中国传媒大学

2010—2011 学年第 二 学期期末考试试卷（A 卷）

参考答案及评分标准

考试科目： 概率论与数理统计 A　　课程编码： 123012

考试班级： 10：工科　　考试方式： 闭卷

注意：解答过程中您可能会用到如下数据：

$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(1.645)=0.95$，$t_{0.05}(15)=1.7531$，

$t_{0.025}(10)=2.2281$，$\chi^2_{0.05}(8)=15.507$

一、选择题（在每小题给出的四个选项中，选择正确答案填在题中的括号内，本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

1、设 $P(A)=a$，$P(B)=b$，$P(A\cup B)=c$，则 $P(A\overline{B})=$（ B ）.

(A)　$a-b$　　　　(B)　$c-b$

(C)　$a(1-b)$　　　　(D)　$b-a$

2、设连续型随机变量 X 的概率密度和分布函数分别为 $f(x)$ 和 $F(x)$，则下列选项中正确的是（ C ）.

(A)　$0\le f(x)\le 1$　　　　(B)　$P(X\le x)\le F(x)$

$(C)\ \ P(X \le x) = F(x)$ $(D)\ \ P(X = x) = f(x)$

3、设随机变量 X 的概率密度为：

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x+3)^2}{4}} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

则下列随机变量（ A ）服从 $N(0,\ 1)$.

$(A)\ \ Y = \dfrac{X+3}{\sqrt{2}}$ $(B)\ \ Y = \dfrac{X+3}{2}$

$(C)\ \ Y = \dfrac{X-3}{2}$ $(D)\ \ Y = \dfrac{X-3}{\sqrt{2}}$

4、取自标准正态总体 $X \sim N(0,1)$ 的样本 $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 的样本均值为 $\overline{X}$，样本标准差为 S，则（ D ）.

$(A)\ \ \overline{X} \sim N(0,1)$ $(B)\ \ \dfrac{\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$

$(C)\ \ \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2(n)$ $(D)\ \ \sqrt{n}\,\overline{X} \sim N(0,\ 1)$

二、填空题（把正确答案填在题中的横线上，本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

1、已知随机变量 X 只能取 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ 四个数值，其相应的概率依次为

$\frac{1}{2c}$, $\frac{3}{4c}$, $\frac{5}{8c}$, $\frac{2}{16c}$，则 $c = \underline{2}$.

2、设 $D(X)=4$，$D(Y)=9$ $\rho_{XY}=0.5$，则 $D(2X-3Y)=\underline{61}$.

3、设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，用切比雪夫不等式估计 $P\{|X-2|\geq 4\}\leq \underline{\frac{1}{8}}$.

4、假设随机变量 X 服从自由度为10的 t 分布，已知 $P\{X^2\leq\lambda\}=0.95$，则 $\lambda=\underline{4.964}$.

三、解答题：（本大题共 8 个小题，每小题 8 分，共 64 分）

1、设随机变量 X 的分布函数为：

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \ln x & 1\leq x<e\\ 1 & x\geq e\end{cases}$$

求：（1）概率 $P\{0<X\leq 3\}$；（2）X 的概率密度 $f_X(x)$.

解：

$P\{0<X\leq 3\}=F(3)-F(0)=1$ （4分）

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & 1<x<e\\ 0 & otherwise\end{cases}.$$ （8分）

2、在一个盒子里装有12个小球，其中有两个是红球，在其中随机地收取两次，每次取一球，不放回抽取.

定义随机变量 X, Y 如下：

$$X=\begin{cases}1 & \text{第一次取出的是红球}\\ 0 & \text{第一次取出的不是红球}\end{cases}$$

$$\mathrm{Y}=\begin{cases}1 & \text{第二次取出的是红球}\\ 0 & \text{第二次取出的不是红球}\end{cases}$$

写出 X 与 Y 的联合分布律和边缘分布律，并判断 X 与 Y 是否相互独立.

解：

$P(X=0, Y=0)=\dfrac{45}{66}$ $P(X=0, Y=1)=\dfrac{10}{66}$

$P(X=1, Y=0)=\dfrac{10}{66}$ $P(X=1, Y=1)=\dfrac{1}{66}$ （4分）

Y \ X	0	1	Y
0	$\dfrac{45}{66}$	$\dfrac{10}{66}$	$\dfrac{55}{66}$

1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{11}{66}$
X	$\frac{55}{66}$	$\frac{11}{66}$	

X与Y不独立. （8分）

3、设(X, Y)的联合概率密度为：

$$f(x, y)=\begin{cases}24(1-x)y & 0<x<1,\ 0<y<x \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$.

解：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx=\begin{cases}\int_y^1 24(1-x)ydx & 0<y<1 \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}12y(1-y)^2 & 0<y<1 \\ 0 & otherwise\end{cases}$$ （3分）

当$0<y<1$时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{24(1-x)y}{12y(1-y)^2} & y<x<1 \\ 0 & x\le y\ or\ x\ge 1\end{cases}$$ （6分）

于是$Y=y$的条件下X的条件概率密度为:

当$0<y<1$时,

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2(1-x)}{(1-y)^2} & y<x<1\\ 0 & x\le y\ or\ x\ge 1\end{cases}$$

而当$y\le 0\ \ or\ \ y\ge 1$时，不存在$f_{X|Y}(x|y)$.　　　　（8分）

4、设系统Ⅰ由元件A, B并联组成，X,Y分别表示A, B的寿命（以小时计），并设X,Y相互独立且服从同一分布，

其概率密度为：$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

求系统Ⅰ的寿命Z的数学期望.

