中国传媒大学

2016—2017 学年第二学期期末考试试卷（A 卷）

参考答案及评分标准

考试科目：概率论与数理统计 A　　课程编码：123012

考试班级：16 工科　　考试方式：闭卷

一、选择题（在每小题给出的四个选项中，选择正确答案填在题中的括号内，本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

1、设 $A,\ B,\ C$ 是任意事件，下列各式不成立的是（ B ）.

(A)　$(A-B)\cup B = A\cup B$；

(B)　$(A\cup B)-A = B$；

(C)　$(A\cup B)-AB = A\bar{B}\cup\bar{A}B$；

(D)　$(A\cup B)\bar{C} = (A-C)\cup(B-C)$.

2、设连续型随机变量 X 的概率密度函数和分布函数分别为 $f(x)$ 和 $F(x)$，则下列选项中正确的是（ C ）.

(A)　$0\le f(x)\le 1$；　　(B)　$P\{X\le x\}\le F(x)$；

(C)　$P\{X\le x\} = F(x)$；　　(D)　$P\{X = x\} = f(x)$.

3、设随机变量 $X\sim U(0,\ 6)$，$Y\sim b(12,\ \frac{1}{4})$，且 $X,\ Y$ 相互独立，根据切比雪夫不等式有：$P\{X-3<Y<X+3\}$（ D ）

(A)　≤ 0.25；　(B)　$\le\frac{5}{12}$；　(C)　≥ 0.75；　(D)　$\ge\frac{5}{12}$.

4、设总体 X 服从分布 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则以下结论中错误的是（D）.

(A)　$\overline{X}$ 是 λ 的矩法估计量；

(B) $\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是λ的矩法估计量；

(C) $\overline{X}$ 是λ的最大似然估计量；

(D) $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是λ的最大似然估计量.

二、填空题（把正确答案填在题中的横线上，本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

1、设事件A, B仅有一个发生的概率为0.3，且$P(A)+P(B)=0.5$，则A, B至少有一个不发生的概率为$\underline{0.9}$.

2、设随机变量X服从泊松分布，且$P\{X\le 1\}=4P\{X=2\}$，则$P\{X=3\}=\underline{\dfrac{1}{6}e^{-1}}$.

3、设随机变量X在区间$(0, 2)$上服从均匀分布，则随机变量$Y=X^2$在区间$(0,4)$内的概率密度函数$f_Y(y)=\underline{\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4, \\ 0, & 其它.\end{cases}}$.

4、设X_1, X_2, X_3, X_4, X_5是总体$X\sim N(0,1)$的一个简单随机样本，已知$Y=\dfrac{k(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}\sim t(3)$，则$k=\underline{\sqrt{\dfrac{3}{2}}}$.

三、解答题（本大题共 8 小题，每题 8 分，共计 64 分）

1、设某人从外地赶来参加紧急会议，他乘火车、轮船、汽车或飞机来的概率分别是$\dfrac{3}{10}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{10}$，$\dfrac{2}{5}$. 如果他乘飞机来，不会迟到；而乘火车、轮船或汽车来，迟到的概率分别是$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{2}$. 事实上此人迟到了，请问他乘哪一种交通工具的可能性最大？

解：设事件A_1，A_2，A_3，A_4分别表示交通工具“火车、轮船、汽车和飞机”，其概率分别等于$\frac{3}{10}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{2}{5}$．事件B表示“迟到”．（2 分）

已知概率$P(B|A_i),\ i=1,2,3,4$分别等于$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$和0．

则$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{23}{120}$，（4 分）

$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{9}{23}$，$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{8}{23}$

$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{6}{23}$，$P(A_4|B)=\frac{P(A_4)P(B|A_4)}{P(B)}=0$

由概率判断他乘火车的可能性最大.（8 分）

2、设连续型随机变量X的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0\le x\le 2,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

求：（1）$P\{|2X-1|<2\}$；（2）$Y=X^2$的概率密度函数$f_Y(y)$；

（3）$E(2X-1)$.

