классическая восьмерка.

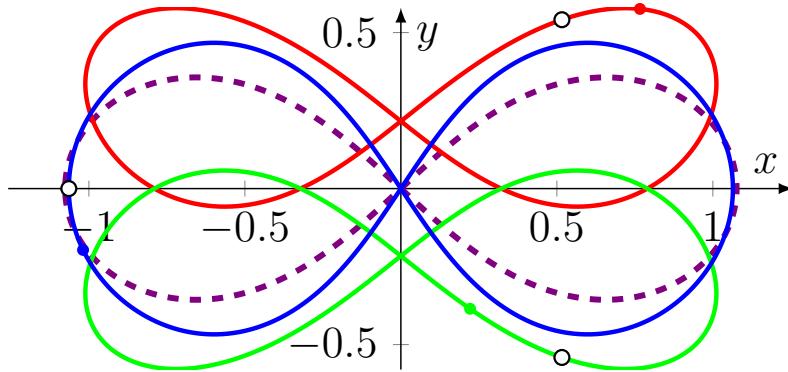


Рисунок 2.12 — «Решение» с равнобедренной симметрией.

Таким образом, с моделью А.3 и используемым «решателем» определить траекторию не удается. Это следствие невыпуклости нашего функционала действия. В число 10 групп симметрий [2] не входят группы симметрий, связанных со столкновениями, такие орбиты с равнобедренной симметрией с двойными соударениями будут рассмотрены в главе 5, раздел 5.2.

## 2.4 Линейная симметрия

Условие линейной симметрии согласно [2] заключается в том, что в моменты 0 и  $\pi$  массы коллинеарны на некоторой прямой, пусть это будет ось абсцисс, в некоторой исходной плоскости, которая вращается с угловой скоростью  $\omega \notin \mathbb{Z}$ . В случае линейной симметрии тела могут иметь произвольные массы. Модель задачи приведена в приложении А.4. Ряды для координат во вращающейся си-

стеме ищутся в виде:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= a_1 + \sum_{k=1} C_{1,k} \cos k t, \\y_1(t) &= \sum_{k=1} S_{1,k} \sin k t, \\x_2(t) &= a_2 + \sum_{k=1} C_{2,k} \cos k t, \\y_2(t) &= \sum_{k=1} S_{2,k} \sin k t.\end{aligned}\tag{2.8}$$

При вычислении функционала действия используются координаты (и скорости) в инерциальной системе координат, а ограничения задаются так, что все три начальные точки находятся на оси абсцисс.

Все три массы могут быть различными. Рассмотрим для начала массы, незначительно отличающиеся друг от друга, например,  $m_1 = 0.99$ ,  $m_2 = 1.01$ ,  $m_3 = 1.0$ . Циклическая перестановка масс приводит к несколько другим орбитам, почти не отличающимся друг от друга. На приведенных рисунках (рис. 2.13 и далее) орбита меньшей массы изображается красным цветом, орбита большей массы зеленым, а орбита третьего тела синим цветом.

#### 2.4.1 Угловая скорость $\omega = 1/2$

В случае линейной симметрии массы произвольны в отличие от рассмотренных симметрий (в хореографии все массы должны быть равными, а в в 2-1 хореографии и в равнобедренной симметрии должны быть равными две массы). Посмотрим как изменяется при изменении масс, например, последняя (правая) орбита рис. 2.13, орбиты с измененными массами приведены на рис. 2.14.

Все приведенные на рис. 2.14 орбиты действительно являются орбитами задачи трех тел, что подтверждается численным интегрированием. Более того, интегрирование на 1 000 периодах дают такие же орбиты, а интегрирование на 10 000 периодах дают те же орбиты, хотя и размытые. Таким образом, в отличие от «восьмерки» орбиты на рис. 2.14 не чувствительны к вариациям масс в широком пределе и сохраняют «устойчивость» на большом промежутке времени. На

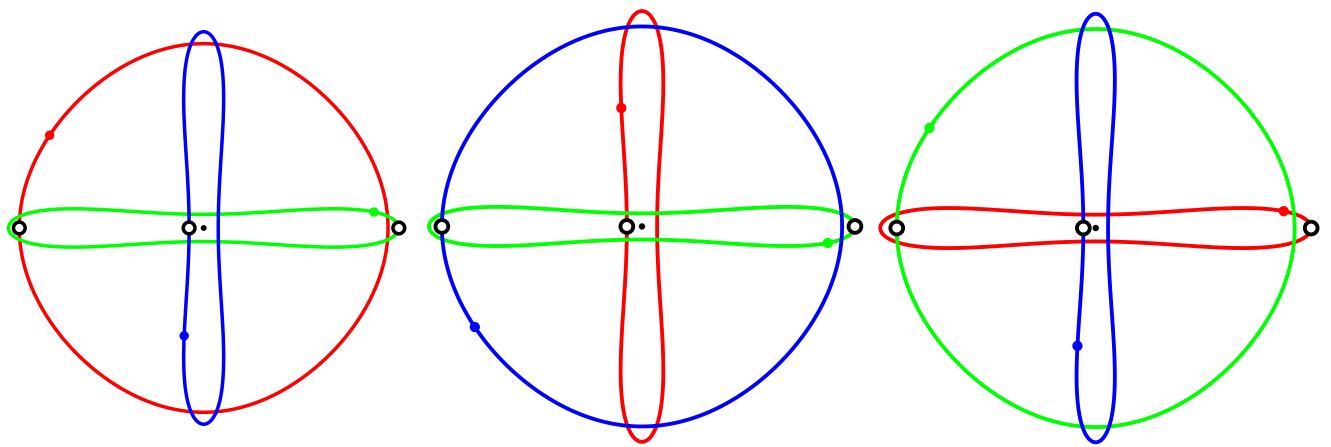


Рисунок 2.13 — Три орбиты с линейной симметрией, соответствующие циклической перестановке масс  $m_1, m_2, m_3$  ( $\omega = 1/2$ ).

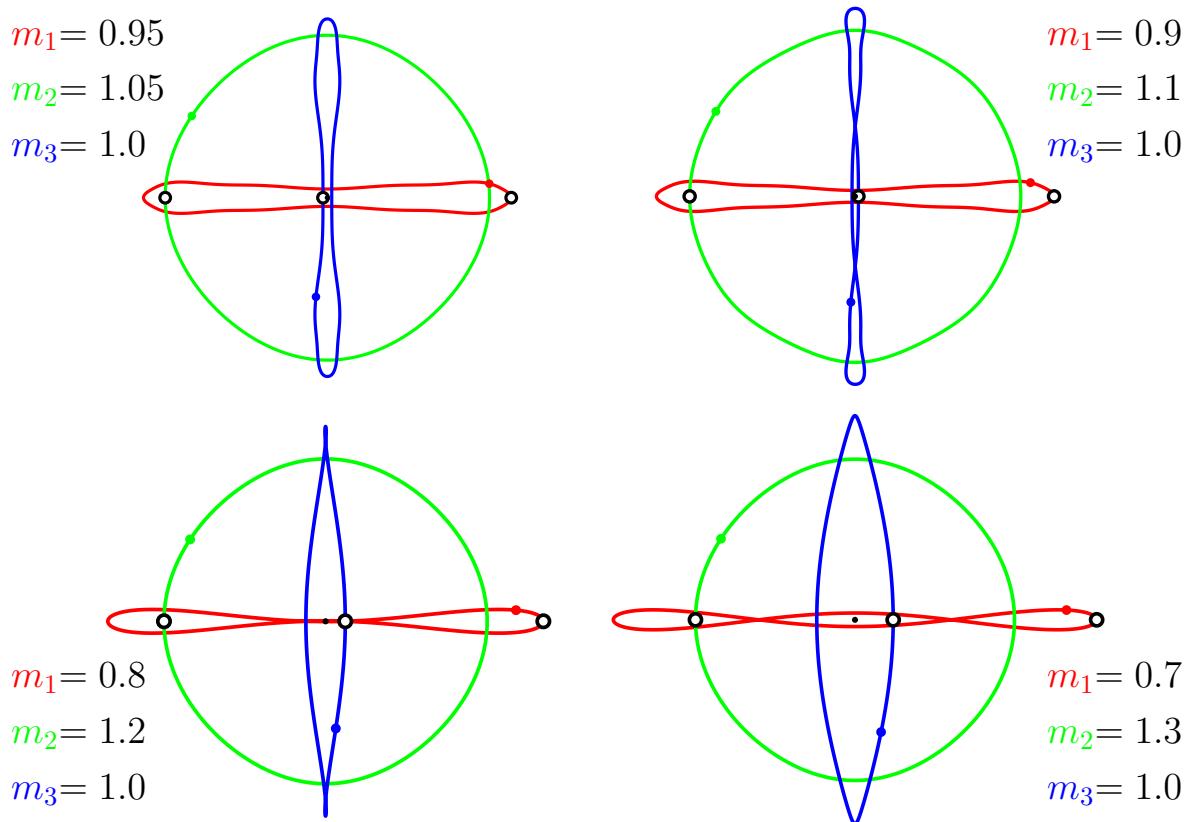


Рисунок 2.14 — Последняя орбита рисунка 2.13 при различных значениях масс, ( $\omega = 1/2$ ).

промежутках порядка 10 000 тысячах периодов орбиты остаются в ограниченной области, периодическими и не очень «убегают» от начальной орбиты, поскольку по сути вращение точек относительно друг друга отсутствует (хотя угловой момент не равен нулю).

Вернемся теперь к орбитам, получающимся с различными значениями  $\omega$ , с первоначальными массами  $m_1 = 0.99$ ,  $m_2 = 1.1$ ,  $m_3 = 1.0$ .

#### 2.4.2 Угловая скорость $\omega = 1/4$

На рис. 2.15 приведены три разные орбиты, полученные при  $\omega = 1/4$ .

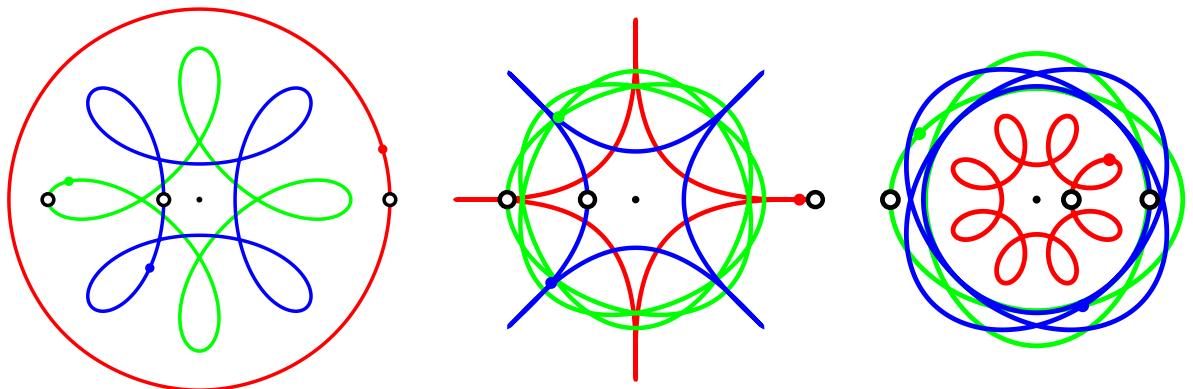


Рисунок 2.15 — Три орбиты с  $\omega = 1/4$ .

Если как и в случае, приведенном на рис. 2.13, циклически переставить массы на левой орбите рис. 2.15, то мы тоже получим похожие орбиты. Численное интегрирование левой орбиты рис. 2.15 на большом промежутке времени (порядка 10 000 периодов) показывает, что орбита сохраняет свой вид. Численное интегрирование средней орбиты рис. 2.15 на один период дает такую же орбиту, постоянные энергии и углового момента сохраняются с точностью  $6 \cdot 10^{-6}$  и  $3 \cdot 10^{-6}$  соответственно, и тем не менее уже на втором периоде орбита разрушается, таким образом средняя орбита очень чувствительна к начальным условиям и 5-6 знаков не достаточно, чтобы получить периодическую орбиту. То же самое можно сказать и о правой орбите, хотя постоянные энергии и углового момента сохраняются (с точностью  $4 \cdot 10^{-6}$  и  $1 \cdot 10^{-6}$ ), орбита чрезвычайно чувствительна к начальным условиям и уже на первом периоде результат численного интегрирования сильно расходится с правой изображенной на рис. 2.15 орбитой.

### 2.4.3 Угловая скорость $\omega = 1/3$

На рис. 2.16 приведены орбиты, полученные при  $\omega = 1/3$ .

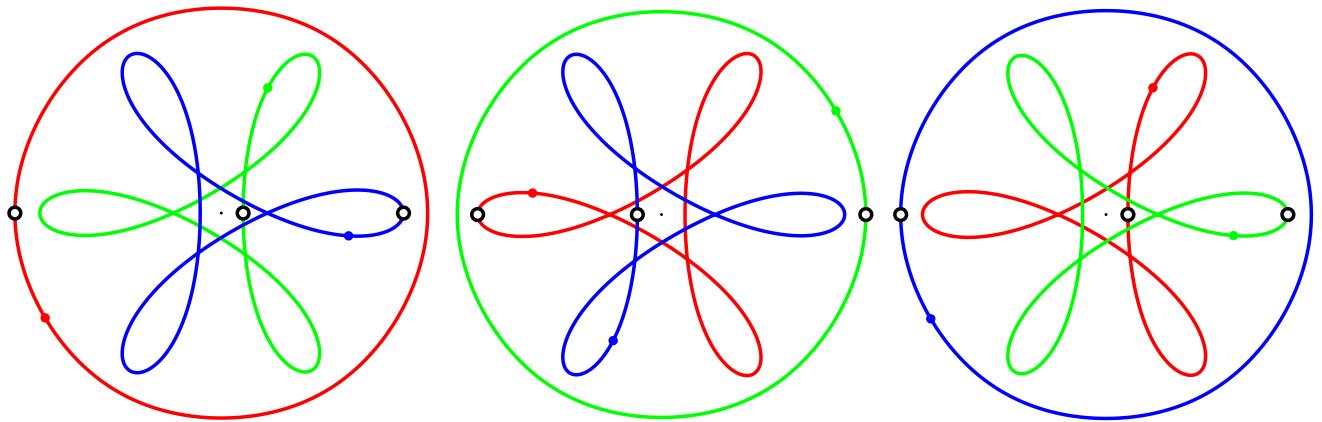


Рисунок 2.16 — Три орбиты с линейной симметрией, соответствующие циклической перестановке масс  $m_1, m_2, m_3$  ( $\omega = 1/3$ ).

Как и в случае  $\omega = 1/2$  численное интегрирование на промежутке 10 000 периодов дает аналогичные орбиты.

На рис. 2.17 приведены периодические орбиты, численное интегрирование которых более, чем на период уводит тела с орбиты. Две левые орбиты мало

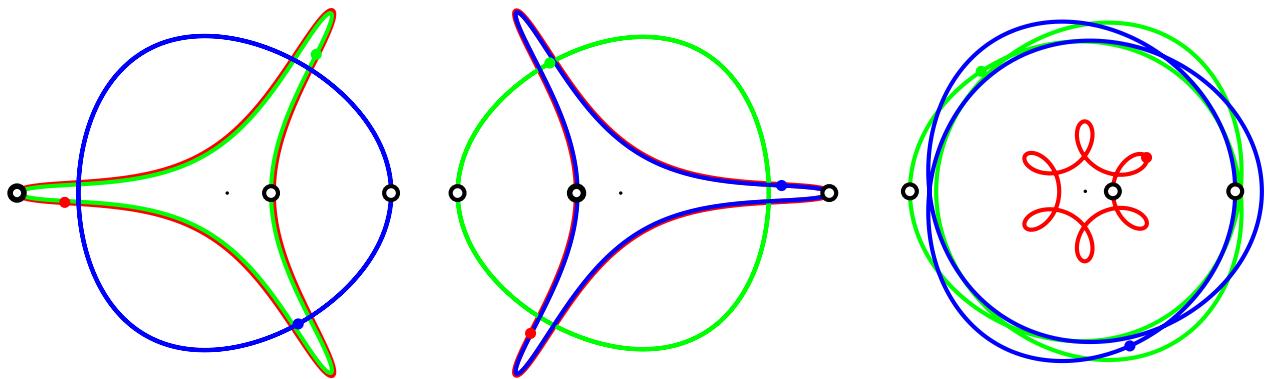


Рисунок 2.17 — Три неустойчивые орбиты с линейной симметрией,  $m_1 = 0.99$ ,  $m_2 = 1.01$ ,  $m_3 = 1.0$  ( $\omega = 1/3$ ).

отличаются друг от друга, поскольку мало отличаются друг от друга массы. Разумеется, орбита с третьей циклической перестановкой масс тоже похожа на эти две

орбиты, она здесь не изображается. Численное интегрирование на один период дает орбиты, не отличающиеся от этих орбит, но уже интегрирование на несколько периодов изменяет исходную орбиту, треугольные орбиты двух тел медленно поворачиваются. Численное интегрирование начальных условий для правой орбиты рисунка 2.17 дает незамкнутую орбиту даже после одного периода, хотя расхождение мало и уточняя начальные условия можно получить большее совпадение.

На рис. 2.18 изображены орбиты, две частицы которых (красная и синяя) двигаются вокруг друг друга, а третья (зеленая) вращается вокруг первых двух. В этом случае постоянная энергии и углового момента колеблются весьма мало (порядка  $10^{-7}$  и  $2 \cdot 10^{-8}$  в первом случае и порядка  $4 \cdot 10^{-8}$  и  $2 \cdot 10^{-8}$  – во втором). Справа приведен результат численного интегрирования для средней орбиты на промежутке 500 периодов. Видно, что орбиты лишь смещаются вокруг начала координат, качественно оставаясь такими же как и на (одном периоде) среднем рисунке.

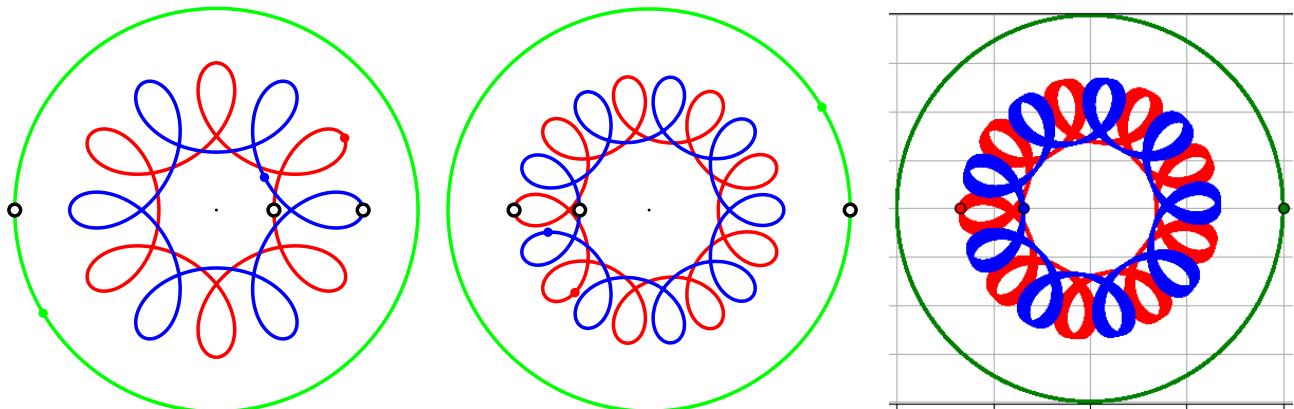


Рисунок 2.18 — Орбиты с тесными двойными,  $m_1 = 0.99$ ,  $m_2 = 1.01$ ,  $m_3 = 1.0$  ( $\omega = 1/3$ ).

В табл. 3 и 4 приведены рассмотренные орбиты с линейной симметрией. Каждая строка содержит значения функционала действия, постоянной энергии, постоянной углового момента, значение  $\omega$ , интервалы изменения размера системы (момента инерции), рисунок с орбитой, «+» или «-»: «+», если орбиты сохраняются в течение большого времени (порядка нескольких тысяч периодов) или «-» в противном случае.

В табл.4 для разных значений  $m_1$  ( $m_1 + m_2 + m_3 = 3$ ,  $m_3 = 1$ ) и для  $\omega = 1/2$  приведены функционал действия  $A$ , постоянная энергии  $E$ , абсолютная величина постоянной площадей  $|J|$ , интервал изменения момента инерции  $I$  и номер соответствующего рисунка.

Таблица 3

$m_1 = 0.99, m_2 = 1.01, m_3 = 1.0$						
$A$	$E$	$ J $	$\omega$	$[I_{\min}, I_{\max}]$	Рис	Уст
11.42286	-0.606002	1.36301	1/4	[2.94098,3.00409]	2.15л	+
12.04740	-0.639135	1.19429	1/3	[2.57062,2.65947]	2.16с	+
12.06332	-0.639979	1.17690	1/3	[2.56697,2.65581]	2.16п	+
12.07962	-0.640844	1.15915	1/3	[2.56338,2.65206]	2.16л	+
13.15385	-0.697833	0.92132	1/2	[2.20208,2.35139]	2.13л	+
13.15566	-0.697930	0.93926	1/2	[2.20200,2.35145]	2.13с	+
13.15748	-0.698026	0.95484	1/2	[2.20195,2.35150]	2.13п	+
14.08066	-0.747002	0.85327	1/3	[2.08666,2.31026]	2.17л	-
14.09948	-0.748001	0.86909	1/3	[2.08357,2.30697]	2.17с	-
14.55725	-0.772286	0.88706	1/4	[2.08071,2.34630]	2.15с	-
16.64808	-0.883208	1.19288	1/3	[1.82682,1.92875]	2.17п	-
16.76479	-0.889400	1.37020	1/3	[2.31341,2.33911]	2.18л	+
17.80747	-0.944715	2.06327	1/4	[1.64193,1.85856]	2.15п	-
20.59152	-1.09242	1.45497	1/3	[2.23074,2.24393]	2.18с	+

Таблица 4

$m_1$	$m_1 + m_2 = 2, m_3 = 1.0, \omega = 1/2$				
	$A$	$E$	$ J $	$[I_{\min}, I_{\max}]$	Рис
0.99	13.15748	-0.698026	0.95484	[2.20195,2.35150]	2.13п
0.95	13.15312	-0.697795	1.01964	[2.20000,2.35627]	2.14
0.9	13.12580	-0.696348	1.09648	[2.19456,2.35000]	2.14
0.8	12.99779	-0.689554	1.23654	[2.17368,2.32511]	2.14
0.7	12.77091	-0.677518	1.35872	[2.13912,2.28344]	2.14

## 2.5 Периодические орбиты в пространстве форм

Теперь посмотрим, как выглядят найденные орбиты в пространстве форм. Из таблиц 2–4 видно, что практически во всех случаях момент инерции меняется незначительно, как правило, в пределах нескольких процентов. Это означает, что мы можем ограничить изображением этих орбит на сфере форм, или, еще проще, в пространстве угловых координат  $(\varphi, \theta)$ .

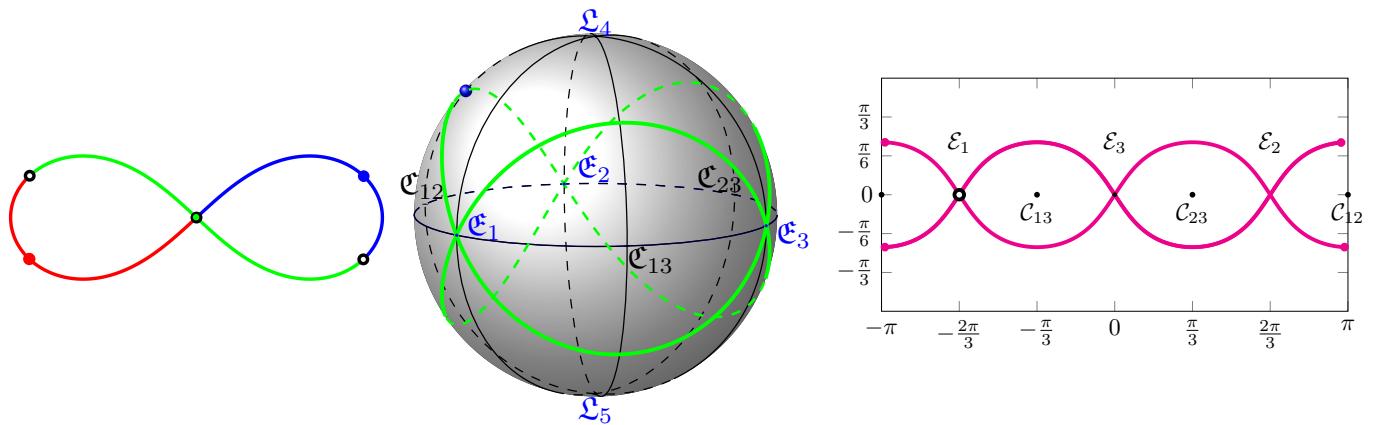


Рисунок 2.19 — Восьмерка в инерциальной системе, на сфере форм и в плоскости  $(\varphi, \theta)$

На рис. 2.19 приведена траектория восьмерки в инерциальном пространстве, на сфере форм и в плоскости  $(\varphi, \theta)$ . На левом рисунке (инерциальная система координат) начальное положение отмечено маленькими черными кружочками: три тела находятся в одной из эйлеровых конфигураций ( $\mathcal{C}_1$ ), через шестую часть периода тела снова находятся в (другой) эйлеровой конфигурации, положение точек в этот момент на левом рисунке отмечено цветными кружками; на сфере форм (средний рисунок) точка движется по зеленой траектории, проходя последовательно через эйлеровы конфигурации  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  или в обратном порядке, поскольку уравнения движения обратимы по времени, каждая эйлерова точка проходит за период дважды; в плоскости  $\varphi, \theta$  (правый рисунок) движение начинается в точке  $\mathcal{C}_1$ , пары точек с  $\varphi = -\pi$  и  $\varphi = \pi$  и одинаковыми значениями  $\theta$  нужно отождествить, тогда движение на плоскости  $\varphi, \theta$  будет в точности соответствовать движению на сфере форм.

Рассмотрим теперь периодические орбиты, полученные для симметрии 2 – 1. Построим эти траектории на плоскости  $\varphi, \theta$ . Выберем для примера траектории, полученные для разных значений  $\omega$ :  $1/2$  (левая орбита рис. 2.4),  $2/5$  (левая орбита рис. 2.6) и  $1/3$  (левая орбита рис. 2.4). В первых двух случаях  $m_1 = m_2 = 0.95, m_3 = 1.1$ , в последнем —  $m_1 = m_2 = 1.05, m_3 = 0.9$ . На рис. 2.20 приведены три указанные траектории на плоскости  $\varphi, \theta$ .

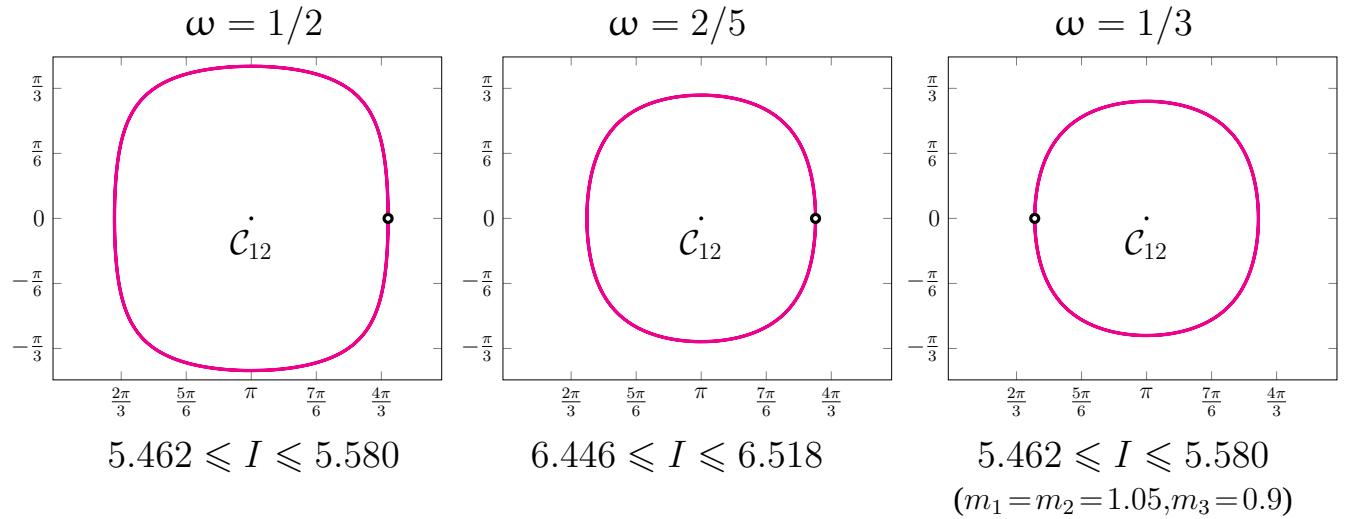


Рисунок 2.20 — Периодические орбиты с симметрией 2 – 1 на плоскости  $(\varphi, \theta)$

Рассмотренные траектории представляют собой замкнутые кривые, квазиокружности, в центре которых находится точка двойного соударения  $C_{12}$ , точка соударения равных масс. Размер орбиты уменьшается с уменьшением  $\omega$ .

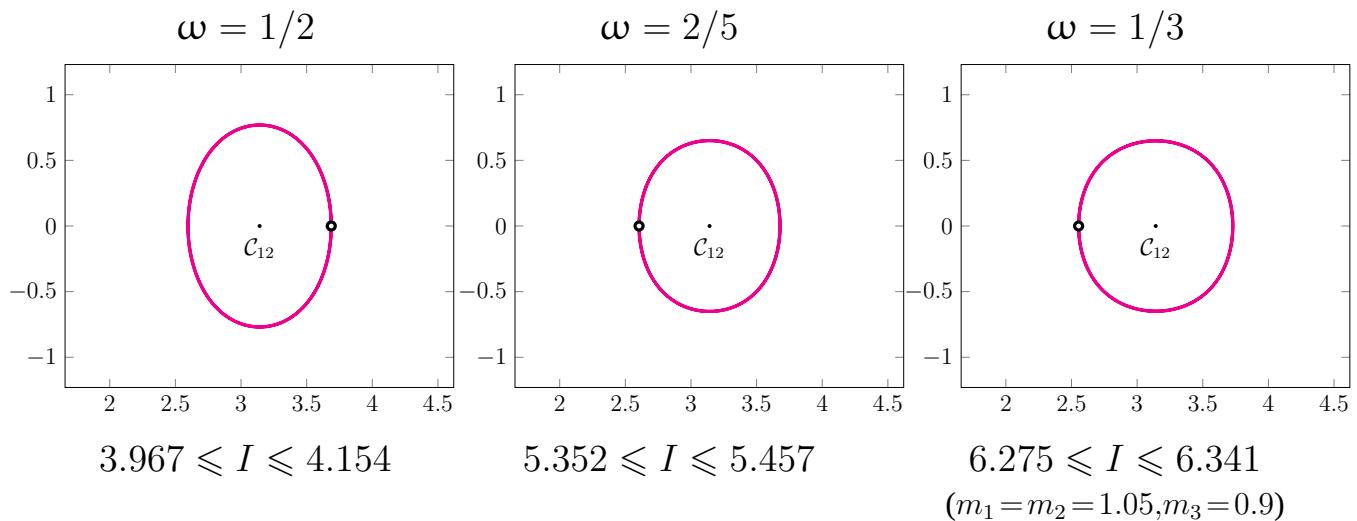


Рисунок 2.21 — Еще периодические орбиты с симметрией 2 – 1 на плоскости  $(\varphi, \theta)$

Интересно посмотреть на другие орбиты с симметрией 2-1 хореографий. На рис. 2.21 изображены три другие орбиты: для  $\omega = 1/2$  возьмем правую орбиту рис. 2.4, для  $\omega = 2/5$  правую орбиту рис. 2.6, а для  $\omega = 1/3$  ( $m_1 = m_2 = 1.05, m_3 = 0.9$ ) среднюю орбиту рис. 2.9.

Очевидно, что качественно эти орбиты, изображенные на рис. 2.21 не отличаются от орбит рис. 2.20: замкнутые квази-окружности вокруг точки двойных соударений  $\mathcal{C}_{12}$ , только размер этих орбит немного уменьшился.

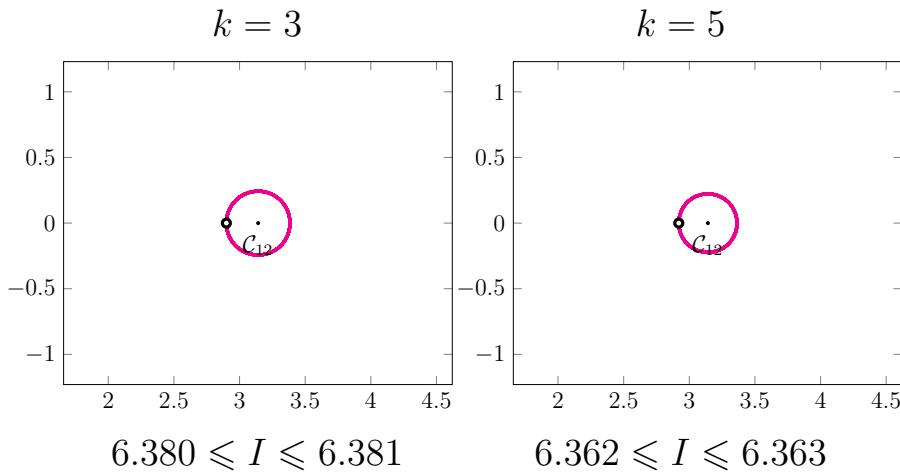


Рисунок 2.22 — Периодические орбиты с тесными сближениями с симметрией 2 – 1 на плоскости  $(\varphi, \theta)$  ( $\omega = 1/3$ )

В разделе 2.2 мы получили также орбиты с тесными двойными. Вот их изображение на плоскости  $\varphi, \theta$ . В этом случае размер кривых небольшой (и уменьшается вместе с ростом  $k$ ), момент инерции изменяется в очень небольших пределах, но в центре кривых находится точка двойных соударений  $\mathcal{C}_{12}$ .

Возникает вопрос: все ли орбиты представляют собой кривые, в центре которых находится точка двойного соударения  $\mathcal{C}_{12}$ . Разумеется, эта точка отличается от двух других, поскольку  $m_1 = m_2$ , но давайте посмотрим и другие орбиты из табл. 2. Только две орбиты из этой таблицы представляют собой замкнутые кривые, в центре которых находится точка эйлеровой конфигурации,  $\mathcal{E}_3$ , противоположная точке двойного соударения  $\mathcal{C}_{12}$ . Это правая орбита рис. 2.8 и правая орбиты рис. 2.9, на самом деле эти орбиты немного отличаются только массами, обе они неустойчивы.

Теперь орбиты с линейной симметрией. В этом случае массы могут быть любыми и, циклическая перестановка масс дает нам другие орбиты. Если массы отличаются лишь чуть-чуть, орбиты будут похожи. На рис. 2.13 раздела 2.4 приведены три орбиты, массы тел в каждой орбите являются циклической перестановкой масс  $m_1 = 0.99$ ,  $m_1 = 1.01$ ,  $m_1 = 1.0$ . Массы отличаются очень мало, и поэтому орбиты на рис. 2.13 очень похожи. А как они выглядят в пространстве форм. Как и раньше, поскольку момент инерции изменяется очень мало, достаточно посмотреть орбиты на сфере форм, или на плоскости  $(\varphi, \theta)$  (рис. 2.23).

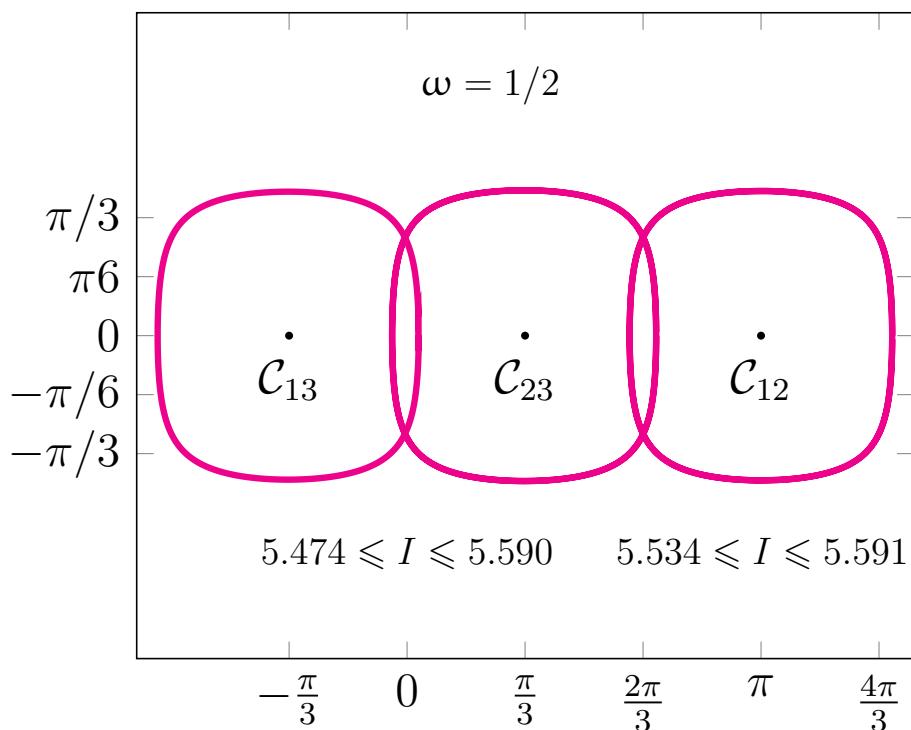


Рисунок 2.23 — Периодические орбиты с линейной симметрией на плоскости  $(\varphi, \theta)$ ,  $\omega = 1/2$

Трем орбитам рис. 2.13 отвечают три очень похожие орбиты на плоскости  $(\varphi, \theta)$ , но расположенные совсем в разных местах: с центром в трех разных точках двойных соударений:  $\mathcal{C}_{13}$ ,  $\mathcal{C}_{23}$  и  $\mathcal{C}_{12}$ .

