中国传媒大学

2014 — 2015 学年第 一 学期期末考试试卷 A

考试科目： 概率论与数理统计 B **课程编码：** 123013

考试班级： 2013 级工管等 **考试方式：** 闭卷

题目	一	二	三	四	总分
得分					

注意：解答过程中您可能会用到如下数据：

$\Phi(8)=0.7881$，$\chi^2_{0.1}(10)=16$，$t_{0.025}(8)=2.306$，$t_{0.05}(8)=1.8595$.

得分	评卷人

一、选择题（在每小题四个备选答案中选出正确答案填在括号中，本大题共 4 小题，每小题 3 分，共计 12 分）

B 1. 已知随机变量 $X\sim N(2,\ 6^2)$，$Y\sim N(-2,\ 4^2)$ 且 X 与 Y 相互独立，则随机变量 $Z=X-2Y$ 的分布为(　　　　).

(A) $N(-2,4)$　(B) $N(6,10^2)$　(C) $N(6,68)$　(D) $\chi^2(6)$

D 2. 已知 $X\sim B(n,p)$，且 $E(X)=16, D(X)=3.2$, 则参数 n,p 的值为(　　　).

(A) $n=40, p=0.4$　　(B) $n=60, p=0.4$

(C) $n=80, p=0.2$　　(D) $n=20, p=0.8$

C 3. 设 X，Y 是两个相互独立的随机变量，分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则随机变量 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 为(　　　　).

(A) $F_Z(z)=\max\{F_X(z),F_Y(z)\}$ (B) $F_Z(z)=\min\{F_X(z),F_Y(z)\}$

(C) $F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$ (D) $F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)$

4. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，其中$\overline{X}$和S^2分别是样本均值和样本方差，则统计量$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$的分布为( ).

(A) $\chi^2(n-1)$ (B) $N(0,1)$ (C) $t(n-1)$ (D) $t(n)$

得分	评卷人

二、填空题（将正确答案填在括号内，本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

1. 设随机变量$X\sim N(2,\sigma^2)$，且$P(2<X<4)=0.4$，则$P(X\geq 0)=$ 0.9 .

2. 设随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leq x\leq 0,\\ 1-x, & 0<x\leq 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

则方差$D(X)=$ $\frac{1}{6}$.

3. 设$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$是取自正态总体$X\sim N(0,0.3^2)$的一个样本，求$P\left\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\right\}=$ 0.1 .

4. 已知随机变量X，数学期望$E(X)=2$和方差$D(X)=\frac{1}{3}$，根据切比雪夫不等式估计，试求出$P(|X-2|\geq 2)$的最大概率 $\frac{1}{12}$.

得分	评卷人

三、解答下列各题（本大题共 7 小题，每小题 10 分，共 70 分）

1. 从过去的资料中知，在出口罐头导致索赔事件中，有 50%是质量问题，30%是数量短缺问题，20%是包装问题. 又知在质量问题争议中，经过协商解决不诉诸法律的占 40%，数量问题中，经过协商解决的占 60%，包装问题中，经过协商解决的占 75%. 如果出一索赔事件，在争议中经过协商解决了，问这一案件不属于质量问题的概率是多少？

设A为经过协商解决. B_1为质量问题 B_2为数量短缺问题 B_3为包装问题

$$P(B_1|A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{P(A|B_1)\cdot P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)}$$

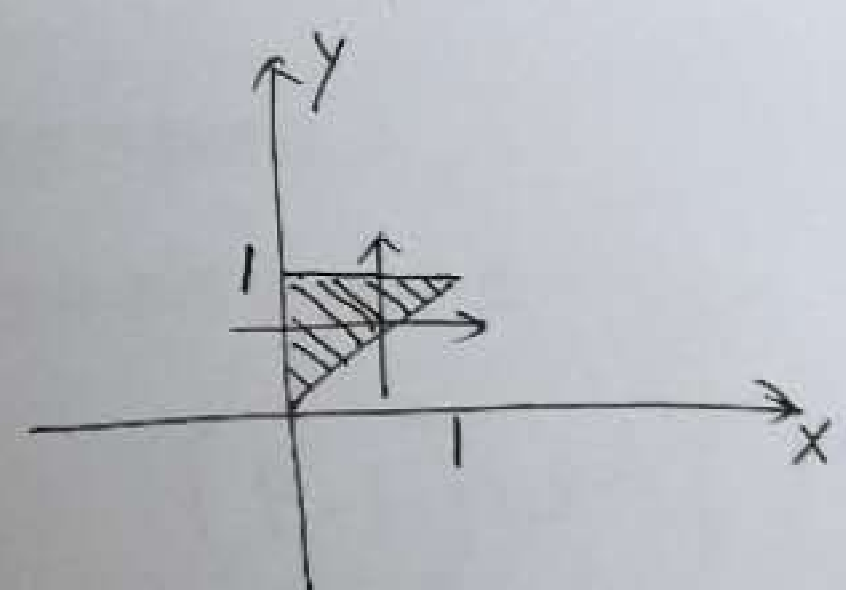
$$=\frac{0.4\times0.5}{0.4\times0.5+0.6\times0.3+0.75\times0.2}=\frac{0.2}{0.53}=0.3773$$

$$P(\overline{B_1}|A)=1-P(B_1|A)=0.6227$$

2. 若(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}kxy, & 0\le x\le y,\ 0\le y\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求（1）常数k，（2）问X与Y是否相互独立？



