中国传媒大学

2020 一 2021 学年第 2 学期期末考试试卷（A 卷）

考试科目： 高等数学(A)　　　　**课程编码：** 2131010010

考试班级： 2020 工科各班等　　　　**考试方式：** 闭卷

题目	一	二	三	四	总分
得分					

得分	评卷人

一．填空题（将正确答案填在横线上，本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

1、微分方程 $y''+3y'+2=x$ 的通解为 $\underline{C_1+C_2e^{-3x}+\frac{1}{6}x^2-\frac{7}{9}x}$.

2、已知平面 $\Pi_1:-3x+y+3z=1$，那么在曲线 $x=3t$， $y=t^3$， $z=t^2$ 上，位于第一卦限且能够使得该点处的切线与平面 Π_1 平行的点的坐标为 $\underline{(3,1,1)}$.

3、已知 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 以及平面 $z=4$ 所围成的空间区域，则三重积分 $\iiint_\Omega\left(xy^2z+x^2yz\right)dv=\underline{0}$.

4、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $\underline{(-1,1]}$.

得分	评卷人

二．选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题分 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

1、设曲面 Σ 是上半球面：$x^2+y^2+z^2=R^2(z\geq 0)$，曲面 Σ_1 是 Σ 在第一卦限中的部分，则（ C ）.

（A）$\iint_{\Sigma} xdS = 4\iint_{\Sigma_1} xdS$；　　（B）$\iint_{\Sigma} ydS = 4\iint_{\Sigma_1} xdS$；

（C）$\iint_{\Sigma} zdS = 4\iint_{\Sigma_1} xdS$；　　（D）$\iint_{\Sigma} xyzdS = 4\iint_{\Sigma_1} xyzdS$.

2、曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 处的法线方程是（ D ）.

（A）$2(x-1)-8(y+2)+12(z-2)=0$；

（B）$2(x-1)=-8(y+2)=12(z-2)$；

（C）$\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y+2}{-8}+\dfrac{z-2}{12}=0$；

（D）$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-8}=\dfrac{z-2}{12}$.

3、已知 $L: x^2+y^2=4$，则 $\oint_L (2x^2+4y^2)ds=$（ A ）.

（A）48π；　　（B）24π；

（C）6π；　　（D）0.

4、已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 R，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$ 的收敛半径是（ B ）.

（A）nR；　　（B）R；

（C）$\dfrac{R}{n}$；　　（D）1.

得分	评卷人

三．计算题（本大题分 6 小题，每小题 8 分，共 48 分）

1、设 $uv = 3x - 2y + z$， $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$，求 $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

答：由 $uv = 3x - 2y + z$ 可知 $u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3$，由 $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 可知 $2v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x$，因此 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{3v - ux}{v^2}$.

同理可解得 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-2v - uy}{v^2}$，以及 $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{v - uz}{v^2}$.（4 分）

因此

$$
\begin{aligned}
x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{x(3v - ux)}{v^2} + \frac{y(-2v - uy)}{v^2} + \frac{z(v - uz)}{v^2} \\
&= \frac{v(3x - 2y + z) - u(x^2 + y^2 + z^2)}{v^2} \\
&= \frac{uv^2 - uv^2}{v^2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

为所求结果.（8 分）

2、计算锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = x$ 所截部分的面积.

答：由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$，可知 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.（3 分）

因此 $\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} + \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$.（5 分）

同时，积分区域 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le x\}$，

从而所求部分面积为：

$$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\cdot\sigma=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$.（8 分）

3、计算 $\iint_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中 Σ 是由半锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，平面 $z=1$ 和 $z=2$ 所围成的圆台的侧面下侧.

答：Σ 曲面在 xoy 坐标平面的投影为 $D:1\le x^2+y^2\le 4$.（2 分）

因此

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\iint_{D}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy\\&=-\int_0^{2\pi}\int_1^2\frac{e^r}{r}\cdot rdrd\theta\\&=-2\pi\left(e^2-e\right)\end{aligned}$$

（8 分）

4、计算 $I=\int_L\left(e^x\sin y-my\right)dx+\left(e^x\cos y-m\right)dy$，其中 L 为从点 $A(a,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax,\ y\ge 0$.

