一、填空题（将正确答案填在横线上，本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

1、微分方程 $y-''2y-'3y\ =3x\ +1$ 的通解

2、曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ y=x \end{cases}$ 的参数方程为

3、已知 $\Omega$ 是抛物面 $z=x^2+y^2$ 以及平面 $z=4$ 所围成的空间区域，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(xy^2z+x^2yz)dxdydz$ 等于

4、幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域为

二、选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

(1) 设有空间闭区域 $\Omega_1=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le R^2,z\ge 0\right\}$，

$\Omega_2=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le R^2,x\ge 0,y\ge 0,z\ \ge 0\right\}$，则有（　）.

（A）$\iiint\limits_{\Omega_1}xdv=4\iiint\limits_{\Omega_2}xdv$；　　（B）$\iiint\limits_{\Omega_1}ydv=4\iiint\limits_{\Omega_2}ydv$

（C）$\iiint\limits_{\Omega_1}zdv=4\iiint\limits_{\Omega_2}zdv$；　　（D）$\iiint\limits_{\Omega_1}xyzdv=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyzdv$.

(2) 曲面 $x^2\ +2y^2\ +3z^2\ =21$ 在点（1，-2,2）处的法线方程是（ ）.

（A）$2(x-1)-8(y+2)+12(z-2)=0$；

（B）$2(x-1)=-8(y+2)=12(z-2)$；

（C）$\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y+2}{-8}+\dfrac{z-2}{12}=0$；

（D）$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-8}=\dfrac{z-2}{12}$.

(3) 已知$L: x^2+y^2=4$，则 $\int_L (2x^2+4y^2)ds$ =（ .

（A）$48\pi$;　　　　　　（B）$24\pi$；

（C）$6\pi$;　　　　　　（D）$0$.

(4) 已知幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径是$R$，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$的收敛半径是（　）.

（A）$nR$；　　　　　　（B）$R$；

（C）$\dfrac{R}{n}$；　　　　　　（D）$1$.

三、计算题（本大题分 6 小题，每小题 8 分，共 48 分）

1、设$u(x,y)$具有二阶连续偏导数，且有$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$u(x,2x)=x$，$u_x(x,2x)=x^2$，试求$u_{xx}(x,2x)$，$u_{xy}(x,2x)$及$u_{yy}(x,2x)$

解：由$u(x,2x)=x$，两边对$x$求导，得

$$u_x(x,2x)+2u_y(x,2x)=1$$

由$u_x(x,2x)=x^2$，得

$$u_y(x,2x)=\frac{1-x^2}{2}$$

上式再对$x$求导，得

$$u_{yx}(x,2x)+2u_{yy}(x,2x)=-x, \qquad (1)$$

对$u_x(x,2x)=x^2$关于$x$求导，得

$$u_{xx}(x,2x)+2u_{xy}(x,2x)=2x \qquad (2)$$

由于$u_{xx}(x,2x)=u_{yy}(x,2x)$，$u_{xy}(x,2x)=u_{yx}(x,2x)$将（2）代入（1）得

$$u_{yx}(x,2x)+2(2x-2u_{xy}(x,2x))=-x$$

即 $$-3u_{xy}(x,2x)=-x-4x=-5x$$

$$u_{xy}(x,2x)=\frac{5}{3}x$$

由$u_{xx}(x,2x)+2u_{xy}(x,2x)=2x$，得

$$u_{xx}(x,2x)=u_{yy}(x,2x)=-\frac{4}{3}x$$

2、已知平面区域$D$：$x^2+y^2\le 4$，求$I=\iint\limits_D \left|x^2+y^2-2x\right|dxdy$。

解：记$D_1: x^2+y^2-2x\le 0$，

$$D_2=D-D_1: x^2+y^2-2x>0,(x,y)\in D$$

$$I=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-2x)dxdy+\iint\limits_{D_1}-(x^2+y^2-2x)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D}(x^2+y^2-2x)dxdy-2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-2x)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(r^2-2r\cos\theta)rdr-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(r-2r\cos\theta)rdr$$

$$=\int_0^{2\pi}(4-\frac{16}{3}\cos\theta)d\theta-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^4\theta-\frac{16}{3}\cos^4\theta)d\theta=9\pi$$

3.设函数$w=f(x,y,z)$具有连续的一阶偏导数，又函数$y=y(x)$和$z=z(x)$分别由下面两式确定：

$\sin y+\cos(xy)=0$，$e^z=\int_0^{x+z}e^{t^2}dt$，求$\frac{dw}{dx}$。

解：$$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

对$\sin y+\cos(xy)=0$两边关于$x$求导，得

$$\cos y\frac{dy}{dx}-\sin(xy)(y+x\frac{dy}{dx})=0$$

整理得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{y\sin(xy)}{\cos y-x\sin(xy)}$$

对$e^z=\int_0^{x+z}e^{t^2}dt$两边关于$x$求导，得 $e^z\frac{dz}{dx}=e^{(x+z)^2}(1+\frac{dz}{dx})$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{e^{(x+z)^2}}{e^z-e^{(x+z)^2}}$$