解：X,Y的分布函数均为：

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$　　　　（2分）

因为A, B并联，所以系统Ⅰ的寿命$Z=\max(X,\ Y)$

又因为X,Y独立，所以,

$Z=\max(X,\ Y)$的分布函数为：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\{\max(X,Y)\le z\}$$

$$=P(X\le z,\ Y\le z)=P(X\le z)P(Y\le z)=F^2(z)$$ （5分）

于是Z的概率密度为：

$$f_Z(z)=F_Z{}'(z)=2F(z)F'(z)=\begin{cases}2\lambda(e^{-\lambda z}-e^{-2\lambda z}) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$ （6分）

从而

$$E(Z)=\int_0^{+\infty}z\cdot 2\lambda(e^{-\lambda z}-e^{-2\lambda z})dz=\frac{3}{2\lambda}.$$ （8分）

5、某电站供应一万户用电，假设用电高峰时，每户用电的概率为0.9，利用中心极限定理计算，同时用电户数在9030户以上的概率.

解：$X\sim b(10000,0.9)$ （2分）

$$P(X>9030)=1-P(X\le 9030)=1-F(9030)$$

$$=1-\Phi(\frac{9030-10000\times 0.9}{\sqrt{10000\times 0.9\times 0.1}})=1-\Phi(1)=1-0.8413$$

≈ 0.1587. （8分）

6、设总体X的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体X的样本，

样本观测值为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，求θ的最大似然估计量.

解：$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为样本观测值，$0 < x_i < 1 \quad i = 1,2,\cdots,n$

似然函数为：

$$L(x;\theta) = (\theta+1)^n (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\theta} \qquad \text{（2分）}$$

$$\ln L = n\ln(\theta+1) + \theta(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i) \qquad \text{（4分）}$$

令 $\dfrac{d\ln L}{d\theta} = \dfrac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$ （6分）

解得，$\theta = -\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i} - 1$

从而得到θ的最大似然估计量：

$$\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i} - 1. \qquad \text{（8分）}$$

7、随机地从一批零件中抽取16个，测得长度(cm)为：2.14，2.10，2.13，2.15，2.13，2.12，2.13，2.10，2.15，2.12，2.14，2.10，2.13，2.11，2.14，2.11，设零件长度分布为正态分布，试求总体μ的90%的置信区间：(1)若$\sigma = 0.01(cm)$，

（2）若σ未知.

解：$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=2.125$，　$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=0.017$，$n=16$

（3分）

（1）$\sigma=0.01(cm)$时，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.05}=1.645$，总体$\mu$的90%的置信区间为：

$$(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})=(2.121,\ 2.129)$$ （5分）

（2）若σ未知，$t_{0.05}(15)=1.7531$，总体μ的90%的置信区间为：

$$(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))=(2.1175,\ 2.1325)$$ （8分）

8、某种导线要求其电阻的均方差不得过0.005Ω，今从生产的一批导线中任取样品9根，测得$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=0.007(\Omega)$，设总体服从正态分布，问在水平 $\alpha=0.05$下能认为这批导线的均方差显著地偏大？

解：　要检验的假设为：

H_0：　$\sigma\le 0.005$；　H_1：　$\sigma>0.005$　　（3分）

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{8\times 0.007^2}{0.005^2}=15.68$$

（其中$\sum_{i=1}^{n} c_i = 1, \ c_i > 0$.）

证明： $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} c_i EX_i$ （2分）

$= \sum_{i=1}^{n} c_i \mu$ （4分）

$= \mu \sum_{i=1}^{n} c_i = \mu$. （6分）

由 于 $\chi^2 = 15.68 > 15.507 = \chi^2_{0.05}(8) = \chi^2_\alpha(n-1)$

故拒H_0，即认为这批导线的均方差显著地偏大了. （8分）

四、证明题（本大题共2个小题，每小题6分，共12分）

1、设$P(A) > 0$，证明：$P(B \mid A) \ge 1 - \frac{P(\overline{B})}{P(A)}$.

证明：$P(A \cup B) \le 1$ （1分）

$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(AB) \le 1$

$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A)P(B \mid A) \le 1$ （3分）

$\Rightarrow P(A)P(B \mid A) \ge P(A) - [1 - P(B)]$

$\Rightarrow P(A)P(B \mid A) \ge P(A) - P(\overline{B})$ （5分）

因为$P(A) > 0$

所以，$P(B \mid A) \ge 1 - \frac{P(\overline{B})}{P(A)}$. （6分）

2、设总体X的数学期望μ与方差σ^2存在，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是X的样本，证明：

$Y = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$是$\mu$的无偏估计量.