Такую же картину мы получим для трех орбит, приведенных на рис. 2.16. В этом случае  $\omega = 1/3$ , орбиты отличаются только циклической перестановкой масс, на плоскости  $(\varphi, \theta)$  имеем:

Таким образом, и рис. 2.23, и рис. 2.24 показывают качественно одинаковую картину: замкнутые кривые вокруг точек двойных соударений. Такая же картина

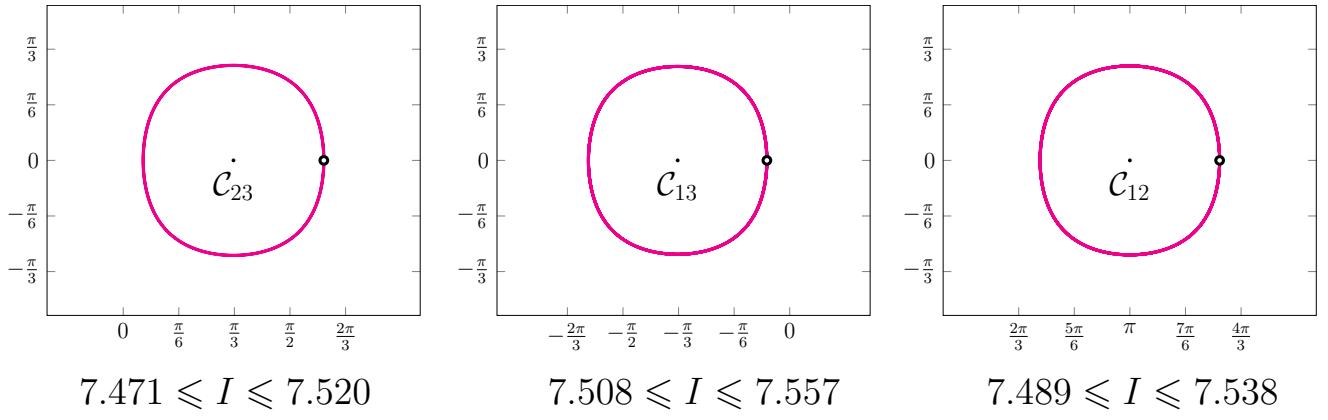


Рисунок 2.24 — Периодические орбиты с линейной симметрией на плоскости  $(\varphi, \theta)$ ,  $\omega = 1/3$

сохранится и при значениях масс, приведенных на рис. 2.14, изменятся размеры кривой, ее форма, но качественная картина останется такой же, замкнутые кривые вокруг точек соответствующих двойных соударений  $\mathcal{C}_{ij}$ . Очевидно, картина не изменится и в случае орбит тесных двойных, показанных на рис. 2.18.

Как и для орбит с симметрией 2 – 1 хореографий среди орбит, приведенных в табл. 3 и 4, есть и орбиты, в центре которых находятся точки эйлеровых конфигураций  $\mathcal{E}_i$ . Правые орбиты рис. 2.15 и рис. 2.17 (вокруг точки  $\mathcal{E}_3$ ), средняя орбита рис. 2.15 (вокруг точки  $\mathcal{E}_2$ ) и правая орбита рис. 2.15 (вокруг точки  $\mathcal{E}_1$ ). Эти орбиты приведены на рис. 2.25. Все они неустойчивы.

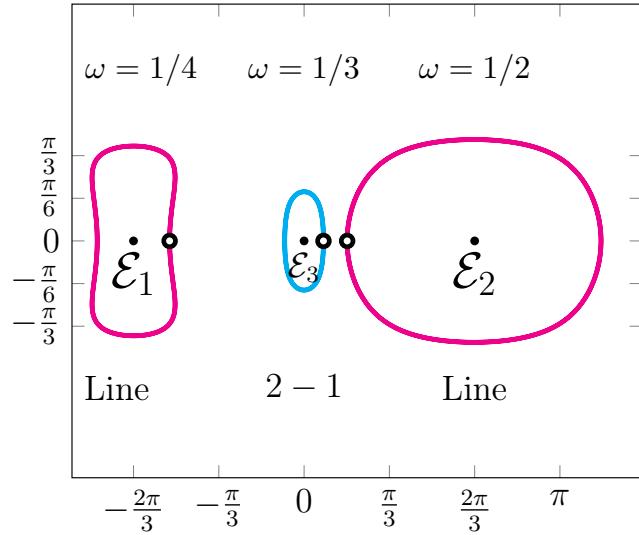


Рисунок 2.25 — Периодические орбиты вокруг  $\mathcal{E}_i$  на плоскости  $(\varphi, \theta)$

Таким образом, в пространстве форм периодические орбиты имеют простой вид.

### Глава 3. Области возможного движения

В конце XIX-го века Брунс и Пуанкаре доказали, что 10 классических интегралов задачи трех тел, перечисленные во введении, являются единственными независимыми интегралами задачи. Позже Понселе распространил это утверждение на задачу  $N$  тел. И хотя К. Сундман построил в случае ненулевого углового момента  $J$  общее решение задачи трех тел в виде сходящихся рядов, эти ряды мало что дают для изучения решения: их чрезвычайно медленная сходимость не позволяет ни изучить свойства решений, ни получить эти решения в приемлемом виде: например, чтобы получить координаты известного частного решения, полученного еще Лагранжем, где конфигурация трех тел образует равносторонний треугольник, необходимо взять  $10^{80\,000}$  слагаемых ряда, что вряд ли когда-нибудь станет возможным.

Поэтому важное значение имеет качественное исследование задачи трех тел, в частности, исследование областей возможного движения задачи.

В задаче двух тел область возможного движения можно оценить из интеграла энергии:

$$T - V = \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{1}{r} = h$$

При  $h < 0$  это условие дает окружность, вне этой окружности движение невозможно (рис.3.1 слева). Если учесть еще один интеграл, интеграл углового момента,

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{J} = r^2 \dot{\theta},$$

мы получаем

$$\frac{2}{r} + 2h - \frac{J^2}{r^2} \geq 0$$

или

$$\begin{cases} r_{\min} \leq r \leq r_{\max}, & \text{если } h < 0, \\ r \geq r_{\min}, & \text{если } h \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, в задаче двух тел знание двух постоянных: энергии и углового момента, позволяет определить область возможного движения, диск на рис. 3.1

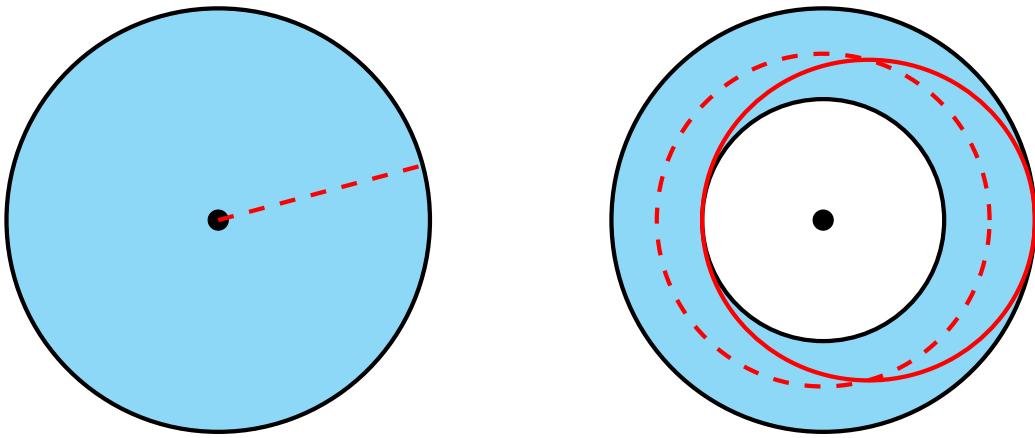


Рисунок 3.1 — Области возможного движения задачи двух тел с энергией  $h < 0$  (слева), с  $h < 0$  и угловым моментом  $J \neq 0$  (справа)

справа. Эти области определены либо в пространстве относительных координат, либо в барицентрической системе координат.

Для задачи  $N$  тел справедливо неравенство, полученное еще Лагранжем, см. например [90],

$$J^2 = \left| \sum m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) \right|^2 \leq \left( \sum m_i |\mathbf{r}_i| |\mathbf{v}_i| \right)^2 \leq \left( \sum m_i \mathbf{r}_i^2 \right) \left( \sum m_i \mathbf{v}_i^2 \right) = I \cdot 2T. \quad (3.1)$$

В плоской задаче трех тел множество возможных движений  $B = \{V + J^2/2I \leq h\}$ , однако в пространственной задаче множество возможных движений является только подмножеством множества, определяемого неравенством,  $B \subset \{V + J^2/2I \leq h\}$ . На рис. 3.2 область возможного движения (голубая) включена в область  $B$  (бирюзовая).

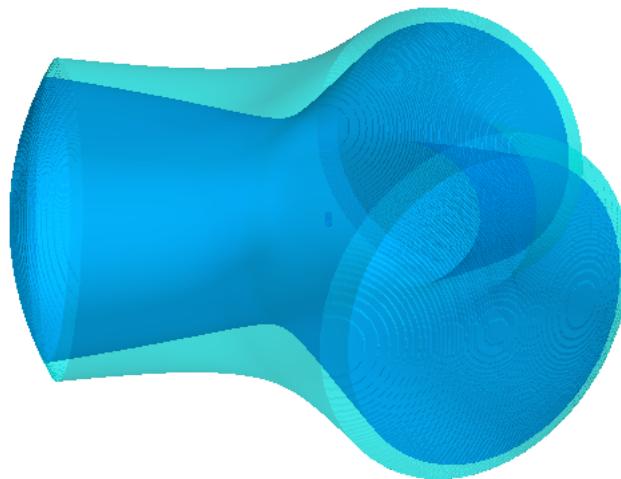


Рисунок 3.2 — Область возможного движения включена в область  $\{V + J^2/2I \leq h\}$

В ограниченной круговой задаче трех тел поверхность нулевой скорости, ограничивающая множество возможных движений  $\mathcal{B}$  тела нулевой массы, была введена Дж. Хиллом в 1878 г. Геометрически поверхность Хилла представляет собой проекцию 5-мерной поверхности уровня интеграла Якоби на трехмерное конфигурационное пространство. Свойства  $\mathcal{S}$  подробно изучены, смотри, например, [101; 102]. Известно несколько обобщений этого понятия как на случай, когда одно из тел не является точкой (смотри, например, [109]), так и на случай, когда задача не является круговой [95].

Области возможного движения в общей задаче трех тел в декартовой системе координат исследовались В. Г. Голубевым в [93], В. Н. Тхаем [106]. В этих работах в качестве переменных используются взаимные расстояния (в работе В. Г. Голубева – относительные взаимные расстояния), они связаны с конфигурацией трех тел, но в рассматриваемом в настоящей работе пространстве форм поверхности строятся намного проще, и их просто нарисовать.

Для построения области возможного движения используются интегралы движения. В задаче двух тел, например, интеграл энергии

$$T - U = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{2} - \frac{1}{r} = h$$

дает

$$\frac{1}{r} + h \geq 0, \text{ или } r \leq 2a = -\frac{1}{h}, \text{ если } h < 0,$$

постоянную всемирного тяготения полагаем равной 1, это всегда можно сделать подходящим выбором единиц измерения (длины, массы, времени). В случае  $h \geq 0$  область возможного движения совпадает со всем конфигурационным пространством  $\mathbb{R}^2$ .

Область возможного движения будет еще более ограниченной, если мы включим в рассмотрение и интеграл площадей:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{J} = r^2 \dot{\psi}$$

с учетом последнего интеграла интеграл энергии можно записать в виде

$$T - U = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{r} = h$$

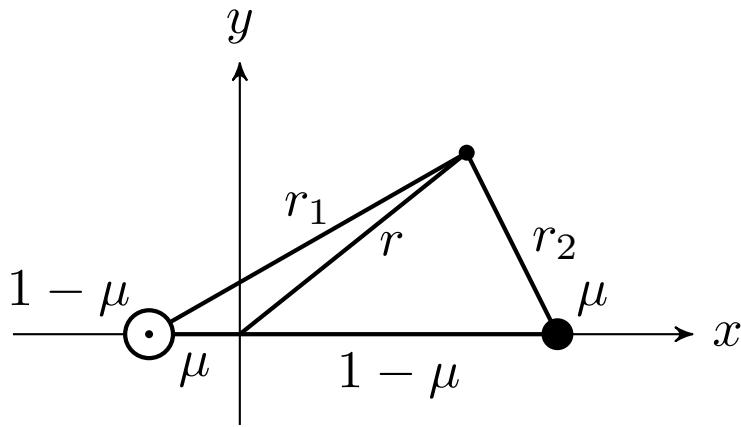


Рисунок 3.3 — Ограниченнная задача трех тел

При  $h < 0$  получаем

$$\frac{1}{r} + h - \frac{J^2}{r^2} \geqslant 0 \quad \rightarrow \quad 0 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2$$

Таким образом, если мы рассматриваем только интеграл энергии при  $h < 0$ , то область возможного движения это круг радиуса  $2a$ , если, кроме этого, мы фиксируем еще значение интеграла площадей  $J$ , то область возможного движения это кольцо, движение возможно между его границами, сами границы тоже включаются в область возможного движения, и эта связная область компактна.

В круговой ограниченной задаче трех тел (рис. 3.3) области возможного движения хорошо изучены и определяются интегралом Якоби:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - (x^2 + y^2) - 2 \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) + C = 0,$$

$x, y, z$  – координаты точки пренебрежимо малой массы во вращающейся системе координат, два тела массы  $m_1$  и  $m_2$  в этой системе координат неподвижны, начало координат в барицентре, а единицы массы, длины и времени выбраны так, что угловая скорость вращения равна единице, сумма масс  $m_1 + m_2 = 1$  и расстояние между  $m_1$  и  $m_2$  равно единице. Поверхность нулевой скорости тогда определяется уравнением

$$(x^2 + y^2) + 2 \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) = C$$

и служит границей области возможного движения. Второго интеграла в этой задаче нет, но интеграл Якоби позволяет описать качественное движение тела нулевой массы.

На плоскости  $x,y$  области возможного движения имеют вид, показанный на рис. 3.4

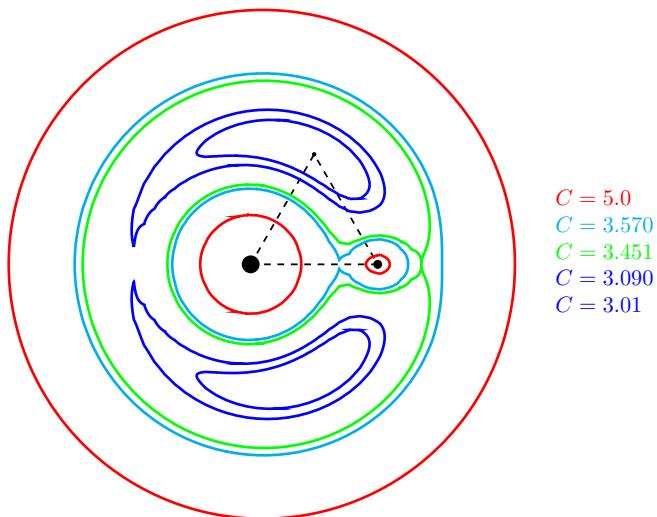


Рисунок 3.4 — Кривые нулевых скоростей в плоскости  $x,y$

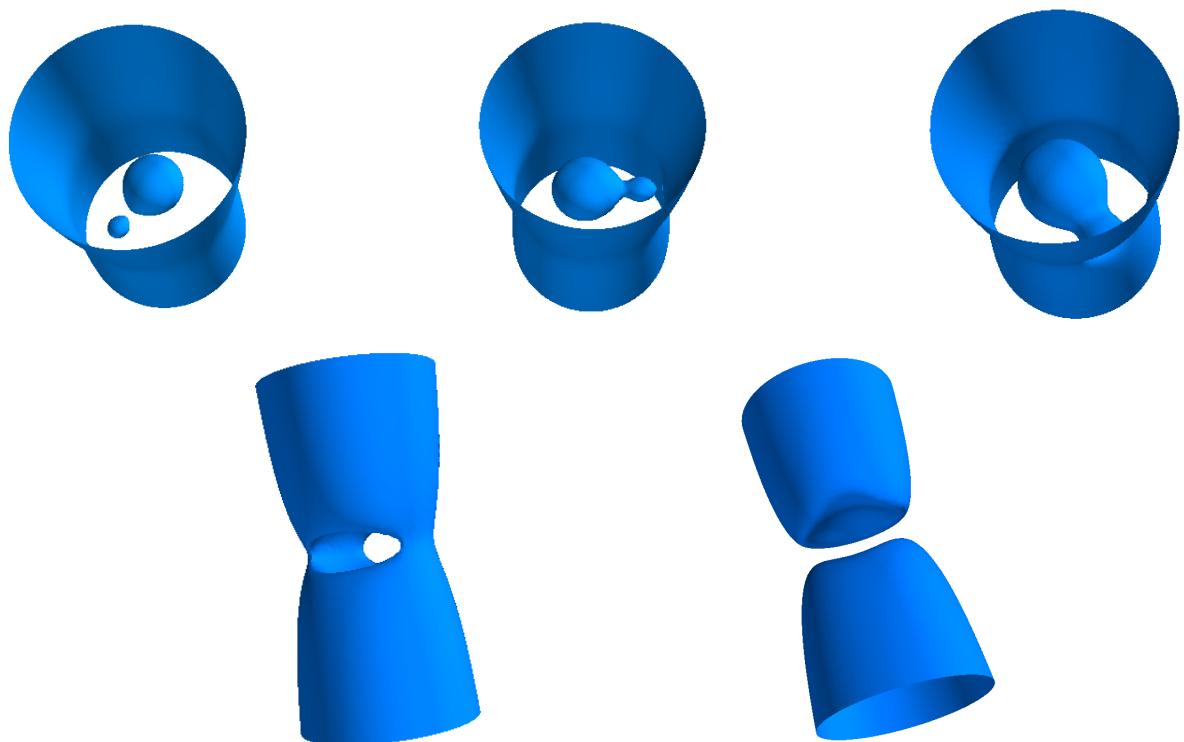


Рисунок 3.5 — Пять типов поверхности Хилла в круговой ограниченной задаче трех тел

На рис. 3.5 приведены пять топологических разных типов поверхности нулевой скорости (ограничивающей область возможного движения) в зависимости

от величины постоянной Якоби  $C$ . Первое изображение, слева вверху, соответствует достаточно большому значению  $C$ . Две квазисфера вокруг тел  $m_1$  и  $m_2$  компактны, движение возможно либо внутри этих квазисфер (и в этом случае тело нулевой массы всегда будет находиться там, говорят, что движение устойчиво по Хиллу), либо вне квазицилиндра. При уменьшении  $C$ , изображение в центре вверху, две квазисфера смыкаются (в точке Лагранжа  $L_1$ ) и при дальнейшем уменьшении  $C$ , образуется гантелеобразная поверхность, эта поверхность компактна, по-прежнему, находясь внутри нее, тело нулевой массы будет находиться там всегда, но переход из окрестности одного тела конечной массы в окрестность другого возможен. Если мы будем дальше уменьшать  $C$ , гантелеобразная поверхность смыкается с квазицилиндром (в точке Лагранжа  $L_2$ ), и далее образует единую поверхность нулевой скорости. Эта поверхность гомеоморфна цилиндуру. Область возможного движения односвязна. При дальнейшем уменьшении  $C$ , гантелеобразная поверхность смыкается с квазицилиндром в точке Лагранжа  $L_3$ , образуя квазицилиндр с дыркой, движение возможно только вне этой поверхности. Наконец, при дальнейшем уменьшении  $C$  квазицилиндр разбивается на два некомпактных куска. При  $C < C_*$  движение возможно во всем конфигурационном пространстве.

*Замечание 1:* В задаче двух тел поверхность нулевой скорости строится в прямоугольной системе координат с центром в (большем) теле, в круговой ограниченной задаче трех тел – во вращающейся системе координат; именно в этой системе координат поверхность Хилла это поверхность нулевой скорости.

*Замечание 2:* Наличие интеграла площадей существенно сужает область возможного движения.

### 3.1 Поверхность минимальной скорости в ограниченной круговой задаче трех тел

Рассмотрим осредненную ограниченную круговую задачу трех тел. Осреднение добавляет дополнительную симметрию задачи, и, следовательно, еще один интеграл (площадей), который можно использовать в различных задачах.

В работе [98] оценивается норма разности координат оскулирующего и среднего движения в задаче о движении с возмущающим ускорением, постоянным в системе отсчета, связанной с вектором скорости. Построены соответствующие разложения с точностью до  $e^4$ . Результаты этой работы использовались в [107] для оценки возможности увода опасного астероида с орбиты столкновения с Землей с помощью двигателя малой тяги.

Рассмотренные в предыдущем разделе поверхности Хилла обобщались многими авторами, например, [95; 96; 106]. Определим здесь поверхность минимальной скорости  $\mathcal{S}$ . Ее использование позволяет наложить существенно более жесткие ограничения на множество возможных движений  $\mathcal{T}$  тела нулевой массы. В частности, при типичных значениях параметров поверхность  $\mathcal{S}$  (а с ней и  $\mathcal{T}$ ) ограничена и весьма узка, в отличие от классической поверхности Хилла, которая всегда содержит неограниченное подмножество. Конечно,  $\mathcal{S}$  существует только в задаче, осредненной по долготам главных тел и обладающей таким образом дополнительной симметрией.

Итак, тела  $Q_1$  и  $Q_2$  с массами  $m_1$  и  $m_2$  ( $0 < m_2 \leq m_1$ ) двигаются по круговой орбите, т. е. описывают кеплеровы окружности вокруг барицентра  $O$  с угловой скоростью (средним движением)  $n$ . Движение тела нулевой массы  $Q$  рассмотрим в барицентрической системе, плоскость  $xy$  которой совпадает с плоскостью движения главных тел  $m_1$  и  $m_2$ . Если обозначить расстояния  $Q_1Q_2$ ,  $OQ_1$ ,  $OQ_2$ ,  $Q_1Q$ ,  $Q_2Q$ ,  $OQ$  через  $c$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r$ , то по формулам задачи двух тел имеем

$$c_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} c, \quad c_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} c, \quad c = c_1 + c_2, \quad n = \sqrt{\mathcal{G}(m_1 + m_2)} c^{-3/2},$$

где  $\mathcal{G}$  — постоянная тяготения. Координаты точек  $Q_s$  в функции времени  $t$  за счет выбора начальной эпохи можно положить равными

$$Q_1 = (-c_1 \cos nt, -c_1 \sin nt, 0), \quad Q_2 = (c_2 \cos nt, c_2 \sin nt, 0).$$

Координаты точки  $Q$  обозначаем здесь через  $Q = (x, y, z)$ .

Кинетическая энергия и силовая функция единицы массы точки  $Q$  в поле главных тел равны

$$T_m = \frac{v^2}{2}, \quad V_m = V_1 + V_2, \quad V_s = \frac{\mathcal{G}m_s}{r_s}, \quad s = 1, 2. \quad (3.2)$$

Здесь  $v$  — скорость точки  $Q$ ,

$$r_1^2 = (x + c_1 \cos nt)^2 + (y + c_1 \sin nt)^2 + z^2, \quad r_2^2 = (x - c_2 \cos nt)^2 + (y - c_2 \sin nt)^2 + z^2.$$

Функции (3.2) имеют период  $P = 2\pi/n$  по времени, поэтому допустимо применить к нашей динамической системе метод осреднения. Именно, заменим  $V, V_s$  на их средние значения  $W, W_s$  по явно входящему времени. По определению,

$$W_1 = \frac{\mathcal{G}m_1}{P} \int_0^P \frac{dt}{r_1}. \quad (3.3)$$

Интеграл (3.3) известен со времен Гаусса [89]. Представим  $r_1^2$  в форме

$$r_1^2 = r^2 + c_1^2 + 2c_1(x \cos \omega t + y \sin \omega t) = r^2 + c_1^2 + 2c_1\sqrt{x^2 + y^2} \cos(\omega t - \psi),$$

здесь  $\psi$  от времени явно не зависит, сделав замену в интеграле (3.3)  $\omega t - \psi = 2\tau$ , получим

$$W_1 = \frac{\mathcal{G}m_1}{\pi} \int_{-\psi/2}^{\pi-\psi/2} \frac{d\tau}{r_1}.$$

Подынтегральная функция имеет период  $\pi$  по  $\tau$  и пределы интегрирования можно заменить на 0 и  $\pi$ . В результате приходим к полному эллиптическому интегралу

$$W_1 = \frac{2\mathcal{G}m_1 K(k_1)}{\pi \sqrt{r^2 + c_1^2 + 2c_1\sqrt{x^2 + y^2}}}. \quad (3.4)$$

Здесь

$$k_1^2 = \frac{4c_1\sqrt{x^2 + y^2}}{r^2 + c_1^2 + 2c_1\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (3.5)$$

причем

$$0 \leq k_1 \leq 1. \quad (3.6)$$

Равенство слева достигается только на оси  $z$  (при  $x^2 + y^2 = 0$ ), справа — только на особой окружности (при  $x^2 + y^2 = c_1^2$ ,  $z = 0$ ).

Очевидно, что  $W_2$  дается формулами (3.4, 3.5, 3.6) при замене индекса 1 на 2.

Определяемая функциями  $T_m$ ,  $W = W_1 + W_2$  система автономна и зависит от  $x$ ,  $y$  только посредством  $x^2 + y^2$ . Поэтому она обладает двумя интегралами: энергии и площадей

$$W - \frac{v^2}{2} = h, \quad (3.7)$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = J. \quad (3.8)$$

Ограниченные движения возможны только при отрицательной полной энергии тела  $Q$ , в этом случае  $h > 0$ , будем рассматривать только такие движения.

Часто, кроме выполненного осреднения по долготам главных тел, проводят и осреднение по долготе тела  $Q$  [88; 92], но для построения искомых поверхностей этого не требуется.

По неравенству Буняковского–Коши из (3.8) следует

$$J^2 \leq (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(x^2 + y^2) \leq v^2(x^2 + y^2). \quad (3.9)$$

Отсюда и из интеграла (3.7) вытекает  $W \geq J^2/2(x^2 + y^2) + h$ , что удобнее записать в виде

$$F(x, y, z) \geq 0 \quad (3.10)$$

при

$$F(x, y, z) = W - \frac{J^2}{2(x^2 + y^2)} - h. \quad (3.11)$$

Соотношение (3.10) показывает, что точка  $Q$  всегда находится в области  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ , граница которого  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$  имеет уравнение

$$F(x, y, z) = 0. \quad (3.12)$$

Назовем  $\mathcal{S}$  *поверхностью минимальной скорости*.

*Замечание.* Ограниченностъ замкнутого множества  $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^3$  доказана ниже, так что оно компактно.

Таблица 5 — Значения  $k_s, W_s, F$  в ключевых точках.

$r$	0	$c_1$	$c_2$	$\infty$
$k_1^2$	0	1	$\frac{4c_1 c_2}{c^2}$	0
$k_2^2$	0	$\frac{4c_1 c_2}{c^2}$	1	0
$W_1$	$\frac{\mathcal{G}m_1}{c_1}$	$\infty$	$\frac{2\mathcal{G}m_1 \mathbf{K}(k_1(c_2))}{\pi c}$	0
$W_2$	$\frac{\mathcal{G}m_2}{c_2}$	$\frac{2\mathcal{G}m_2 \mathbf{K}(k_2(c_1))}{\pi c}$	$\infty$	0
$F$	$-\infty$	$\infty$	$\infty$	$-h$

**Свойства кривой минимальной скорости.** Обозначим через  $\mathcal{T}^*, \mathcal{S}^*$  сечения  $\mathcal{T}, \mathcal{S}$  плоскостью  $xy$ . Наша динамическая система допускает плоские движения  $z = 0$ . Поэтому  $\mathcal{T}^*$  с границей  $\mathcal{S}^*$  определяет компакт возможных движений, если начальные положение и скорость точки  $Q$  лежат в плоскости  $xy$ .

Кривая  $\mathcal{S}^*$  задается тем же уравнением (3.12), где  $W$  и  $F(x,y,0) = F^*(r)$  зависят только от  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ :

$$k_s^2 = \frac{4c_s r}{(r + c_s)^2}, \quad W_s = \frac{2\mathcal{G}m_s \mathbf{K}(k_s)}{\pi(r + c_s)}, \quad F^* = W_1 + W_2 - \frac{J^2}{2r^2} - h. \quad (3.13)$$

В табл. 5 приведены значения  $k_s, W_s, F^*$  в ключевых точках, включая бесконечно удаленную.

Соотношения (3.13) и данные табл. 5 позволяют установить следующие свойства  $\mathcal{T}^*$  и  $\mathcal{S}^*$ .

1. Множества  $\mathcal{T}^*$  и  $\mathcal{S}^*$  ограничены.
2. Лежащая в круге  $r < c_1$  часть  $\mathcal{S}^*$  состоит из нечетного числа окружностей, и потому не пуста (Функция  $F$  зависит только от  $x$  и  $y$  и меняет знак в интервале  $(-\infty, c_1)$ ). То же верно для области  $r > c_2$ .
3. Кольцо  $c_1 < r < c_2$  содержит четное число окружностей.

При

$$\min_{c_1 < r < c_2} \left( W(r) - \frac{J^2}{2r^2} \right) > h \quad (3.14)$$

это число равно нулю, и тогда в  $\mathcal{T}^*$  содержится кольцо  $c_1 \leq r \leq c_2$ .

Если неравенство (3.14) не выполняется, соответствующая часть  $S^*$  содержит не менее двух окружностей.

*Замечание.* Кратному корню уравнения  $F^*(r) = 0$  сопоставляем равное кратности число совпадающих окружностей.

**Свойства поверхности минимальной скорости.** Установим основные свойства  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{S}$  в пространственном случае.

1.  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{T}$  симметричны относительно плоскости  $xy$ .
2.  $\mathcal{S}$  — поверхность вращения вокруг оси  $z$ .
3.  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{T}$  ограничены.

Действительно, если  $r \rightarrow \infty$ , то  $k_s \rightarrow 0$ ,  $W_s \rightarrow 0$ ,  $F \rightarrow -h$ . Поэтому  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{T}$  не содержат точек вне шара достаточно большого радиуса, таким образом, множества  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{T}$  ограничены и, следовательно, компактны.

4. Поверхность  $\mathcal{S}$  состоит из конечного множества непересекающихся и не вложенных друг в друга топологических торов. Компакт  $\mathcal{T}$  состоит из конечного множества непересекающихся топологических полноторий.

По свойству 2 полное представление о поверхности  $\mathcal{S}$  дает ее сечение  $\mathcal{S}_*$  плоскостью  $xz$ .

**Пример.** В качестве примера рассмотрим задачу Плутон ( $Q_1$ ) – Харон ( $Q_2$ ) – малый внешний (по отношению к Харону) спутник ( $Q$ ).

Предварительно введем принятую в ограниченной задаче трех тел систему единиц:

единица расстояния:  $c = c_1 + c_2$ ;  
единица времени:  $\sqrt{c^3/(\mathcal{G}m_1 + \mathcal{G}m_2)}$ .

В этих единицах

$$c = \omega = 1, \quad c_1 = \mathcal{G}m_2, \quad c_2 = \mathcal{G}m_1,$$

Таблица 6 — Значения  $h$  и  $J$  для внешних спутников.

Спутник	Стикс	Никта	Кербер	Гидра
$h$	0.22635	0.20274	0.16963	0.15086
$J$	1.49409	1.57688	1.72182	1.82464

а  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{S}$  задаются соотношениями (3.10, 3.12) при

$$F(x,y,z) = \frac{2c_2\mathbf{K}(k_1)}{\pi\sqrt{r^2 + c_1^2 + 2c_1\sqrt{x^2 + y^2}}} + \frac{2c_1\mathbf{K}(k_2)}{\pi\sqrt{r^2 + c_2^2 + 2c_2\sqrt{x^2 + y^2}}} - \frac{J^2}{2(x^2 + y^2)} - h. \quad (3.15)$$

*Замечание.* Функция (3.11) содержит 6 параметров:  $m_1, m_2, c_1, c_2, J, h$ . Независимых параметров только 3:  $c_1, J, h$ , как показывает представление (3.15) с учетом  $c_2 = 1 - c_1$ .

Используя данные работы [76], получим значения необходимых параметров:

$$c_1 = 0.10854, \quad c_2 = 0.89146.$$

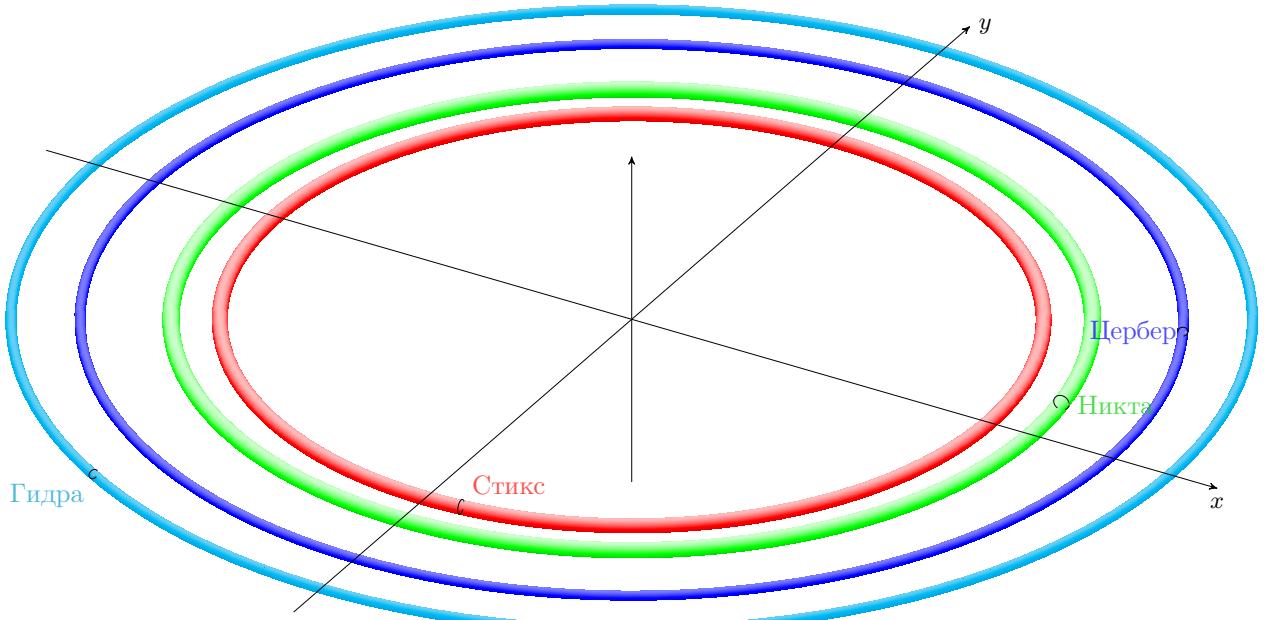
Различающиеся для разных спутников постоянные  $h$  и  $J$  собраны в таблице 6.

На рис. 3.6 приведены торы для внешних спутников Плутона. Спутники находятся в меридиональных сечениях соответствующих торов, эти сечения — черные окружности, отдельно сечения приведены на рис. 3.7–3.10. Торы выделены цветами: бирюзовым для Гидры, синим для Кербера, зеленым для Никты и красным для Стикса. Ось  $x$  проходит через начальные положение Плутона и Харона. Пространственная структура поверхностей из-за очень малой «толщины» торов просматривается плохо, но поскольку поверхности минимальной скорости являются поверхностями вращения, то полную картину можно получить, нарисовав меридиональные сечения. Такие сечения приведены на рис. 3.7–3.10. В этих сечениях меридиан выбирается так, что в нем оказывается и соответствующий спутник, который отмечен на этих рисунках кружками соответствующего цвета. В случае Стикса, Никты и Кербера они находятся почти на своих поверхностях  $\mathcal{S}$ . Это объясняется тем, что их орбиты мало отличаются от плоских круговых, поэтому практически весь момент скорости приходится на его  $z$ -составляющую, т. е. на  $J$ . Иными словами, неравенство (3.10) почти не отличается от равенства.

Таблица 7 — Размеры колец вокруг  $c_1$  и  $c_2$ 

	Полуширина кольца $c_1 = 0.10854$	Полуширина кольца $c_2 = 0.89146$	Значение $F$ на границах
Стикс	$1.53253 \cdot 10^{-16}$	$6.7100 \cdot 10^{-7}$	$0.9 \cdot 10^{-5}$
Никта	$2.49513 \cdot 10^{-18}$	$1.9904 \cdot 10^{-8}$	$0.4 \cdot 10^{-6}$
Кербер	$1.07711 \cdot 10^{-21}$	$1.9934 \cdot 10^{-11}$	$0.8 \cdot 10^{-6}$
Гидра	$2.91671 \cdot 10^{-24}$	$8.6971 \cdot 10^{-14}$	$0.3 \cdot 10^{-7}$

Черная окружность, объемлющая сечение, мало отличается от самого сечения, таким образом, топологические торы поверхностей минимальной скорости являются торами и в общепринятом смысле. Что касается поверхностей, включающих Плутон и Харон, то, хотя они всегда присутствуют, их размеры настолько малы (большая полуось орбиты Харона 20 000 км, из табл. 7 в лучшем случае получаем 13 метров!!!), что их на рисунках нет.

Рисунок 3.6 — Поверхности  $S$  для четырех малых спутников Плутона

Заметим, что окружность  $c_1$  содержится в слое между двумя окружностями, соответствующими корням функции  $F^*(r)$ . Один корень меньше  $c_1$ , второй больше, но они отличаются от  $c_1$  на величины порядка  $10^{-16}$ , то есть с точностью до десятков метров совпадают с  $c_1$ . То же относится и к  $c_2$  (может, поэтому большие планеты и выметают всякие обломки). Таким образом, при  $r < c_1$

Таблица 8 — Размеры поверхностей минимальной скорости для внешних спутников Плутона (корни  $F^*(r)$ ,  $r_* < r < r^*$ )

	$r_*$	$r^*$
Стикс	2.154184	2.234821
Никта	2.410331	2.497633
Кербер	2.911059	2.965172
Гидра	3.278759	3.333529

имеем один корень  $c_1 = 0$ , между  $c_1$  и  $c_2$  — два корня  $c_1 + 0$  и  $c_2 - 0$ , а при  $r > c_2$  имеем три корня:  $c_2 + 0$  и два корня, которые и определяют область возможного движения, впрочем тоже не очень большую. Размеры торов, определяемые корнями функции  $F^*(r)$ , приводятся в табл. 8 В табл. 7 приведены также полуширины колец возможного движения, включающих окружности Плутона ( $c_1 = 0.10854$ ) и Харона ( $c_2 = 0.89146$ ). Толщина самого большого кольца (Стикс, кольцо Харона) порядка десятков метров!