答：设 $P(x,y)=e^x\sin y-my$，$Q(x,y)=e^x\cos y-m$。则显然

$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-m$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y$.（1 分）

设 L_1 为从 $O(0,0)$ 沿 x 轴到 $A(a,0)$ 点的有向线段，则 L 和 L_1 一同构成逆时针方向的闭曲线 $\overline{L}$. 将 $\overline{L}$ 所围成的区域记为 D.（3 分）

记 $I_1=\int_{L_1}\left(e^x\sin y-my\right)dx+\left(e^x\cos y-m\right)dy$

利用格林公式，有：

$$
\begin{aligned}
I+I_1 &= \int_{\overline{L}} \left(e^x \sin y - my\right)dx + \left(e^x \cos y - m\right)dy \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \\
&= \iint_D mdxdy \\
&= \frac{\pi m a^2}{8}
\end{aligned}
$$

（5 分）

同时

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{L_1} \left(e^x \sin y - my\right)dx + \left(e^x \cos y - m\right)dy \\
&= 0
\end{aligned}
$$

（7 分）

因此 $I = \dfrac{\pi m a^2}{8}$.（8 分）

5、求平面 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xoy 平面距离最短的点.

答：构造拉格朗日函数：

$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(20x+15y+12z-60)+\mu(x^2+y^2-1)$.（2 分）

求解方程组：

$$
\begin{cases}
L_x = 20\lambda + 2\mu x = 0 \\
L_y = 15\lambda + 2\mu y = 0 \\
L_z = 2z + 12\lambda = 0 \\
L_\lambda = 20x + 15y + 12z - 60 = 0 \\
L_\mu = x^2 + y^2 - 1 = 0
\end{cases}
$$

可得两组解分别是 $A\left(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5},\dfrac{85}{12}\right)$ 以及 $B\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{35}{12}\right)$.（6 分）

显然 $B\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12}\right)$ 点到 xoy 平面的距离更短.（8 分）

6、已知 $f(x,y)$ 是 R^2 上的连续函数，求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)dxdy$.

答：因为 $f(x,y)$ 是连续函数，则由中值定理可知：

对于任意 $t>0$，在区域 $x^2+y^2\le t^2$ 上均存在 $(\xi,\eta)\in\{(x,y)|x^2+y^2\le t^2\}$，使得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)dxdy=\pi t^2\cdot f(\xi,\eta)。$$

因此

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)dxdy=\lim_{t\to 0^+}\pi\cdot f(\xi,\eta).\text{（5 分）}$$

而显然有 $|\xi|<t$ 以及 $|\eta|<t$，所以在 $t\to 0^+$ 时，同时有 $|\xi|\to 0$ 以及 $|\eta|\to 0$.

综上，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)dxdy&=\lim_{t\to 0^+}\pi\cdot f(\xi,\eta)\\&=\pi\cdot f(0,0)\end{aligned}$$

为所求结论.（8 分）

得分	评卷人

四．证明题（本大题分 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

1、证明：$\int_0^x \int_0^u f(t)dtdu = \int_0^x (x-u)f(u)du$.

证明：构造直角坐标系内区域D，其范围为$D:\begin{cases}0 \le u \le x \\ 0 \le t \le u\end{cases}$，则

$$\int_0^x \int_0^u f(t)dtdu = \iint_D f(t)dtdu.$$

显然D还可以表示为$D:\begin{cases}0 \le t \le x \\ t \le u \le x\end{cases}$，因此

$$\begin{aligned}\int_0^x \int_0^u f(t)dtdu &= \iint_D f(t)dtdu \\ &= \int_0^x \int_t^x f(t)dudt \\ &= \int_0^x (x-t)f(t)dt \\ &= \int_0^x (x-u)f(u)du\end{aligned}$$

得证.

2、若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都收敛，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$也收敛.

证明：由正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，显然有$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则$\{u_n\}$是有界的，

即$\exists M_1 > 0$，使得对于任意$n \in N$，总有$|u_n| < M_1$.

同理，$\exists M_2 > 0$，使得对于任意$n \in N$，总有$|v_n| < M_2$.（3 分）

则由$u_n^2 < M_1 u_n$，可知$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛；由$u_n v_n < M_1 v_n$，可知$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$收

敛；由 $v_n^2 < M_2 v_n$，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^2$.

综上，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)^2$ 也收敛.（6 分）