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{y\sin(xy)}{\cos y-x\sin(xy)}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{e^{(x+z)^2}}{e^z-e^{(x+z)^2}}$$

**4.**利用柱面坐标计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}zdv$，其中$\Omega$是由曲面$z=x^2+y^2$及$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$所围成的闭区域。

解：$\Omega$在 XOY 面的投影区域为$D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$,

$$x^2+y^2\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}$$

在柱坐标下，$\Omega$可表示为

$$\rho^2\le z\le\sqrt{2-\rho^2},0\le\rho\le 1,0\le\theta\le 2\pi$$

$$\iiint\limits_{\Omega}zdv=\iiint\limits_{\Omega}z\rho d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}zdz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho(2-\rho^2-\rho^4)d\rho$$

$$=\frac{1}{2}2\pi[\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}]_0^1=\frac{7}{12}\pi$$

**5.**求球面$x^2+y^2+z^2=a^2$含在圆柱面$x^2+y^2=ax$内部的那部分面积。

解：上半球面为$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial y})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

圆柱面截球面的曲面在第一卦限的部分在 XOY 面的投影区域为上半圆

$$D=\left\{(\rho,\theta)\middle|0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\rho\le a\cos\theta\right\}$$

根据对称性，所求面积为

$$A=4\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=4\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho d\rho d\theta$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}d\rho=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta$$

$$=2a^2(\pi-2)$$

6. 试确定 $a, b$ 的值，使曲线积分$\int_L\frac{ax+y}{x^2+y^2}dx+\frac{y-x-b}{x^2+y^2}dy$与路径无关，并求$f(x,y)$使$gradf(x,y)=\left(\frac{ax+y}{x^2+y^2},\frac{y-x-b}{x^2+y^2}\right)$。

解：依题意知 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y-x-b}{x^2+y^2})=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{ax+y}{x^2+y^2})$，得

$$\frac{-(x^2+y^2)-2x(y-x-b)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(x^2+y^2)-2y(ax+y)}{(x^2+y^2)^2}$$

比较得$-2axy=-2xy+2bx$，即$a=1,b=0$

设$gradf(x,y)=\left(\frac{ax+y}{x^2+y^2},\frac{y-x-b}{x^2+y^2}\right)$，则

$$df(x,y)=\frac{ax+y}{x^2+y^2}dx+\frac{y-x-b}{x^2+y^2}dy$$

$$f(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{ax+y}{x^2+y^2}dx+\frac{y-x-b}{x^2+y^2}dy+C$$

由于$(0,0)$是奇点，取$x_0=0,y_0=1$，因积分与路径无关，故可选由$(0,1)$到$(x,1)$再到$(x,y)$的折线，于是

$$f(x,y)=\int_{(0,1)}^{(x,1)}\frac{ax+y}{x^2+y^2}dx+\frac{y-x-b}{x^2+y^2}dy$$

$$+\int_{(x,1)}^{(x,y)}\frac{ax+y}{x^2+y^2}dx+\frac{y-x-b}{x^2+y^2}dy+c$$

$$=\int_0^x\frac{x+1}{x^2+1}dx+\int_1^y\frac{y-x}{x^2+y^2}dy+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan x-\arctan\frac{y}{x}-\arctan\frac{1}{x}C$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{x}{y}+C$$

**四. 计算题（本大题分 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）**

1.计算$I=\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中$\Sigma$是曲面

$z=x^2+y^2$在第一卦限中$0\le z\le 1$部分的上侧。

解：取$xoz$面上的曲面$\Sigma_1$：  $y=0,0\le x\le 1,x^2\le z\le 1$，取右侧

$yoz$面上的曲面$\Sigma_2$：  $x=0,0\le y\le 1,y^2\le z\le 1$，取前侧

和平面$\Sigma_3$：  $z=1,0\le x\le 1,0\le y\le\sqrt{1-x^2}$，  取下侧

则$\Sigma,\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$构成封闭曲面，取内侧，根据高斯公式，有

$$-\left(\iint\limits_{\Sigma}+\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_3}\right)xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz$$

其中$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le\sqrt{1-x^2},x^2+y^2\le z\le 1\right\}$

为由$\Sigma,\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$所围成的区域，从而有

$$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = -\iiint_{\Omega} 3dxdydz - \iint_{\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

$$-\iint_{\Sigma_2} xdydz + ydzdx + zdxdy - \iint_{\Sigma_3} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

$$= -\iiint_{\Omega} 3dxdydz - \iint_{\Sigma_3} dxdy$$

$$= -3\iint_{D_{xy}} dxdy \int_{x^2+y^2}^{1} dz - (-\iint_{D_{xy}} dxdy)$$ $\Sigma_3$ 取下侧，故二重积分前取负号

$$= -3\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (1-\rho^2)\rho d\rho + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho d\rho = -\frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{8}$$

2. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ $(a>0)$ 的敛散性

解：通项为 $a_n = \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$，利用比值法，得

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1+a^{n+1}}$$

当 $0<a<1$ 时，$l = a < 1$；当 $a=1$ 时，$l=\dfrac{1}{2}<1$；当 $a>1$ 时，$l=0<1$

综上，任给 $a>0$，级数收敛。