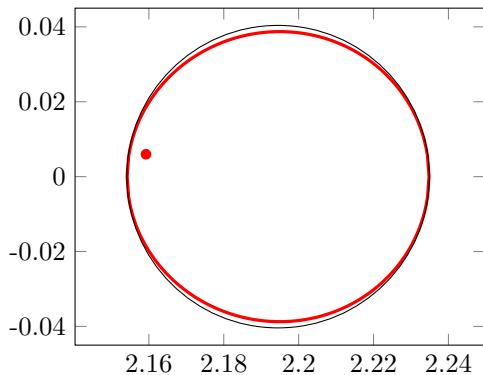


Рисунок 3.7 — Меридиональное сечение тора для Стикса

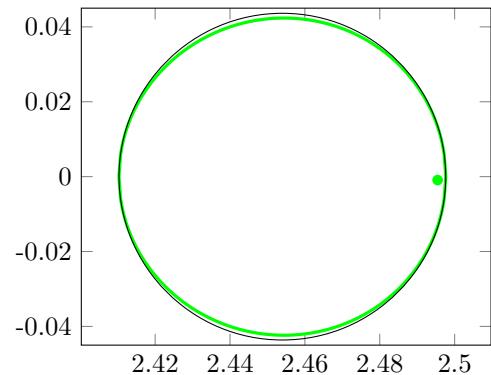


Рисунок 3.8 — Меридиональное сечение тора для Никты

На рис. 3.11 изображена функция  $F^*(r)$  для Стикса. Ее корни определяют области возможного движения  $F^*(r) \geq 0$ . На промежутке  $[0.9 - 5.0]$  есть только два корня, 2.154184 и 2.234821, в этом промежутке движение возможно, в увеличенном виде этот отрезок показан бирюзовым цветом справа внизу. Пара корней, обрамляющая  $c_2$ , имеет полуширину порядка  $6.67 \cdot 10^{-7}$ , полуширина области, содержащей окружность  $c_1$ , еще меньше  $1.53 \cdot 10^{-16}$ . Поведение  $F^*(r)$  в окрестностях  $c_s$  в увеличенном масштабе показано в верхней (малиновым цветом в окрестности  $c_2$ ) и в нижней части рисунка (красным цветом в окрестности  $c_1$ ). Напомним, что

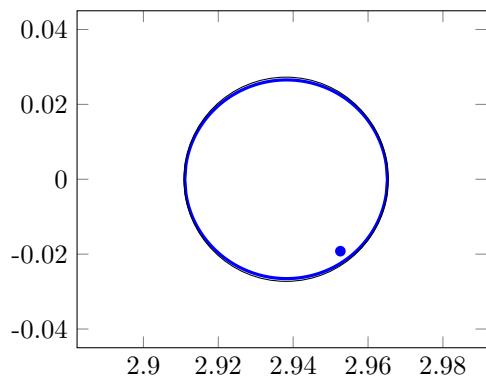


Рисунок 3.9 — Меридиональное сечение тора для Кербера

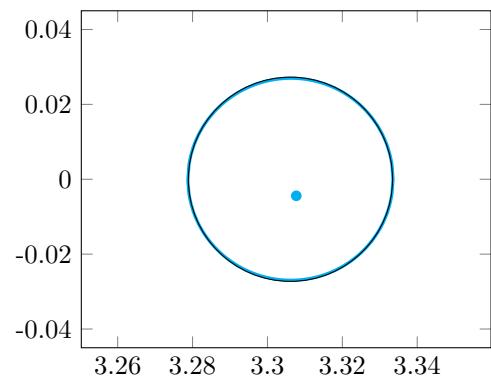


Рисунок 3.10 — Меридиональное сечение тора для Гидры

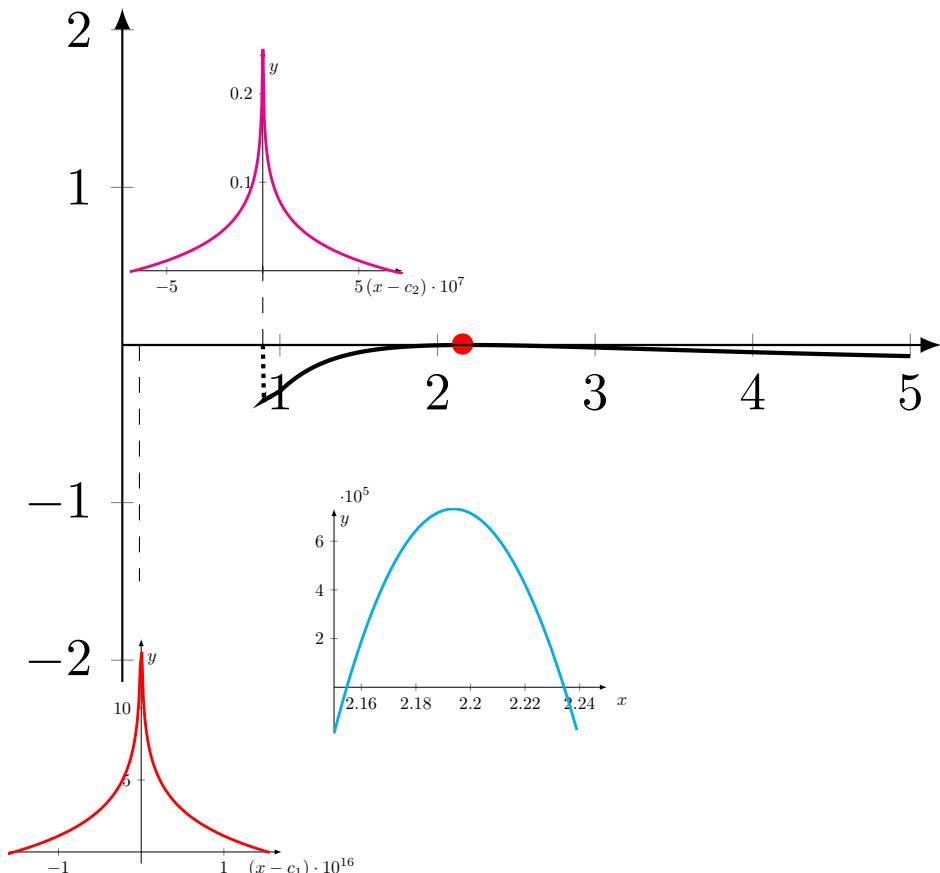


Рисунок 3.11 — Функция  $F^*(x)$  для Стикса

$F^*(c_s) = \infty$ . Остальные спутники (Никта, Кербер, Гидра) имеют другие константы  $h$  и  $J$ , но поведение функции  $F^*(r)$  для них качественно остается таким же.

Поверхность минимальной скорости  $\mathcal{S}$ , а значит и область  $\mathcal{T}$ , позволяет наложить существенно более жесткие ограничения на движение тела нулевой массы, существенно однако, что эти ограничения действуют только в рамках осредненной задачи, и, следовательно, в реальных приложениях лишь на ограниченном промежутке времени.

### 3.2 Область возможного движения в общей плоской задаче трех тел

Несмотря на то, что общего решения задачи даже трех тел найти не удается, исследования решений задачи, их свойств, достигли определенных результатов. Кроме приведенных выше примеров ограниченных задач, целый ряд свойств известен и для общей задачи трех (и  $N$ ) тел. Эти результаты связаны с тождеством Лагранжа–Якоби и неравенствами Сундмана. Приведем результаты, касающиеся общих свойств решений задачи трех ( $N$ ) тел. Большая часть этих свойств основывается на общих свойствах рассматриваемых функций, таких, например, как однородность, и справедлива для любого  $N$ . В этом разделе исследуются свойства поверхностей нулевой скорости (областей возможного движения) общей задачи трех тел в пространстве форм [104; 105].

Простейшие свойства, сформулированные в [69; 91]:

- Если  $h < 0$ , то наименьшее из взаимных расстояний остается ограниченным. Для доказательства этого свойства достаточно рассмотреть выражение для силовой функции  $V$ , поскольку  $V = T - h \geqslant -h > 0$ , то

$$\sum_{i < j}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \geqslant \sum_{i < j}^n m_i m_j / \inf(r_{ij}) \geqslant -h \Rightarrow \inf(r_{ij}) \leqslant \left( \sum_{i < j}^n m_i m_j \right) / (-h).$$

Доказательство элементарно и справедливо для любого числа  $N$ .

Похожее свойство,

- При  $h \geqslant 0$  хотя бы одна из точек системы должна удалиться на неограниченно большое расстояние от барицентра, требует для доказательства использования тождества Лагранжа–Якоби (1.9) и тоже не представляет трудностей. Напомним, что тождество Лагранжа–Якоби совпадает с уравнением Лагранжа для переменной  $\rho$ .
- Невозможно столкновение в одной точке всех тел системы лишь через бесконечно большой промежуток времени.
- Полный коллапс системы не может произойти, если угловой момент системы не равен нулю.

- Если все три постоянные площадей не равны нулю, то при данных начальных условиях можно указать положительную границу, ниже которой два наибольших расстояния между телами никогда не опускаются.
- При двойном соударении  $\rho$  и  $\dot{\rho}$  (момент инерции и его производная) остаются непрерывными, вместе с  $r\dot{r}$  ( $r$  – наименьшее из расстояний), хотя  $\dot{r}$  не будет непрерывным.
- Из простых вычислений получаем, что  $\rho$  при двойном соударении имеет локальный минимум, при стремлении  $t$  к моменту соударения  $\rho$  стремится к этому пределу, а  $\dot{\rho} = 0$ .

Действительно, пусть в момент  $t = 0$  происходит двойное соударение тел  $P_1$  и  $P_2$ , тело  $P_3$  в указанный момент находится на расстоянии  $a$  от точки соударения. В достаточно малой окрестности столкновения тело  $P_3$  можно считать неподвижным, момент инерции при столкновении и в момент до (или после соударения) вычисляется легко (расстояние между телами  $P_1$  и  $P_2$  обозначим  $\delta$ ):

$$\begin{aligned} I_0 &= (m_1 + m_2)m_3/(m_1 + m_2 + m_3)a^2, \\ I &= I_0 + \delta^2 m_1 m_2 \frac{(m_1 - m_2)^2 + m_1 m_3 + m_2 m_3 - 4m_1 m_2 \sin^2 \varphi}{(m_1 + m_2)^2(m_1 + m_2 + m_3)} \geq I_0. \end{aligned}$$

Таким образом, момент инерции  $I$ , или расстояние  $\rho$  принимает минимальное значение, отсюда следует, что траектория решения задачи трех тел в пространстве форм всегда пересекает линию соударения, если это происходит, ортогонально этой линии соударения.

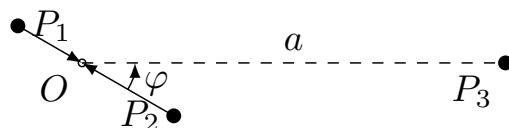


Рисунок 3.12 — Двойное соударение в момент  $t_0$

Большое значение для качественного анализа решений задачи трех тел имеет неравенство Сундмана. В рассматриваемом пространстве форм оно является простым следствием интеграла энергии (1.23):

$$J^2 \leq \rho(\ddot{\rho} - 2h). \quad J^2 \leq 2D(\varphi, \theta)/\sqrt{\rho} + 2h\rho. \quad (3.16)$$

или, сохраняя в выражении для интеграла энергии производную от  $\rho$ , получим более строгое неравенство Сундмана:

$$J^2 + \frac{1}{4}\dot{\rho}^2 \leq \rho(\ddot{\rho} - 2h); \quad J^2 + \frac{1}{4}\dot{\rho}^2 \leq 2D(\varphi, \theta)/\sqrt{\rho} + 2h\rho. \quad (3.17)$$

Поверхность нулевой скорости ( $\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2 = 0$ ), то есть поверхность, где скорость изменения конфигурации треугольника равна нулю, отделяет область возможного движения от области, где движение невозможно.

Если в интеграле энергии (1.23) заменить переменные  $\rho, \varphi, \theta$  на переменные  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  получим уравнение поверхности в виде

$$V(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + h - \frac{J^2}{2\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} = 0. \quad (3.18)$$

Очевидно, поверхность существует, если  $J^2/(2\rho) - h > 0$ , что выполняется всегда, если  $h < 0$ .

Очевидно, неравенство Сундмана (смотри, например, [38; 40; 56; 69])

$$\frac{J^2}{2I} - V(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - h \leq 0,$$

является простым следствием интеграла энергии (1.23), и, наоборот, уравнение поверхности нулевых скоростей в пространстве форм можно получить непосредственно из неравенства Сундмана. Заметим, что приведенное неравенство может выполняться и при  $h > 0$ .

Начнем с поверхности нулевой скорости и области возможного движения при  $J = 0$ . На рис. 3.13 изображена поверхность нулевой скорости для  $m_1 = m_2 = m_3$

В этом случае тройное соударение возможно, и начало координат, следовательно, входит в область возможного движения. Как было замечено в 1.1.1, благодаря симметрии масштаба мы можем без ущерба для общности фиксировать значение постоянной энергии, например, в случае отрицательной энергии  $h = -1/2$ . Далее мы будем исследовать области возможного движения с этим значением  $h$ . Оценим размер области возможных движений, сначала для случая равных масс. В этом случае лучи двойного соударения в пространстве  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  отвечают трем лучам:  $\lambda(-1, 0, 0)^T, \lambda(1/2, -\sqrt{3}/2, 0)^T, \lambda(1/2, \sqrt{3}/2, 0)^T$ , а коллинеарные

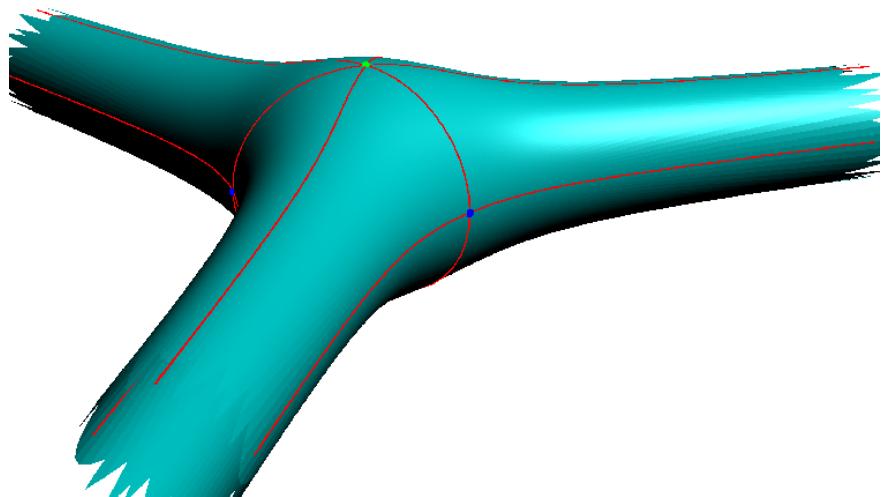


Рисунок 3.13 — Поверхность нулевой скорости при  $J = 0$

конфигурации Эйлера – лучам  $\lambda(1,0,0)^T, \lambda(-1/2,\sqrt{3}/2,0)^T, \lambda(-1/2, -\sqrt{3}/2,0)^T$ ; равносторонние конфигурации Лагранжа отвечают в случае равных масс полюсам  $\lambda(0,0, \pm 1)^T$  (здесь  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  – произвольное число). Очевидно, только в случае равенства масс конфигурации Лагранжа располагаются в полюсах сферы форм. В рассматриваемом случае поверхность нулевой скорости и область возможного движения симметричны относительно поворотов на  $2k\pi/3$ . Рассмотрим точки поверхности нулевой скорости в положительном направлении оси аппликат:  $(0,0,\xi_3)$ . При  $J = 0$  из (3.18) имеем

$$V(0,0,\xi_3) = 3/\sqrt{\xi_3} = 1/2 \quad \rightarrow \quad \xi_3 = 36.$$

Таким образом, область возможного движения включает отрезок  $[-36,36]$  оси аппликат. Из этого отрезка можно исключить начало координат, если мы не рассматриваем тройного соударения. Заметим, что поверхность нулевой скорости в начале координат не имеет физического смысла: нельзя говорить о трех телах, находящихся в одной точке и имеющих нулевую скорость, по сути это одна точка с массой, равной сумме масс трех тел.

Теперь рассмотрим точки поверхности в положительном направлении оси абсцисс (при  $\xi_1 < 0$  весь луч  $(\xi_1,0,0)$ , входит в область возможного движения): Из уравнения (3.18) имеем

$$V(\xi_1,0,0) = 1/\sqrt{2\xi_1} + 2/\sqrt{\xi_1/2} = 1/2 \quad \rightarrow \quad \xi_1 = 50.$$

Если массы не равны, то в случае нулевого углового момента  $J = 0$  качественно поверхность не изменится, изменятся положения лагражевых и эйлеровых точек и размеры ветвей. Например, для точек Лагранжа (1.13):

$$r_{12} = r_{13} = r_{23} = \sqrt{m_1 + m_2 + m_3} \sqrt{\rho} / \sqrt{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3},$$

силовая функция принимает значение

$$V = \frac{(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)^{3/2}}{\sqrt{m_1 + m_2 + m_3} \sqrt{\rho}}. \quad (3.19)$$

Аналогичный подход применим и к эйлеровым точкам. Если массы не равны, то мы получаем эйлерову точку (на сфере форм, или направление соответствующего луча) как корень полинома пятой степени (1.18) и, значит, угол  $\varphi$  для этого луча, и далее точку в плоскости экватора, отвечающую этой эйлеровой точке, на поверхности нулевой скорости. В случае равных масс вычисления проще (эйлеровы точки определяются элементарно  $\varphi_{1,2,3} = 0, \pm 2\pi/3$ ) и не требуют вычисления корней полинома пятой степени.

Пусть  $J \neq 0$ , тогда в случае равных масс на оси аппликат

$$\begin{aligned} V(0,0,\xi_3) - \frac{J^2}{2\xi_3} &= 3/\sqrt{\xi_3} - \frac{J^2}{2\xi_3} = 1/2 \quad \rightarrow \\ \xi_3 &\in \left[ \left(3 - \sqrt{9 - J^2}\right)^2, \left(3 + \sqrt{9 - J^2}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Корни этого уравнения существуют только при  $|J| \leq 3$  (если  $h$  — произвольное отрицательное число, при  $|J| \leq 3/\sqrt{2|h|}$ ), в противном случае корней на оси аппликат нет, смотри рис. 3.15–3.17.

Итак, если  $|J| \leq 3/\sqrt{2|h|}$ , мы имеем на оси аппликат две точки, которые соответствуют для данных  $h$  и  $J$  двум поверхностям нулевой скорости. Обе эти точки положительны, поскольку и произведение корней, и их сумма положительны. Таким образом, в этом случае ось аппликат дважды пересекает поверхности нулевой скорости в положительном направлении и, поскольку мы имеем очевидную симметрию относительно плоскости экватора, дважды в отрицательном.

Теперь посмотрим на структуру поверхностей нулевой скорости в направлении оси абсцисс:

$$V(\xi_1, 0, 0) - \frac{J^2}{2\xi_1} = 1/\sqrt{2\xi_1} + 2/\sqrt{\xi_1/2} - \frac{J^2}{2\xi_1} = 1/2 \rightarrow \xi_1 \in \left[ \left( 5 - \sqrt{25 - 2 J^2} \right)^2 / 2, \left( 5 + \sqrt{25 - 2 J^2} \right)^2 / 2 \right]. \quad (3.21)$$

Как и для корней на оси аппликат, при  $J \leq 5\sqrt{2}$  ( $J \leq 5/(2\sqrt{|h|})$ ), существуют два положительных корня, и, следовательно, ось абсцисс дважды пересекает поверхности нулевой скорости в положительном направлении, поскольку, в случае равных масс мы имеем симметрию поворота на  $k2\pi/3$ , то и лучи двух других эйлеровых точек также пересекают эти поверхности дважды, если  $J \leq 5\sqrt{2}$ . Таким образом, если  $J \leq 3$ , то любой луч, пересекающий внешнюю поверхность, очень похожую на поверхность рис. 3.13, пересекает и внутреннюю поверхность. Движение возможно вне внутренней поверхности и внутри внешней.

Внутренняя поверхность нулевой скорости при  $J = 2.38$  приведена на рис. 3.14. Верхняя и нижняя точка этой поверхности определяется наименьшим корнем (3.20), он существует, если  $J \leq 3$ , самая дальняя точка поверхности, лежащая в плоскости экватора, определяется наименьшим корнем (3.21), он существует, если  $J \leq 5\sqrt{2} \approx 3.5355$ . Что касается лучей двойных соударений, то согласно результатам Сундмана [67—69], если  $|J| > 0$ , то  $\rho$  отделена от нуля некоторой константой  $\bar{\rho}$ , т. е.,  $\rho \geq \bar{\rho}$ . Таким образом, вершины «воронок» находятся на линиях двойных соударений, но не доходят до точки тройного соударения, это можно видеть на рисунке 3.14.

Свойства внутренней поверхности нулевой скорости детально не рассматриваются. Вероятно, если точка решения попадает в одну из воронок, приближаясь таким образом к двойному соударению, то согласно Сундману, при  $t \rightarrow \infty$  она уйдет в одну из ветвей, удалившись на бесконечность, в нашем случае это означает, что  $\rho \rightarrow \infty$ .

Посмотрим теперь, как изменяется поверхность нулевой скорости при изменении  $J$ . На рис. 3.15-3.17 изображены поверхности нулевой скорости при  $J = 2.99$ ,  $J = 3.2$  и  $J = 4.5$ . Топология областей допустимого движения в

этих случаях различна. Для случаев  $|J| < 3$  эта область ограничена внешней поверхностью с тремя ветвями, похожей на поверхность при  $J = 0$  (если начало координат считать выколотой точкой; на рисунках синяя линия отвечает сечению поверхностью нулевой скорости для  $J = 0$ ), и внутренней поверхностью, сечение которой плоскостью  $\xi_3 = 0$  имеет вид трилистника, а сечение плоскостью  $\xi_2 = 0$  — симметрично относительно экватора, вытянуто вдоль оси абсцисс, это сечение зависит от меридиана, если массы не равны, то следует взять сечение другим меридианом (проходящим через линию соответствующей эйлеровой конфигурации). Впрочем, в приведенных далее примерах массы будут мало отличаются друг от друга. На рис. 3.15 внутренняя поверхность хорошо видна. При  $|J| = 3$  внутренняя и внешняя поверхности имеют две общие точки, и при  $3 < |J| < 5/\sqrt{2} \approx 3.53553$ , в в центральной части поверхности с тремя ветвями появляется дырка.

При  $|J| < 3$  внутренняя поверхность компактна, эта внутренняя поверхность изображена на рис. 3.14. Очевидно, в начале координат она имеет особую точку. Поверхность изображена полупрозрачной, и три «воронки» хорошо видны.

При  $J = 5/\sqrt{2}$  каждая из ветвей имеет только две общие точки с соседними ветвями, выколотую точку в начале координат не рассматриваем. И далее, при  $J > 5/\sqrt{2}$  мы имеем три отдельные ветви.

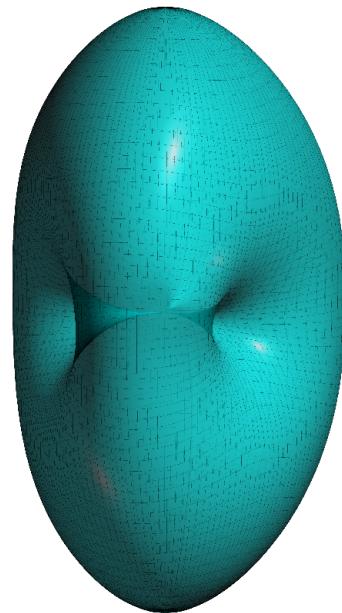


Рисунок 3.14 — Внутренняя поверхность нулевой скорости при  $J = 2.99$

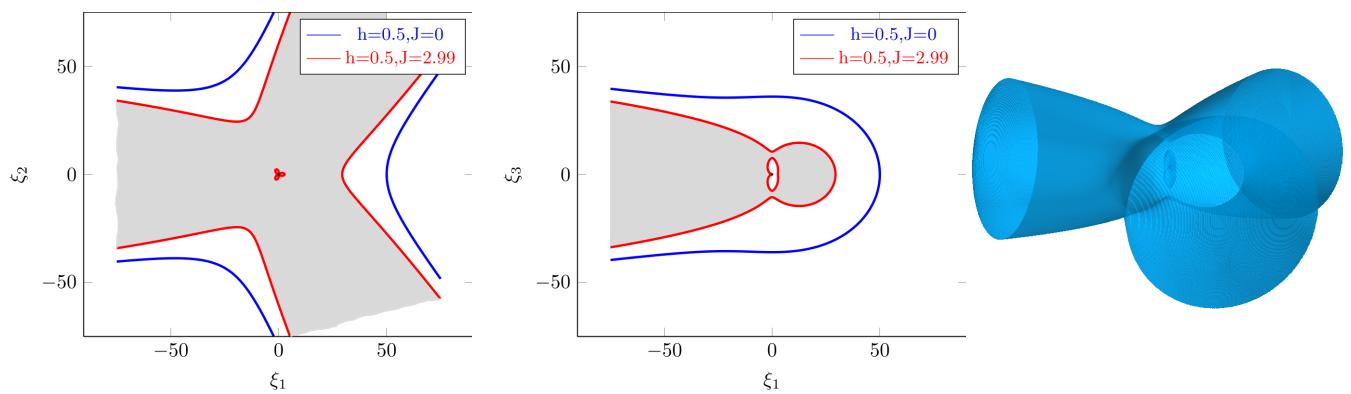


Рисунок 3.15 — Поверхность нулевой скорости при  $J = 2.99$  (справа) и ее сечения плоскостью экватора  $\xi_3 = 0$  (слева) и плоскостью меридиана  $\xi_2 = 0$

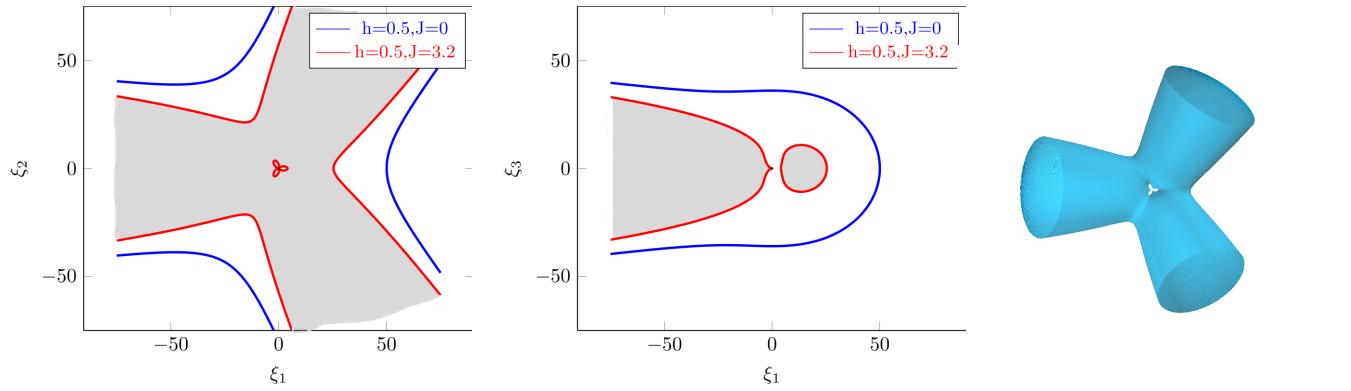


Рисунок 3.16 — Поверхность нулевой скорости при  $J = 3.2$  (справа) и ее сечения плоскостью экватора  $\xi_3 = 0$  (слева) и плоскостью меридиана  $\xi_2 = 0$

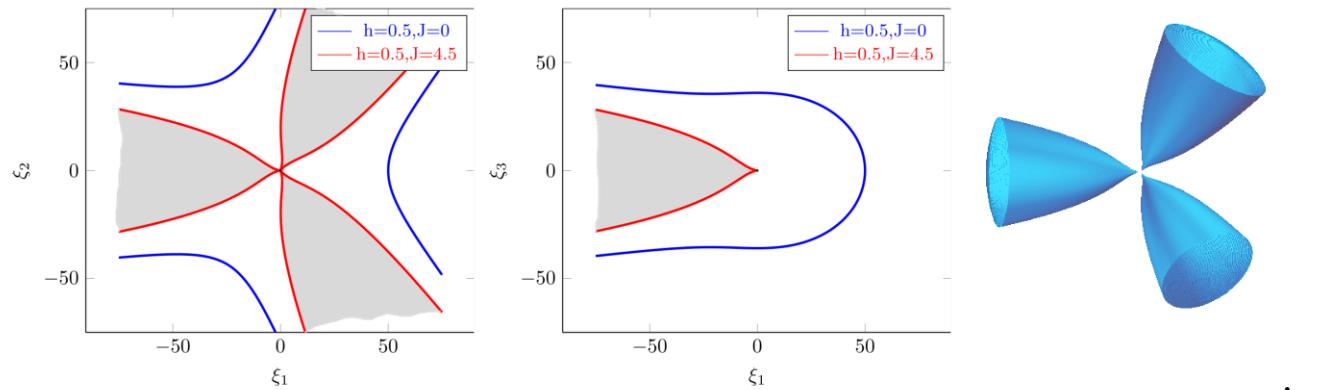


Рисунок 3.17 — Поверхность нулевой скорости при  $J = 4.5$  (справа) и ее сечения плоскостью экватора  $\xi_3 = 0$  (слева) и плоскостью меридиана  $\xi_2 = 0$

Мы имеем три топологически разных типа поверхности нулевой скорости или три различных топологических области возможного движения. Первая — внутренняя поверхность (компакт), изображенная на рис. 3.14, и внешняя поверхность, три рукава которой соответствуют трем областям иерархического

движения, когда два тела находятся близко друг от друга, а третье существенно дальше (рис. 3.15). При изменении постоянной углового момента  $0 < J < 3$  внутренняя область (где движение невозможно) увеличивается, а внешняя уменьшается и при  $J = 3$  внутренняя и внешняя поверхности соприкасаются, и далее мы имеем поверхность с «дыркой» – равносторонняя конфигурация с  $J > 3$  недостижима, обмен компонентами, т. е. переход из одного рукава в другой вполне возможен (см. рис. 3.16). При дальнейшем увеличении значения постоянной  $J$ :  $3 < J < 5/\sqrt{2}$  «дырка» растет, пока, наконец, при  $J = 5/\sqrt{2}$  три рукава не будут иметь с соседними рукавами лишь по одной общей точке, и при  $J > 5/\sqrt{2}$  область возможного движения распадается на три отдельных области (рис. 3.17), движение возможно внутри каждой из них, но переместиться из одной области в соседнюю уже невозможно, мы имеем иерархическую систему.

Такая упрощенная структура получается только для трех равных масс. В этом случае три особые точки, соответствующие положительному корню полинома (1.18) достигаются одновременно, точнее полиномы совпадают для трех разных порядков расположения тел.

Теперь рассмотрим случай неравных масс. Пусть, например,  $m_1 = 2m_2 = 4m_3 = 12/7$ . Лучи двойных соударений располагаются, как и в случае равных масс, в плоскости экватора, но симметрии относительно поворотов на  $2k\pi/3$ , конечно, уже нет. Сечения и поверхности, аналогичные случаю равных масс приведены на рис. 3.18–3.22.

При  $J = 0$  топологически поверхность такая же как и в случае равных масс: начало координат – выколотая точка, три ветви уходят в бесконечность вместе с тремя лучами двойных соударений, только толщина ветвей теперь различна, самая тонкая ветвь направлена вдоль луча двойного соударения двух наименьших масс, самая толстая – вдоль луча двойного соударения двух наибольших масс, третья ветвь располагается вдоль луча соударений наименьшей и наибольшей массы.

Координаты особых точек ( $L_4$  и  $L_5$ ) задаются выражением (1.13), в случае равных масс эти точки соответствуют полюсам, поэтому мы определяли пересечение с поверхностью оси аппликат. В случае неравных масс мы определили пересечение луча (1.13) с нашей поверхностью и получили значение (3.19), та-

ким образом для особой точки  $L_4$  имеем уравнение:

$$\frac{(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)^{3/2}}{\sqrt{\rho} \sqrt{m_1 + m_2 + m_3}} + h - \frac{J^2}{2\rho} = 0, \quad (3.22)$$

которое имеет решение:

$$\sqrt{\rho} = (\pm \sqrt{\frac{(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)^3}{m_1 + m_2 + m_3} + 2J^2 h} - \frac{(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)^{3/2}}{\sqrt{m_1 + m_2 + m_3}})/2h,$$

то есть

$$\rho \in \left[ \left( \frac{(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)^{3/2}}{\sqrt{m_1 + m_2 + m_3}} - \sqrt{\frac{(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)^3}{m_1 + m_2 + m_3} + 2J^2 h} \right) / 4h^2, \right. \\ \left. \left( \frac{(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)^{3/2}}{\sqrt{m_1 + m_2 + m_3}} + \sqrt{\frac{(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)^3}{m_1 + m_2 + m_3} + 2J^2 h} \right) / 4h^2 \right].$$

Таким образом, получаем результат, похожий на тот, что мы получили для равных масс (если положить  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ , особая точка при  $J = 3$ ), в случае же неравных масс решение существует, если ( $h = -1/2$ ):

$$J^2 \leq (m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)^3 / (m_1 + m_2 + m_3),$$

в рассматриваемом случае  $m_1 = 2m_2 = 4m_3 = 12/7$  постоянная  $J \leq 3 \cdot 6^{3/2} / 7^{3/2}$ . При больших  $J$ , как и в случае равных масс, получаем «дырку».

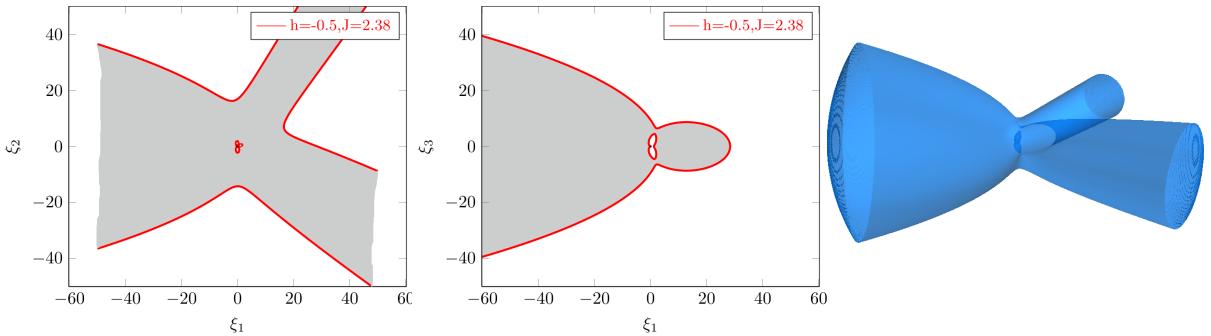


Рисунок 3.18 — Поверхность нулевой скорости при  $J = 2.38$  (справа) и ее сечения плоскостью экватора  $\xi_3 = 0$  (слева) и плоскостью меридиана  $\xi_2 = 0$   
 $(m_1 = 2m_2 = 4m_3 = 12/7)$

Внутренняя поверхность похожа на поверхность 3.14, отсутствует только симметрия при повороте на  $2\pi/3$ , оси «воронок» направлены по лучам двойных соударений, а максимальные расстояния в плоскости экватора соответствуют

особым точкам, для этих точек вычисления также просты, основная трудность получения значений для эйлеровых точек в том, что требуется вычислить корень полинома пятой степени (1.18). Получить корень полинома численно не составляет труда, но замкнутых выражений, как для лагранжевых точек, получить не удастся; если направление известно, т.е. корень численно получен, то расстояние  $\rho$  определяется из решения квадратного уравнения, как это и делалось для случая равных масс или в случае лагранжевых точек.

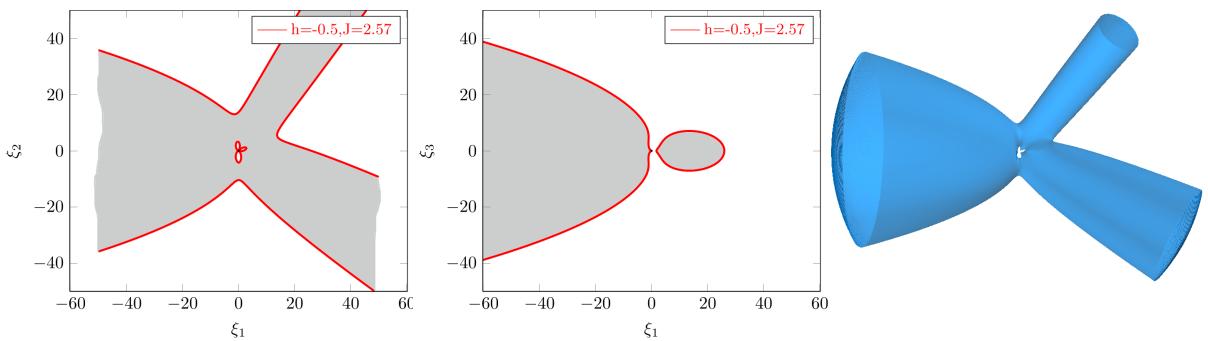


Рисунок 3.19 — Поверхность нулевой скорости при  $J = 2.57$  (справа) и ее сечения плоскостью экватора  $\xi_3 = 0$  (слева) и плоскостью меридиана  $\xi_2 = 0$   
 $(m_1 = 2m_2 = 4m_3 = 12/7)$

На рис. 3.18 изображена область возможного движения для значения  $J$ , при котором эта область ограничена двумя поверхностями. Внутренняя поверхность компактна и топологических такая же как поверхность 3.14. Внешняя, как и в случае равных масс, – с тремя рукавами, оси этих рукавов совпадают с соответствующими лучами двойных соударений: ось самого большого рукава направлена вдоль луча двойных соударений наибольших масс, самая маленькая – вдоль луча двойных соударений наименьших масс, а средняя – вдоль луча двойных соударений наибольшей и наименьшей масс. Движение возможно лишь между поверхностями.

Увеличим  $J$ , пусть  $J = 2.57 (> 3 \cdot 6^{3/2} / 7^{3/2})$ . Уравнение (3.22) не имеет решения, таким образом, лучи лагранжевых конфигураций (1.13) не пересекают поверхность нулевой скорости, что хорошо видно на рис. 3.19. Лучи лагранжевых конфигураций в случае неравных масс направлены не в полюса, поэтому, чтобы это было заметно и на сечении области возможного движения плоскостью мери-

диана, значение  $J$  выбрано достаточно большим (но таким, чтобы топологическая картина сохранялась).

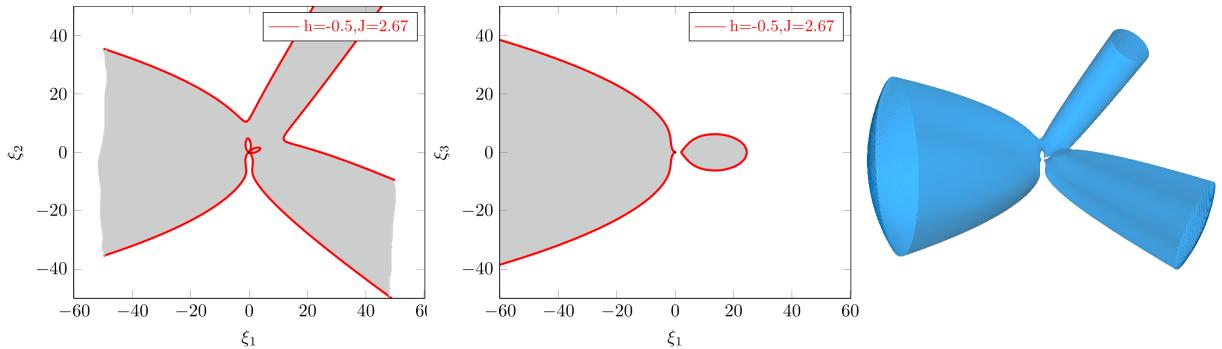


Рисунок 3.20 — Поверхность нулевой скорости при  $J = 2.67$  (справа) и ее сечения плоскостью экватора  $\xi_3 = 0$  (слева) и плоскостью меридиана  $\xi_2 = 0$   
 $(m_1 = 2m_2 = 4m_3 = 12/7)$

При дальнейшем увеличении  $J$  дырка увеличивается и при некотором значении  $J$  две ветви, ветвь, связанная с лучом соударения больших масс, и ветвь, с лучом соударения наибольшей и наименьшей масс, соприкасаются в общей точке; это точка коллинеарной конфигурации Эйлера  $L_1$ . Далее при больших  $J$  эти ветви перестают быть связанными, точка  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  из одной ветви может попасть в другую только через третью ветвь с лучом соударения наименьших масс. Этот тип поверхности нулевой скорости изображен на рис. 3.20.