(1) $\int_0^1 dx\int_x^1 kxy\,dy=\frac{1}{8}k=1$

$k=8$

(2) 当 $0\le x\le 1$时

$$f_X(x)=\int_x^1 8xy\,dy=4x-4x^3$$

$$f_X(x)=\begin{cases}4x-4x^3, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

当 $0\le y\le 1$时

$$f_Y(y)=\int_0^y 8xy\,dx=4y^3$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$

X. Y 不独立

3. 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（分钟）服从指数分布，其概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-x/5} & x>0,\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟，他就离开. 他一个月要到银行 5 次，以 Y 表示他未等到服务而离开窗口的次数，求 $P\{Y\geq 1\}$.

$F_X(x)=\int_0^x \frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}dt=-\left(e^{-\frac{t}{5}}\right)_0^x=1-e^{-\frac{x}{5}}$

$P\{X>10\}=1-P\{X\leq 10\}=1-F_X(10)=e^{-2}$

$Y\sim B(5,e^{-2})$

$P\{Y=0\}=C_5^0(e^{-2})^0[1-e^{-2}]^5=(1-e^{-2})^5$

$P\{Y\geq 1\}=1-P\{Y=0\}=1-(1-e^{-2})^5=0.516$

4. 已知随机变量 $X\sim U(2,6)$ 的均匀分布，随机变量 $Y=2X-3$，

求：（1）Y 的概率密度函数，（2）数学期望 $E(Y)$ 和方差 $D(Y)$.

(1) $Y\sim U(1,9)$

$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & 1<x<9\\ 0, & 其他\end{cases}$

(2) $E(Y)=\frac{1+9}{2}=5$

$D(Y)=\frac{(9-1)^2}{12}=\frac{16}{3}$

5. 据以往经验，某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布，现随机地取 16 只，设它们的寿命是相互独立的. 求这 16 只元件的寿命的总和大于 1920 小时的概率.

$E(X)=100,\ D(X)=10000$

$Y=\sum_{i=1}^{16} X_k \sim N(1600,\ 160000)$

$P\{Y>1920\}=1-P\left\{\frac{Y-1600}{400}\le 0.8\right\}=1-\Phi(0.8)=0.2119$

6. 设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 为总体的一个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为一个相应的样本值，总体分布的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\theta c^{\theta} x^{-(\theta+1)}, & x>c, \\ 0, & 其他.\end{cases}$ 其中 $c>0$ 为已知，$\theta>1$ 且 θ 为未知参数. 求参数 θ 的最大似然估计量和最大似然估计值.

?

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} \theta c^{\theta} x_i^{-(\theta+1)}$

$=\theta^n c^{n\theta}\left(x_1^{-(\theta+1)} x_2^{-(\theta+1)} \cdots x_n^{-(\theta+1)}\right)$

$\ln L(\theta)=n\ln\theta+n\theta\ln c-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\frac{n}{\theta}+n\ln c-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

$\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-n\ln c}$ 最大估计量

$\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\ln c}$ 最大估计值

7. 水泥厂用自动包装机包装水泥，每袋额定重量是 50kg. 某日开工后随机抽查了 9 袋，称得重量如下：

49.6　49.3　50.1　50.0　49.2　49.9　49.8　51.0　50.2.

设每袋重量服从正态分布，参数均未知。问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，包装机工作是否正常？设 $H_0: \mu=50$. $H_1: \mu\neq 50$

$\bar{x}=49.9$

$s=0.5362$

$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{49.9-50}{0.5362/3}=-0.5595$

$t_{0.025}(8)=2.306$

$|t|<t_{0.025}(8)$ 不在拒绝域内

故 H_0 成立，包装机工作正常

得分	评卷人

四、证明题（本题共 1 小题，共 6 分）

设总体 X 的密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\geq 0,\theta>0, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试证：θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 是 θ 的无偏估计.

只需证 $E(\hat{\theta})=\theta$

$E(\hat{\theta})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}X_i)$

$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$

由于 $X\sim E(\theta)$　$\therefore E(X)=\theta$

由于 X_i 是 X 的样本，X_i 与 X 同分布

$\therefore E(X_i)=\theta$

$\therefore E(\hat{\theta})=\frac{1}{n}\cdot n\theta=\theta$

$\therefore \hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是 θ 的无偏估计