解：（1）$P\{|2X-1|<2\}=P\{-0.5<X<1.5\}=\frac{9}{16}$.（2 分）

（2）$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}(f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})), & 0\le y\le 4,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0\le y\le 4,\\ 0, & otherwise.\end{cases}.$$（5 分）

（3）$E(2X-1)=2EX-1=2\times\frac{4}{3}-1=\frac{5}{3}$.　　（8 分）

3、设随机变量 X 与 Y 相互独立，概率密度函数分别为：

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数.

解：$Z=2X+Y$ 的分布函数为：$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{2X+Y\le z\}$

当 $z<0$ 时，　$F_Z(z)=0$　　（2 分）

当 $0\le z\le 2$ 时，

$$F_Z(z)=\iint\limits_{2x+y\le z} f_X(x)f_Y(y)dxdy=\int_0^{z/2}dx\int_0^{z-2x}e^{-y}dy=\frac{1}{2}(z-1+e^{-z})$$（4 分）

当 $z>2$ 时，

$$F_Z(z)=\iint\limits_{2x+y\le z} f_X(x)f_Y(y)dxdy=\int_0^{1}dx\int_0^{z-2x}e^{-y}dy=1-\frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}$$（6 分）

故 $Z=2X+Y$ 的概率密度为：$f_Z(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}) & 0\le z\le 2\\ \frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z} & z>2\end{cases}$.

（8 分）

4、从学校乘汽车到火车站的途中有3个交通岗，假设在各个交通岗遇到红灯是相互独立的，并且概率都是 $\frac{2}{5}$. 设 X 为途中遇到红灯的次数，求 X 的概率分布律、分布函数、数学期望和方差.

解：X 的概率分布律：$P\{X=k\}=C_3^k\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{3-k}\ (k=0,1,2,3)$

X 的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0\ , & x<0,\\ \dfrac{27}{125}, & 0\le x<1,\\ \dfrac{81}{125}, & 1\le x<2,\\ \dfrac{117}{125}, & 2\le x<3,\\ 1\ , & x\ge 3.\end{cases}$$ （3 分）

$$EX=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5},\qquad DX=3\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{18}{25}.$$ （8 分）

5、设各零件的重量都是随机变量，它们相互独立，且服从相同的分布，其数学期望为$0.5kg$，均方差为$0.1kg$，问5000只零件的总重量超过$2510kg$的概率是多少？$(\Phi(1.414)=0.9215,\ \sqrt{2}=1.414)$

解：设X_i={第i个零件的重量}　（$i=1,2,\cdots,5000$）

则$X_1,X_2,\cdots X_{5000}$独立同分布　　（2 分）

且$E(X_i)=0.5$　　$D(X_i)=0.1^2$　　（$i=1,2,\cdots,5000$）

由独立同分布的中心极限定理知随机变量

$$Z=\frac{\sum_{i=1}^{5000}X_i-5000\times 0.5}{\sqrt{5000\times 0.1^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{5000}X_i-2500}{\sqrt{50}}\sim N(0,1)$$ （4 分）

则$P\{\sum_{i=1}^{5000}X_i>2510\}=P\{\dfrac{\sum_{i=1}^{5000}X_i-2500}{\sqrt{50}}\ge\dfrac{2510-2500}{\sqrt{50}}\}$

$=1-\Phi(\dfrac{10}{\sqrt{50}})=1-\Phi(1.414)=1-0.9215=0.0785.$　　（8 分）

6、设在总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽得一容量为16的样本，这里μ,σ^2均已知．（$\chi^2_{0.01}(15)=30.577$）

求：（1） $P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2}\le 2.041\right\}$，其中 S^2 为样本方差；（2） $D(S^2)$.