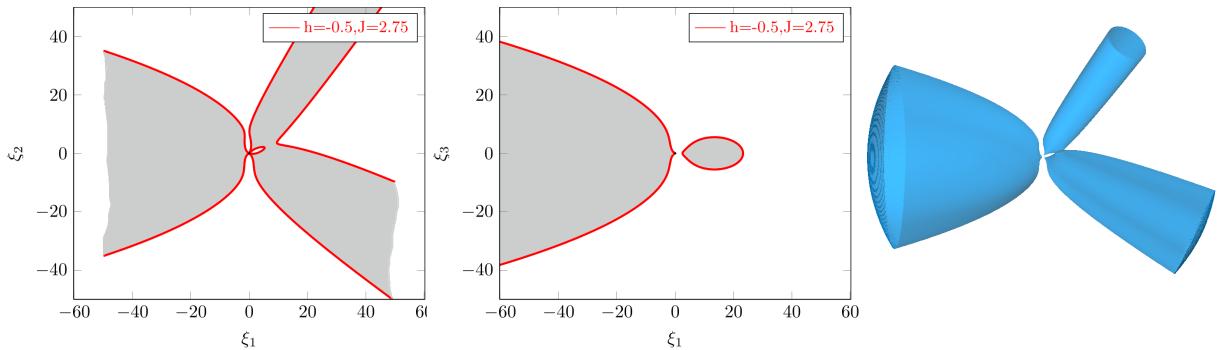


Рисунок 3.21 — Поверхность нулевой скорости при  $J = 2.75$  (справа) и ее сечения плоскостью экватора  $\xi_3 = 0$  (слева) и плоскостью меридиана  $\xi_2 = 0$   
 $(m_1 = 2m_2 = 4m_3 = 12/7)$

Если мы будем увеличивать  $J$  дальше, наступит момент, когда ветвь с наибольшими массами будет иметь только одну общую точку с ветвью наименьших масс. Эта точка отвечает коллинеарной конфигурации Эйлера  $L_2$ . При больших  $J$

ветвь наибольших масс перестает быть связанной с двумя другими, точка, находящаяся в этой ветви, не может попасть в другие и будет оставаться там всегда, хотя перемещение точки между двумя другими ветвями возможно (см. рис. 3.21).

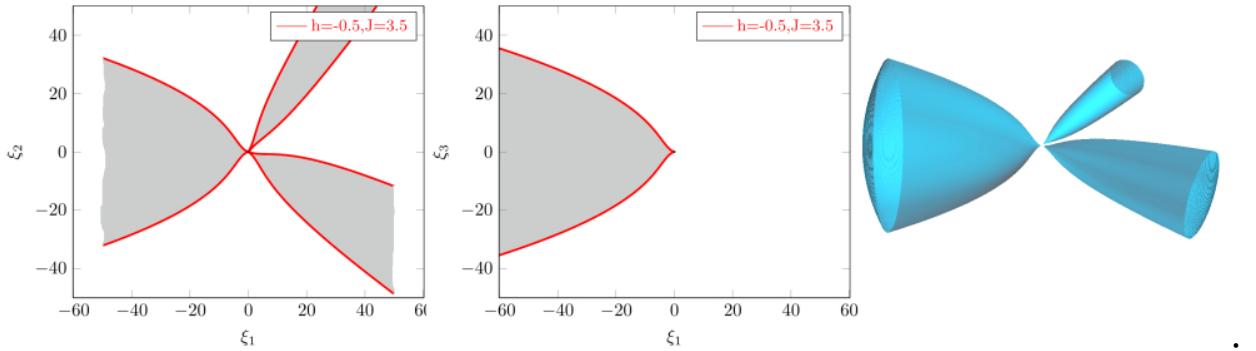


Рисунок 3.22 — Поверхность нулевой скорости при  $J = 3.5$  (справа) и ее сечения плоскостью экватора  $\xi_3 = 0$  (слева) и плоскостью меридиана  $\xi_2 = 0$   
 $(m_1 = 2m_2 = 4m_3 = 12/7)$

И, наконец, увеличивая  $J$  дальше, мы достигнем положения, когда две оставшиеся связанными ветви будут иметь только одну общую точку (последняя оставшаяся точка Эйлера  $L_3$ ), при больших значениях  $J$  мы получаем три не связанные ветви. Точка, находящаяся в одной из этих ветвей будет оставаться там всегда. (см. рис. 3.22).

Итак, если постоянная энергии отрицательна (например,  $h = -1/2$ ), то в зависимости от значения постоянной площадей  $J$  существует пять топологически различных областей возможного движения. Тип области зависит от значения  $J$  и изменяется при достижении  $J$  значений, соответствующих точкам Лагранжа  $L_{4,5}, L_3, L_2, L_1$ . Картина, аналогична приведенной на рис. 3.5 для круговой ограниченной задачи трех тел. Действительно, в последнем случае мы имеем три несвязанные области возможного движения, точно также как в первом случае на рис. 3.5. В предпоследнем случае – две несвязанные области (вторая область на рис. 3.5), а в третьем приведенном случае – одна. Заметим, что поверхности нулевой скорости в круговой ограниченной задаче строятся во врачающейся системе координат, а в нашем случае – в пространстве форм.

Можно попробовать построить область возможного движения не только в случае отрицательной энергии, например, при  $h = 0$  справедливо неравенство

$$\frac{J^2}{2\rho} \leq V(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

В случае равных масс на оси аппликат получим неравенство  $\xi_3 \geq J^2/6$ , а на оси абсцисс  $\xi_1 \geq J^2/(5\sqrt{2})$ . Для положительного значения  $h > 0$ , полагая  $h = 1/2$  в случае равных масс на оси аппликат справедливо неравенство  $\xi_3 \geq 9 + J^2 - 3$ , а на оси абсцисс  $\xi_1 \geq (\sqrt{25 + 2J^2} - 5)/\sqrt{2}$ . При неотрицательных значениях постоянной энергии область возможного движения ограничена только одной поверхностью, очень похожей на поверхность рис. 3.14, движение возможно вне этой поверхности.

Подводя итоги описанию областей возможного движения в общей задаче трех тел, еще раз подчеркнем, что в случае общей задачи трех тел существует пять топологически различных типов поверхностей нулевых скоростей, которые и отделяют области возможного движения от областей, где движение невозможно. Пять топологически различных типов поверхностей, поверхностей Хилла, хорошо известны и в ограниченной круговой задаче трех тел. Строятся поверхности Хилла не в инерциальной, а во вращающейся системе координат, и позволяют провести качественный анализ решений задачи. То же можно сказать и об общей (плоской) задаче трех тел, в этом случае мы строим поверхности нулевой скорости в пространстве форм, и построенные поверхности также позволяют нам качественно проанализировать имеющиеся решения, рассматривая тоже пять разных поверхностей.

## Глава 4. Регуляризация Леметра

Уравнения движения задачи  $N$  тел имеют особенности: если какое-нибудь из взаимных расстояний тел равняется нулю, т. е. происходит соударение, то правые части равны бесконечности. В случае трех тел соударения могут быть либо только между двумя телами (три разных соударения в зависимости от того какая пара сталкивается), либо столкновение всех трех тел. Последнее, кроме того, что происходит реже двойных соударений, обладает еще рядом интересных особенностей. Во-первых, по начальным условиям можно сразу определить, может ли вообще произойти тройное столкновение. Теорема Сундмана утверждает, что «полный коллапс системы не может произойти, если угловой момент системы не равен нулю». Более того, в этом случае размер системы отделен от нуля некоторой константой. За размер системы можно принять либо квадратный корень из момента инерции  $\sqrt{I} = \rho$ , либо наибольшее из взаимных расстояний, либо периметр треугольника. Во-вторых, заменой переменных можно избавиться от особенности двойных соударений, или *регуляризовать* уравнения задачи.

Понятие регуляризации (решений уравнений задачи  $N$  тел) появилось впервые у Сундмана. Как доказал Сундман двойные соударения, которые могут присутствовать в решении задачи трех тел, можно регуляризовать, т. е. продолжить решение за столкновение, введя новую независимую переменную  $u = \int_{t_0}^t \frac{dt}{r}$ . Именно так Сундман построил решение в виде сходящихся для  $-\infty < t < \infty$  рядов.

Примерно в то же время Леви-Чивита [33—37] разработал простой метод регуляризации, в котором производится замена как зависимых так и независимой переменных. Сначала это была регуляризация задачи двух тел, которая была распространена на ограниченную задачу трех тел, сначала на плоскую, а затем (через 50 лет!!!) и на пространственную задачу усилиями П. Кустаанхеймо, Э. Штифеля и других. Как оказалось, регуляризация не только позволяет продолжить решение за соударения, но и делает существенно эффективнее численное интегрирование траекторий, близких к соударениям.

Регуляризация Леви-Чивиты задачи двух тел состоит из двух замен переменных. Отождествим положение тела  $(x, y)$  с комплексным числом  $z = x + iy$ , Леви-Чивита определил новую зависимую переменную  $\zeta = z^2$ . Это преобразование можно просто объяснить, если рассмотреть предельный случай задачи двух тел при  $e \rightarrow 1$  (см. рис. 4.1).

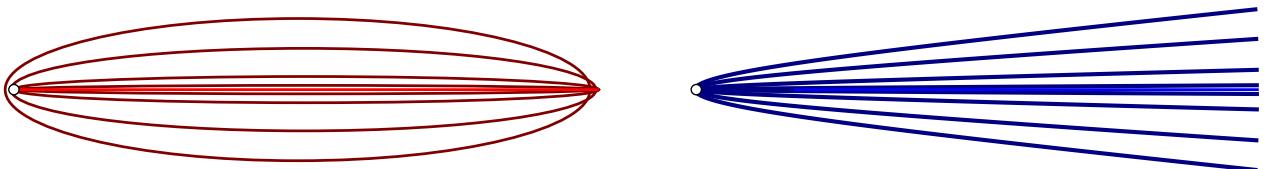


Рисунок 4.1 — Двойное соударение в момент  $t = 0$ , как предельный случай при  $e \rightarrow 1$ . Слева эллиптические траектории, справа – гиперболические

На рис. 4.1 видно, что в предельном случае траектория в точке соударения поворачивает на  $\pi$ , как бы отражается от второго тела (белая точка) и движется в противоположную сторону, таким образом мы имеем особенность решения, скорость тела до соударения стремится к  $\infty$ , а после соударения – от  $-\infty$  в обратном направлении. Эту особенность можно устранить простым способом: удвоив угол, в таком случае предельная траектория продолжится не изменяя направления, точнее оно изменится на  $2\pi$ . Леви-Чивита предложил простое преобразование

$$\zeta = z^2. \quad (4.1)$$

или, через вещественные координаты ( $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$ ,  $z = z_1 + iz_2$ )

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= z_1^2 - z_2^2 \\ \zeta_2 &= 2z_1z_2, \end{aligned}$$

и кстати, легко убедиться, что  $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = (z_1^2 + z_2^2)^2$ . Очевидно, что преобразование (4.1) удваивает в  $z = 0$  углы и рассматриваемая особенность устранена. Легко получить оценки:

$$\begin{aligned} r &\sim t^{2/3} \\ v &\sim t^{-1/3} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Остается еще особенность, при соударении становится бесконечно большой силовая функция задачи. Эта особенность устраняется введением новой зависимой

переменной  $\tau$  вместо  $t$ :

$$r d\tau = dt. \quad (4.3)$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{r} \frac{d}{d\tau} \quad \text{и} \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{r^3} \left( r \frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{dr}{d\tau} \frac{d}{d\tau} \right).$$

Подстановка в уравнения задачи двух тел новых зависимых и независимой переменных и замена квадрата скорости из интеграла площадей даст уравнения движения в этих новых переменных:

$$z'' + \omega^2 z = 0, \quad \omega = \sqrt{|h|/2}, \quad (4.4)$$

то есть уравнение математического маятника.

Такая простая регуляризация, распространенная на пространственный случай и на задачу трех и более тел, со времени Кустаанхеймо и Штифеля позволяет улучшить методы численного интегрирования задач небесной механики, сделать их более эффективными.

Для численных приложений достаточно регуляризовать задачу для каждого соударения поочередно в рамках задачи двух тел или ограниченной задачи трех тел. Для качественных исследований общей задачи трех тел этого недостаточно. Нужно регуляризовать все соударения задачи, т. е. требуется глобальная регуляризация, которая устраняет все двойные соударения сразу. Методы глобальной регуляризации разрабатывались Биркгофом, Тиле, Леметром, Вальдфогелем, Хегги и другими.

Наиболее интересным для данной работы является регуляризация Леметра. Собственно пространство форм (но не сам термин) в работах по небесной механике появилось еще в 1952 году в работах Леметра [30—32]. Леметр предложил метод глобальной регуляризации общей задачи трех тел, в котором основную роль играет конфигурация тел. Регуляризация Леметра плоской задачи трех тел позволяет ввести удобную (в вырожденных случаях коллинеарных и равнобедренных орбит простую) параметризацию, построить численно, например, коллинеарные орбиты и изучить их свойства. В пространстве форм размер и конфигурация разделены, размер определяется расстоянием до начала координат, а конфигурация — положением на сфере форм.

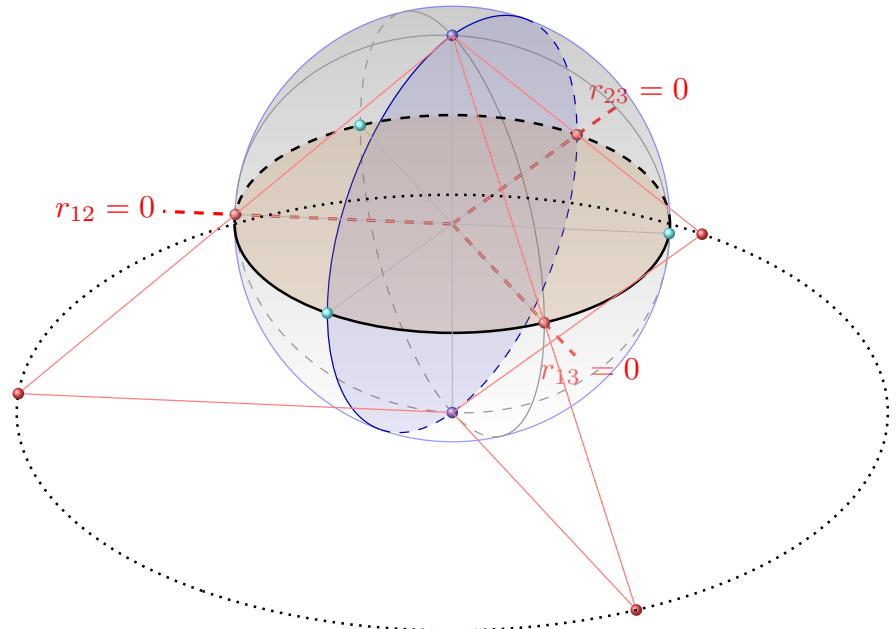


Рисунок 4.2 — Плоскость форм в случае равных масс

Формулы Леметра довольно громоздки, для простоты будем далее рассматривать случай трех равных масс. Качественно картина не изменится, к тому же, как об этом упоминается в 1.2, дробно-линейным преобразованием (1.12) можно поместить точки двойных соударений в такие точки для равных масс. Конфигурации двойных соударений определяются в случае равных масс лучами, проходящими через три точки сферы форм (радиуса 1/2):  $(-1/2, 0, 0)$ ,  $(1/4, -\sqrt{3}/4, 0)$ ,  $(1/4, \sqrt{3}/4, 0)$  или на плоскости форм  $-1, 1/2 - \sqrt{3}/2, 1/2 + \sqrt{3}/2$ .

Чтобы исключить особенности двойных соударений, достаточно применить преобразование только сферы форм, или, отождествляя сферу с комплексной плоскостью (например, с помощью стереографической проекции, рис. 4.2), преобразовать комплексную плоскость, будем называть ее *плоскостью форм*.

На рис. 4.2 проекция экватора сферы форм радиуса 1/2 есть единичная окружность. Точки двойных соударений проектируются на равноотстоящие точки этой окружности.

Преобразование Леметра имеет вид:

$$\zeta = z \frac{\sqrt{8} + z^3}{1 - \sqrt{8}z^3}, \quad (4.5)$$

здесь  $z$  — точка регуляризованной плоскости,  $\zeta$  — точка исходной плоскости (т. е. точка, соответствующая точке сферы форм).

Таблица 9 — Точки двойных соударений (особенности потенциальной функции  $V$ )

Соуд.	рег. расширенная плоскость $z$	$\zeta$
$C_{12}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$	-1
	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$	
$C_{13}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\sqrt{6}}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$
	$\frac{\sqrt{2}}{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\sqrt{6}}{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i$	
$C_{23}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\sqrt{6}}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$
	$\frac{\sqrt{2}}{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\sqrt{6}}{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i$	

Преобразование Леметра (4.5) это четырехлистное отображение, каждая точка сферы форм имеет четыре прообраза, исключая точки двойных соударений, где отображение двулистное.

Обратное преобразование задается следующим выражением

$$z_i = \pm \frac{\sqrt{\pm 2(\zeta+1)\sqrt{\zeta^2 - \zeta + 1} + 2\zeta^2 + \zeta - 1}}{\sqrt{2}} \mp \frac{\sqrt{\zeta^2 - \zeta + 1}}{\sqrt{2}} - \frac{\zeta}{\sqrt{2}} \quad (4.6)$$

Здесь знак второго слагаемого выбирается противоположным знаку первого слагаемого подкоренного выражения.

Исходные точки двойных соударений  $-1$ ,  $1/2 - \sqrt{3}/2 i$  и  $1/2 + \sqrt{3}/2 i$ . Каждая из них имеет два прообраза на регуляризованной плоскости, все эти точки приведены в табл. 9

В табл. 9 приведены прообразы точек двойных соударений при преобразовании Леметра.

Из (1.6) очевидно, что коллинеарные конфигурации (вырожденные треугольники) заполняют плоскость экватора. Для анализа коллинеарных орбит достаточно исследовать прообразы экватора, то есть единичной окружности исходной плоскости форм. Таким образом будем искать на регуляризованной сфере образы, которые дают:

$$|\zeta|^2 = \zeta \bar{\zeta} = 1.$$

Непосредственные вычисления приводят к уравнению

$$\begin{aligned} & \left( (x + \sqrt{2})^2 + y^2 - 3 \right) \\ & \left( (x - \sqrt{2}/2)^2 + (y - \sqrt{6}/2)^2 - 3 \right) \\ & \left( (x - \sqrt{2}/2)^2 + (y + \sqrt{6}/2)^2 - 3 \right) = 0 \end{aligned}$$

Итак, экватор имеет три прообраза – окружности радиуса  $\sqrt{3}$ , повернутые друг относительно друга на  $2\pi/3$ , они показаны на рис. 4.3:

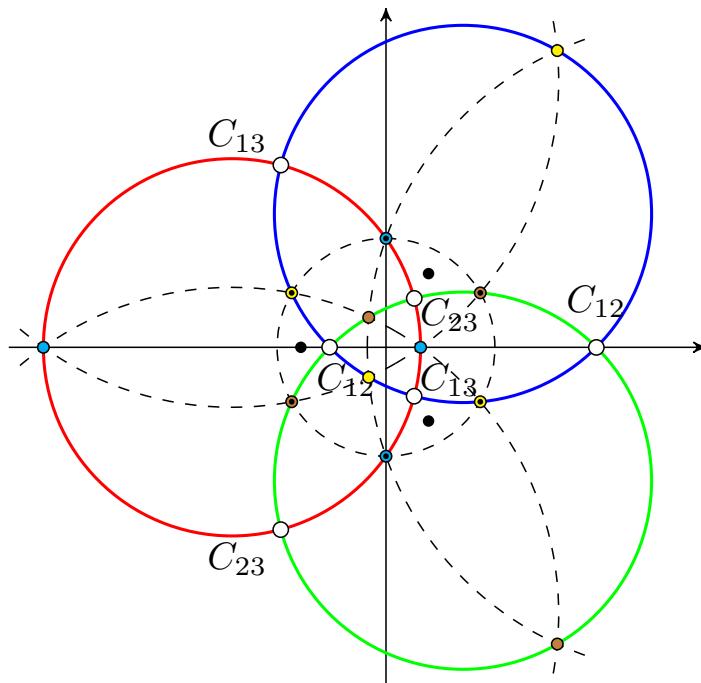


Рисунок 4.3 — Прообразы экватора на регуляризованной плоскости

Красная окружность соответствует коллинеарным конфигурациям, в которых тело 3 находится между телами 1 и 2, синяя окружность отвечает конфигурациям, в которых тело 1 находится между телами 2 и 3, и, наконец, зеленая окружность отвечает конфигурациям, где тело 2 находится между телами 1 и 3. На регуляризованной плоскости имеем шесть точек двойных соударений (отображение в точках соударения двулистное), которые изображаются белыми кружками. Это точки пересечения окружностей: красной и синей, две точки  $C_{13}$  красной и зеленой, две точки  $C_{23}$ ; синей и зеленой, две точки  $C_{12}$ . В остальных точках отображение четырехлистное и мы имеем, например, 12 эйлеровых точек, по 4 на каждой из окружностей: бирюзовые кружки на красной окружности, желтые на синей и коричневые на зеленой. Интересно, что эти 12 эйлеровых точек лежат на

4 окружностях, по 6 точек на каждой: на красной окружности 4 синие точки, на зеленой окружности 4 коричневые точки и на синей окружности 4 желтые точки, 6 из этих эйлеровых точек лежат также на единичной окружности, они помечены маленькими черными точками, эта окружность, а также части окружностей радиуса 3, на которых также находятся эйлеровы точки (по 6 на окружности) на рис. 4.3 изображены штриховой линией. На рисунке также изображены три черные точки, не лежащие на указанных окружностях, это неподвижные точки отображения Леметра (кроме нуля и бесконечно удаленной точки). Прообразы точки лагранжевой точки  $L_4$ : бесконечно-удаленная точка и три корня третьей степени из  $1/\sqrt{8}$ , а точки  $L_5$ : нуль и три корня третьей степени из  $-\sqrt{8}$  (и это центры наших окружностей, красной, синей и зеленой).

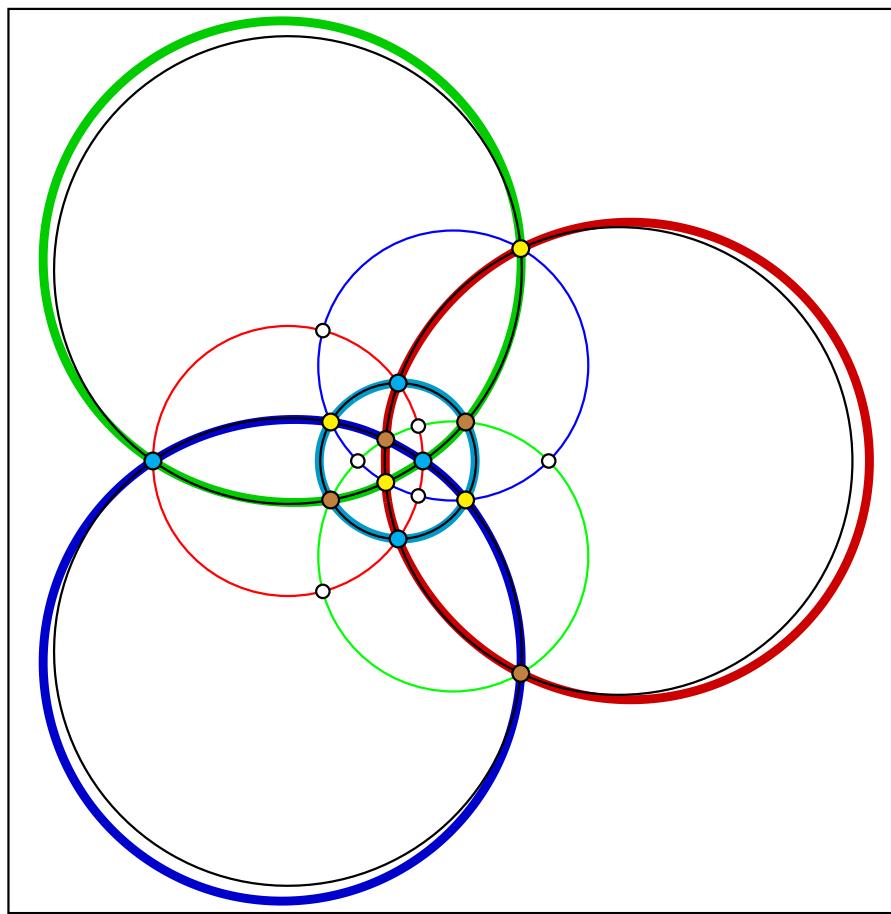


Рисунок 4.4 — Траектория-«восьмерка» на регуляризованной плоскости

Итак, на четырех штриховых окружностях 6 эйлеровых точек проходятся в следующем порядке:  $L_1, L_2, L_3, L_1, L_2, L_3$ . Именно в таком порядке проходятся эйлеровы точки на траектории орбиты-«восьмерки». На рис. 4.4 четыре прообраза «восьмерки» изображены толстыми линиями. Поскольку восьмерка за период

проходит эйлеровы точки шесть раз, по два раза каждую точку  $L_1, L_2, L_3$ . Эйлеровы точки, соответствующие образу орбиты, лежат на одной окружности, поэтому и образы орбиты близки к окружности, это хорошо видно на больших окружностях, где эти точки располагаются неравномерно, на единичной окружности эйлеровы точки располагаются равномерно и соответствующий прообраз орбиты «восьмерки» почти совпадает с единичной окружностью, поочередно то выходя за пределы, то оставаясь внутри окружности. Для сравнения на рисунки соответствующие окружности выводятся тонкими черными линиями.

В коллинеарном движении одно из тел всегда находится между двумя другими, в результате соударения оно как бы отражается от внешнего тела и начинает двигаться в противоположном направлении. В этом и состоит сингулярность решения. Рассмотрим, что же происходит в регуляризованной плоскости. Напомним, что согласно разделу 3.2 траектория соударений пересекает линию соударения ортогонально, то есть направление движения в точке соударения изменяется в результате на  $\pi$ , при регуляризации этот угол удваивается и таким образом направление движения при соударении не изменяется.

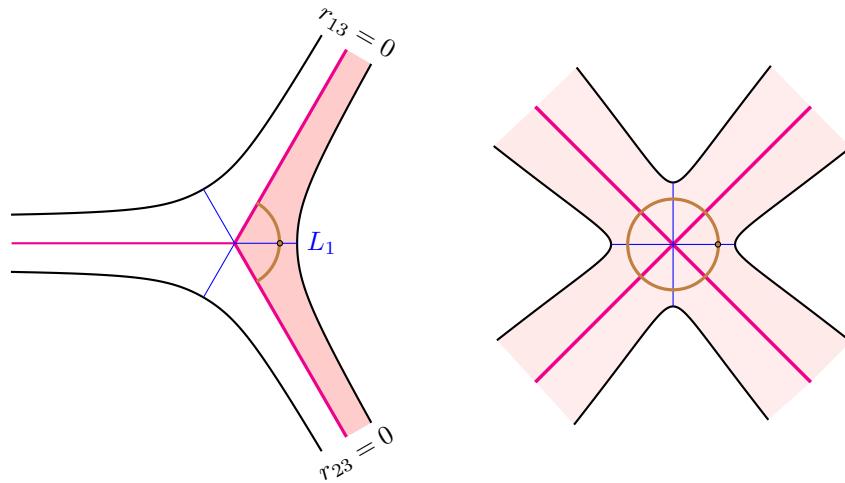


Рисунок 4.5 — Коллинеарная траектория в исходном и регуляризованном пространстве форм

На рис. 4.5 приведена траектория коллинеарной задачи в исходном пространстве форм и регуляризованном пространстве форм. Коллинеарные орбиты разделяются на три разных типа в зависимости от того, какое тело находится между двумя другими. Легко убедиться в том, что наши три прообраза экватора отвечают этим трем типам. Действительно, красная окружность на рис. 4.3

отвечает орбитам, на которых третье тело движется между первым и вторым, проходя через две точки соударений  $C_{13}$  и две точки  $C_{23}$ . Аналогичным свойством обладают и две другие окружности: синяя проходит через две точки  $C_{12}$  и две точки  $C_{13}$ , а зеленая через  $C_{12}$  и  $C_{23}$ . Поскольку преобразование Леметра касается только сферы форм, а от размера конфигурации это преобразование не зависит, мы можем изобразить траекторию в регуляризованной плоскости. Если регуляризованную плоскость форм преобразовать обратно на сферу форм, то красная, синяя и зеленая окружности преобразуются в большие круги на сфере форм. Наклон плоскостей этих больших кругов к основной плоскости (экватору) равен  $\arccos \sqrt{3}/3 \approx 54.7^\circ$ , и эти плоскости повернуты вокруг оси аппликат друг относительно друга на  $2\pi/3$ . Таким образом, для коллинеарных орбит мы можем нарисовать исходную ( $\xi_3 = 0$ ) и регуляризованную плоскости и траектории в них. Именно в этих плоскостях рисуются коллинеарные траектории, слева в пространстве  $\xi_1 \xi_2$ , справа в соответствующем регуляризованном пространстве.

Коллинеарная траектория на левом рисунке 4.5 подходит к линии соударения  $r_{13} = 0$  (или  $r_{23} = 0$ ) ортогонально и «отражается» от нее, в точке соударения направление скорости точки меняется на  $\pi$ . На правом рисунке точка ортогонально пересекает линию соударения. Области возможного движения ограничены кривой нулевой скорости. В нерегуляризованном случае область возможного движения ограничена также линиями соударения. Эти области выделены розовым цветом.

В двух других случаях, когда тело 1 находится в середине телами 2 и 3 (синяя окружность) или когда тело 2 находится между телами 1 и 3 (зеленая окружность), качественно картина останется такой же, в нерегуляризованном случае лишь повернется на  $2\pi/3$ .

## Глава 5. Вырожденные траектории

Существует целый ряд астрономических задач, где полезно применять вырожденные (коллинеарные или равнобедренные) орбиты, например, для описания движения трех сталкивающихся галактик или движения трех сталкивающихся черных дыр. Использование свойств равнобедренных решений и применение методов регуляризации к численному моделированию задачи трех тел (с учетом тесных сближений) существенно важно, если соответствующие орбиты устойчивы. Вырожденные орбиты задачи трех тел имеют меньшую размерность, и поэтому проще задач с большей размерностью. Тем не менее они позволяют изучать свойства общей задачи (в частности регуляризацию). Таким исследованиям посвящено много работ, в их числе [7; 42; 43; 58—62; 75; 77]. В этой главе рассматриваются вырожденные траектории в пространстве форм [84; 85].

### 5.1 Коллинеарные траектории

#### 5.1.1 Уравнения движения

В коллинеарном случае движение в пространстве форм происходит в плоскости  $\xi_3 = 0$  (и сферическая координата  $\theta = 0$ ) и постоянная углового момента равна нулю  $J = 0$ . Это сильно упрощает систему. Тогда кинетическая энергия равна:

$$T = \frac{\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2}{8\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}},$$

а если ввести полярные координаты

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \varrho^2 \cos \varphi, \\ \xi_2 &= \varrho^2 \sin \varphi, \\ \varrho^2 &= \rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

то кинетическая энергия примет вид

$$T = \frac{1}{2} \left( \dot{\varrho}^2 + \frac{1}{4} \varrho^2 \dot{\phi}^2 \right). \quad (5.2)$$

Без ущерба для общности ограничимся случаем, когда тело 3 находится между телом 1 и телом 2. Силовая функция ( $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ ) просто вычисляется, если принять во внимание, что в рассматриваемом случае  $-\pi/3 \leq \varphi \leq \pi/3$  и, так как конфигурация коллинеарная, то  $r_{12} = r_{13} + r_{23}$ . Тогда из выражения для силовой функции (1.15) получаем

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}} \\ &= \frac{1}{\varrho} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \cos(\varphi - \pi/3)}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \cos(\varphi - 5\pi/3)}} \right) \\ &= \frac{1}{\varrho} \frac{1 + 4 \cos \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi}(2 \cos \varphi - 1)} = \frac{D(\varphi)}{\varrho}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

и интеграл энергии

$$2h = \dot{\varrho}^2 + \frac{1}{4} \varrho^2 \dot{\phi}^2 - 2V = \dot{\varrho}^2 + \frac{1}{4} \varrho^2 \dot{\phi}^2 - 2 \frac{D(\varphi)}{\varrho}. \quad (5.4)$$

Область возможного движения в координатах  $\varrho, \varphi$ :

$$\frac{D(\varphi)}{\varrho} = \frac{1}{\varrho} \frac{1 + 4 \cos \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi}(2 \cos \varphi - 1)} \geq -h,$$

а кривая нулевой скорости (при  $h = -1/2$ ) задается уравнением

$$\varrho = \frac{2(1 + 4 \cos \theta)}{\sqrt{1 + \cos \theta}(2 \cos \theta - 1)}. \quad (5.5)$$

Зная лагранжиан  $L = T + V$ , можно записать и уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{\varrho} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{4} \varrho \dot{\phi}^2 - \frac{1}{\varrho^2} D(\varphi) = \frac{D(\varphi)}{\varrho^2} + \frac{h}{\varrho} - \frac{v^2}{\varrho}, \\ \dot{\phi} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= \frac{4}{\varrho^3} D_\varphi - \frac{2}{\varrho} v \omega. \end{aligned} \quad (5.6)$$

В интервале  $[-\pi/3, \pi/3]$  функция  $D(\varphi)$  имеет особенность при  $\varphi = \pm\pi/3$ . Из предыдущей главы мы знаем, как ее регуляризовать: с помощью преобразования

Леметра мы отражаем экватор пространства форм в (красную) окружность. При этом точки соударения  $C_{13}$  и  $C_{23}$  каждая отображается в пару точек на регуляризованной плоскости. Как видно из рис. 4.3 точки соударения (белые кружочки) располагаются на окружности-прообразе неравномерно, поэтому очевидная параметризация окружности  $(z + \sqrt{2})(\bar{z} + \sqrt{2}) - 3 = 0$  выражением

$$z = -\sqrt{2} + \sqrt{3} \cos \psi + i \sqrt{3} \sin \psi$$

приводит к излишне громоздким выражениям. Разместим с помощью дробно-линейного преобразования эйлеровы точки на красной окружности равномерно, при нашем преобразовании точки  $(\sqrt{3} - \sqrt{2}, 0), (0, 1), (-\sqrt{3} - \sqrt{2}, 0), (0, -1)$  переместятся в  $(\sqrt{3} - \sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3} - \sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ , т. е. будут лежать на этой же окружности в точках  $E = k\pi/2$ , а точки двойных соударений окажутся тоже в четырех точках:  $\pi/4 + k\pi/2, k = 0, 1, 2, 3, \dots$

В результате дробно-линейного преобразования получаем параметризацию выбранного прообраза экватора в регуляризованной плоскости:

$$z_E = \frac{\cos E}{\sqrt{3} + \sqrt{2} \cos E} + i \frac{\sqrt{3} \sin E}{\sqrt{3} + \sqrt{2} \cos E} \quad (5.7)$$

Если  $E$  изменяется от нуля до  $2\pi$ ,  $z$  пробегает всю (красную) окружность. Таким образом, в исходном пространстве сферические координаты  $(\varrho, \varphi)$  заменим на координаты  $\varrho, E$ .  $\varrho = \sqrt{\rho}$  выбрано просто, чтобы размерность этой координаты совпадала с длиной, координата  $\varrho$  не изменяется и в регуляризованном пространстве она та же, что и в исходном, а связь угловой координаты в исходном пространстве  $\varphi$  и угловой координатой в регуляризованном пространстве  $E$  получаем из преобразования Леметра (4.5)

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = z_E \frac{\sqrt{8} + z_E^3}{1 - \sqrt{8} z_E^3},$$

подставив сюда (5.7), получим:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{5 + \cos 4E}{7 - \cos 4E}, \\ \sin \varphi &= \frac{4\sqrt{3} \sin 2E}{7 - \cos 4E}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Отсюда нетрудно видеть, что минимальное значение  $\cos \varphi$  равно  $1/2$  и достигается при  $E = \pi/4 + k\pi/2$ , а максимальное значение,  $1$ , достигается при  $E = k\pi/2$ ; минимальное значение  $\sin \varphi$  принимает при  $E = \pi/4 + (2k+1)\pi/2$  и равно  $-\sqrt{3}/2$ , максимальное значение,  $\sqrt{3}/2$ , оно принимает при  $E = \pi/4 + k\pi$ . Таким образом,  $\varphi$  лежит в интервале  $[-\pi/3, \pi/3]$ .

*Замечание.* Преобразования (5.7) можно получить не из условия равномерности точек двойных соударений, а просто по аналогии с рассмотренными в начале главы 1 годографами скоростей.

Получим теперь необходимые выражения. Взаимные расстояния:

$$\begin{aligned} r_{12}^2 &= \varrho^2 \frac{12}{7 - \cos 4E}, \\ r_{13}^2 &= \varrho^2 \frac{3(1 + \sin 2E)^2}{7 - \cos 4E}, \\ r_{23}^2 &= \varrho^2 \frac{3(1 - \sin 2E)^2}{7 - \cos 4E}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

Как и должно быть  $r_{12} \neq 0$  (если  $\varrho \neq 0$ ), поскольку в рассматриваемом случае тело 3 находится между телами 1 и 2. Расстояния  $r_{23}$  и  $r_{13}$  поочередно становятся равными нулю при  $E = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ . С взаимными расстояниями (5.9) для потенциальной функции получим выражение

$$V = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{\varrho} \frac{\sqrt{7 - \cos 4E} (9 + \cos 4E)}{2\sqrt{3}(1 + \cos 4E)} = \frac{D(E)}{\varrho}, \quad (5.10)$$

которое имеет особенность в точках  $E = \pi/4 + k\pi/2$ , когда  $r_{13}$  или  $r_{23}$  равняются нулю.

Запишем теперь гамильтониан  $H = T - V$  в переменных  $\varrho, E$ . Необходимо выразить  $\dot{\varphi}$  через  $\dot{E}$ . Продифференцировав по  $t$  равенства (5.8), возведя их в квадрат и сложив, получим:

$$\dot{\varphi}^2 = 96\dot{E}^2 \frac{1 + \cos 4E}{(7 - \cos 4E)^2}.$$

Кинетическая энергия в переменных  $\varrho, E$ :

$$T = 1/2 \left( \dot{\varrho}^2 + 24\varrho^2 \frac{(1 + \cos 4E)\dot{E}^2}{(7 - \cos 4E)^2} \right). \quad (5.11)$$

С параметризацией (5.8) отсюда получаем выражения для сопряженных импульсов:

$$\begin{aligned} p_\varrho &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varrho}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varrho}} = \dot{\varrho}, \\ p_E &= \frac{\partial L}{\partial \dot{E}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{E}} = 24\varrho^2 \dot{E} \frac{1 + \cos 4E}{(7 - \cos 4E)^2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Наконец, гамильтониан записывается в виде (функция  $D$  определена в (5.10)):

$$H = 1/2 \left( p_\varrho^2 + \frac{(7 - \cos 4E)^2 p_E^2}{24\varrho^2(1 + \cos 4E)} \right) - V(\varrho, E)$$

функция  $V$  определена в (5.10), окончательное выражение для гамильтониана принимает вид

$$H = 1/2 \left( p_\varrho^2 + \frac{(7 - \cos 4E)^2 p_E^2}{24\varrho^2(1 + \cos 4E)} \right) - \frac{1}{\varrho} \frac{\sqrt{7 - \cos 4E} (9 + \cos 4E)}{2\sqrt{3}(1 + \cos 4E)} \quad (5.13)$$

Интеграл энергии  $H = h$  и область возможного движения в переменных  $\varrho$  и (регуляризованной)  $E$  определяется равенством  $V(\varrho, E) \geq -h$ . В силу симметрии масштаба мы можем фиксировать, например,  $h = -1/2$ , в этом случае:

$$\varrho \leq \frac{\sqrt{7 - \cos 4E} (9 + \cos 4E)}{\sqrt{3} (1 + \cos 4E)}. \quad (5.14)$$

Равенство определяет кривую нулевой скорости в регуляризованном пространстве, кривые нулевой скорости в пространстве  $\varrho, \varphi$  и в регуляризованном пространстве  $\varrho, E$  приведены на рис. 4.5.

