中国传媒大学

2022 一 2023 学年第 2 学期期末考试试卷(A)

参考答案及评分标准

考试科目：高等数学 A　　　　课程编码：2131010010

考试班级：2022 级工科各专业　　　　考试方式：闭卷

一、填空题（将正确答案填在题中的横线上，本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知向量 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 满足 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$，且 $\left|\overrightarrow{a}\right|=2$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=2$，则有 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$__________.

答：-4.

2. 设函数 $u=2xz^3-yz-10x-23z$，则函数 u 在点 $(1,-2,2)$ 处方向导数的最大值为__________.

答：7.

3. 设 $z=f(x,y)$ 由方程 $e^{-xy}-2z+e^z=0$ 确定，则 $dz=$____________________.

答：$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=\dfrac{ye^{-xy}}{e^z-2}dx+\dfrac{xe^{-xy}}{e^z-2}dy$.

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛半径为 $R=$__________，收敛域为____________.

答：2；$[-2,2)$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0<x<\pi\end{cases}$，则它的傅里叶展开式中的系数 $a_n=$_______.

答：0.

二、选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1.微分方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$ 的通解是（　　）.

A. $y=A\sin x$　　　　B. $y=B\cos x$

C. $y=A\sin x+B\cos x$　　　　D. $y=\sin x+B\cos x$

答：C.

2. 设 D： $x^2+y^2\le a^2$，当 $a=$（　　）时，$\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=\pi$.

A. 1　　　　B. $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$　　　　C. $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$　　　　D. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

答： B.

3.设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，且 $f_x(0,0)=3, f_y(0,0)=-1$，

则曲线 $z=f(x,y)$ 在点 $\left(0,0,f\left(0,0\right)\right)$ 的一个法向量为（　　）.

A. $(3,-1,1)$　　　　B. $(-3,1,1)$　　　　C. $(1,0,3)$　　　　D. $(3,0,1)$

答： B.

4. 曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处切平面平行于 $2x+2y+z-1=0$，则点 P 的坐标是（　　）.

A. $(1,-1,2)$　　　B. $(-1,1,2)$　　　C. $(1,1,2)$　　　D. $(-1,-1,1)$

答： C.

5. 下面级数中条件收敛的是（　　）.

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$　　　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2}{e^n}$　　　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$

答： A.

三、解答题（本大题共 6 个小题，每小题 8 分，共 48 分）

1.**（本小题 8 分）**

计算曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在 $x^2+y^2=2x$ 内部的那部分面积 S.

解： $S=\iint\limits_{\Sigma}dS$，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.　　　　4 分

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

所以 $S=\iint\limits_{\Sigma}dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\pi$　　　　8 分

2.**（本小题 8 分）**

计算 $I=\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，其中 L： $y=1-\left|1-x\right|$ 从对应于 $x=0$ 的点到 $x=2$ 的点.

解： 设 L_1：曲线上从对应于 $x=0$ 的点到 $x=1$ 的点，

L_2：曲线上从对应于 $x=1$ 的点到 $x=2$ 的点，

$$\text{则}\ I=\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=\int_{L_1}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy+\int_{L_2}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy \qquad 4\text{ 分}$$

$$=\int_0^1 2x^2dx+\int_1^2 2(2-x)^2dx$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}(2-x)^3\Big|_1^2=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}. \qquad 8\text{ 分}$$

3.（**本小题 8 分**）

计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} z^2dS$，$\Sigma$ 是锥面 $z^2=x^2+y^2$ 介于平面 $z=1$ 与 $z=2$ 之间的部分.

解：设 Σ 在 xoy 平面上的投影为圆环域 D_{xy}：$1\le x^2+y^2\le 4$，

$$\Sigma：\ z=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\quad z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\quad z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,$$

$$\text{从而}\ dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{2}dxdy\ , \qquad 4\text{ 分}$$

$$\text{故}\ I=\iint\limits_{\Sigma} z^2dS=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r^3dr=\frac{15\sqrt{2}}{2}\pi\ . \qquad 8\text{ 分}$$

4.（**本小题 8 分**）

将函数 $f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)$ 展开成 x 的幂级数, 并求出收敛域.

解：因为 $f(x)=\ln[(1+x)(1+x^2)]=\ln(1+x)+\ln(1+x^2)$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\ (-1<\mathrm{x}\le 1)$$

$$\therefore\ f(x)=\ln(1+x)+\ln(1+x^2) \qquad 4\text{ 分}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x^2)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n(1+x^n)$$

收敛域 $-1<x\le 1$.　　　　8 分

5.（**本小题 8 分**）

计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv$，其中 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的空间有界闭区域.

解：$\because \Omega$ 关于 yoz 面为对称，$f(x,y,z)=x$ 为 x 的奇函数，

有 $\iiint\limits_{\Omega}xdv=0.$

$\therefore \iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv=\iiint\limits_{\Omega}zdv$ 4 分

利用球面坐标$\therefore \iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv=\iiint\limits_{\Omega}zdv$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{\pi}{8}.$ 8 分

6.（**本小题 8 分**）

设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的二阶导数，并使曲线积分

$\int_L[3\varphi'(x)-2\varphi(x)+xe^{2x}]ydx+\varphi'(x)dy$ 与路径无关，求函数 $\varphi(x)$.

解：由已知得 $3\varphi'(x)-2\varphi(x)+xe^{2x}=\varphi''(x)$

$\Rightarrow \varphi''(x)-3\varphi'(x)+2\varphi(x)=xe^{2x}$ (*)

此为二阶常系数非齐次线性微分方程.

与 (*) 相对应的齐方程的特征方程为

$r^2-3r+2=0\Rightarrow r_1=1, r_2=2.$ 4 分

因为 $\lambda=2$ 是特征单根，故 (*) 特解可设为 $y^*=x(Ax+B)e^{2x}$，

代入 (*) 中可以求得 $A=\frac{1}{2}, B=-1\Rightarrow y^*=\frac{1}{2}x(x-2)e^{2x}.$

于是所求函数为 $\varphi(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}+\frac{1}{2}x(x-2)e^{2x}.$ 8 分

四、证明题（本大题共 2 个小题，每小题 6 分，共 12 分）

1.（**本小题 6 分**）

证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点偏导数存在但是不连续.

证明：利用偏导数定义，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0\Rightarrow f_x(0,0)=0$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0\Rightarrow f_y(0,0)=0$$

故可知函数在 $(0,0)$ 的两个偏导数都存在，均为 0 .　　　　　　3 分

取特殊路径 $y=kx$ ，则有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

此表明函数极限随着 k 取值的不同而不同，从而可知函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 极限不存在，进而不连续.　　　　　　6 分

2.（**本小题 6 分**）

证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n}{3}\pi}{2^n}$ 收敛.

证明：因为 $\frac{n\cos^2\frac{n}{3}\pi}{2^n}\le\frac{n}{2^n}$ ，　　　　　　3 分

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 满足：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\times\frac{2^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1\ ,$$

利用比值判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛，

再由比较判别法可知原级数也收敛.　　　　　　6 分