

中国传媒大学

2022 — 2023 学年第 2 学期期末考试试卷(A)

参考答案及评分标准

考试科目: 高等数学 A

课程编码: 2131010010

考试班级: 2022 级工科各专业

考试方式: 闭卷

一、填空题(将正确答案填在题中的横线上,本大题共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分)

1. 已知向量 \vec{a} 、 \vec{b} 满足 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$, 且 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2$, 则有 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.

答: .

2. 设函数 $u = 2xz^3 - yz - 10x - 23z$, 则函数 u 在点 $(1, -2, 2)$ 处方向导数的最大值为_____.

答: .

3. 设 $z = f(x, y)$ 由方程 $e^{-xy} - 2z + e^z = 0$ 确定, 则 $dz =$ _____.

4. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛半径为 $R =$ _____, 收敛域为_____.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$, 则它的傅里叶展开式中的系数 $a_n =$ _____.

答: .

二、选择题(在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案,填在题末的括号中,本大题共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分)

1. 微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$ 的通解是 ().

A. $y = A \sin x$

B. $y = B \cos x$

C. $y = A \sin x + B \cos x$

D. $y = \sin x + B \cos x$

答: .

2. 设 $D: x^2 + y^2 \leq a^2$, 当 $a = (\quad)$ 时, $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \pi$.

- A. 1 B. $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ C. $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ D. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

答: .

3. 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义, 且 $f_x(0, 0) = 3, f_y(0, 0) = -1$,

则曲线 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个法向量为 (\quad) .

- A. $(3, -1, 1)$ B. $(-3, 1, 1)$ C. $(1, 0, 3)$ D. $(3, 0, 1)$

答: .

4. 曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 上点 P 处切平面平行于 $2x + 2y + z - 1 = 0$, 则点 P 的坐标是 (\quad) .

- A. $(1, -1, 2)$ B. $(-1, 1, 2)$ C. $(1, 1, 2)$ D. $(-1, -1, 1)$

答: .

5. 下面级数中条件收敛的是 (\quad) .

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{e^n}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$

答: .

三、解答题 (本大题共 6 个小题, 每小题 8 分, 共 48 分)

1. (本小题 8 分)

计算曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 包含在 $x^2 + y^2 = 2x$ 内部的那部分面积 S .

解: $S = \iint_{\Sigma} dS, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad 4 \text{ 分}$

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy$$

所以 $S = \iint_{\Sigma} dS = \iint_{x^2 + y^2 \leq 2x} \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \pi \quad 8 \text{ 分}$

2. (本小题 8 分)

计算 $I = \int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, 其中 $L: y = 1 - |1 - x|$ 从对应于 $x = 0$ 的点到 $x = 2$ 的点.

解: 设 L_1 : 曲线上从对应于 $x = 0$ 的点到 $x = 1$ 的点,

L_2 : 曲线上从对应于 $x=1$ 的点到 $x=2$ 的点,

$$\begin{aligned} \text{则 } I &= \int_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy \\ &= \int_{L_1} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy + \int_{L_2} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy \quad 4 \text{ 分} \\ &= \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^2 2(2-x)^2 dx \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(2-x)^3 \Big|_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \quad 8 \text{ 分} \end{aligned}$$

3. (本小题 8 分)

计算 $I = \iint_{\Sigma} z^2 dS$, Σ 是锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 介于平面 $z=1$ 与 $z=2$ 之间的部分.

解: 设 Σ 在 xoy 平面上的投影为圆环域 D_{xy} : $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$,

$$\Sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\text{从而 } dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \sqrt{2} dxdy, \quad 4 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } I &= \iint_{\Sigma} z^2 dS = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{2} dxdy \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^3 dr = \frac{15\sqrt{2}}{2} \pi. \quad 8 \text{ 分} \end{aligned}$$

4. (本小题 8 分)

将函数 $f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3)$ 展开成 x 的幂级数, 并求出收敛域.

解: 因为 $f(x) = \ln[(1+x)(1+x^2)] = \ln(1+x) + \ln(1+x^2)$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$\therefore f(x) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2) \quad 4 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x^2)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n (1+x^n) \end{aligned}$$

收敛域 $-1 < x \leq 1$. 8 分

5. (本小题 8 分)

计算 $\iiint_{\Omega} (x+z)dv$, 其中 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的空间有界闭区域.

解: $\because \Omega$ 关于 $yo z$ 面为对称, $f(x,y,z)=x$ 为 x 的奇函数,

$$\text{有 } \iiint_{\Omega} xdv = 0.$$

$$\therefore \iiint_{\Omega} (x+z)dv = \iiint_{\Omega} zdv \quad 4 \text{ 分}$$

$$\text{利用球面坐标 } \therefore \iiint_{\Omega} (x+z)dv = \iiint_{\Omega} zdv$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{\pi}{8}. \quad 8 \text{ 分}$$

6. (本小题 8 分)

设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的二阶导数, 并使曲线积分

$$\int_L [3\varphi'(x) - 2\varphi(x) + xe^{2x}]ydx + \varphi'(x)dy \text{ 与路径无关, 求函数 } \varphi(x).$$

解: 由已知得 $3\varphi'(x) - 2\varphi(x) + xe^{2x} = \varphi''(x)$

$$\Rightarrow \varphi''(x) - 3\varphi'(x) + 2\varphi(x) = xe^{2x} \quad (*)$$

此为二阶常系数非齐次线性微分方程.

与 (*) 相对应的齐方程的特征方程为

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 2. \quad 4 \text{ 分}$$

因为 $\lambda = 2$ 是特征单根, 故 (*) 特解可设为 $y^* = x(Ax + B)e^{2x}$,

$$\text{代入 (*) 中可以求得 } A = \frac{1}{2}, B = -1 \Rightarrow y^* = \frac{1}{2}x(x-2)e^{2x}.$$

$$\text{于是所求函数为 } \varphi(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}x(x-2)e^{2x}. \quad 8 \text{ 分}$$

四、证明题 (本大题共 2 个小题, 每小题 6 分, 共 12 分)

1. (本小题 6 分)

$$\text{证明: 函数 } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases} \text{ 在 } (0,0) \text{ 点偏导数存在但是不连续.}$$

证明: 利用偏导数定义, 有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0 \Rightarrow f_x(0, 0) = 0$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0 \Rightarrow f_y(0, 0) = 0$$

故可知函数在 $(0, 0)$ 的两个偏导数都存在，均为 0. 3 分

取特殊路径 $y = kx$ ，则有

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = kx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

此表明函数极限随着 k 取值的不同而不同，从而可知函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 极限不存在，
进而不连续. 6 分

2. (本小题 6 分)

证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n}{3} \pi}{2^n}$ 收敛.

证明：因为 $\frac{n \cos^2 \frac{n}{3} \pi}{2^n} \leq \frac{n}{2^n}$, 3 分

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 满足：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1,$$

利用比值判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛，

再由比较判别法可知原级数也收敛. 6 分