Точки соударения  $E = \pi/4 + k\pi/2$  и гамильтониан  $H$  в этих точках имеет особенность. Мы исключим ее, выполнив вторую часть регуляризации, а именно, введем новую независимую переменную. Воспользуемся для этого известным приемом (смотри, например, [99]). Рассмотрим гамильтониан

$$H' = u(q) (H - h).$$

Если  $x(\tau)$  – решение задачи с таким гамильтонианом, то  $x(t)$  – решение задачи с исходным гамильтонианом  $H$  и значением постоянной энергии  $h$ , где  $d\tau/dt = u^{-1}(q)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{dq}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = u^{-1}(q) \frac{\partial H'}{\partial q} = u^{-1}(q) \frac{\partial u}{\partial q} (H - h) + \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial q}, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{dp}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = -u^{-1}(q) \frac{\partial H'}{\partial p} = -\frac{\partial H}{\partial p}, \end{aligned}$$

Таким образом, для поиска коллинеарных траекторий мы будем рассматривать гамильтониан

$$\begin{aligned} H' &= (1 + \cos 4E)(H - h) = \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos 4E)(p_\rho^2 - 2h) + \frac{(7 - \cos 4E)^2 p_E^2}{48\rho^2} - \frac{\sqrt{7 - \cos 4E}(9 + \cos 4E)}{2\sqrt{3}\rho}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

На линии соударения  $E = \pi/4 + k\pi/2$ :

$$p_E^2 = 2\sqrt{6}\varrho. \quad (5.16)$$

### 5.1.2 Свойства коллинеарных траекторий

Часть свойств уже были рассмотрены выше или являются следствием общих свойств:

1. В разделе 1.2 были определены конфигурации, которые могут оставаться неизменяемыми, в коллинеарном случае это эйлеровы конфигурации. Если в некоторый момент точка находится на эйлеровой прямой и  $\dot{\phi} = 0$  (в нерегуляризованном случае) или  $\dot{E} = 0$  (в регуляризованном), то решение гомотетическое.
2. В противном случае траектория должна пересекать и линии соударения, и линии эйлеровых конфигураций.
3. Траектории ортогональны линиям двойных соударений (см. раздел 3.2).
4. Соотношение (5.16) полностью определяет начальные условия на линии соударений по значению  $\varrho_0$ .
5. Траектории свободного падения (брейк-орбиты) и кривая нулевой скорости имеют только две общие точки. Это свойство является простым следствием обратимости уравнений Гамильтона во времени, если гамильтониан не зависит явно от времени.
6. Полуширина области возможного движения (в пространстве  $\varrho, E$ ) равна (ветвь с лучом двойных соударений  $E = \pi/4$ ):

$$w = \frac{\sqrt{7 - \cos 4E} (9 + \cos 4E)}{\sqrt{3}(1 + \cos 4E)} |\sin(E - \pi/4)| = \varrho |\sin(E - \pi/4)| \quad (5.17)$$

Если рассматривать кривые нулевой скорости в координатах  $\varrho, E$ , то на таком графике ветви кривых нулевой скорости будут иметь асимптоты, параллельные лучам двойных соударений.

Полуширина возможного движения (в нерегуляризованном пространстве  $\varrho, \varphi$ ) равна (ветвь с лучом двойных соударений  $\varphi = \pi/3$ ):

$$w = \frac{1 + 4 \cos(\varphi)}{\sqrt{1 + \cos \varphi} (2 \cos \varphi - 1)} |\sin(\varphi - \pi/3)|. \quad (5.18)$$

Кривые нулевых скоростей имеют асимптоты, параллельные лучам двойных соударений.

Эти свойства подтверждаются в результате анализа траекторий, полученных численно. Вот еще несколько таких свойств:

- Траектории свободного падения (брейк-орбиты) ортогональны кривой нулевой скорости.
- Максимум  $\varrho$  на линии соударения достигается вместе с максимумом  $r_E$ .
- Пересечение линий эйлеровских конфигураций происходит между сериями соответствующих соударений, состоящими по крайней мере из одного элемента.
- Ширина области возможного движения в нерегуляризованном пространстве стремится к постоянной величине при  $\varrho \rightarrow \infty$ .

### 5.1.3 Численные результаты

Будем решать уравнения движения в регуляризованном пространстве  $\varrho, E$  численно. Гамильтониан  $H'$  дает:

$$\begin{aligned}\dot{\varrho} &= \frac{\partial H'}{\partial p_\varrho} = (1 + \cos 4E)p_\varrho, \\ \dot{E} &= \frac{\partial H'}{\partial p_E} = \frac{(7 - \cos 4E)^2 p_E}{24\varrho^2}, \\ \dot{p}_\varrho &= -\frac{\partial H'}{\partial \varrho} = \frac{(7 - \cos 4E)^2 p_E^2}{24\varrho^3} - \frac{\sqrt{7 - \cos 4E}(9 + \cos 4E)}{2\sqrt{3}\varrho^2}, \\ \dot{p}_E &= -\frac{\partial H'}{\partial E} = 2\sin 4E(p_\varrho^2 - 2h) \\ &\quad - \frac{(7 - \cos 4E)\sin 4E p_E^2}{6\varrho^2} - \frac{(5 - 3\cos 4E)\sin 4E}{\sqrt{3}\sqrt{7 - \cos 4E}\varrho}.\end{aligned}\quad (5.19)$$

Интеграл энергии

$$\begin{aligned}\left(h - \frac{1}{2}p_\varrho^2\right)(1 + \cos 4E) &= \\ &= -\frac{\sqrt{7 - \cos 4E}(9 + \cos 4E)}{2\sqrt{3}\varrho} + \frac{(7 - \cos 4E)^2 p_E^2}{48\varrho^2}.\end{aligned}\quad (5.20)$$

Мы рассматриваем коллинеарные траектории (с  $h < 0$ ), следовательно, любая траектория пересекает (все) лучи двойных соударений. Будем задавать начальные условия на луче соударения  $E = \pi/4$ . По свойству 3 раздела 5.1.2  $p_{\varrho_0} = 0$ , а по свойству 4  $p_E = 2\sqrt{6}\varrho$ , таким образом задав на луче соударений только одну величину  $\varrho_0$ , мы получаем все начальные условия:  $\varrho_0$ ,  $E = \pi/4$ ,  $p_\varrho = 0$ ,  $p_E = 2\sqrt{6}\varrho$ . Таким образом, значение  $\varrho_0$  в момент  $t_0 (= 0)$  полностью определяют движение.

Выбирая начальные условия на любой другой прямой, кроме  $\varrho_0$  на этой прямой, мы должны задать еще одну величину, например,  $p_\varrho$ , оставшуюся величину,  $p_E$ , можно получить из интеграла энергии. Возьмем, например, прямую  $E = 0$ , для рассматриваемого здесь случая равных масс, это прямая эйлеровой конфигурации, орбиты Шубарта пересекают эту прямую ортогонально, т. е. можно принять  $p_\varrho = 0$  и из интеграла энергии получается неравенство

$$p_{E_0}^2 \leqslant \frac{4\varrho_0(5\sqrt{2} - 2\varrho_0)}{3}.$$

Итак, если орбита пересекает прямую  $E = 0$  ортогонально ( $p_\varrho = 0$ ), то максимальное значение квадрата импульса  $p_E$  на прямой  $E = 0$  равно  $25/3$ .

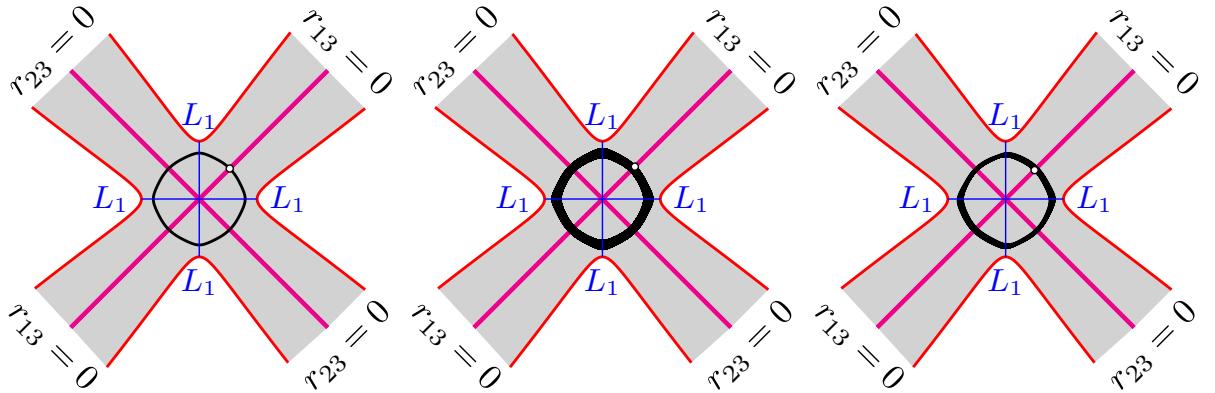


Рисунок 5.1 — Орбиты Шубарта:  $\varrho_0 = 2.63652337$  (слева), сто периодов орбиты с  $\varrho_0 = 2.8$  (в центре) и орбита с  $\varrho_0 = 2.5$  (справа).

Начнем с классической орбиты Шубарта, впервые полученной Шубартом в [61], но интерес к этой задаче сохраняется (смотри, например, [75]). Без ущерба для общности фиксируем значение постоянной энергии,  $h = -1$ ; траектории с другой (отрицательной) постоянной  $h$ ) получаются, если использовать симметрию масштаба (1.1). Будем задавать начальные условия на линии двойных соударений, например, на линии  $E = \pi/4$ , тогда по свойству 3 раздела 5.1.2  $p_{\varrho_0} = 0$ , а по свойству 4  $p_E = 2\sqrt{6}\varrho$ , таким образом, начальные условия полностью определены и, задав только значение  $\varrho_0$  можем численно интегрировать уравнения движения (5.19).

На рисунке 5.1 приведены три полученные траектории, похожие на орбиту Шубарта, начальные условия берутся на линии двойного соударения  $E = \pi/4$  с  $\varrho_0 = 2.63652337$  (слева),  $\varrho_0 = 2.8$  (в центре) и  $\varrho_0 = 2.5$  (справа).

Орбита Шубарта построена с начальным значением  $\varrho_0 = 2.63652337$  на линии соударений  $E = \pi/4$ . Орбита симметрична относительно эйлеровых лучей и лучей двойных соударений, поочередно пересекает линии соударения  $E = \pi/4$ ,  $E = 3\pi/4$ ,  $E = 5\pi/4$  и  $E = 7\pi/4$  (или в обратном порядке), а между пересечениями линий соударения один раз ортогонально пересекает эйлерову линию. Хотя интегрирование производилось на весь период, достаточно было интегрировать на  $1/8$  периода, продолжив орбиту по симметрии.

Если на луче соударений начальное значение  $\varrho$  находится в интервале  $\varrho_0 \in (2.4, 2.84)$ , то получаются орбиты, очень похожие на классическую орбиту Шубарта, причем эта орбита мало изменяется даже на больших промежутках, вторая ( $\varrho_0 = 2.8$ ) и третья ( $\varrho_0 = 2.5$ ) орбиты на рис. 5.1 интегрировались на 100 оборотов, форма орбит варьируется лишь немного, но на рисунках такие орбиты выглядят нарисованными жирной линией. Первая орбита на рис. 5.2 представляет один период орбиты с  $\varrho_0 = 2.42871$ ; видно, что форма орбиты такая же как у орбиты Шубарта, но симметрия относительно вертикальной оси нарушена.

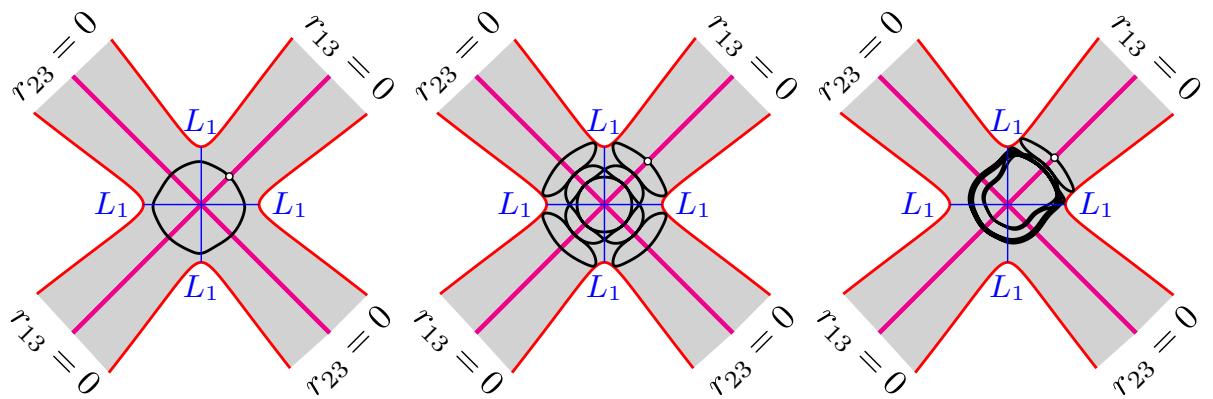


Рисунок 5.2 — Орбиты Шубарта:  $\varrho_0 = 2.42871$  (слева), симметричная периодическая орбита с  $\varrho_0 = 3.74532$  (в центре) и орбита с  $\varrho_0 = 4.04999$  (справа).

Заметим, что все орбиты типа Шубарта находятся в центральной части области возможного движения и не заходят в ветви этой области. Если же начальную точку взять в одной из ветвей области возможного движения, то можно найти периодическую орбиту, например с  $\varrho_0 = 3.74532$ , это вторая орбита на рис. 5.2.

Здесь необходимо сделать несколько замечаний: во-первых, орбита близко проходит к кривой нулевой скорости, так близко, что на рисунке может показаться, что орбита имеет с кривой нулевой скорости общие точки, это не так, кривые просто близки и, кроме того, согласно свойству 5 общих точек может быть только две, тогда как на рисунке таких «подозрительных» точек восемь; во-вторых, каждый из четырех лучей соударений траектория пересекает пять раз, один раз при заданном  $\varrho$  и еще четыре раза в точках, точнее в двух кажущихся совпадающими точках, такого тоже не может быть, иначе нарушается единственность решения дифференциальных уравнений, на самом деле эти пересечения столь близки, что рисунке они не различаются.

Орбита с  $\varrho_0 = 3.74532$ , пересекает лучи двойных соударений в следующих пяти точках:  $\varrho_0 = 3.74532$ ,  $\varrho_1 \approx \varrho'_1 \approx 2.59$  и  $\varrho_2 \approx \varrho'_2 \approx 1.70$ . Порядок пересечения орбитой лучей двойных соударений следующий:  $(\varrho_0, \pi/4)$ ,  $(\varrho_1, \pi/4)$ ,  $(\varrho_2, 7\pi/4)$ ,  $(\varrho'_2, 5\pi/4)$ ,  $(\varrho'_1, 3\pi/4)$ ,  $(\varrho_0, 3\pi/4)$ ,  $(\varrho_1, 3\pi/4)$ ,  $(\varrho_2, \pi/4)$ ,  $(\varrho'_2, 7\pi/4)$ ,  $(\varrho'_1, 5\pi/4)$ ,  $(\varrho_0, 5\pi/4)$ ,  $(\varrho_1, 5\pi/4)$ ,  $(\varrho_2, 3\pi/4)$ ,  $(\varrho'_2, \pi/4)$ ,  $(\varrho'_1, 7\pi/4)$ ,  $(\varrho_0, 7\pi/4)$ ,  $(\varrho_1, 7\pi/4)$ ,  $(\varrho_2, 5\pi/4)$ ,  $(\varrho'_2, 3\pi/4)$ ,  $(\varrho'_1, \pi/4)$ ,

Замечания, приведенные для предыдущей орбиты, относятся и к третьей орбите на рис. 5.2 – периодической орбите, по форме напоминающей колокольчик.

Выбор начальной точки на луче соударений позволяет варьировать только одну переменную,  $\varrho$ , это упрощает задачу выбора начальных условий. Во многих классических работах рассматривались брейк-орбиты, [9; 28; 39; 75] т. е. орбиты, имеющие общие точки с кривой нулевой скорости, и если начальные условия задавать на этой кривой, то значения скоростей уже определены, они равны нулю. Как известно таких точек может быть только две, таким образом, траектория соединяет эти точки, орбита периодическая, период равен удвоенному времени прохождения от одной точки до другой.

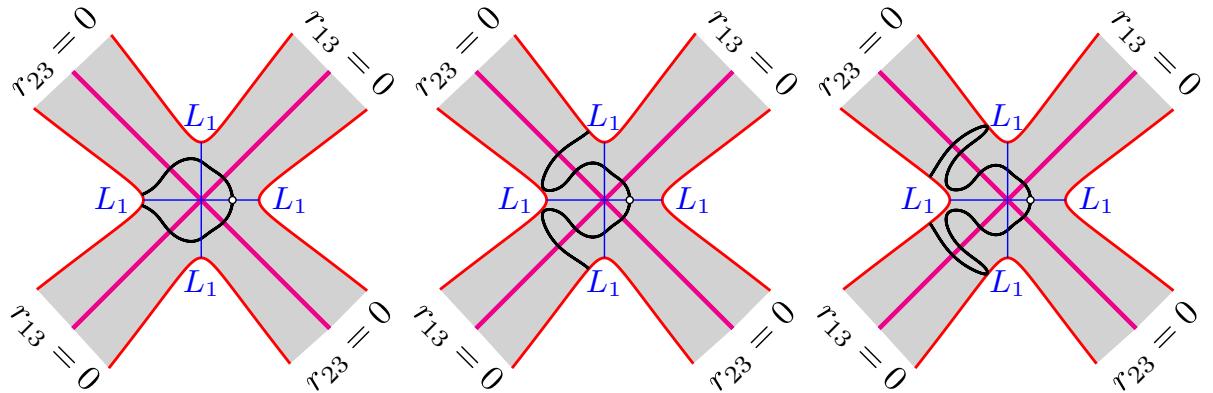


Рисунок 5.3 — Коллинеарные брейк-орбиты, начальная точка берется на луче  $E = 0$ :  $\varrho_0 = 1.910687$  (слева),  $\varrho_0 = 1.544146$  (в центре) и орбита с  $\varrho_0 = 1.395115$  (справа).

Четыре орбиты (три орбиты приведенные на рис. 5.3, четвертая на рис. 5.4 слева) являются брейк-орбитами, но начальные условия выбирались на эйлеровой линии со скоростью, перпендикулярной этой линии. Орбиты симметричны относительно эйлеровой линии. Первая орбита похожа на орбиту Шубарта, но в

отличие от орбиты Шубарта она не замкнута, или, можно сказать, она «замыкается» на кривую нулевой скорости. На лучах соударений  $E = \pm\pi/4$  значение  $\varrho \approx 1.91$ , а на лучах  $E = \pm 3\pi/4$   $\varrho \approx 2.71$ .

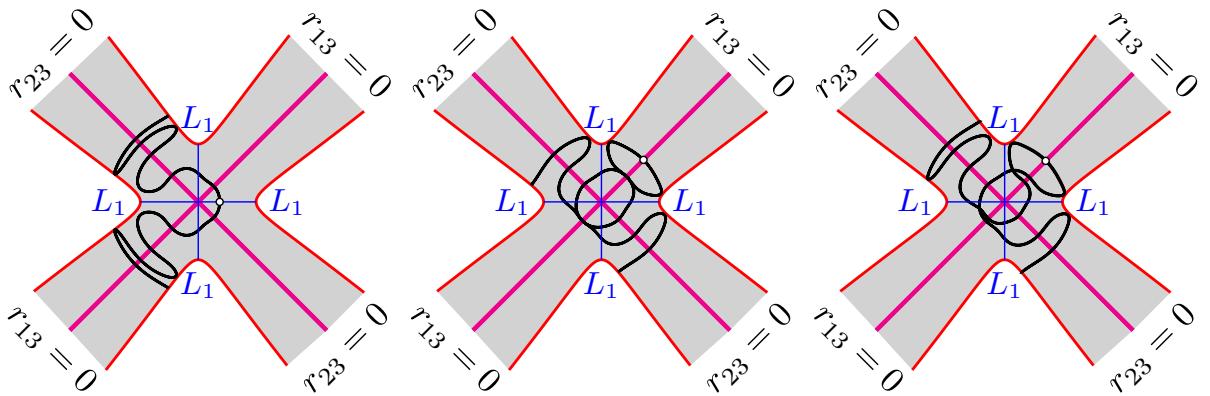


Рисунок 5.4 — Коллинеарные брейк-орбиты, начальная точка первой орбиты на луче  $E = 0$ :  $\varrho_0 = 1.310462$  (слева), начальная точка двух следующих орбит — на луче двойных соударений  $E = \pi/4$ :  $\varrho_0 = 3.632104$  (в центре) и орбита с  $\varrho_0 = 3.545146$  (справа).

Приведенные выше замечания разумеется относятся и к брейк-орбитам, поэтому касания орбит кривых нулевой скорости на самом деле таковыми кажутся, орбиты в соответствующих точках лишь очень близки к кривой нулевой скорости, орбиты с  $\varrho_0 = 3.632104$  на рис. 5.4 самопересечения на лучах  $E = \pi/4$  и  $E = 5\pi/4$  тоже кажущееся, точнее оно имеет место не на лучах соударений. Структура таких пересечений хорошо видна на орбите с  $\varrho_0 = 3.545146$ , пересечение с лучом  $E = \pi/4$  (и  $E = 5\pi/4$ ) происходит в двух близких точках.

Заметим, что  $\varrho_0$  для орбит Шубарта находится в пределах  $(2.4, 2.6)$ , хотя и при этом условии могут получиться и орбиты другого типа, в том числе хаотические.

**Хаос.** Вспомним, что по свойствам 3 и 4 мы можем задавать на луче соударений только одну величину  $\varrho_0$ , тогда для остальных величин, определяющих орбиту, мы имеем  $E = \pi/4$ ,  $p_\varrho = 0$ ,  $p_E = 2\sqrt{6}\varrho$ . Таким образом, значение  $\varrho_0$  в момент  $t_0 (= 0)$  полностью определяют движение.

Пусть  $\mathfrak{T} = \{\varrho \mid 0 \leq \varrho < \infty\}$  — множество положительных вещественных значений, а  $\mathfrak{E} = \{(\varrho, p_E) \mid \varrho < \sqrt{5}/\sqrt{2}, p_E^2 \leq \frac{4\varrho(5\sqrt{2}-2\varrho)}{3}\}$ , определим отображение

$\mathfrak{g} : \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{E}$ . Отображение  $\mathfrak{g}$  переводит начальное условие на луче соударений  $E = \pi/4$  в начальное условие на  $E = 0$ . Множество  $\mathfrak{T}$  одномерно, множество  $\mathfrak{E}$  двумерно.

Отображение  $\mathfrak{T}$  переводит одномерное множество  $(0, \infty)$  в двумерное множество  $\mathfrak{E}$ . Некоторая аналогия с отображением Пеано, переводящим интервал  $[0, 1]$  в квадрат  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Все полученные орбиты выводятся на рисунки с точностью до 4-5 знаков после запятой. Такой точности достаточно, чтобы они выглядели замкнутыми (т. е. периодическими), но чтобы достичь такой точности, необходимо задать начальное значение  $\rho_0$  с большей точностью (до 8-9 или даже 11-12 цифр). Только при такой точности орбита возможно замкнется еще через один период. Небольшое изменение начального значения  $\rho_0$  приводит либо к орбите, которая переходит в иную ветвь области возможного движения, либо к «всюду» плотному заполнению этой области. На рисунке 5.5 показаны три орбиты, исходные данные которых (на луче  $E = \pi/4$ ) отличаются в пятом знаке после запятой:  $\rho_0 = 2.32427$  (слева),  $\rho_0 = 2.32428$  (в центре), и  $\rho_0 = 2.32433$  (справа).

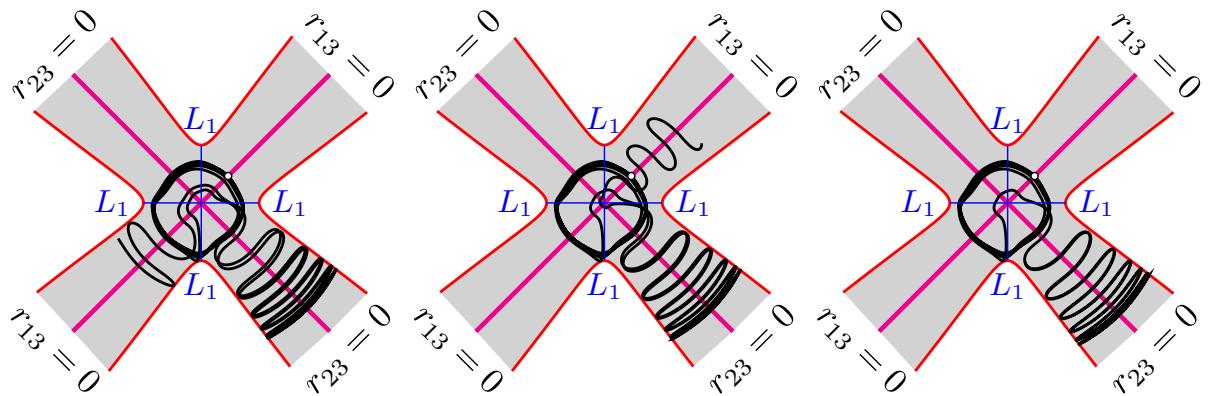


Рисунок 5.5 — Три коллинеарные орбиты, начальные значения  $\varrho_0$  (на луче  $E = 0$ ) отличаются в пятом знаке после запятой:  $\varrho_0 = 2.32427$ ,  $\varrho_0 = 2.32428$  и  $\varrho_0 = 2.32433$ .

Таким образом, небольшое изменение начальных условий приводит к существенно отличающимся орбитам.

Каждую орбиту можно отождествить со столкновениями, которые происходят на этой орбите. В таблице 10 для каждой орбиты приводятся:

1. начальное значение  $\varrho_0$  (на луче соударений или на луче эйлеровской конфигурации),
2. период (в единицах регуляризованного времени),
3. множество соударений  $\mathfrak{C}$  ( $a, b, c, d$  – лучи  $E = k\pi/4, k = 1 \dots 4$ )
4. множество соударений  $\mathfrak{C}_c$  (нерегуляризованная плоскость).

Таблица 10 — Порядок соударений в коллинеарных орбитах

	$\rho_0$	$T$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{C}_c$
1	2.63652	7.825149	$a-b-c-d$	2(1-2)
2	2.42871	7.836607	$a-b-c-d$	2(1-2)
3	3.74532	38.727258	$3(a)-d-c-3(b)-a-d-$ $-3(c)-b-a-3(d)-c-b$	2(3(1)-2-1-3(2)-1-2)
4	4.04999	49.128483	$2(a)-6(a-d-c-b)$	2(1)-12(1-2)
5	*1.91069	14.826108	$b-a-d-c:r$	2(2-1):r
6	*1.54415	24.526192	$2(b)-a-d-2(c):r$	2(2)-1-2-2(1):r
7	*1.39512	36.340492	$3(b)-a-d-3(c):r$	3(2)-1-2-3(1):r
8	*1.31046	49.673768	$4(b)-a-d-4(c):r$	4(2)-1-2-4(1):r
9	3.63210	43.822858	$2(b)-c-d-3(a)-b-c-2(d):r$	2(2)-1-2-3(1)-2-1-2(2):r
10	3.54515	49.815710	$3(b)-c-d-3(a)-b-c-2(d):r$	3(2)-1-2-3(1)-2-1-2(2):r

В этой таблице орбиты 5-10 являются орбитами свободного падения, они обозначены символом «:r». Для таких орбит последовательность соударений показана только для первой половины периода, вторую половину эта последовательность проходится в обратном порядке.

Начальное значение  $\rho_0$  берется либо на луче соударений  $E = \pi/4$ , либо на луче  $E = 0$ . В последнем случае рассматриваются только симметричные орбиты для  $p_{\rho_0} = 0$ ; и такие орбиты помечаются символом «\*». Повторяющиеся фрагменты последовательностей заключены в круглые скобки, а количество повторений указано перед открывающей круглой скобкой.

Последовательности определяют тип орбиты. По аналогии с задачей Ситникова мы можем предположить, что эти последовательности могут иметь произвольную конечную длину и состоять из произвольных допустимых переходов.

Обратите внимание, что после пересечения луча  $a$  может быть пересечение с лучом  $b$  или  $d$ , но не может быть пересечения с  $c$ . Отображение  $\mathfrak{g}$  дает первый шаг в построении сечения Пуанкаре плоскостью  $(\rho, p_E)$ ; и, таким образом, точки  $(0, \infty)$  луча  $E = \pi/4$  отображаются на эту плоскость, далее происходит одно или несколько соударений (т. е. пересечений лучей соударений, после чего снова пересекается луч эйлеровой конфигурации  $(E = k\pi/2)$ , т. е. множество размерности 1 сопоставляется с множеством размерности 2, некоторый аналог отображения Пеано).

Таким образом, и существенная зависимость от начальных условий, и размерность области начальных условий показывают хаотический характер коллинеарных движений в общей задаче трех тел.

## 5.2 Равнобедренные траектории

В предыдущей разделе рассматривались коллинеарные орбиты задачи трех тел. Подходящая параметризация задачи в регуляризованном по Леметру пространстве форм позволила нам получить ряд орбит и проанализировать их свойства. Применим тот же подход к равнобедренным орбитам.

Если две массы в основании треугольника  $m_1$  и  $m_2$  равны, а третья в вершине  $m_3$  произвольна, то выбор начальных условий с подходящей симметрией, будет оставлять такую равнобедренную конфигурацию сохраняющейся в любой момент времени [108].

Равнобедренные решения задачи трех телах изучались Бруком [4], Симо и Мартинес [66] и другими. Очевидно, что если исключить случай тройных столкновений, то возможны только столкновения тел, находящихся в основании равнобедренного треугольника. Этот случай даже проще, чем в коллинеарном движении, когда среднее тело сталкивается то с одним, то с другим крайним телом. Как и в предыдущей случае, будем использовать регуляризацию Леметра [31].

### 5.2.1 Уравнения движения

В равнобедренной задаче движение происходит в меридиане  $\varphi = 0$  (если тело  $m_3$  находится в вершине равнобедренного треугольника), а две равные массы,  $m_1$  и  $m_2$  – в основании треугольника. Для простоты, как и раньше, будем считать все массы равными, хотя в данном случае это не обязательно, достаточно равенства масс в основании.

В равнобедренном случае движение в пространстве форм происходит в плоскости  $\xi_2 = 0$  ( $m_1 = m_2$ ) и сферическая координата  $\varphi = 0$ , а постоянная углового момента равна нулю  $J = 0$ . Тогда кинетическая энергия равна:

$$T = \frac{\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_3^2}{8\sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2}},$$

а если ввести полярные координаты

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \varrho^2 \cos \theta, \\ \xi_3 &= \varrho^2 \sin \theta,\end{aligned}\tag{5.21}$$

то кинетическая энергия примет вид

$$T = \frac{1}{2} \left( \dot{\varrho}^2 + \frac{1}{4} \varrho^2 \dot{\theta}^2 \right).\tag{5.22}$$

Заметим, что здесь, то есть для равнобедренного случая, угол  $\theta$  изменяется от 0 до  $2\pi$ . Выражение для силовой функции в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned}V &= 1/r_{12} + 2/r_{13} = \\ &= \frac{1}{\varrho} \left( \frac{1}{\sqrt{1+\cos\theta}} + \frac{2}{\sqrt{1-1/2\cos(\theta)}} \right) \\ &= \frac{1}{\varrho} \frac{2\sqrt{1+\cos\theta} + \sqrt{1-1/2\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}\sqrt{1-1/2\cos\theta}} = \frac{D(\theta)}{\varrho},\end{aligned}\tag{5.23}$$

а интеграл энергии:

$$2h = \dot{\varrho}^2 + \frac{1}{4} \varrho^2 \dot{\theta}^2 - 2V = \dot{\varrho}^2 + \frac{1}{4} \varrho^2 \dot{\theta}^2 - 2\frac{D(\theta)}{\varrho}.\tag{5.24}$$

Отсюда, получаем область возможного движения

$$\frac{D(\theta)}{\varrho} = \frac{1}{\varrho} \frac{2\sqrt{1+\cos\theta} + \sqrt{1-1/2\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}\sqrt{1-1/2\cos\theta}} \geq -h.\tag{5.25}$$

Силовая функция имеет особенность при  $\theta = \pi$ . Эту особенность, как и в случае коллинеарных орбит, можно регуляризовать с помощью преобразования Леметра (4.5). Прообразом меридиана  $\xi_2 = 0$  является либо прямая  $\operatorname{Re} z = 0$ , либо окружность:

$$\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\bar{z} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} \quad (5.26)$$

Таким образом, в регуляризованном пространстве прообразом меридиана сферы форм, который отвечает равнобедренному движению, является красная окружность на рис. 5.6, точки на этой окружности, также как и точки меридиана отвечают конфигурациям, в которых  $m_1$  и  $m_2$  находятся на в основании треугольника; меридиан естественно пересекает экватор в двух точках и это эйлеровы точки. Синяя и зеленая окружности соответствуют меридианам, отвечающим равнобедренной конфигурации, в которых в основании треугольника находятся точки  $m_1$  и  $m_3$  (зеленая окружность) и  $m_2$  и  $m_3$ . Точки соударений отмечены белыми, а эйлеровы точки бирюзовыми, желтыми и коричневыми кружками, как и на рис. 4.3. Разумеется и точки соударения и эйлеровы точки на рисунках 4.3 и 5.6 совпадают. Образы меридиана повернуты относительно образов экватора на  $\pi$ , а радиусы соответствующих окружностей равны  $\sqrt{3/2}$ . На каждой окружности две точки двойных соударений (одной и той же пары тел в основании треугольника), и две эйлеровы точки (тело в вершине находится посередине между телами в основании треугольника).

Выберем, подобно тому как мы делали это в коллинеарном случае (5.7), параметризацию (красной) окружности так, чтобы точки соударения и эйлеровы точки, находящиеся на ней, располагались равномерно. В рассматриваемом случае получаем следующую параметризацию:

$$z_E = \frac{\sqrt{2} \cos E}{\sqrt{3} - \cos E} + i \frac{\sqrt{3} \sin E}{\sqrt{3} - \cos E}. \quad (5.27)$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z_E &= \frac{3 \cos 2E + 4\sqrt{3} \cos E - 3}{3 \cos 2E - 4\sqrt{3} \cos E - 3}, \\ \operatorname{Im} z_E &= 0, \end{aligned} \quad (5.28)$$

что совершенно естественно, поскольку мы рассматриваем прообраз меридиана  $\xi_2 = 0$ , однако в плоскости меридиана мы имеем полярные координаты (5.21),

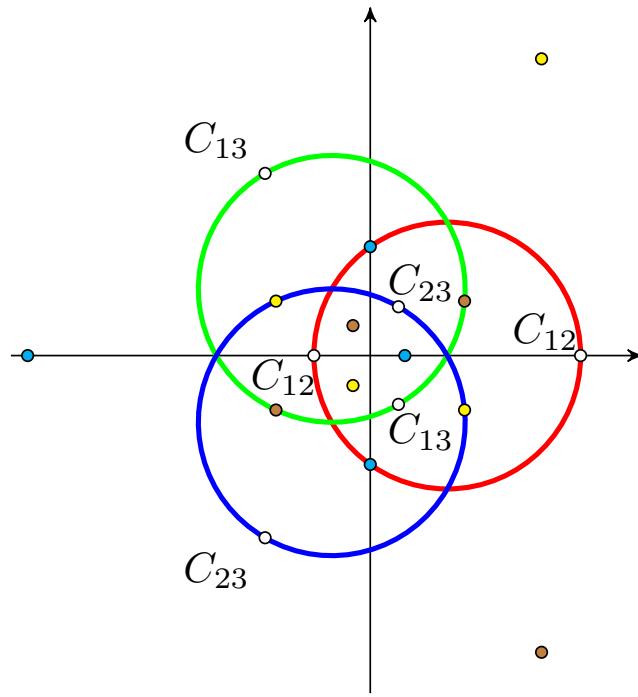


Рисунок 5.6 — Прообразы меридианов на регуляризованной плоскости

поэтому

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{2\operatorname{Re} z_E}{1 + (\operatorname{Re} z_E)^2} = \frac{(\cos 2E - 5)(1 + 3 \cos 2E)}{3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11}, \\ \sin \theta &= \frac{(\operatorname{Re} z_E)^2 - 1}{1 + (\operatorname{Re} z_E)^2} = \frac{-8\sqrt{3} \sin E \sin 2E}{3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11},\end{aligned}\quad (5.29)$$

и взаимные расстояния:

$$\begin{aligned}r_{12} &= \varrho \frac{\sqrt{6}(1 - \cos 2E)}{\sqrt{3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11}}, \\ r_{13} = r_{23} &= \varrho \frac{\sqrt{3}(3 + \cos 2E)}{\sqrt{2(3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11)}}.\end{aligned}\quad (5.30)$$

С этими взаимными расстояниями получим для силовой функции выражение

$$V = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{\varrho} \frac{\sqrt{3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11} (7 - 3 \cos 2E)}{\sqrt{6}(1 - \cos 2E)(3 + \cos 2E)} = \frac{D(E)}{\varrho}, \quad (5.31)$$

которое имеет особенность в точках  $E = k\pi$ , когда  $r_{12}$  равняется нулю.