解：（1）由正态总体样本方差的分布可得：

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，故 $\frac{15S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(15)$，所以，

$P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2}\le 2.041\right\}=P\left\{\frac{15S^2}{\sigma^2}\le 15\times 2.041\right\}=P\left\{\frac{15S^2}{\sigma^2}\le 30.615\right\}$，（2 分）

查表的 $\chi^2_{0.01}(15)=30.577$， $P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2}\le 2.041\right\}=0.99$ （5 分）

（2） 由 $D(\chi^2(n-1))=2(n-1)$，故 $D\left(\frac{15S^2}{\sigma^2}\right)=\frac{15^2}{\sigma^4}D\left(S^2\right)=30$，故

$D(S^2)=2\sigma^4/15.$ （8 分）

7、设总体 X 的概率密度函数为:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}\qquad(\theta>0)$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本.

求：（1）参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$；

（2）验证估计量 $\hat{\theta}$ 是否是参数 θ 的无偏估计量.

解（1） $L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}}$ （2 分）

$$\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=-n\ln\theta-\frac{n\overline{x}}{\theta}$$

令 $\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{n\overline{x}}{\theta^2}=0$

解出：$\hat{\theta}=\bar{X}$.（6 分）

（2）$\because E\hat{\theta}=E\bar{X}=EX=\theta$.

$\therefore \hat{\theta}$是θ的无偏估计量.（8 分）

8、设某机器生产的零件长度为随机变量 X（单位：cm），且 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，今抽取容量为16的样本，测得样本均值 $\bar{x}=10$，样本方差 $s^2=0.16$. $(t_{0.025}(15)=2.132,\ \ \chi^2_{0.05}(15)=24.996)$

求：（1） μ的置信度为0.95的置信区间；

（2） 检验假设$H_0:\sigma^2\le 0.1$（显著性水平为0.05）.

解：（1）μ的置信度为$1-\alpha$下的置信区间为：

$$(\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\quad \bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$（2 分）

$$\bar{X}=10,\ s=0.4,\ n=16,\ \alpha=0.05,\ t_{0.025}(15)=2.132$$

所以μ的置信度为 0.95 的置信区间为（9.7868，10.2132）.（4 分）

（2）$H_0:\sigma^2\le 0.1$的拒绝域为$\chi^2\ge\chi^2_\alpha(n-1)$.（6 分）

$$\chi^2=\frac{15S^2}{0.1}=15\times 1.6=24,\quad \chi^2_{0.05}(15)=24.996$$

因为 $\chi^2=24<24.996=\chi^2_{0.05}(15)$，所以接受$H_0$.（8 分）

四、证明题（本大题 2 小题，每小题 6 分，共计 12 分）

1、设 $0<P(B)<1$，且事件 A 与事件 B 互不相容，试证：

$$P(A\,|\,\bar{B})=\frac{P(A)}{1-P(B)}.$$

证明：由 $AB=\Phi$ 知 $A\subset\bar{B}$， 得 $A\bar{B}=A$（3 分）

所以 $P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)}{1-P(B)}$.（6 分）

2、对来自具有方差σ^2的总体的容量为2的简单样本，证明：

$$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(X_i-\overline{X})^2 \text{ 的期望值是 } \frac{\sigma^2}{2}.$$

证明： 设样本为X_1， X_2，则其均值$\overline{X}=\dfrac{1}{2}(X_1+X_2)$.

$E(S^2)=\dfrac{1}{2}E\sum_{i=1}^{2}(X_i-\overline{X})^2=\dfrac{1}{2}E\sum_{i=1}^{2}[(X_i-\mu)-(\overline{X}-\mu)]^2$ 其中 μ 为总体均值．即：$E(S^2)=\dfrac{1}{2}E\left[\sum_{i=1}^{2}(X_i-\mu)^2-2(\overline{X}-\mu)^2\right]$（2 分）

$$=\frac{1}{2}\left[E\sum_{i=1}^{2}(X_i-\mu)^2-2E(\overline{X}-\mu)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\sigma^2-2\frac{\sigma^2}{2}\right]=\frac{1}{2}\sigma^2.$$（4 分）

或利用$E[\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]=DX$，得

$E[\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]=E[\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]=\dfrac{1}{2}DX=\dfrac{1}{2}\sigma^2$.（6 分）