Запишем теперь гамильтониан  $H = T - V$  для равнобедренной задачи в переменных  $\varrho, E$ . Необходимо выразить  $\dot{\theta}$  через  $\dot{E}$ . Продифференцировав по  $t$  равенства (5.29), возведя их в квадрат и сложив, получим:

$$\dot{\theta}^2 = 96\dot{E}^2 \frac{(1 - \cos 2E)(3 + \cos 2E)^2}{\sqrt{3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11}}$$

Кинетическая энергия равнобедренной задачи в переменных  $\varrho, E$ :

$$T = 1/2 \left( \dot{\varrho}^2 + 24\varrho^2 \dot{E}^2 \frac{(1 - \cos 2E)(3 + \cos 3E)^2}{(3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11)^2} \right), \quad (5.32)$$

С параметризацией (5.27) отсюда получаем выражения для сопряженных импульсов:

$$\begin{aligned} p_\varrho &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varrho}} = \dot{\varrho}, \\ p_E &= \frac{\partial T}{\partial \dot{E}} = 24\varrho^2 \dot{E} \frac{(1 - \cos 2E)(3 + \cos 3E)^2}{(3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11)^2}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

И, наконец, гамильтониан записывается в виде:

$$H = 1/2 \left( p_\varrho^2 + \frac{(3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11)^2 p_E^2}{24\varrho^2 (1 - \cos 2E)(3 + \cos 2E)^2} \right) - V(\varrho, E)$$

Функция  $V$  в равнобедренном случае определена в (5.31) и окончательное выражение для гамильтониана равнобедренной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} H = 1/2 \left( p_\varrho^2 + \frac{(3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11)^2 p_E^2}{24\varrho^2 (1 - \cos 2E)(3 + \cos 2E)^2} \right) \\ - \frac{1}{\varrho} \frac{\sqrt{3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11} (7 - 3 \cos 2E)}{\sqrt{6} (1 - \cos 2E)(3 + \cos 2E)}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

Интеграл энергии  $H = h$  и область возможного движения в переменных  $\varrho$  и (регуляризованной)  $E$  определяется равенством  $V(\varrho, E) \geq -h$ . При  $h = -1$  имеем

$$\varrho \leq \frac{\sqrt{3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11} (7 - 3 \cos 2E)}{\sqrt{6} (1 - \cos 2E)(3 + \cos 2E)}, \quad (5.35)$$

Равенство определяет кривую нулевой скорости в регуляризованном пространстве. Область возможного движения в регуляризованной плоскости  $(\varrho, E)$  ограничена только кривой нулевой скорости, которая в этом случае состоит из двух ветвей. Эйлеровы точки соответствуют  $E = \pm\pi/2$ , ближайшая к началу координат точка кривой достигается при  $E = k\pi \pm \arccos(1/3)$

Точки соударения  $E = k\pi$ , гамильтониан  $H$  в этих точках имеет особенность. Как и в коллинеарном случае мы исключим ее, выполнив вторую часть

регуляризации, а именно, введем новый гамильтониан

$$\begin{aligned} H' &= (1 - \cos 2E)(H - h) = \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2E)(p_\varrho^2 - 2h) + \frac{(3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11)^2 p_E^2}{24\varrho^2(3 + \cos 2E)^2} \\ &\quad - \frac{1}{\varrho} \frac{\sqrt{3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11} (7 - 3 \cos 2E)}{\sqrt{6}(3 + \cos 2E)}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

На линии соударения  $E = k\pi$ :

$$p_E^2 = 2\sqrt{6}\varrho. \quad (5.37)$$

### 5.2.2 Свойства равнобедренных траекторий

Часть свойств аналогичны уже рассмотренным в разделе 5.1.2.

1. В разделе 1.2 были определены конфигурации, которые могут оставаться неизменяемыми, в равнобедренном случае такая эйлерова конфигурация, если  $\dot{E} = 0$  (в нерегуляризованном случае  $\dot{\theta} = 0$ ) представляет гомотетическую конфигурацию, движение заканчивается тройным соударением.
2. В противном случае траектория должна пересекать и линии соударения, и эйлеровы линии.
3. Траектории ортогональны линиям двойных соударений (см. раздел 3.2), это свойство всех траекторий соударения, для коллинеарных траекторий оно уже упоминалось.
4. Соотношение (5.37) полностью определяет начальные условия на линии соударений по значению  $\varrho_0$ .
5. Траектории свободного падения (брейк-орбиты) и кривая нулевой скорости имеют только две общие точки.
6. Полуширина области возможного движения (в пространстве  $\varrho, E$ ) равна:

$$w = \frac{\sqrt{3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11} (7 - 3 \cos 2E)}{\sqrt{6}(1 - \cos 2E)(3 + \cos 2E)} |\sin E| = \varrho |\sin E| \quad (5.38)$$

7. Пересечение линий эйлеровских конфигураций происходит между се-  
риями соответствующих соударений, состоящими по крайней мере из  
одного элемента.

Величина  $\varrho_0$  в момент  $t_0$  полностью определяет наше движение, поскольку  $p_\varrho = 0$  (ортогональность),  $E = 0$  или  $\pi$  (в нерегуляризованном случае  $\theta = \pi$ ), а  $p_E$  определяется из свойства 4 по формуле (5.37). Выбирая начальные условия на любой другой прямой, мы должны были бы задать две величины, третья опре-  
делилась бы этой прямой, а четвертая – из интеграла энергии. Если мы выберем, например, прямую  $E = \pi/2$  (или  $3\pi/2$ ), т. е. эйлерову конфигурацию в случае равных масс  $m_1 = m_2$ , то, кроме  $\varrho_0$ , мы должны задать также  $p_\varrho$ . И, если орбита пересекает эйлерову линию ортогонально ( $p_\varrho = 0$ ), то из интеграла энергии имеем

$$p_E^2 \leq \frac{4\varrho(5\sqrt{2} - 2\varrho)}{3},$$

и максимальное значение  $p_E^2$  на луче  $\pi/2$  равно в этом случае  $25/3$ .

Аналогично случаю коллинеарных орбит мы можем определить отобра-  
жение  $\mathbf{g} : \{(0, \infty)\} \rightarrow \{0 < \varrho \leq 5/\sqrt{2}, p_E^2 \leq 4\varrho(5\sqrt{2} - 2\varrho)/3\}$ , переводящее одно-  
мерное множество  $\mathbb{R}^+$  в двумерное, что указывает на хаотический характер  
движения.

### 5.2.3 Численные результаты

Как и в случае коллинеарных орбит будем решать уравнения движения в регуляризованном пространстве  $\varrho, E$  численно. Гамильтониан  $H'$  дает (5.36):

$$\begin{aligned}\dot{\varrho} &= \frac{\partial H'}{\partial p_\varrho} = (1 - \cos 2E) p_\varrho, \\ \dot{E} &= \frac{\partial H'}{\partial p_E} = \frac{(3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11)^2 p_E}{24(3 + \cos 2E)^2 \varrho^2}, \\ \dot{p}_\varrho &= -\frac{\partial H'}{\partial \varrho} = \frac{(3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11)^2 p_E^2}{24(3 + \cos 2E)^2 \varrho^3} \\ &\quad - \frac{(7 - 3 \cos 2E) \sqrt{3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11}}{\sqrt{6}(3 + \cos 2E) \varrho^2}, \\ \dot{p}_E &= -\frac{\partial H'}{\partial E} = -\sin 2E(p_\varrho - 2h) + \\ &\quad \frac{(3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11)(3 \cos^2 2E + 18 \cos 2E - 5) \sin 2E p_E^2}{12(3 + \cos 2E)^3 \varrho^2} + \\ &\quad \frac{2(9 \cos^3 2E + 57 \cos^2 2E + 29 \cos 2E + 155) \sin 2E}{\sqrt{6}(3 + \cos 2E)^2 \sqrt{3 \cos^2 2E + 2 \cos 2E + 11} \varrho},\end{aligned}\tag{5.39}$$

и интеграл энергии (5.36).

Любая равнобедренная траектория с  $h < 0$  пересекает лучи двойных соударений. Будем задавать начальные условия на луче соударения  $E = 0$ . По свойству 3 предыдущего раздела  $p_{\varrho_0} = 0$ , а по свойству 4 (там же)  $p_E = 2\sqrt{6}\varrho$ , следовательно, задав на луче соударений только одну величину  $\varrho_0$ , мы получаем все начальные условия:  $\varrho_0, E = 0, p_\varrho = 0, p_E = 2\sqrt{6}\varrho$ . Таким образом, значение  $\varrho_0$  в момент  $t_0 (= 0)$  полностью определяют движение.

Если мы будем выбирать начальные условия на любой другой прямой, кроме  $\varrho_0$ , мы должны задать еще одну величину, например,  $p_\varrho$ , оставшуюся величину,  $p_E$ , можно получить из интеграла энергии. Возьмем, например для рассматриваемого здесь случая равных масс, прямую  $E = \pi/2$ , это прямая эйлеровой конфигурации, симметричные орбиты пересекают эту прямую ортогонально, т. е. можно принять  $p_\varrho = 0$  и из интеграла энергии получается равенство

$$2h - p_\varrho^2 = -\frac{5\sqrt{2}}{\varrho} + \frac{3p_E^2}{4\varrho^2}.$$

Итак, если орбита пересекает прямую  $E = \pi/2$  ортогонально ( $p_\varrho = 0$ ), то максимальное значение квадрата импульса  $p_E$  на прямой  $E = \pi/2$  равно  $5/\sqrt{-3h}$ .

Начнем с орбиты Брука, рассмотренной в [4; 77]. Как и в случае коллинеарных орбит без ущерба для общности фиксируем значение постоянной энергии,  $h = -1$ ; траектории с другой (отрицательной) постоянной  $h$  получаются, если использовать симметрию масштаба (1.1). Будем задавать начальные условия на луче двойных соударений, например, на луче  $E = 0$ , тогда по свойству 3  $p_{\varrho_0} = 0$ , а по свойству 4  $p_E = 2\sqrt{6}\varrho_0$ , таким образом, начальные условия полностью определены и, задав только значение  $\varrho_0$  можем численно интегрировать уравнения движения (5.39).

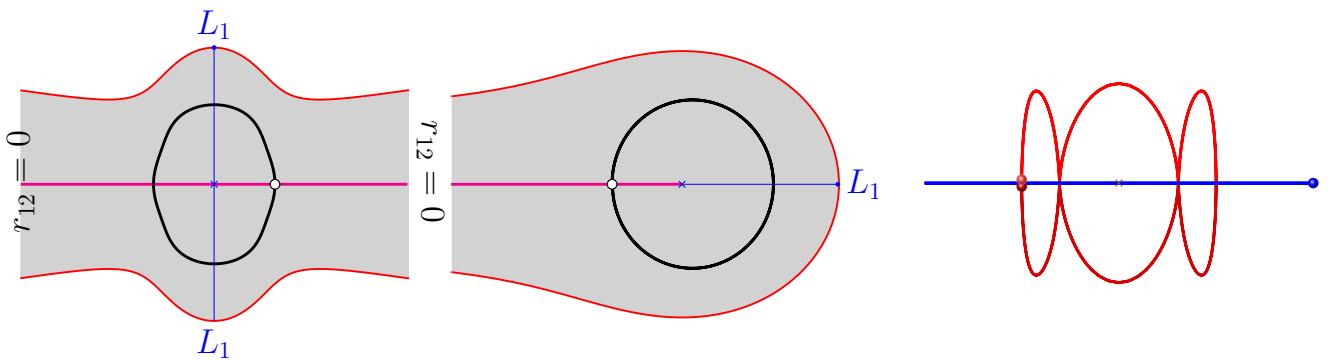


Рисунок 5.7 — Орбита Брука, слева на регуляризованной плоскости, в центре на нерегуляризованной, справа траектории всех точек на плоскости

На рисунке 5.7 приведена траектория, похожая на орбиту Брука, начальные условия берутся на линии двойного соударения  $E = 0$  с  $\varrho_0 = 1.57576$ : слева в регуляризованных координатах  $\varrho, E$ , в центре та же орбита в нерегуляризованных координатах  $\varrho, \theta$ , начальные точки отмечены белыми кружочками, линия соударения – малиновая прямая, эйлеровы конфигурации – синие прямые, область возможного движения выделена серым, а кривые нулевой скорости – красные; справа изображены траектории всех трех точек этой орбиты на плоскости  $(x, y)$ : синяя точка двигается вдоль горизонтальной прямой, две красные точки лежат в основании равнобедренного треугольника, начальное значение всех точек находится на прямой, чтобы разделить две красные точки, они изображены через небольшой промежуток времени после начала.

Увеличивая  $\varrho_0$ , орбиты, показанные на рис. 5.8–5.11.

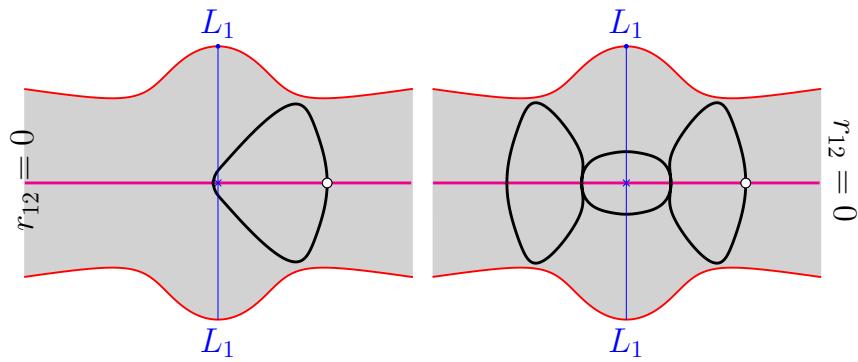


Рисунок 5.8 — Орбита с  $\varrho_0 = 2.82483$  (слева) и  $\varrho_0 = 3.08990$  (справа) на регуляризованной плоскости

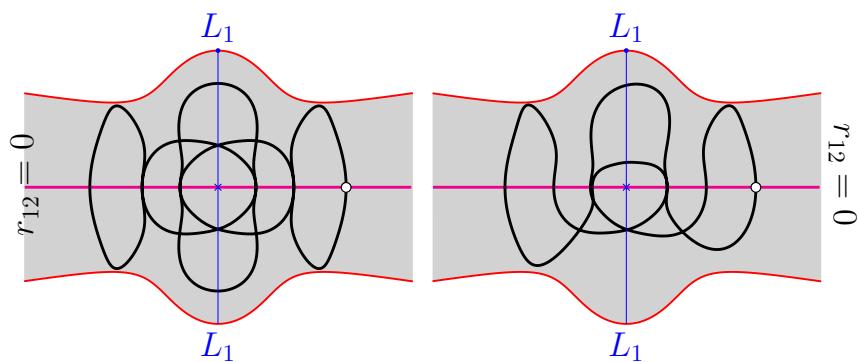


Рисунок 5.9 — Орбита с  $\varrho_0 = 3.31543$  (слева) и  $\varrho_0 = 3.35228$  (справа) на регуляризованной плоскости

Замечания, приведенные для коллинеарных орбит в разделе 5.1.3, остаются справедливыми и для равнобедренных орбит.

Начальные точки орбит на рис. 5.8–5.10 лежат на прямой двойных соударений, они отмечены белым кружком.

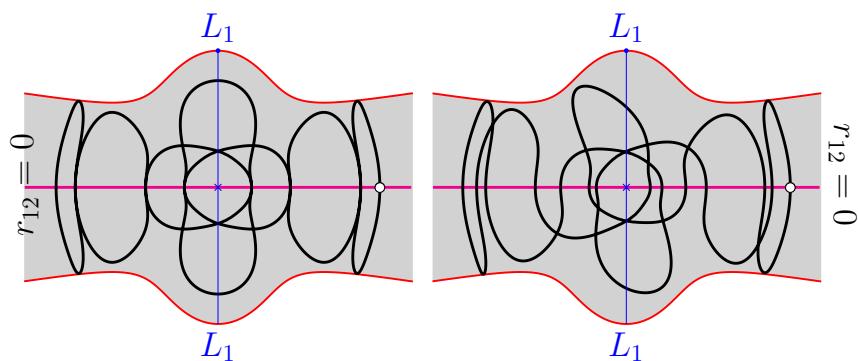


Рисунок 5.10 — Орбита с  $\varrho_0 = 4.18797$  (слева) и  $\varrho_0 = 4.24520$  (справа) на регуляризованной плоскости

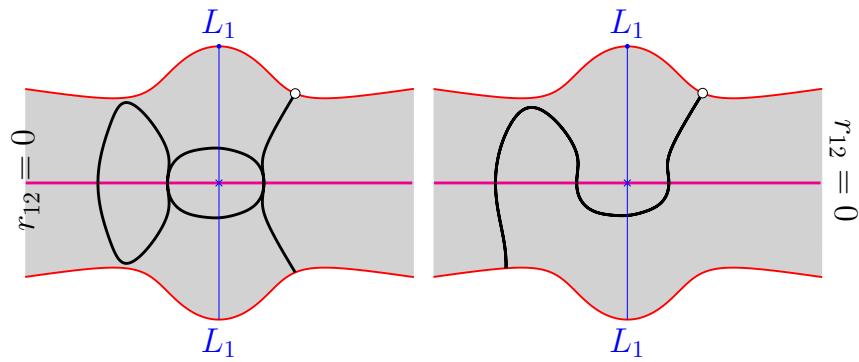


Рисунок 5.11 — Брейк-орбита  $E_0 = 0.864900$  (слева) и  $E_0 = 0.872985$  (справа) на регуляризованной плоскости

На последнем рисунке изображены две брейк-орбиты, начальная точка на кривой нулевой скорости отмечена белым кружком.

Таблица 11 — Порядок соударений в равнобедренных орбитах

	$\rho_0/E_0 (*)$	$T$	$\mathfrak{C}$
1	1.57576	9.49965	$a-b$
2	2.82483	12.22611	$a-b$
3	3.08990	33.84638	$2(a)-3(b)-a$
4	3.31543	55.74503	$2(a)-b-a-3(b)-a-b-(a)$
5	3.35228	42.28584	$2(a)-b-a-3(b)-a-b-(a)$
6	4.18797	94.03594	$3(a)-b-a-5(b)-a-b-3(a)$
7	4.24520	94.77880	$3(a)-b-a-5(b)-a-b-3(a)$
8	*0.86490	26.42871	$a-3(b)-a : r$
9	*0.87299	17.56025	$a-2(b) : r$

Четыре столбца таблицы 11 содержат ту же информацию, что и соответствующие столбцы таблицы 10. Заметим, что орбиты 4 и 5 и орбиты 6 и 7 имеют одинаковые множества соударений, а соответствующие пары орбит топологически похожи.

## Заключение

Представляя движения общей задачи трех тел в пространстве форм, мы используем интегралы движения, с самого начала с помощью соответствующих симметрий избавляемся от «лишних измерений», оставляя только конфигурацию задачи трех тел, их размер и форму. Таким образом, мы имеем трехмерное пространство конруэнтных треугольников, определяющих конфигурацию трех тел. Трехмерность этого пространства позволяет упростить анализ решений, и как минимум, просто визуализировать пространство решений. Зная решений задачи в пространстве форм, мы можем с помощью приведенной квадратуры найти и угол наклона этого треугольника к фиксированной оси, а, значит, восстановить положение нашего треугольника.

Изучение периодических орбит в пространстве форм позволяет сделать вывод, что, по крайней мере, некоторые из них имеют на сфере форм простой вид: траектории (топологически) являются окружностью в центре которой лежит либо особая точка  $C_i$ , либо эйлерова точка  $E_i$ . Однако восьмерка имеет совсем другой вид: траектория дважды обходит сферу форм по экватору, отклоняясь он экватори в ту или иную сторону, а на регуляризованной плоскости, соответствующей сфере форм, один из (четырех) образов восьмерки представляет собой единичную квази-окружность, так как проходит через шесть образов трех эйлеровых точек, лежащих на единичной окружности.

Пространство форм неожиданно позволяет построить поверхности нулевой скорости, и, значит, области возможного движения. Эта задача, построить поверхность нулевой скорости, ставилась и раньше, но в пространстве форм получается простое решение. К тому же получающуюся трехмерную поверхность мы можем просто представить себе. Оказывается, что у поверхностей нулевой скорости общей задачи трех тел есть много общего с поверхностями нулевой скорости круговой ограниченной задачи (поверхностями Хилла). И в том, и в другом случае поверхность зависит от одного параметра. Для круговой ограниченной задачи таким параметром является значение постоянной Якоби (энергии), для общей задачи постоянную энергию благодаря симметрии масштаба можно фиксировать, а

в качестве параметра выбрать постоянную площадей  $J$  (в задаче Хилла именно эта постоянная фиксируется выбором среднего движения  $n$  вращающейся системы координат). Как и в круговой ограниченной задаче в общей задаче трех тел существует пять топологически различных типа поверхности нулевой скорости. В порядке увеличения  $|J|$  сначала поверхность состоит из внешней, три ветви которой направлены вдоль трех лучей соударений, и внутренней, в случае  $J = 0$  это точка начала координат, далее внутренняя поверхность растет и в конце концов касается внешней поверхности (в точках  $L_{45}$ ), с дальнейшим ростом  $|J|$  в точках  $E_i$  отделяются поочередно отдельяются ветви, и наконец, все получаются три несвязные ветви.

Преобразование Леметра позволяет просто регуляризовать вырожденные орбиты. Используя приведенные параметризации мы регуляризуем гамильтониан, и решить уравнения движения, которые не имеют особенностей, численно. При этом свойства решений позволяют сделать вывод о хаотичности движении. Соответствующие орбиты приведены для коллинеарных и равнобедренных конфигураций.

Последовательное представление движения общей задачи трех тел в пространстве форм существенно облегчает анализ свойств движения задачи трех тел.

Автор благодарен всем сотрудникам кафедры небесной механики СПбГУ за поддержку и ту атмосферу, без которой эта работа вряд ли была выполнена. Особую благодарность хочется выразить К. В. Холшевникову, возглавлявшему кафедру в течение 50 лет, проявлявшим живой интерес, а порой и участие в работе, увы, ушедшему до ее завершения.

## Список литературы

1. *Albouy A., Chenciner A.* The problem of n bodies and mutual distances [Текст] // *Inventiones mathematicae*. — 1998. — Янв. — Т. 131. — С. 151—184.
2. *Barutello V., Ferrario D. L., Terracini S.* Symmetry groups of the planar 3-body problem and action-minimizing trajectories [Текст] // arXiv Mathematics e-prints. — 2004. — Апр. — math/0404514. — arXiv: math/0404514 [math.DS].
3. *Broucke R.* On relative periodic solutions of the planar general three-body problem. [Текст] // *Celestial Mechanics*. — 1975. — Авг. — Т. 12, № 3. — С. 303—313.
4. *Broucke R.* On the isosceles triangle configuration in the planar general three-body problem. [Текст] // *Astronomy and Astrophysics*. — 1979. — Март. — Т. 73, № 3. — С. 303—313.
5. *Broucke R., Boggs D.* Periodic orbits in the planar general three body problem [Текст] // *Celestial Mechanics*. — 1975. — Окт. — Т. 11, № 1. — С. 13—38.
6. *Broucke R., Lass D.* A note on relative motion in the general three-body problem [Текст] // *Celestial Mechanics*. — 1973. — Т. 8, № 1. — С. 5—10.
7. *Broucke R., Walker D. E.* Numerical explorations of the rectilinear problem of three bodies [Текст] // *Celestial Mechanics*. — 1980. — Т. 21, № 1. — С. 73—81.
8. *Butikov E. I.* The velocity hodograph for an arbitrary Keplerian motion [Текст] // *European Journal of Physics*. — 2000. — Июль. — Т. 21, № 4. — С. 297—302.
9. *Chen N.-C.* Periodic brake orbits in the planar isosceles three-body problem [Текст] // *Non-linearity*. — 2013. — Т. 26, № 10. — С. 2875. — URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/26/10/2875>.
10. *Chenciner A.* Symmetries and “simple” solutions of the classical n-body problem [Текст]. — 2006. — Март.
11. *Chenciner A.* The ”form” of a triangle [Текст] // *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni. Serie VII*. — 2007. — Янв. — Т. 27.

12. *Chenciner A.* Three body problem [Текст] // Scholarpedia. — 2007. — Янв. — Т. 2. — С. 2111.
13. *Chenciner A.* The Lagrange reduction of the N-body problem, a survey [Текст] // Acta Mathematica Vietnamica. — 2011. — Нояб. — Т. 38.
14. *Chenciner A.* A Walk Through the New Methods of Celestial Mechanics [Текст] // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2013. — Янв. — Т. 54.
15. *Chenciner A.* Poincaré and the Three-Body Problem [Текст] // Progress in Mathematical Physics. — 2015. — Окт. — Т. 67. — С. 51—149.
16. *Chenciner A., Montgomery R.* A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses [Текст] // Annals of Mathematics. — 2000. — Т. 152, № 3. — С. 881—901.
17. *Davoust E., Broucke R.* A manifold of periodic orbits in the planar general three-body problem with equal masses [Текст] // Astronomy and Astrophysics. — 1982. — Т. 112, № 2. — С. 305—320.
18. *Dmitrašinović V., Šuvakov M.* Topological dependence of Kepler's third law for collisionless periodic three-body orbits with vanishing angular momentum and equal masses [Текст] // Physics Letters A. — 2015. — Сент. — Т. 379, № 36. — С. 1939—1945. — arXiv: 1507.08096 [physics.class-ph].
19. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentum [Text] // Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop. — 1767. — Vol. 11. — P. 144—151.
20. *Henon M.* Families of periodic orbits in the three-body problem [Text] // Celestial Mechanics. — 1974. — Vol. 10, no. 3. — P. 375—388.
21. *Henon M.* A family of periodic solutions of the planar three-body problem, and their stability [Text] // Celestial Mechanics. — 1976. — Vol. 13, no. 3. — P. 267—285.
22. *Hsiang W.-Y., Straume E.* Kinematic geometry of triangles and the study of the three-body problem [Text] // Lobachevskii J. Math. — 2007. — Vol. 25. — P. 9—130.

23. *Hsiang W.-Y., Straume E.* Global geometry of 3-body motions with vanishing angular momentum. I [Text] // Chin. Ann. Math., Ser. B. — 2008. — Vol. 29, no. 1. — P. 1—54.
24. *Hsiang W.-Y., Straume E.* Global geometry of planary 3-body motions [Text] // Acta Appl. Math. — 2008. — Vol. 101, no. 1—3. — P. 105—119.
25. *Janković M. R., Dmitrašinović V.* Angular momentum and topological dependence of Kepler's Third Law in the Broucke-Hadjidemetriou-Hénon family of periodic three-body orbits [Текст] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Май. — Т. 116. — arXiv: 1604.08358v1 [physics.class-ph].
26. *Janković M. R., Dmitrašinović V., Šuvakov M.* A guide to hunting periodic three-body orbits with non-vanishing angular momentum [Текст] // Computer Physics Communications. — 2020. — Май. — Т. 250. — C. 107052.
27. *Kol B.* Natural dynamical reduction of the three-body problem [Text] // Cel. Mech. and Dynamical Astron. — 2023. — Vol. 135, no. 3.
28. *Kuwabara K., Tanikawa K.* An extension of the Free-Fall Problem [Текст] // Few-Body Problem: Theory and Computer Simulations. — University of Turku, Finland, 2006. — C. 29.
29. *Lagrange J.-L.* Essai sur le Problème des Trois Corps [Text] // Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris. — 1772. — Vol. IX, no. 6. — P. 292.
30. *Lemaitre G.* Coordonnées Symétriques dans le Problème des Trois Corps [Text] // Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (classe des sciences). — 1952. — Vol. 38. — 582 - 592 and 1218 —1234.
31. *Lemaitre G.* Regularization of the three-body problem [Text] // Vistas in Astronomy. — 1955. — Vol. 1. — P. 207—215.
32. *Lemaitre G.* The Three Body Problem [Text] // NASA Contractor Report. — 1964. — Vol. 110. — P. 60.
33. *Levi-Civita T.* Condition du choc dans le problème restreint des trois corps. [Text] // C. R. Hebd. Acad. Sci. Paris. — 1903. — Vol. 136. — P. 221—223.

34. *Levi-Civita T.* Sur les trajectoires singulières du problème restreint des trois corps [Text] // C. R. Hebd. Acad. Sci. Paris. — 1903. — Vol. 136. — P. 82—84.
35. *Levi-Civita T.* Sur les trajectoires singulières du problème restreint des trois corps [Text] // Annal. Mat. Pura. Appl. Paris. — 1903. — Vol. 9, no. 3. — P. 1—32.
36. *Levi-Civita T.* Sur la régularisation du problème des trois corps [Text] // C. R. Hebd. Acad. Sci. Paris. — 1916. — Vol. 162. — P. 625—628.
37. *Levi-Civita T.* Sur la regularization du problème de trois corps [Text] // Acta Mathematica. — 1921. — Vol. 42. — P. 144—151.
38. *Lewis D. C.* Comments on the Sundman inequality [Text] // Second Compilation of papers on trajectory analysis and guidance theory. — NASA, Electronics Research Center, 1968. — P. 129—139.
39. *Li X., Liao S.* Collisionless periodic orbits in the free-fall three-body problem [Текст] // New Astron. — 2019. — Июль. — Т. 70. — С. 22—26. — arXiv: 1805.07980 [nlin.CD].
40. *Marchal C., Saari D.* On the final evolution of the  $n$ -body problem [Text] // Journal of Differential Equations. — 1976. — Vol. 20. — P. 150—186.
41. *Marchal C., Saari D. G.* Hill Regions for the General Three-Body Problem [Текст] // Celestial Mechanics. — 1975. — Сент. — Т. 12, № 2. — С. 115—129.
42. *Mikkola S., Hietarinta J.* A numerical investigation of the one-dimensional newtonian three-body problem [Text] // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 1989. — Vol. 46, no. 1. — P. 1—18.
43. *Mikkola S., Tanikawa K.* Algorithmic regularization of the few-body problem [Текст] // MNRAS. — 1999. — Дек. — Т. 310, № 3. — С. 745—749.
44. *Moeckel R.* A topological existence proof for the Schubart orbits in the collinear three-body problem [Текст] // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. — 2008. — Окт. — Т. 10. — С. 609.

45. *Moeckel R., Montgomery R.* Symmetric regularization, reduction and blow-up of the planar three-body problem [Текст] // Pacific Journal of Mathematics. — 2013. — Март. — Т. 262. — С. 129.
46. *Montgomery R.* Infinitely many syzygies [Текст] // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 2002. — Апр. — Т. 162, № 4. — С. 311—330.
47. *Montgomery R.* The Three-Body Problem and the Shape Sphere [Текст] // The American Mathematical Monthly. — 2015. — Т. 122, № 4. — pp. 299—321. — URL: <https://www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.122.04.299> (дата обр. 13.10.2023).
48. *Moore C.* Braids in classical dynamics [Текст] // Phys. Rev. Lett. — 1993. — Янв. — Т. 70, вып. 24. — С. 3675—3679.
49. *Nauenberg M.* Periodic orbits for three particles with finite angular momentum [Текст] // Physics Letters A. — 2001. — Дек. — Т. 292, № 1/2. — С. 93—99. — arXiv: nlin/0112003 [nlin.CD].
50. *Orlov V. V., Titov V. A., Shombina L. A.* Periodic orbits in the free-fall three-body problem [Текст] // Astronomy Reports. — 2016. — Т. 60, № 12. — С. 1083—1089.
51. *Palais R. S.* The principle of symmetric criticality [Текст] // Communications in Mathematical Physics. — 1979. — Окт. — Т. 69, № 1. — С. 19—30.
52. Periodic Solutions about the Collinear Lagrangian Solution in the General Problem of Three Bodies [Текст] / R. Broucke [и др.] // Celestial Mechanics. — 1981. — Май. — Т. 24, № 1. — С. 63—82.
53. *Poincaré H.* Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action [Текст] // Compte Rendu Math. Acad. Sci. Paris. — 1896. — Т. 123. — С. 915—918.
54. *Prada I., Jimenez-Lara L.* The Planar Three-Body Problem, Symmetries and Periodic Orbits [Текст] // Qualitative Theory of Dynamical Systems. — 2009. — Т. 8. — С. 419—442.

55. *Saari D. G.* A Visit to the Newtonian N-Body Problem via Elementary Complex Variables [Текст] // The American Mathematical Monthly. — 1990. — Т. 97, № 2. — С. 105—119. — URL: <http://www.jstor.org/stable/2323910> (дата обр. 04.08.2023).
56. *Saari D. G.* Expanding Gravitational Systems [Текст] // Transactions of the American Mathematical Society. — 1971. — Т. 156. — С. 219—240. — URL: <http://www.jstor.org/stable/1995609> (дата обр. 20.10.2023).
57. *Saari D. G.* From Rotations and Inclinations to Zero Configurational Velocity Surfaces [Текст] // Celestial Mechanics. — 1984. — Т. 33.
58. *Saito M. M., Tanikawa K.* Collinear three body problem with non-equal masses by symbol dynamics [Текст] // Over the resonance, 35th Symposium on Celestial Mechanics / под ред. E. Kokubo, H. Arakida, T. Yamamoto. — 01.2003. — С. 324—331.
59. *Saito M. M., Tanikawa K.* Structure change of the Poincaré section due to the mass change in the rectilinear three-body problem [Текст] // A fool in space. Proceedings of the 36th Symposium on Celestial Mechanics / под ред. K. Tanikawa [и др.]. — 01.2004. — С. 68—74.
60. *Saito M. M., Tanikawa K.* The rectilinear three-body problem using symbol sequence I. Role of triple collision [Текст] // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 2007. — Т. 98, № 2. — С. 95—120.
61. *Schubart J.* Numerische Aufscuchung periodischer Lösungen im Dreikörperproblem [Text] // Astronomische Nachrichten. — 1956. — Vol. 283, no. 1. — P. 17—22.
62. *Schubart J.* Orbits of real and fictitious asteroids studied by integration [Text] // Astron. Astrophys. Suppl. Ser. — 1994. — Vol. 104. — P. 391—399.
63. *Simó C.* New Families of Solutions in N-Body Problems [Текст] // European Congress of Mathematics / под ред. C. Casacuberta [и др.]. — Basel : Birkhäuser Basel, 2001. — С. 01—115.

64. *Simó C.* Periodic orbits of the planar N-body problem with equal masses and all bodies on the same path [Текст] // The Restless Universe / под ред. B. A. Steves, A. J. Maciejewski. — 01.2001. — C. 265—284.
65. *Simó C.* Dynamical properties of the figure eight solution of the three-body problem [Текст] // Contemp. Math. — 2002. — Янв. — Т. 1. — C. 209.
66. *Simó C., Martinez R.* Qualitative study of the planar isosceles three-body problem [Текст] // Celestial Mechanics. — 1987. — Март. — Т. 41. — C. 179—251.
67. *Sundman K.* Recherches sur le probleme de trois corps [Текст] // Acta Societatis Scientiarum Fennicae. — 1907. — T. 34, № 6.
68. *Sundman K.* Nouvelles recherches sur le probleme de trois corps [Текст] // Acta Societatis Scientiarum Fennicae. — 1909. — T. 35, № 9.
69. *Sundman K.* Mémoire sur le problème de trois corps [Текст] // Acta Mathematica. — 1912. — T. 36. — C. 105—179.
70. *Šuvakov M.* Numerical search for periodic solutions in the vicinity of the figure-eight orbit: slaloming around singularities on the shape sphere [Текст] // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 2014. — Авг. — Т. 119, № 3/4. — C. 369—377. — arXiv: 1312.7002 [physics.class-ph].
71. *Šuvakov M., Dmitrašinović V.* Approximate action-angle variables for the figure-eight and periodic three-body orbits [Текст] // Phys. Rev. E. — 2011. — Май. — Т. 83, № 5. — C. 056603. — arXiv: 1106.3413 [math-ph].
72. *Šuvakov M., Dmitrašinović V.* Three Classes of Newtonian Three-Body Planar Periodic Orbits [Текст] // Phys. Review Letter. — 2013. — Март. — Т. 110, № 11. — C. 114301. — arXiv: 1303.0181 [physics.class-ph].
73. *Šuvakov M., Dmitrašinović V.* A guide to hunting periodic three-body orbits [Текст] // American Journal of Physics. — 2014. — Июнь. — Т. 82, № 6. — C. 609—619.
74. *Szebeheli V., Peters C. F.* Complete Solution of a General Problem of Three Bodies [Text] // Astronomical Journal. — 1967. — Vol. 72, no. 7. — P. 876—883.

75. The Broucke–Hénon orbit and the Schubart orbit in the planar three-body problem with two equal masses [Текст] / W. Kuang, T. Ouyang, Z. Xie, D. Yan // Nonlinearity. — 2019. — Т. 32, № 12. — С. 4639.
76. The orbits and masses of satellites of Pluto [Text] / M. Brozović [et al.] // Icarus. — 2015. — Vol. 246, no. 11. — P. 317—329.
77. The rectilinear three-body problem [Текст] / V. V. Orlov [и др.] // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 2008. — Февр. — Т. 100, № 2. — С. 93—120.
78. Titov V. Three-body problem periodic orbits with vanishing angular momentum [Текст] // Astronomische Nachrichten. — 2015. — Т. 336, № 3. — С. 271—275.
79. Titov V. Some solutions of the general three body problem in form space [Text] // 8th Polyakhov's Reading. Vol. 1959 / ed. by E. Kustova [et al.]. — United States : American Institute of Physics, 2018.
80. Titov V. B. Groups of transformations of phase trajectories in the two-body problem. [Текст] // Astronomiya i geodeziya. — 1985. — Т. 13. — С. 11—21.
81. Titov V. B. Isoenergetic transformations in the two-body problem [Текст] // Leningradskii Universitet Vestnik Matematika Mekhanika Astronomiia. — 1986. — С. 116—118.
82. Titov V. B. О геометрическом методе определения невозмущенной орбиты из наблюдений с использованием групповых преобразований [Текст] // Кинематика и физика небесных тел. — 1987. — Т. 3, № 4. — С. 26—29.
83. Titov V. Symmetrical periodic orbits in the three body problem - the variational approach [Текст] // Few-Body Problem: Theory and Computer Simulations. — University of Turku, Finland, 2006. — С. 9.
84. Titov V. Some properties of Lemaitre regularization. II isosceles trajectories and figure-eight [Текст] // Astronomische Nachrichten. — 2022. — Т. 343, № 3. — e14006.

85. *Titov V. B.* Some properties of Lemaitre regularization: Collinear trajectories [Текст] // Astronomische Nachrichten. — 2021. — Март. — Т. 342, № 3. — С. 588—597.
86. *Vanderbei R.* Linear Programming: Foundations and Extensions [Текст] // Journal of the Operational Research Society. — 1998. — Март. — Т. 49. — С. 93—98.
87. *Vanderbei R.* New Orbits for the  $n$ -Body Problem [Текст] // Annals of the New York Academy of Sciences. — 2004. — Май. — Т. 1017, № 1. — С. 422—433.
88. *Vashkovjak M. A.* On the stability of circular asteroid orbits in an N-planetary system [Text] // Celestial Mechanics. — 1976. — Vol. 13. — P. 313—324.
89. Антонов В. А., Никифоров И. И., Холшевников К. В. Элементы теории гравитационного потенциала и некоторые случаи его явного выражения [Текст]. — СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008. — 227 с.
90. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики [Текст] // Итоги Науки и Техники. Серия Современные проблемы Математики. Фундаментальные направления. — 1985. — Т. 3. — С. 5—304.
91. Биркгоф Д. Динамические системы [Текст]. — Ижевск : Изд дом “Удмуртский университет”, 1999. — 408 с.
92. Вашковьяк М. А. Метод вычисления вековых возмущений астероидных орбит [Текст] // Космические исследования. — 1986. — Т. 24, № 4. — С. 513—526.
93. Голубев В. Г. О некоторых оценках в неограниченной задаче трех тел в случае, когда движение одной из пар тел абсолютно устойчиво по Хиллу [Текст] // Доклады АН СССР. — 1978. — Т. 240, № 4. — С. 798—801.
94. Голубев В. Г., Гребеников Е. А. Проблема трех тел в небесной механике [Текст]. — М. : Изд-во МГУ, 1985. — 240 с.

95. Лукьянов Л. Г. Аналог поверхностей нулевой скорости в ограниченной эллиптической, параболической и гиперболической задачах трех тел [Текст] // Письма в АЖ. — 2010. — Т. 36, № 11. — С. 869—880.
96. Лукьянов Л. Г., Ширмин Г. И. Лекции по небесной механике [Текст]. — Алматы, 2009. — 227 с.
97. Маршал К. Задача трех тел [Текст]. — М.—Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. — 640 с.
98. Норма смещения положения небесного тела в одной задаче динамической астрономии [Текст] / К. В. Холшевников [и др.] // Астрон. журнал. — 2020. — Т. 97, № 4. — С. 348—352.
99. Парс Л. А. Аналитическая динамика [Текст]. — Москва : Наука, 1971. — 636 с.
100. Саари Д. Кольца, столкновения и другие ньютоны задачи  $N$  тел [Текст]. — М.-Ижевск : Инс-тут комп'ют. исследований, 2009. — 280 с.
101. Себехей В. Теория орбит: Ограниченная задача трех тел [Текст]. — М. : Наука, 1982. — 656 с.
102. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию [Текст]. — М. : Наука, 1968. — 800 с.
103. Титов В. Б. Периодические орбиты общей задачи трех тел с нулевым кинетическим моментом [Текст] // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. — 2012. — Т. 8, № 2. — С. 377—389.
104. Титов В. Области возможного движения в общей задаче трех тел [Текст] // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2022. — Т. 517. — С. 225—249.
105. Титов В. Поверхность нулевой скорости в общей задаче трех тел [Текст] // Вестник С.Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. — 2023. — Т. 10(68), № 1. — С. 165—175.
106. Тхай В. Исследование плоской неограниченной задачи трех тел [Текст] // Прикладная математика и механика. — 1996. — Т. 60, № 3. — С. 355—374.

107. Увод астероида с помощью двигателя малой тяги, направленной по касательной к орбите [Текст] / К. В. Холшевников [и др.] // Астрон. журнал. — 2020. — Т. 97, № 9. — ?348—?352.
108. Уинтер А. Аналитические основы небесной механики [Текст]. — М. : Hayka, 1967. — 524 с.
109. Холшевников К. В., Титов В. Б. Поверхности минимальной скорости в круговой ограниченной задача трех тел [Текст] // Вестник СПбГУ. — 2020. — Т. 7, № 4. — С. 734—742.
110. Шансине А. Четыре лекции о задаче  $N$  тел [Текст] // Поллард Г. Математическое введение в небесную механику. — М.—Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2012. — С. 146—187.

## Приложение А

### Модели для оптимизации на языке AMPL

Листинг А.1 модели Eight.mod для поиска решения-восьмерки.

Листинг А.1 Eight.mod

```

# Модель для поиска решения - восьмерки

param N; # Число масс
param n; # Число членов в разложении Фурье
5 param m; # Число узлов при вычислении интеграла

param pi := 4*atan(1); # Просто \pi;

set Bodies := {1..N};
10 param masses {i in Bodies}; # Значения масс

set Times := {0..m-1} circular;

set C3X := {1..n} diff {3..n by 3};
15 set C3Y := {1..n} diff {3..n by 3};

# моменты времени для вычисления положения тел
# отличаются друг от друга на 2\pi/3
param theta {i in Bodies, t in Times} :=
20     if (i = 1) then t*2*pi/m          # тело 1
     else
         if (i = 2) then t*2*pi/m + 2*pi/3 # тело 2
         else
             t*2*pi/m + 4*pi/3;          # тело 3
25 param dt := 2*pi/m; # Шаг для вычисления интеграла

var as {k in C3X}; # Коэффициенты ряда Фурье по( синусам) для x
var bs {k in C3Y}; # Коэффициенты ряда Фурье по( синусам) для y

30 # Значения координат x и y и их скоростей
var x {i in Bodies, t in Times} =

```

```

    sum{k in C3X} as[k]*sin(k*theta[i,t]);
var y {i in Bodies, t in Times} =
    sum{k in C3Y} bs[k]*sin(k*theta[i,t]);
35

var xdot {i in Bodies, t in Times} =
    sum {k in CX3} as[k]*k*cos(k*theta[i,t]);
var ydot {i in Bodies, t in Times} =
    sum {k in CY3} bs[k]*k*cos(k*theta[i,t]);
40

# Кинетическая энергия в моменты t_i=2(i-1)\pi/m
var K {t in Times} = 0.5*sum {i in Bodies}
    masses[i]^(xdot[i,t]^2 + ydot[i,t]^2);

45 # Потенциальная энергия в моменты t_i=2(i-1)\pi/m
var P {t in Times}
= - sum {i in Bodies, ii in Bodies: ii>i }
    masses[i]*masses[ii]/sqrt((x[i,t]-x[ii,t])^2+(y[i,t]-y[ii,t])^2);

50 # Целевая функция: интеграл K-P
minimize A: sum {t in Times} (K[t] - P[t])*dt;
# Ограничение: в начальный момент точки находятся на оси абсцисс
subject to inity1 : y[1,0] = 0;
subject to inity2 : y[2,0] = 0;

```

Листинг А.2 модели 2-1.mod для поиска 2-1 хореографии.

### Листинг А.2 2-1.mod

```

# Модель для поиска решения - 2-1 хореографий

param N; # Число масс
param n; # Число членов в разложении Фурье
5 param m; # Число членов при вычислении интегралов

param pi := 4*atan(1); # Просто \pi;
param masses {i in Bodies}; # Значения масс
param omega;

10 set Bodies := {1..N};
set Bodies_minus_1 := {1..N-1};
set Times := {0..m-1} circular;

```

```

15 # моменты времени для вычисления положения тел 1 и 2
# отличаются друг от друга на \pi
param theta {i in Bodies, t in Times} :=
    t*2*pi/m + (if i == 2 then pi else 0);
param dt := 2*pi/m; # Свободный член ряда Фурье для x

20 var a0; # Свободный член ряда Фурье для x
var ac {k in 1..n}; # Коэффициенты ряда Фурье по( косинусам) для x
var as {k in 1..n}; # Коэффициенты ряда Фурье по( синусам) для x
var b0; # Свободный член ряда Фурье для y
25 var bc {k in 1..n}; # Коэффициенты ряда Фурье по( косинусам) для y
var bs {k in 1..n}; # Коэффициенты ряда Фурье по( синусам) для y

# Значения координат x и y и их скоростей
# во вращающейся системе координат
30 var xrot {i in Bodies, t in Times} =
    if (i in Bodies_minus_1) then
        a0+sum{k in 1..n} (ac[k]*cos(k*theta[i,t]) + as[k]*sin(k*theta[i,t]))
    else
        -(sum{j in Bodies_minus_1} (masses[j]*xrot[j,t]))/masses[N];
35 var yrot {i in Bodies, t in Times} =
    if (i in Bodies_minus_1) then
        b0+sum{k in 1..n} (bc[k]*cos(k*theta[i,t]) + bs[k]*sin(k*theta[i,t]))
    else
        -(sum{j in Bodies_minus_1} (masses[j]*yrot[j,t]))/masses[N];

40 # Значения координат x и y и их скоростей
# в инерциальной системе координат
var x {i in Bodies, t in Times} = xrot[i,t]*cos(omega*theta[1,t])
                           - yrot[i,t]*sin(omega*theta[1,t]);
45 var y {i in Bodies, t in Times} = xrot[i,t]*sin(omega*theta[1,t])
                           + yrot[i,t]*cos(omega*theta[1,t]);

var xrotdot {i in Bodies, t in Times} =
    if (i in Bodies_minus_1) then
        sum {k in 1..n} (-ac[k]*k*sin(k*theta[i,t]) + as[k]*k*cos(k*theta[i,t]))
    else
50   -(sum{j in Bodies_minus_1} (masses[j]*xrotdot[j,t]))/masses[N];

```

```

var yrotdot {i in Bodies, t in Times} =
  if (i in Bodies_minus_1) then
    sum {k in 1..n} (-bc[k]*k*sin(k*theta[i,t]) + bs[k]*k*cos(k*theta[i,t]))
  else
    -(sum{j in Bodies_minus_1} (masses[j]*yrotdot[j,t]))/masses[N];

var xdot {i in Bodies, t in Times} = xrotdot[i,t]*cos(omega*theta[1,t])
60                                - yrotdot[i,t]*sin(omega*theta[1,t])
                                - omega * y[i,t];
var ydot {i in Bodies, t in Times} = xrotdot[i,t]*sin(omega*theta[1,t])
                                + yrotdot[i,t]*cos(omega*theta[1,t])
                                + omega * x[i,t];
65

# Кинетическая энергия в моменты t_i=2(i-1)\pi/m
var K {t in Times} = 0.5*sum {i in Bodies}
                         masses[i]*(xdot[i,t]^2 + ydot[i,t]^2);

# Силовая функция
70 var P {t in Times}
  = - sum {i in Bodies, ii in Bodies: ii>i }
    if ((x[i,t]-x[ii,t])^2+(y[i,t]-y[ii,t])^2 <= 0.01 ) then 1000
    else
      masses[i]*masses[ii]/sqrt((x[i,t]-x[ii,t])^2+(y[i,t]-y[ii,t])^2);
75

minimize A: sum {t in Times} (K[t] - P[t])*dt;
# Ограничение: в начальный момент точки находятся на оси абсцисс
subject to inity1: y[1,0] = 0;
subject to inity2: y[2,0] = 0;

```

Листинг А.3 модели ISO.mod для поиска орбит с равнобедренной симметрией.

### Листинг А.3 ISO.mod

```

# Строим модель

param N; # Число масс
param n; # Число членов в разложении Фурье
5 param m; # Число членов при вычислении интегралов

param pi := 4*atan(1); # Просто \pi;

```

```

#param mh : m/2;

10 set Bodies := {1..N};
set Bodies_minus_1 := {1..N-1};

set Times := {0..m} circular;

15 set HarmX := {1..n};
set HarmY := {1..n};

param masses {i in Bodies}; # Значения масс

20 param dt := 2*pi/m;
param theta {t in Times} := t*dt;

var b0;

25 var ac {k in HarmX};
var as {k in HarmX};
var bc {k in HarmY};
var bs {k in HarmY};

30 var x {i in Bodies, t in Times} =
  if (i in Bodies_minus_1) then
    if (i == 1) then
      sum{k in HarmX} (ac[k]*cos(k*theta[t]) + as[k]*sin(k*theta[t]))
    else
      sum{k in HarmX} (ac[k]*cos(k*theta[t]) - as[k]*sin(k*theta[t]))
  else
    -(sum{j in Bodies_minus_1} (masses[j]*x[j,t]))/masses[N];
var y {i in Bodies, t in Times} =
  if (i in Bodies_minus_1) then
    if (i == 1) then
      b0+sum{k in HarmY} (bc[k]*cos(k*theta[t]) + bs[k]*sin(k*theta[t]))
    else
      -b0-sum{k in HarmY} (bc[k]*cos(k*theta[t]) - bs[k]*sin(k*theta[t]))
  else
    -(sum{j in Bodies_minus_1} (masses[j]*y[j,t]))/masses[N];

```

```

var xdot {i in Bodies, t in Times} =
    if (i in Bodies_minus_1) then
        if (i == 1) then
            sum{k in HarmX} (-ac[k]*k*sin(k*theta[t])+as[k]*k*cos(k*theta[t]))
        else
            -sum{k in HarmX} (ac[k]*k*sin(k*theta[t])+as[k]*k*cos(k*theta[t]))
    else
        -(sum{j in Bodies_minus_1} (masses[j]*xdot[j,t]))/masses[N];
50

var ydot {i in Bodies, t in Times} =
    if (i in Bodies_minus_1) then
        if (i == 1) then
            sum{k in HarmY} (-bc[k]*k*sin(k*theta[t])+bs[k]*k*cos(k*theta[t]))
60
        else
            sum{k in HarmY} (bc[k]*k*sin(k*theta[t])+bs[k]*k*cos(k*theta[t]))
    else
        -(sum{j in Bodies_minus_1} (masses[j]*ydot[j,t]))/masses[N];

65 var K {t in Times} = 0.5*sum {i in Bodies}
    masses[i]*(xdot[i,t]^2 + ydot[i,t]^2);

var P {t in Times}
= - sum {i in Bodies_minus_1, ii in Bodies: ii>i }
70    if ((x[i,t]-x[ii,t])^2+(y[i,t]-y[ii,t])^2 <= 0.00000001 ) then
        1000000
    else
        masses[i]*masses[ii]/sqrt((x[i,t]-x[ii,t])^2+(y[i,t]-y[ii,t])^2);

75 minimize A: sum {t in Times} (K[t] - P[t])*dt;
subject to y3init: y[3,0] = 0.0;
subject to y3hinit: y[3,mh] = 0.0;

```

Листинг А.4 модели Line.mod для поиска орбит с линейной симметрией.

#### Листинг А.4 Line.mod

```

# Строим модель

param N; # Число масс
param n; # Число членов в разложении Фурье
5 param m; # Число членов при вычислении интегралов

```

```

param pi := 4*atan(1); # Просто \pi;
param omega;

10 set Bodies := {1..N};
set Bodies_minus_1 := {1..N-1};
set Times := {0..m-1} circular;

param masses {i in Bodies}; # Значения масс

15 param theta {i in Bodies, t in Times} := t*2*pi/m;
param dt := 2*pi/m;

var a0 {i in Bodies};

20 var ac {i in Bodies_minus_1, k in 1..n};
var bs {i in Bodies_minus_1, k in 1..n};

var xrot {i in Bodies, t in Times} =
25 if (i in Bodies_minus_1) then
    a0[i]+sum{k in 1..n} (ac[i,k]*cos(k*theta[i,t]))
else
    -(sum{j in Bodies_minus_1} masses[j]*(xrot[j,t]))/masses[N];
var yrot {i in Bodies, t in Times} =
30 if (i in Bodies_minus_1) then
    sum{k in 1..n} (bs[i,k]*sin(k*theta[i,t]))
else
    -(sum{j in Bodies_minus_1} masses[j]*(yrot[j,t]))/masses[N];

35 var x {i in Bodies, t in Times} = xrot[i,t]*cos(omega*theta[i,t])
                           - yrot[i,t]*sin(omega*theta[i,t]);
var y {i in Bodies, t in Times} = xrot[i,t]*sin(omega*theta[i,t])
                           + yrot[i,t]*cos(omega*theta[i,t]);

40 var xrotdot {i in Bodies, t in Times} =
if (i in Bodies_minus_1) then
    sum {k in 1..n} (-ac[i,k]*k*sin(k*theta[i,t]))
else
    -(sum{j in Bodies_minus_1} masses[j]*(xrotdot[j,t]))/masses[N];

```

```

45 var yrotdot {i in Bodies, t in Times} =
  if (i in Bodies_minus_1) then
    sum {k in 1..n} ( bs[i,k]*k*cos(k*theta[i,t]))
  else
    -(sum{j in Bodies_minus_1} masses[j]*(yrotdot[j,t]))/masses[N];

50 var xdot {i in Bodies, t in Times} = xrotdot[i,t]*cos(omega*theta[i,t])
                                         - yrotdot[i,t]*sin(omega*theta[i,t]
                                         ])
                                         - omega * y[i,t];

55 var ydot {i in Bodies, t in Times} = xrotdot[i,t]*sin(omega*theta[i,t])
                                         + yrotdot[i,t]*cos(omega*theta[i,t]
                                         ])
                                         + omega * x[i,t];

var K {t in Times} = 0.5*sum {i in Bodies} masses[i]*(xdot[i,t]^2 + ydot[i,t]^2);

60 var P {t in Times}
= - sum {i in Bodies, ii in Bodies: ii>i }
  if ((x[i,t]-x[ii,t])^2+(y[i,t]-y[ii,t])^2 <= 0.01 ) then
    1000
65 else
  masses[i]*masses[ii]/sqrt((x[i,t]-x[ii,t])^2+(y[i,t]-y[ii,t])^2);

minimize A: sum {t in Times} (K[t] - P[t])*dt;
subject to inity0 {i in Bodies} : y[i,0] = 0;

```

## Приложение В

### Периодические траектории главы 2

Координаты даются во вращающейся системе координат, для получения орбиты в барицентрической системе нужно просто повернуть их на угол  $\omega t$ , начальные данные даются в барицентрической системе координат, их прямо можно использовать как начальные условия для численного интегрирования.

#### B.1 Восьмерка ( $\omega = 0$ )

Массы равны:  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ .

Решение:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 1.0958785 \sin t - 0.0252775 \sin 5t - 0.0058497 \sin 7t \\
 &\quad + 0.0004212 \sin 11t + 0.0001224 \sin 13t - 0.0000114 \sin 17t \\
 &\quad - 0.0000036 \sin 19t + 0.0000004 \sin 23t, \\
 y_1(t) &= 0.3372826 \sin 2t + 0.0557118 \sin 4t - 0.0029908 \sin 8t \\
 &\quad - 0.0008022 \sin 10t + 0.0000676 \sin 14t + 0.0000206 \sin 16t \\
 &\quad - 0.0000021 \sin 20t - 0.0000007 \sin 22t. \\
 x_2(t) &= x_2(t + 2\pi/3) \\
 y_2(t) &= y_2(t + 2\pi/3) \\
 x_3(t) &= x_3(t + 4\pi/3) \\
 y_3(t) &= y_3(t + 4\pi/3)
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Значение функционала действия ( $A$ ), постоянной энергии ( $E$ ) и постоянной углового момента ( $J$ ):

$$A = 24.37193, \quad E = -1.29297, \quad J = 0$$

## B.2 Хореографии 2-1

Здесь приводятся все решения-хореографии 2-1, перечисленные в табл. 2.

Все орбиты, кроме трех последних, вычислялись с массами  $m_1 = m_2 = 0.95$ ,  $m_3 = 1.1$ . Координаты в основной системе приводятся для первого тела, второе тело движется по той же орбите со сдвигом ( $\pi$ ), координаты третьего тела определяются из условия  $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 = 0$

**1.**  $A = 10.61083$ , угловая скорость вращения базовой системы:  $\omega = 1/5$  (рис. 2.7л)

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 1.5565760 \\
 &\quad + 0.7065140 \cos(t) + 0.0008633 \cos(2t) + 0.0010532 \cos(3t) \\
 &\quad + 0.0000084 \cos(4t) + 0.0000077 \cos(5t) + 0.0000001 \cos(6t) \\
 &\quad + 0.0000001 \cos(7t) \\
 y_1(t) &= -0.7254535 \sin(t) + 0.0004847 \sin(2t) - 0.0011753 \sin(3t) \\
 &\quad + 0.0000064 \sin(4t) - 0.0000096 \sin(5t) + 0.0000001 \sin(6t) \\
 &\quad - 0.0000001 \sin(7t), \\
 x_2(t) &= x_1(t + \pi), \\
 y_2(t) &= y_1(t + \pi), \\
 0 &= m_1x_1(t) + m_2x_2(t) + m_3x_3(t) , \\
 0 &= m_1y_1(t) + m_2y_2(t) + m_3y_3(t) .
 \end{aligned}$$

$$E = -0.562922, \quad J = 1.73204 .$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2650228 \\ 0 \\ 0 \\ -0.2750278 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8498728 \\ 0 \\ 0 \\ 0.8999983 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.6901372 \\ 0 \\ 0 \\ -0.5397473 \end{pmatrix}$$

2.  $A = 11.87886$ ,  $\omega = 1/3$  (рис. 2.8л)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1.1158617 \\ &\quad + 0.7759119 \cos(t) + 0.0037554 \cos(2t) + 0.0018298 \cos(3t) \\ &\quad + 0.0000866 \cos(4t) + 0.0000256 \cos(5t) + 0.0000033 \cos(6t) \\ &\quad + 0.0000005 \cos(7t) + 0.0000002 \cos(8t) \\ y_1(t) &= -0.8251039 \sin(t) + 0.0018789 \sin(2t) - 0.0026518 \sin(3t) \\ &\quad + 0.0000651 \sin(4t) - 0.0000546 \sin(5t) + 0.0000028 \sin(6t) \\ &\quad - 0.0000018 \sin(7t) + 0.0000001 \sin(8t). \end{aligned}$$

$$E = -0.630193, \quad J = 1.34061.$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8974750 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1968177 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3419393 \\ 0 \\ 0 \\ 0.9513610 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.9340397 \\ 0 \\ 0 \\ -0.6516511 \end{pmatrix}$$

3.  $A = 12.41405$ ,  $\omega = 2/5$  (рис. 2.6л)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0.9925978 \\ &\quad - 0.8163328 \cos(t) + 0.0064762 \cos(2t) - 0.0018448 \cos(3t) \\ &\quad + 0.0002080 \cos(4t) - 0.0000225 \cos(5t) + 0.0000112 \cos(6t) \\ &\quad + 0.0000001 \cos(7t) + 0.0000007 \cos(8t) + 0.0000001 \cos(9t), \\ y_1(t) &= 0.8851767 \sin(t) + 0.0030578 \sin(2t) + 0.0035224 \sin(3t) \\ &\quad + 0.0001561 \sin(4t) + 0.0001051 \sin(5t) + 0.0000093 \sin(6t) \\ &\quad + 0.0000051 \sin(7t) + 0.0000006 \sin(8t) + 0.0000003 \sin(9t). \end{aligned}$$

$$E = -0.658586, \quad J = 1.22042.$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1810941 \\ 0 \\ 0 \\ 0.9755469 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8174939 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1625086 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.7260533 \\ 0 \\ 0 \\ -0.7021694 \end{pmatrix}$$

4.  $A = 12.43822$ ,  $\omega = 1/5$  (рис. 2.7п)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1.5519058 \\ &\quad + 0.5347713 \cos(t) + 0.0006602 \cos(2t) + 0.0024871 \cos(3t) \\ &\quad + 0.0000045 \cos(4t) + 0.0000291 \cos(5t) + 0.0000005 \cos(7t), \\ y_1(t) &= 0.5602807 \sin(t) - 0.0005190 \sin(2t) + 0.0025517 \sin(3t) \\ &\quad - 0.0000037 \sin(4t) + 0.0002981 \sin(5t) + 0.0000005 \sin(7t). \end{aligned}$$

$$E = -0.659868, \quad J = 3.17929.$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0898586 \\ 0 \\ 0 \\ 0.9850069 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0152828 \\ 0 \\ 0 \\ -0.3660844 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.6817130 \\ 0 \\ 0 \\ -0.5345240 \end{pmatrix}$$

5.  $A = 13.13826$ ,  $\omega = 1/2$  (рис. 2.4л)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0.8613454 \\ &\quad - 0.8866020 \cos(t) + 0.0128924 \cos(2t) - 0.0009447 \cos(3t) \\ &\quad + 0.0006383 \cos(4t) + 0.0000584 \cos(5t) + 0.0000527 \cos(6t) \\ &\quad + 0.0000095 \cos(7t) + 0.0000052 \cos(8t) + 0.0000012 \cos(9t) \\ &\quad + 0.0000006 \cos(10t) + 0.0000002 \cos(11t), \\ y_1(t) &= 0.9901696 \sin(t) - 0.0055727 \sin(2t) + 0.0051002 \sin(3t) \\ &\quad + 0.0004791 \sin(4t) + 0.0002584 \sin(5t) + 0.0000443 \sin(6t) \\ &\quad + 0.0000208 \sin(7t) + 0.0000046 \sin(8t) + 0.0000020 \sin(9t) \\ &\quad + 0.0000005 \sin(10t) + 0.0000002 \sin(11t). \end{aligned}$$

$$E = -0.697007, \quad J = 1.09433.$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0125428 \\ 0 \\ 0 \\ 1.0140278 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7624120 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1123521 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5112507 \\ 0 \\ 0 \\ -0.7787200 \end{pmatrix}$$

6.  $A = 14.90941$ ,  $\omega = 1/3$  (рис. 2.8с)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1.1041275 \\ &\quad + 0.4688262 \cos(t) + 0.0023857 \cos(2t) + 0.0089485 \cos(3t) \\ &\quad + 0.0000370 \cos(4t) + 0.0003487 \cos(5t) + 0.0000012 \cos(6t) \\ &\quad + 0.0000175 \cos(7t) + 0.0000010 \cos(9t), \\ y_1(t) &= 0.5501636 \sin(t) - 0.0020831 \sin(2t) + 0.0091862 \sin(3t) \\ &\quad - 0.0000305 \sin(4t) + 0.0003544 \sin(5t) - 0.0000010 \sin(6t) \\ &\quad + 0.0000177 \sin(7t) + 0.0000010 \sin(9t). \end{aligned}$$

$$E = -0.790968, \quad J = 2.76171 \quad .$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5846935 \\ 0 \\ 0 \\ 1.1035653 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6284095 \\ 0 \\ 0 \\ -0.3744532 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.9113163 \\ 0 \\ 0 \\ -0.6296877 \end{pmatrix}$$

7.  $A = 16.03507$ ,  $\omega = 2/5$  (рис. 2.6п)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0.9760527 \\ &\quad + 0.4294736 \cos(t) + 0.0037296 \cos(2t) + 0.0146659 \cos(3t) \\ &\quad + 0.0000816 \cos(4t) + 0.0009135 \cos(5t) + 0.0000038 \cos(6t) \\ &\quad + 0.0000723 \cos(7t) + 0.0000002 \cos(8t) + 0.0000065 \cos(9t) \\ &\quad + 0.0000006 \cos(11t), \\ y_1(t) &= 0.5557843 \sin(t) - 0.0034112 \sin(2t) + 0.0149548 \sin(3t) \\ &\quad - 0.0000681 \sin(4t) + 0.0009213 \sin(5t) - 0.0000031 \sin(6t) \\ &\quad + 0.0000727 \sin(7t) - 0.0000002 \sin(8t) + 0.0000065 \sin(9t) \\ &\quad + 0.0000006 \sin(11t). \end{aligned}$$

$$E = -0.850687, \quad J = 2.61695 \quad .$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4250005 \\ 0 \\ 0 \\ 1.1687159 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5347356 \\ 0 \\ 0 \\ -0.3990521 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.6924993 \\ 0 \\ 0 \\ -0.6647096 \end{pmatrix}$$

8.  $A = 16.57031$ ,  $\omega = 1/3$  (рис. 2.8п)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0.18354047 \\ &\quad + 1.4040182 \cos(t) \quad - 0.0784666 \cos(2t) \quad + 0.0122495 \cos(3t) \\ &\quad - 0.0023966 \cos(4t) \quad + 0.0005415 \cos(5t) \quad - 0.0001285 \cos(6t) \\ &\quad + 0.0000327 \cos(7t) \quad - 0.0000085 \cos(8t) \quad + 0.0000023 \cos(9t) \\ &\quad - 0.0000006 \cos(10t) \quad + 0.0000002 \cos(11t), \\ y_1(t) &= -1.3893845 \sin(t) \quad + 0.0786710 \sin(2t) \quad - 0.0120628 \sin(3t) \\ &\quad + 0.0023984 \sin(4t) \quad - 0.0005354 \sin(5t) \quad + 0.0001284 \sin(6t) \\ &\quad - 0.0000324 \sin(7t) \quad + 0.0000085 \sin(8t) \quad - 0.0000023 \sin(9t) \\ &\quad + 0.0000006 \sin(10t) \quad - 0.0000002 \sin(11t). \end{aligned}$$

$$E = -0.879082, \quad J = 2.46683 \quad .$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5193840 \\ 0 \\ 0 \\ -0.7542570 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.3143048 \\ 0 \\ 0 \\ 1.1581786 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1771139 \\ 0 \\ 0 \\ -0.3488413 \end{pmatrix}$$

**9.**  $A = 17.61955$ ,  $\omega = 1/2$  (рис. 2.4п)

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 0.8360497 \\
 &\quad + 0.3582472 \cos(t) + 0.0063098 \cos(2t) + 0.0275002 \cos(3t) \\
 &\quad + 0.0002191 \cos(4t) + 0.0031197 \cos(5t) + 0.0000169 \cos(6t) \\
 &\quad + 0.0004428 \cos(7t) + 0.0000018 \cos(8t) + 0.0000706 \cos(9t) \\
 &\quad + 0.0000002 \cos(10t) + 0.0000121 \cos(11t) + 0.0000022 \cos(13t) \\
 &\quad + 0.0000004 \cos(15t), \\
 y_1(t) &= 0.5793870 \sin(t) - 0.0060786 \sin(2t) + 0.0274387 \sin(3t) \\
 &\quad - 0.0001875 \sin(4t) + 0.0030922 \sin(5t) - 0.0000140 \sin(6t) \\
 &\quad + 0.0004389 \sin(7t) - 0.0000015 \sin(8t) + 0.0000701 \sin(9t) \\
 &\quad - 0.0000002 \sin(10t) + 0.0000120 \sin(11t) + 0.0000022 \sin(13t) \\
 &\quad + 0.0000004 \sin(15t).
 \end{aligned}$$

$$E = -0.934746, \quad J = 2.43060 \quad .$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2319928 \\ 0 \\ 0 \\ 1.2840272 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4532024 \\ 0 \\ 0 \\ -0.4674394 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.4553959 \\ 0 \\ 0 \\ -0.7052349 \end{pmatrix}$$

**10.**  $A = 19.78460$ ,  $\omega = 1/3$  (рис. 2.11п)

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 1.1030882 \\
 &\quad + 0.3202534 \cos(3t) + 0.0000811 \cos(6t) + 0.0001972 \cos(9t) \\
 &\quad + 0.0000003 \cos(12t) + 0.0000005 \cos(15t), \\
 y_1(t) &= -0.3232173 \sin(3t) + 0.0000492 \sin(6t) - 0.0002045 \sin(9t) \\
 &\quad + 0.0000002 \sin(12t) - 0.0000006 \sin(15t).
 \end{aligned}$$

$$E = -1.049612, \quad J = 1.57727 \quad .$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4236209 \\ 0 \\ 0 \\ -0.4966677 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7827184 \\ 0 \\ 0 \\ 1.2327027 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.9054749 \\ 0 \\ 0 \\ -0.6356666 \end{pmatrix}$$

**11.**  $A = 21.89957$ ,  $\omega = 1/3$  (рис. 2.11п)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1.1022720 \\ &\quad + 0.2756116 \cos(3t) + 0.0000699 \cos(6t) + 0.0003117 \cos(9t) \\ &\quad + 0.0000002 \cos(12t) + 0.0000011 \cos(15t), \\ y_1(t) &= +0.2791050 \sin(3t) - 0.0000511 \sin(6t) + 0.0003169 \sin(9t) \\ &\quad - 0.0000002 \sin(12t) + 0.0000011 \sin(15t). \end{aligned}$$

$$E = -1.049612, \quad J = 1.57727 \quad .$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3782665 \\ 0 \\ 0 \\ 1.2992926 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8264177 \\ 0 \\ 0 \\ -0.5650222 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.9040455 \\ 0 \\ 0 \\ -0.6541426 \end{pmatrix}$$

**12.**  $A = 25.74992$ ,  $\omega = 1/3$  (рис. 2.10л)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1.1014946 \\ &\quad + 0.2213003 \cos(5t) + 0.0000143 \cos(10t) + 0.0000560 \cos(15t), \\ y_1(t) &= -0.2220820 \sin(5t) + 0.0000090 \sin(10t) - 0.0000569 \sin(15t). \end{aligned}$$

$$E = -1.36608, \quad J = 1.65989.$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3228653 \\ 0 \\ 0 \\ -0.6702237 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8801525 \\ 0 \\ 0 \\ 1.4047370 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.9026063 \\ 0 \\ 0 \\ -0.6343523 \end{pmatrix}$$

**13.**  $A = 27.53447$ ,  $\omega = 1/3$  (рис. 2.10п)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1.1012493 \\ &\quad + 0.2023926 \cos(5t) + 0.0000131 \cos(10t) + 0.0000734 \cos(15t), \\ y_1(t) &= +0.2032551 \sin(5t) - 0.0000092 \sin(10t) + 0.0000742 \sin(15t). \end{aligned}$$

$$E = -1.46075, \quad J = 2.51159.$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3037285 \\ 0 \\ 0 \\ 1.4518695 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8987962 \\ 0 \\ 0 \\ -0.7178872 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.9021805 \\ 0 \\ 0 \\ -0.6338938 \end{pmatrix}$$

Следующие три орбиты вычислялись при немного измененных массах  $m_1 = m_2 = 1.05$ ,  $m_3 = 0.9$ ,

**14.**  $A = 12.20094$ ,  $\omega = 1/3$  (рис. 2.9п)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0.9144752 \\ &\quad + 0.8086164 \cos(t) + 0.0033078 \cos(2t) + 0.0015123 \cos(3t) \\ &\quad + 0.0000802 \cos(4t) + 0.0000162 \cos(5t) + 0.0000032 \cos(6t) \\ &\quad + 0.0000001 \cos(7t) + 0.0000002 \cos(8t), \\ y_1(t) &= -0.8503844 \sin(t) + 0.0016401 \sin(2t) - 0.0022576 \sin(3t) \\ &\quad + 0.0000603 \sin(4t) - 0.0000438 \sin(5t) + 0.0000027 \sin(6t) \\ &\quad - 0.0000015 \sin(7t) + 0.0000001 \sin(8t). \end{aligned}$$

$$E = -0.647280, \quad J = 0.98928 .$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7280117 \\ 0 \\ 0 \\ -0.2778443 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1077216 \\ 0 \\ 0 \\ 0.8968330 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.1416888 \\ 0 \\ 0 \\ -0.7221535 \end{pmatrix}$$

**15.**  $A = 15.79177$ ,  $\omega = 1/3$  (рис. 2.9л)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0.9041779 \\ &\quad + 0.4924818 \cos(t) + 0.0020992 \cos(2t) + 0.0075928 \cos(3t) \\ &\quad + 0.0000306 \cos(4t) + 0.0002459 \cos(5t) + 0.0000009 \cos(6t) \\ &\quad + 0.0000103 \cos(7t) + 0.0000005 \cos(9t), \\ y_1(t) &= +0.5616499 \sin(t) - 0.0018295 \sin(2t) + 0.0078238 \sin(3t) \\ &\quad - 0.0000254 \sin(4t) + 0.0002515 \sin(5t) - 0.0000008 \sin(6t) \\ &\quad + 0.0000105 \sin(7t) + 0.0000005 \sin(9t). \end{aligned}$$

$$E = -0.837779, \quad J = 2.68412$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4066400 \\ 0 \\ 0 \\ 1.0515721 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4059774 \\ 0 \\ 0 \\ -0.4548974 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.1147204 \\ 0 \\ 0 \\ -0.6961205 \end{pmatrix}$$

**16.**  $A = 16.61662$ ,  $\omega = 1/3$  (рис. 2.9п)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0.2077809 \\ &\quad + 1.3038070 \cos(t) - 0.0914475 \cos(2t) + 0.0203737 \cos(3t) \\ &\quad - 0.0056247 \cos(4t) + 0.0018176 \cos(5t) - 0.0006076 \cos(6t) \\ &\quad + 0.0002209 \cos(7t) - 0.0000809 \cos(8t) + 0.0000312 \cos(9t) \\ &\quad - 0.0000120 \cos(10t) + 0.0000048 \cos(11t) - 0.0000019 \cos(12t) \\ &\quad + 0.0000008 \cos(13t) - 0.0000003 \cos(14t) + 0.0000001 \cos(15t), \\ y_1(t) &= -1.2788394 \sin(t) + 0.0918660 \sin(2t) - 0.0197013 \sin(3t) \\ &\quad + 0.0056294 \sin(4t) - 0.0017723 \sin(5t) + 0.0006071 \sin(6t) \\ &\quad - 0.0002166 \sin(7t) + 0.0000807 \sin(8t) - 0.0000307 \sin(9t) \\ &\quad + 0.0000120 \sin(10t) - 0.0000047 \sin(11t) + 0.0000019 \sin(12t) \\ &\quad - 0.0000008 \sin(13t) + 0.0000003 \sin(14t) - 0.0000001 \sin(15t). \end{aligned}$$

$$E = -0.647280, \quad J = 0.98928$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4362621 \\ 0 \\ 0 \\ -0.6592213 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2162501 \\ 0 \\ 0 \\ 1.1539316 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2566807 \\ 0 \\ 0 \\ -0.5771620 \end{pmatrix}$$

### B.3 Линейная симметрия

Здесь приводятся все решения, перечисленные в табл. 3 и 4.

Все орбиты табл. 3 вычислялись с массами  $m_1 = 0.99$ ,  $m_2 = 1.01$ ,  $m_3 = 1.0$ .

Координаты тел  $m_1$  и  $m_2$  в основной системе приводятся для первого и второго тела, координаты третьего тела определяются из условия  $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 = 0$

1.  $A = 11.42286$ , угловая скорость вращения базовой системы:  $\omega = 1/4$  (рис. 2.15л)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2.4587995 \\ &\quad + 0.0000127 \cos(t) + 0.0030937 \cos(2t) + 0.0000034 \cos(3t) \\ &\quad + 0.0000446 \cos(4t) + 0.0000001 \cos(5t) + 0.0000011 \cos(6t), \\ y_1(t) &= -0.0000051 \sin(t) + 0.0016594 \sin(2t) + 0.0000023 \sin(3t) \\ &\quad + 0.0000337 \sin(4t) + 0.0000001 \sin(5t) + 0.0000009 \sin(6t), \\ x_2(t) &= -1.2109403 \\ &\quad - 0.7430792 \cos(t) - 0.0015371 \cos(2t) - 0.0012838 \cos(3t) \\ &\quad - 0.0000225 \cos(4t) - 0.0000121 \cos(5t) - 0.0000005 \cos(6t) \\ &\quad - 0.0000002 \cos(7t) \\ y_2(t) &= 0.7693911 \sin(t) - 0.0007815 \sin(2t) + 0.0015435 \sin(3t) \\ &\quad - 0.0000154 \sin(4t) + 0.0000178 \sin(5t) - 0.0000004 \sin(6t) \\ &\quad + 0.0000003 \sin(7t), \\ 0 &= m_1x_1(t) + m_2x_2(t) + m_3x_3(t) \\ 0 &= m_1y_1(t) + m_2y_2(t) + m_3y_3(t) \\ E &= -0.606002, \quad J = 1.36301 \end{aligned}$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4619552 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6189505 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.9568757 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2832669 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4608912 \\ 0 \\ 0 \\ -0.8988605 \end{pmatrix}$$

2.  $A = 12.04740$ ,  $\omega = 1/3$  (рис. 2.16с)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -1.0254852 \\ &\quad -0.7947362 \cos(t) - 0.0035637 \cos(2t) - 0.0016920 \cos(3t) \\ &\quad -0.0000839 \cos(4t) - 0.0000210 \cos(5t) - 0.0000033 \cos(6t) \\ &\quad -0.0000003 \cos(7t) - 0.0000002 \cos(8t), \\ y_1(t) &= 0.8409185 \sin(t) - 0.0018340 \sin(2t) + 0.0024956 \sin(3t) \\ &\quad -0.0000664 \sin(4t) + 0.0000502 \sin(5t) - 0.0000029 \sin(6t) \\ &\quad + 0.0000017 \sin(7t) - 0.0000001 \sin(8t), \\ x_2(t) &= 2.0201695 \\ &\quad -0.0000351 \cos(t) + 0.0070285 \cos(2t) - 0.0000099 \cos(3t) \\ &\quad + 0.0001658 \cos(4t) - 0.0000006 \cos(5t) + 0.0000065 \cos(6t) \\ &\quad + 0.0000003 \cos(8t), \\ y_2(t) &= 0.0000227 \sin(t) + 0.0035024 \sin(2t) - 0.0000064 \sin(3t) \\ &\quad + 0.0001246 \sin(4t) - 0.0000005 \sin(5t) + 0.0000055 \sin(6t) \\ &\quad + 0.0000003 \sin(8t), \\ E &= -0.639135, \quad J = 1.19429 \end{aligned} .$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.8255858 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2361876 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0273250 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6833141 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2402684 \\ 0 \\ 0 \\ -0.9239731 \end{pmatrix}$$

3.  $A = 12.06332$ ,  $\omega = 1/3$  (рис. 2.16п)

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 1.0155882 \\
 &\quad + 0.8003048 \cos(t) + 0.0035375 \cos(2t) + 0.0016793 \cos(3t) \\
 &\quad + 0.0000834 \cos(4t) + 0.0000203 \cos(5t) + 0.0000033 \cos(6t) \\
 &\quad + 0.0000003 \cos(7t) + 0.0000002 \cos(8t), \\
 y_1(t) &= -0.8463483 \sin(t) + 0.0018780 \sin(2t) - 0.0024914 \sin(3t) \\
 &\quad + 0.0000693 \sin(4t) - 0.0000502 \sin(5t) + 0.0000031 \sin(6t) \\
 &\quad - 0.0000017 \sin(7t) + 0.0000002 \sin(8t), \\
 x_2(t) &= 1.0149040 \\
 &\quad - 0.7845275 \cos(t) + 0.0035518 \cos(2t) - 0.0016657 \cos(3t) \\
 &\quad + 0.0000844 \cos(4t) - 0.0000211 \cos(5t) + 0.0000033 \cos(6t) \\
 &\quad - 0.0000003 \cos(7t) + 0.0000002 \cos(8t), \\
 y_2(t) &= 0.8296341 \sin(t) + 0.0016554 \sin(2t) + 0.0024293 \sin(3t) \\
 &\quad + 0.0000569 \sin(4t) + 0.0000482 \sin(5t) + 0.0000024 \sin(6t) \\
 &\quad + 0.0000016 \sin(7t) + 0.0000001 \sin(8t), \\
 E &= -0.639979, \quad J = 1.17690
 \end{aligned} .$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8212172 \\ 0 \\ 0 \\ -0.2429600 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2323290 \\ 0 \\ 0 \\ 0.9181714 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.0376573 \\ 0 \\ 0 \\ -0.6868227 \end{pmatrix}$$

4.  $A = 12.07962$ ,  $\omega = 1/3$  (рис. 2.16л)

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= -2.0408068 \\
 &\quad + 0.0000360 \cos(t) - 0.0071516 \cos(2t) + 0.0000100 \cos(3t) \\
 &\quad - 0.0001696 \cos(4t) + 0.0000006 \cos(5t) - 0.0000067 \cos(6t) \\
 &\quad \quad \quad - 0.0000003 \cos(8t), \\
 y_1(t) &= -0.0000230 \sin(t) - 0.0035606 \sin(2t) + 0.0000065 \sin(3t) \\
 &\quad - 0.0001275 \sin(4t) + 0.0000005 \sin(5t) - 0.0000056 \sin(6t) \\
 &\quad \quad \quad - 0.0000003 \sin(8t), \\
 x_2(t) &= 1.0050042 \\
 &\quad - 0.7901169 \cos(t) + 0.0035262 \cos(2t) - 0.0016534 \cos(3t) \\
 &\quad + 0.0000838 \cos(4t) - 0.0000205 \cos(5t) + 0.0000033 \cos(6t) \\
 &\quad - 0.0000003 \cos(7t) + 0.0000002 \cos(8t), \\
 y_2(t) &= 0.8350880 \sin(t) + 0.0016988 \sin(2t) + 0.0024251 \sin(3t) \\
 &\quad + 0.0000597 \sin(4t) + 0.0000481 \sin(5t) + 0.0000026 \sin(6t) \\
 &\quad + 0.0000016 \sin(7t) + 0.0000001 \sin(8t), \\
 E &= -0.640844, \quad J = 1.15915
 \end{aligned} .$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.0480884 \\ 0 \\ 0 \\ -0.6903640 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2168265 \\ 0 \\ 0 \\ 0.9185445 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8086127 \\ 0 \\ 0 \\ -0.2442696 \end{pmatrix}$$

5.  $A = 13.15385$ ,  $\omega = 1/2$  (рис. 2.13л)

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= -0.0001858 \\
 &\quad + 1.5847082 \cos(t) \quad + 0.0000014 \cos(2t) \quad + 0.0177719 \cos(3t) \\
 &\quad - 0.0000383 \cos(4t) \quad + 0.0011124 \cos(5t) \quad - 0.0000059 \cos(6t) \\
 &\quad + 0.0000996 \cos(7t) \quad - 0.0000009 \cos(8t) \quad + 0.0000105 \cos(9t) \\
 &\quad - 0.0000001 \cos(10t) \quad + 0.0000012 \cos(11t) \quad + 0.0000001 \cos(13t), \\
 y_1(t) &= -1.5705460 \sin(t) \quad - 0.0000203 \sin(2t) \quad - 0.0174552 \sin(3t) \\
 &\quad + 0.0000369 \sin(4t) \quad - 0.0010953 \sin(5t) \quad + 0.0000058 \sin(6t) \\
 &\quad - 0.0000983 \sin(7t) \quad + 0.0000009 \sin(8t) \quad - 0.0000103 \sin(9t) \\
 &\quad + 0.0000001 \sin(10t) \quad - 0.0000012 \sin(11t) \quad - 0.00000013 \sin(13t), \\
 x_2(t) &= 0.9549088 \\
 &\quad - 0.7802503 \cos(t) \quad - 0.0447622 \cos(2t) \quad - 0.0086749 \cos(3t) \\
 &\quad - 0.0018774 \cos(4t) \quad - 0.0005381 \cos(5t) \quad - 0.0001487 \cos(6t) \\
 &\quad - 0.0000477 \cos(7t) \quad - 0.0000147 \cos(8t) \quad - 0.0000050 \cos(9t) \\
 &\quad - 0.0000016 \cos(10t) \quad - 0.0000006 \cos(11t) \quad - 0.0000002 \cos(12t) \\
 &\quad - 0.0000001 \cos(13t), \\
 y_2(t) &= 0.7732548 \sin(t) \quad + 0.0502034 \sin(2t) \quad + 0.0085143 \sin(3t) \\
 &\quad + 0.0020465 \sin(4t) \quad + 0.0005292 \sin(5t) \quad + 0.0001578 \sin(6t) \\
 &\quad + 0.0000471 \sin(7t) \quad + 0.0000153 \sin(8t) \quad + 0.0000049 \sin(9t) \\
 &\quad + 0.0000017 \sin(10t) \quad + 0.0000006 \sin(11t) \quad + 0.0000002 \sin(12t) \\
 &\quad + 0.0000001 \sin(13t), \\
 E &= -0.697833, \quad J = 0.92132 \quad .
 \end{aligned}$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6034742 \\ 0 \\ 0 \\ -0.8272969 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1185873 \\ 0 \\ 0 \\ 0.9707998 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.7072126 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1614839 \end{pmatrix}$$

6.  $A = 13.15566$ ,  $\omega = 1/2$  (рис. 2.13с)

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 0.7853020 \\
 &\quad + 0.9185030 \cos(t) + 0.0123788 \cos(2t) + 0.0007174 \cos(3t) \\
 &\quad + 0.0006392 \cos(4t) - 0.0000785 \cos(5t) + 0.0000553 \cos(6t) \\
 &\quad - 0.0000119 \cos(7t) + 0.0000058 \cos(8t) - 0.0000015 \cos(9t) \\
 &\quad + 0.0000007 \cos(10t) - 0.0000002 \cos(11t), \\
 y_1(t) &= -1.0156340 \sin(t) + 0.0054098 \sin(2t) - 0.0048317 \sin(3t) \\
 &\quad + 0.0004925 \sin(4t) - 0.0002508 \sin(5t) + 0.0000477 \sin(6t) \\
 &\quad - 0.0000211 \sin(7t) + 0.0000052 \sin(8t) - 0.0000022 \sin(9t) \\
 &\quad + 0.0000006 \sin(10t) - 0.0000002 \sin(11t), \\
 x_2(t) &= 0.7841421 \\
 &\quad - 0.9006572 \cos(t) + 0.0120906 \cos(2t) - 0.0007959 \cos(3t) \\
 &\quad + 0.0006083 \cos(4t) + 0.0000640 \cos(5t) + 0.0000507 \cos(6t) \\
 &\quad + 0.0000098 \cos(7t) + 0.0000051 \cos(8t) + 0.0000012 \cos(9t) \\
 &\quad + 0.0000006 \cos(10t) + 0.0000002 \cos(11t), \\
 y_2(t) &= 0.9959087 \sin(t) + 0.0050418 \sin(2t) + 0.0046806 \sin(3t) \\
 &\quad + 0.0004424 \sin(4t) + 0.0002357 \sin(5t) + 0.0000414 \sin(6t) \\
 &\quad + 0.0000191 \sin(7t) + 0.0000044 \sin(8t) + 0.0000019 \sin(9t) \\
 &\quad + 0.0000005 \sin(10t) + 0.0000002 \sin(11t).
 \end{aligned}$$

$$| \qquad E = -0.697930, \quad J = 0.93926.$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7175102 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1596739 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1044804 \\ 0 \\ 0 \\ 0.9711650 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5948099 \\ 0 \\ 0 \\ -0.8228197 \end{pmatrix}$$

7.  $A = 13.15748$ ,  $\omega = 1/2$  (рис. 2.13п)

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 0.9604700 \\
 &\quad + 0.7961963 \cos(t) - 0.0459191 \cos(2t) + 0.0089418 \cos(3t) \\
 &\quad - 0.0019496 \cos(4t) + 0.0005612 \cos(5t) - 0.0001564 \cos(6t) \\
 &\quad + 0.0000504 \cos(7t) - 0.0000156 \cos(8t) + 0.0000053 \cos(9t) \\
 &\quad - 0.0000017 \cos(10t) + 0.0000006 \cos(11t) - 0.0000024 \cos(12t) \\
 &\quad + 0.0000001 \cos(13t), \\
 y_1(t) &= -0.7891726 \sin(t) + 0.0515043 \sin(2t) - 0.0087900 \sin(3t) \\
 &\quad + 0.0021245 \sin(4t) - 0.0005532 \sin(5t) + 0.0001658 \sin(6t) \\
 &\quad - 0.0000498 \sin(7t) + 0.0000163 \sin(8t) - 0.0000053 \sin(9t) \\
 &\quad + 0.0000018 \sin(10t) - 0.0000006 \sin(11t) + 0.0000002 \sin(12t) \\
 &\quad - 0.0000001 \sin(13t), \\
 x_2(t) &= 0.0001820 \\
 &\quad - 1.5681865 \cos(t) - 0.0000020 \cos(2t) - 0.0174586 \cos(3t) \\
 &\quad + 0.0000379 \cos(4t) - 0.0010860 \cos(5t) + 0.0000058 \cos(6t) \\
 &\quad - 0.0000967 \cos(7t) + 0.0000009 \cos(8t) - 0.0000101 \cos(9t) \\
 &\quad - 0.0000001 \cos(10t) - 0.0000012 \cos(11t) - 0.0000001 \cos(13t), \\
 y_2(t) &= 1.5543089 \sin(t) + 0.0000206 \sin(2t) + 0.0171498 \sin(3t) \\
 &\quad - 0.0000365 \sin(4t) + 0.0010694 \sin(5t) - 0.0000057 \sin(6t) \\
 &\quad + 0.0000954 \sin(7t) - 0.0000008 \sin(8t) + 0.0000100 \sin(9t) \\
 &\quad - 0.0000001 \sin(10t) + 0.0000011 \sin(11t) + 0.0000001 \sin(13t). \\
 E &= -0.698026, \quad J = 0.95484.
 \end{aligned}$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7181831 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1530319 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5866144 \\ 0 \\ 0 \\ 0.8184230 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0985207 \\ 0 \\ 0 \\ -0.9781088 \end{pmatrix}$$

8.  $A = 14.08066$ ,  $\omega = 1/3$  (рис. 2.17л)

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= -1.1631410 \\
 &\quad -0.6647223 \cos(t) + 0.0797437 \cos(2t) - 0.0219619 \cos(3t) \\
 &\quad + 0.0070258 \cos(4t) - 0.0027062 \cos(5t) + 0.0010668 \cos(6t) \\
 &\quad - 0.0004591 \cos(7t) + 0.0001984 \cos(8t) - 0.0000983 \cos(9t) \\
 &\quad + 0.0000411 \cos(10t) - 0.0000193 \cos(11t) + 0.0000091 \cos(12t) \\
 &\quad - 0.0000044 \cos(13t) + 0.0000021 \cos(14t) - 0.0000010 \cos(15t) \\
 &\quad + 0.0000005 \cos(16t) - 0.0000002 \cos(17t) + 0.0000001 \cos(18t), \\
 y_1(t) &= 0.6442871 \sin(t) - 0.0834186 \sin(2t) + 0.0211970 \sin(3t) \\
 &\quad - 0.0071504 \sin(4t) + 0.0026322 \sin(5t) - 0.0010730 \sin(6t) \\
 &\quad + 0.0004490 \sin(7t) - 0.0001984 \sin(8t) + 0.0000886 \sin(9t) \\
 &\quad - 0.0000410 \sin(10t) + 0.0000190 \sin(11t) - 0.0000090 \sin(12t) \\
 &\quad + 0.0000043 \sin(13t) - 0.0000021 \sin(14t) + 0.0000010 \sin(15t) \\
 &\quad - 0.0000005 \sin(16t) + 0.0000002 \sin(17t) - 0.0000001 \sin(18t), \\
 x_2(t) &= 1.1416635 \\
 &\quad - 0.6630044 \cos(t) - 0.0784310 \cos(2t) - 0.0213022 \cos(3t) \\
 &\quad - 0.0067024 \cos(4t) - 0.0025495 \cos(5t) - 0.0009880 \cos(6t) \\
 &\quad - 0.0004200 \cos(7t) - 0.0001784 \cos(8t) - 0.0000802 \cos(9t) \\
 &\quad - 0.0000358 \cos(10t) - 0.0000167 \cos(11t) - 0.0000077 \cos(12t) \\
 &\quad - 0.0000037 \cos(13t) - 0.0000017 \cos(14t) - 0.0000008 \cos(15t) \\
 &\quad - 0.0000004 \cos(16t) - 0.0000002 \cos(17t) - 0.0000001 \cos(18t), \\
 y_2(t) &= 0.6431607 \sin(t) + 0.0821494 \sin(2t) + 0.0205555 \sin(3t) \\
 &\quad + 0.0068393 \sin(4t) + 0.0024777 \sin(5t) + 0.0009966 \sin(6t) \\
 &\quad + 0.0004103 \sin(7t) + 0.0001789 \sin(8t) + 0.0000786 \sin(9t) \\
 &\quad + 0.0000359 \sin(10t) + 0.0000164 \sin(11t) + 0.0000077 \sin(12t) \\
 &\quad + 0.0000036 \sin(13t) + 0.0000017 \sin(14t) + 0.0000008 \sin(15t) \\
 &\quad + 0.0000004 \sin(16t) + 0.0000002 \sin(17t) + 0.0000001 \sin(18t).
 \end{aligned}$$

$$E = -0.747002, \quad J = 0.85327.$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.7650184 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0670958 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3679402 \\ 0 \\ 0 \\ 1.0432386 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3757486 \\ 0 \\ 0 \\ -0.9872443 \end{pmatrix}$$

9.  $A = 14.55725$ ,  $\omega = 1/4$  (рис. 2.15с)

$$x_1(t) = 1.2760193$$

$$\begin{aligned}
 & +0.6246577 \cos(t) - 0.0998114 \cos(2t) - 0.0319161 \cos(3t) \\
 & -0.0119562 \cos(4t) + 0.0052425 \cos(5t) - 0.0023848 \cos(6t) \\
 & +0.0011667 \cos(7t) - 0.0005786 \cos(8t) - 0.0002994 \cos(9t) \\
 & -0.0001559 \cos(10t) + 0.0000835 \cos(11t) - 0.0000448 \cos(12t) \\
 & +0.0000246 \cos(13t) - 0.0000135 \cos(14t) + 0.0000075 \cos(15t) \\
 & -0.0000042 \cos(16t) + 0.0000024 \cos(17t) - 0.0000013 \cos(18t) \\
 & +0.0000008 \cos(19t) - 0.0000004 \cos(20t) + 0.0000002 \cos(21t) \\
 & -0.0000001 \cos(22t) + 0.0000001 \cos(23t),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_1(t) = & -0.5923739 \sin(t) + 0.1005616 \sin(2t) - 0.0303686 \sin(3t) \\
 & +0.0118430 \sin(4t) - 0.0050473 \sin(5t) + 0.0023532 \sin(6t) \\
 & -0.0011319 \sin(7t) + 0.0005706 \sin(8t) - 0.0002920 \sin(9t) \\
 & +0.0001538 \sin(10t) - 0.0000817 \sin(11t) + 0.0000443 \sin(12t) \\
 & -0.0000241 \sin(13t) + 0.0000133 \sin(14t) - 0.0000074 \sin(15t) \\
 & +0.0000041 \sin(16t) - 0.0000023 \sin(17t) + 0.0000013 \sin(18t) \\
 & -0.0000007 \sin(19t) + 0.0000004 \sin(20t) - 0.0000002 \sin(21t) \\
 & +0.0000001 \sin(22t) - 0.0000001 \sin(23t),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= 0.0014364 \\
&\quad - 1.2297834 \cos(t) \quad - 0.0003099 \cos(2t) \quad - 0.0624906 \cos(3t) \\
&\quad + 0.0001018 \cos(4t) \quad - 0.0102059 \cos(5t) \quad + 0.0000473 \cos(6t) \\
&\quad - 0.0022582 \cos(7t) \quad + 0.0000179 \cos(8t) \quad - 0.0005761 \cos(9t) \\
&\quad + 0.0000065 \cos(10t) \quad - 0.0001597 \cos(11t) \quad + 0.0000024 \cos(12t) \\
&\quad - 0.0000467 \cos(13t) \quad + 0.0000009 \cos(14t) \quad - 0.0000142 \cos(15t) \\
&\quad + 0.0000003 \cos(16t) \quad - 0.0000044 \cos(17t) \quad + 0.0000001 \cos(18t) \\
&\quad - 0.0000014 \cos(19t) \quad - 0.0000005 \cos(21t) \quad - 0.0000002 \cos(23t), \\
y_2(t) &= 1.1667228 \sin(t) \quad + 0.0003923 \sin(2t) \quad + 0.0594739 \sin(3t) \\
&\quad - 0.0000882 \sin(4t) \quad + 0.0098267 \sin(5t) \quad - 0.0000442 \sin(6t) \\
&\quad + 0.0021910 \sin(7t) \quad - 0.0000171 \sin(8t) \quad + 0.0005619 \sin(9t) \\
&\quad - 0.0000063 \sin(10t) \quad + 0.0001563 \sin(11t) \quad - 0.0000023 \sin(12t) \\
&\quad + 0.0000459 \sin(13t) \quad - 0.0000008 \sin(14t) \quad + 0.0000140 \sin(15t) \\
&\quad - 0.0000003 \sin(16t) \quad + 0.0000044 \sin(17t) \quad - 0.0000001 \sin(18t) \\
&\quad + 0.0000014 \sin(19t) \quad + 0.0000005 \sin(21t) \quad + 0.0000002 \sin(23t).
\end{aligned}$$

$$E = -0.772286, \quad J = 0.88706.$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8244692 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0050039 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.3042376 \\ 0 \\ 0 \\ 1.0911701 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4889446 \\ 0 \\ 0 \\ -1.1070357 \end{pmatrix}$$

**10.**  $A = 16.64808$ ,  $\omega = 1/3$  (рис. 2.17п)

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 0.4151006 \\
 &\quad + 0.0060072 \cos(t) - 0.1803505 \cos(2t) - 0.0001234 \cos(3t) \\
 &\quad - 0.0086797 \cos(4t) - 0.0000239 \cos(5t) - 0.0007333 \cos(6t) \\
 &\quad - 0.0000037 \cos(7t) - 0.0000763 \cos(8t) - 0.0000006 \cos(9t) \\
 &\quad - 0.0000089 \cos(10t) - 0.0000001 \cos(11t) - 0.0000011 \cos(12t) \\
 &\quad \quad \quad - 0.0000001 \cos(14t), \\
 y_1(t) &= -0.0060556 \sin(t) + 0.1810340 \sin(2t) + 0.0001214 \sin(3t) \\
 &\quad + 0.0086872 \sin(4t) + 0.0000238 \sin(5t) + 0.0007330 \sin(6t) \\
 &\quad + 0.0000037 \sin(7t) + 0.0000763 \sin(8t) + 0.0000006 \sin(9t) \\
 &\quad + 0.0000089 \sin(10t) + 0.0000001 \sin(11t) + 0.0000011 \sin(12t) \\
 &\quad \quad \quad + 0.0000001 \sin(14t), \\
 x_2(t) &= -0.2031046 \\
 &\quad - 1.3442445 \cos(t) + 0.0882836 \cos(2t) - 0.0173181 \cos(3t) \\
 &\quad + 0.0042252 \cos(4t) - 0.0011999 \cos(5t) + 0.0003547 \cos(6t) \\
 &\quad - 0.0001134 \cos(7t) + 0.0000367 \cos(8t) - 0.0000125 \cos(9t) \\
 &\quad + 0.0000042 \cos(10t) - 0.0000015 \cos(11t) + 0.0000005 \cos(12t) \\
 &\quad - 0.0000002 \cos(13t) + 0.0000001 \cos(14t), \\
 y_2(t) &= 1.3232201 \sin(t) - 0.0886276 \sin(2t) + 0.0168853 \sin(3t) \\
 &\quad - 0.0042298 \sin(4t) + 0.0011773 \sin(5t) - 0.0003546 \sin(6t) \\
 &\quad + 0.0001118 \sin(7t) - 0.0000367 \sin(8t) + 0.0000123 \sin(9t) \\
 &\quad - 0.0000042 \sin(10t) + 0.0000015 \sin(11t) - 0.0000005 \sin(12t) \\
 &\quad + 0.0000002 \sin(13t) - 0.0000001 \sin(14t). \\
 E &= -0.883208, \quad J = 2.39407.
 \end{aligned}$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2311059 \\ 0 \\ 0 \\ 0.4734246 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.4730897 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6930001 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2590257 \\ 0 \\ 0 \\ -1.1686205 \end{pmatrix}$$

**11.**  $A = 16.76478$ ,  $\omega = 1/3$  (рис. 2.18л)

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= -1.0153453 \\
 &\quad -0.4446981 \cos(2t) - 0.0003014 \cos(4t) - 0.0004725 \cos(6t) \\
 &\quad -0.0000021 \cos(8t) - 0.0000024 \cos(10t), \\
 y_1(t) &= 0.4526167 \sin(2t) - 0.0001909 \sin(4t) + 0.0005114 \sin(6t) \\
 &\quad -0.0000020 \sin(8t) + 0.0000029 \sin(10t), \\
 x_2(t) &= 2.0004571 \\
 &\quad -0.0000019 \cos(2t) + 0.0006089 \cos(4t) - 0.0000005 \cos(6t) \\
 &\quad + 0.0000045 \cos(8t), \\
 y_2(t) &= 0.0000003 \sin(2t) + 0.0003516 \sin(4t) - 0.0000003 \sin(6t) \\
 &\quad + 0.0000035 \sin(8t).
 \end{aligned}$$

$$E = -0.889400, \quad J = 1.37020.$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.4608219 \\ 0 \\ 0 \\ 0.4206104 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0010682 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6684559 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5748652 \\ 0 \\ 0 \\ -1.0915448 \end{pmatrix}$$

**12.**  $A = 17.80747$ ,  $\omega = 1/4$  (рис. 2.15п)

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 0.6171166 \\
 &\quad + 0.0057823 \cos(t) - 0.2541723 \cos(2t) - 0.0002086 \cos(3t) \\
 &\quad - 0.0293197 \cos(4t) - 0.0001083 \cos(5t) - 0.0056887 \cos(6t) \\
 &\quad - 0.0000397 \cos(7t) - 0.0013469 \cos(8t) - 0.0000140 \cos(9t) \\
 &\quad - 0.0003546 \cos(10t) - 0.0000049 \cos(11t) - 0.0000997 \cos(12t) \\
 &\quad - 0.0000017 \cos(13t) - 0.0000293 \cos(14t) - 0.0000006 \cos(15t) \\
 &\quad - 0.0000089 \cos(16t) - 0.0000002 \cos(17t) - 0.0000028 \cos(18t) \\
 &\quad - 0.0000001 \cos(19t) - 0.0000009 \cos(20t) - 0.0000003 \cos(22t), \\
 y_1(t) &= -0.0060241 \sin(t) + 0.2522087 \sin(2t) + 0.0001864 \sin(3t) \\
 &\quad + 0.0289724 \sin(4t) + 0.0001041 \sin(5t) + 0.0056214 \sin(6t) \\
 &\quad + 0.0000387 \sin(7t) + 0.0013320 \sin(8t) + 0.0000137 \sin(9t) \\
 &\quad + 0.0003510 \sin(10t) + 0.0000048 \sin(11t) + 0.0000988 \sin(12t) \\
 &\quad + 0.0000017 \sin(13t) + 0.0000291 \sin(14t) + 0.0000006 \sin(15t) \\
 &\quad + 0.0000088 \sin(16t) + 0.0000002 \sin(17t) + 0.0000028 \sin(18t) \\
 &\quad + 0.0000001 \sin(19t) + 0.0000009 \sin(20t) + 0.0000003 \sin(22t), \\
 x_2(t) &= -0.3018093 \\
 &\quad - 1.1797243 \cos(t) + 0.1244470 \cos(2t) - 0.0382480 \cos(3t) \\
 &\quad + 0.0142880 \cos(4t) - 0.0061867 \cos(5t) + 0.0027551 \cos(6t) \\
 &\quad - 0.0013335 \cos(7t) + 0.0006484 \cos(8t) - 0.0003320 \cos(9t) \\
 &\quad + 0.0001697 \cos(10t) - 0.0000899 \cos(11t) + 0.0000474 \cos(12t) \\
 &\quad - 0.0000257 \cos(13t) + 0.0000139 \cos(14t) - 0.0000076 \cos(15t) \\
 &\quad + 0.0000042 \cos(16t) - 0.0000023 \cos(17t) + 0.0000013 \cos(18t) \\
 &\quad - 0.0000007 \cos(19t) + 0.0000004 \cos(20t) - 0.0000002 \cos(21t) \\
 &\quad + 0.0000001 \cos(22t),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(t) = & 1.1333803 \sin(t) - 0.1235162 \sin(2t) + 0.0360720 \sin(3t) \\
& - 0.0141249 \sin(4t) + 0.0059292 \sin(5t) - 0.0027238 \sin(6t) \\
& + 0.0012902 \sin(7t) - 0.0006415 \sin(8t) + 0.0003232 \sin(9t) \\
& - 0.0001680 \sin(10t) + 0.0000879 \sin(11t) - 0.0000470 \sin(12t) \\
& + 0.0000252 \sin(13t) - 0.0000138 \sin(14t) + 0.0000075 \sin(15t) \\
& - 0.0000042 \sin(16t) + 0.0000023 \sin(17t) - 0.0000013 \sin(18t) \\
& + 0.0000007 \sin(19t) - 0.0000004 \sin(20t) + 0.0000002 \sin(21t) \\
& - 0.0000001 \sin(22t).
\end{aligned}$$

$$E = -0.944715, \quad J = 2.06327.$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3314955 \\ 0 \\ 0 \\ 0.7484256 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.3853849 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6107577 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0710582 \\ 0 \\ 0 \\ -1.3578066 \end{pmatrix}$$

**13.**  $A = 20.59152, \omega = 1/3$  (рис. 2.18c)

$$\begin{aligned}
x_1(t) = & -1.0129392 \\
& - 0.3270151 \cos(3t) - 0.0000730 \cos(6t) - 0.0001847 \cos(9t) \\
& - 0.0000003 \cos(12t) - 0.0000005 \cos(15t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1(t) = & 0.3297934 \sin(3t) - 0.0000516 \sin(6t) + 0.0001917 \sin(9t) \\
& - 0.0000003 \sin(12t) + 0.0000005 \sin(15t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) = & 1.9957611 \\
& - 0.0000004 \cos(3t) + 0.0001514 \cos(6t) - 0.0000001 \cos(9t) \\
& + 0.0000006 \cos(12t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(t) = & 0.0000917 \sin(6t) - 0.0000001 \sin(9t) \\
& + 0.0000005 \sin(12t).
\end{aligned}$$

$$E = -1.09241, \quad J = 1.45497.$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.3402127 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5440633 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9959126 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6658596 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6890612 \\ 0 \\ 0 \\ -1.2111409 \end{pmatrix}$$

Пять орбит табл. 4 представляют орбиту В.3 ( $m_1 = 0.99$ ,  $m_2 = 1.01$ ,  $m_3 = 1.0$ ,  $\omega = 1/2$ ), но массы тел меняются: сумма масс остается той же  $m_1 + m_2 + m_3 = 3$ , одинакова и масса третьего тела  $m_3 = 1.0$ , а массы первых тел изменяются. Исходная орбита изображена на рис. 2.13, остальные на рис. 2.14

2.  $m_1 = 0.95$ ,  $A = 13.15312$ .

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= -0.9718961 \\
 &\quad + 0.8281011 \cos(t) + 0.0482772 \cos(2t) + 0.0094930 \cos(3t) \\
 &\quad + 0.0021012 \cos(4t) + 0.0006103 \cos(5t) + 0.0001729 \cos(6t) \\
 &\quad + 0.0000562 \cos(7t) + 0.0000177 \cos(8t) + 0.0000061 \cos(9t) \\
 &\quad + 0.0000020 \cos(10t) + 0.0000007 \cos(11t) + 0.0000002 \cos(12t) \\
 &\quad + 0.0000001 \cos(13t), \\
 y_1(t) &= -0.8210266 \sin(t) - 0.0541559 \sin(2t) - 0.0093615 \sin(3t) \\
 &\quad - 0.0022883 \sin(4t) - 0.0006044 \sin(5t) - 0.0001831 \sin(6t) \\
 &\quad - 0.0000558 \sin(7t) - 0.0000184 \sin(8t) - 0.0000060 \sin(9t) \\
 &\quad - 0.0000021 \sin(10t) - 0.0000007 \sin(11t) - 0.0000003 \sin(12t) \\
 &\quad - 0.0000001 \sin(13t), \\
 x_2(t) &= -0.0008726 \\
 &\quad - 1.5351842 \cos(t) + 0.0000157 \cos(2t) - 0.0168301 \cos(3t) \\
 &\quad - 0.0001851 \cos(4t) - 0.0010354 \cos(5t) - 0.0000282 \cos(6t) \\
 &\quad - 0.0000914 \cos(7t) - 0.0000041 \cos(8t) - 0.0000095 \cos(9t) \\
 &\quad - 0.0000006 \cos(10t) - 0.0000011 \cos(11t) - 0.0000001 \cos(12t) \\
 &\quad - 0.0000001 \cos(13t), \\
 y_2(t) &= 1.5218700 \sin(t) - 0.0001061 \sin(2t) + 0.0165361 \sin(3t) \\
 &\quad + 0.0001785 \sin(4t) + 0.0010197 \sin(5t) + 0.0000276 \sin(6t) \\
 &\quad + 0.0000902 \sin(7t) + 0.0000040 \sin(8t) + 0.0000094 \sin(9t) \\
 &\quad + 0.0000006 \sin(10t) + 0.0000011 \sin(11t) + 0.0000001 \sin(12t) \\
 &\quad + 0.0000001 \sin(13t).
 \end{aligned}$$

$$E = -0.697795, \quad J = 1.01964.$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0830573 \\ 0 \\ 0 \\ -1.0128514 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5542266 \\ 0 \\ 0 \\ 0.8008997 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7108424 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1212641 \end{pmatrix}$$

3.  $m_1 = 0.9$ ,  $A = 13.12580$ .

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 0.9867797 \\
 &\quad + 0.8680048 \cos(t) - 0.0513121 \cos(2t) + 0.0102168 \cos(3t) \\
 &\quad - 0.0023053 \cos(4t) + 0.0006774 \cos(5t) - 0.0001959 \cos(6t) \\
 &\quad + 0.0000644 \cos(7t) - 0.0000207 \cos(8t) + 0.0000072 \cos(9t) \\
 &\quad - 0.0000025 \cos(10t) + 0.0000009 \cos(11t) - 0.0000003 \cos(12t) \\
 &\quad + 0.0000001 \cos(13t), \\
 y_1(t) &= -0.8608759 \sin(t) + 0.0575678 \sin(2t) - 0.0101159 \sin(3t) \\
 &\quad + 0.0025087 \sin(4t) - 0.0006746 \sin(5t) + 0.0002072 \sin(6t) \\
 &\quad - 0.0000644 \sin(7t) + 0.0000215 \sin(8t) - 0.0000072 \sin(9t) \\
 &\quad + 0.0000025 \sin(10t) - 0.0000009 \sin(11t) + 0.0000003 \sin(12t) \\
 &\quad - 0.0000001 \sin(13t), \\
 x_2(t) &= 0.0016527 \\
 &\quad - 1.4940039 \cos(t) - 0.0000447 \cos(2t) - 0.0160397 \cos(3t) \\
 &\quad + 0.0003588 \cos(4t) - 0.0009761 \cos(5t) + 0.0000539 \cos(6t) \\
 &\quad - 0.0000859 \cos(7t) + 0.0000077 \cos(8t) - 0.0000090 \cos(9t) \\
 &\quad + 0.0000011 \cos(10t) - 0.0000010 \cos(11t) + 0.0000002 \cos(12t) \\
 &\quad - 0.0000001 \cos(13t), \\
 y_2(t) &= 1.4813854 \sin(t) + 0.0002184 \sin(2t) + 0.0157628 \sin(3t) \\
 &\quad - 0.0003464 \sin(4t) + 0.0009613 \sin(5t) - 0.0000528 \sin(6t) \\
 &\quad + 0.0000848 \sin(7t) - 0.0000076 \sin(8t) + 0.0000089 \sin(9t) \\
 &\quad - 0.0000011 \sin(10t) + 0.0000010 \sin(11t) - 0.0000002 \sin(12t) \\
 &\quad + 0.0000001 \sin(13t).
 \end{aligned}$$

$$E = -0.697795, \quad J = 1.01964.$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8119145 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1374498 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5090859 \\ 0 \\ 0 \\ 0.7782846 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0292715 \\ 0 \\ 0 \\ -0.9798179 \end{pmatrix}$$

4.  $m_1 = 0.8$ ,  $A = 12.99779$ .

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 1.0187407 \\
 &\quad + 0.9479065 \cos(t) - 0.0577004 \cos(2t) + 0.0117944 \cos(3t) \\
 &\quad - 0.0027693 \cos(4t) + 0.0008342 \cos(5t) - 0.0002517 \cos(6t) \\
 &\quad + 0.0000849 \cos(7t) - 0.0000285 \cos(8t) + 0.0000102 \cos(9t) \\
 &\quad - 0.0000036 \cos(10t) + 0.0000013 \cos(11t) - 0.0000005 \cos(12t) \\
 &\quad + 0.0000002 \cos(13t), \\
 y_1(t) &= -0.9406877 \sin(t) + 0.0647474 \sin(2t) - 0.0117738 \sin(3t) \\
 &\quad + 0.0030097 \sin(4t) - 0.0008400 \sin(5t) + 0.0002656 \sin(6t) \\
 &\quad - 0.0000858 \sin(7t) + 0.0000295 \sin(8t) - 0.0000103 \sin(9t) \\
 &\quad + 0.0000037 \sin(10t) - 0.0000013 \sin(11t) + 0.0000005 \sin(12t) \\
 &\quad - 0.0000002 \sin(13t), \\
 x_2(t) &= 0.0029512 \\
 &\quad - 1.4118860 \cos(t) - 0.0001321 \cos(2t) - 0.0144396 \cos(3t) \\
 &\quad + 0.0006700 \cos(4t) - 0.0008701 \cos(5t) + 0.0000982 \cos(6t) \\
 &\quad - 0.0000782 \cos(7t) + 0.0000138 \cos(8t) - 0.0000085 \cos(9t) \\
 &\quad + 0.0000020 \cos(10t) - 0.0000010 \cos(11t) + 0.0000003 \cos(12t) \\
 &\quad - 0.0000001 \cos(13t), \\
 y_2(t) &= 1.4006287 \sin(t) + 0.0004513 \sin(2t) + 0.0141919 \sin(3t) \\
 &\quad - 0.0006474 \sin(4t) + 0.0008564 \sin(5t) - 0.0000961 \sin(6t) \\
 &\quad + 0.0000771 \sin(7t) - 0.0000136 \sin(8t) + 0.0000084 \sin(9t) \\
 &\quad - 0.0000020 \sin(10t) + 0.0000010 \sin(11t) - 0.0000003 \sin(12t) \\
 &\quad + 0.0000001 \sin(13t).
 \end{aligned}$$

$$E = -0.689554, \quad J = 1.23654.$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9186183 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1217978 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.4236802 \\ 0 \\ 0 \\ 0.7338794 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1735216 \\ 0 \\ 0 \\ -0.9780935 \end{pmatrix}$$

5.  $m_1 = 0.7$ ,  $A = 12.77091$ .

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 1.0540227 \\
 &\quad + 1.0279285 \cos(t) - 0.0645670 \cos(2t) + 0.0135723 \cos(3t) \\
 &\quad - 0.0033221 \cos(4t) + 0.0010283 \cos(5t) - 0.0003239 \cos(6t) \\
 &\quad + 0.0001124 \cos(7t) - 0.0000393 \cos(8t) + 0.0000145 \cos(9t) \\
 &\quad - 0.0000054 \cos(10t) + 0.0000020 \cos(11t) - 0.0000008 \cos(12t) \\
 &\quad + 0.0000003 \cos(13t) - 0.0000001 \cos(14t), \\
 y_1(t) &= -1.0206325 \sin(t) + 0.0724560 \sin(2t) - 0.0136616 \sin(3t) \\
 &\quad + 0.0036066 \sin(4t) - 0.0010464 \sin(5t) + 0.0003415 \sin(6t) \\
 &\quad - 0.0001147 \sin(7t) + 0.0000408 \sin(8t) - 0.0000147 \sin(9t) \\
 &\quad + 0.0000055 \sin(10t) - 0.0000021 \sin(11t) + 0.0000008 \sin(12t) \\
 &\quad - 0.0000003 \sin(13t) + 0.0000001 \sin(14t), \\
 x_2(t) &= 0.0039121 \\
 &\quad - 1.3300580 \cos(t) - 0.0002462 \cos(2t) - 0.0128062 \cos(3t) \\
 &\quad + 0.0009266 \cos(4t) - 0.0007788 \cos(5t) + 0.0001331 \cos(6t) \\
 &\quad - 0.0000741 \cos(7t) + 0.0000187 \cos(8t) - 0.0000088 \cos(9t) \\
 &\quad + 0.0000027 \cos(10t) - 0.0000012 \cos(11t) + 0.0000004 \cos(12t) \\
 &\quad - 0.0000002 \cos(13t) + 0.0000001 \cos(14t), \\
 y_2(t) &= 1.3201375 \sin(t) + 0.0006813 \sin(2t) + 0.0125823 \sin(3t) \\
 &\quad - 0.0008961 \sin(4t) + 0.0007657 \sin(5t) - 0.0001302 \sin(6t) \\
 &\quad + 0.0000729 \sin(7t) - 0.0000184 \sin(8t) + 0.0000086 \sin(9t) \\
 &\quad - 0.0000027 \sin(10t) + 0.0000012 \sin(11t) - 0.0000004 \sin(12t) \\
 &\quad + 0.0000002 \sin(13t) - 0.0000001 \sin(14t).
 \end{aligned}$$

$$E = -0.677518, \quad J = 1.35872.$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0284225 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1081788 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.3389798 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6896437 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3207779 \\ 0 \\ 0 \\ -0.9722619 \end{pmatrix}$$