一、一阶微分方程求解

1. 一阶标准类型方程求解

三个标准类型 $\begin{cases} \text{可分离变量方程} \\ \text{齐次方程} \\ \text{线性方程} \end{cases}$

关键: 辨别方程类型，掌握求解步骤

2. 一阶非标准类型方程求解

变量代换法

齐次方程

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\dfrac{y}{x})$ 的方程叫做**齐次方程**.

解法: 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

代入原方程得 $$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$$

分离变量: $$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分, 得 $$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

积分后再用 $\dfrac{y}{x}$ 代替 u, 便得原方程的通解.

一阶线性微分方程

一阶线性微分方程标准形式: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

若 $Q(x)\equiv 0$, 称为**齐次方程**;

若 $Q(x)\not\equiv 0$, 称为**非齐次方程**.

1. 解齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln|C|$

故通解为 $y=C\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

2. 解非齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

用**常数变易法**: 作变换 $y(x)=u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$, 则

$$u'\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cancel{-P(x)u\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}\cancel{+P(x)u\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}=Q(x)$$

即 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

两端积分得 $$u=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$$

故原方程的通解 $y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

即 $$y=\underbrace{C\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}}$$

(3) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

方程两边同除以 x 即为齐次方程，令 $y = u\,x$,化为分离变量方程.

$$x > 0\text{时},\ y' = \sqrt{1 - (\frac{y}{x})^2} + \frac{y}{x} \Longrightarrow xu' = \sqrt{1-u^2}$$

$$x < 0\text{时},\ y' = -\sqrt{1 - (\frac{y}{x})^2} + \frac{y}{x} \Longrightarrow xu' = -\sqrt{1-u^2}$$

(4) $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$

调换自变量与因变量的地位，化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - 2x = -y^2$,

用线性方程通解公式求解 .

(3) $y' = \dfrac{3x^2 + y^2 - 6x + 3}{2xy - 2y}$

化方程为 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{3(x-1)^2 + y^2}{2y(x-1)}$

令 $t = x - 1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\,t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\,t}$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\,t} = \dfrac{3t^2 + y^2}{2\,t\,y}$ (齐次方程)

令 $y = u\,t$

可分离变量方程求解

例3 $y' + x = \sqrt{x^2 + y}$

提示： 令 $u = \sqrt{x^2 + y} - x$，即 $y = 2xu + u^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2u + 2x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + 2u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

原方程化为

$$2u + 2(x+u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} + \frac{2}{u}x = -2$$

$$x = \mathrm{e}^{-\int \frac{2}{u}\mathrm{d}u}\left[\int -2\,\mathrm{e}^{\int \frac{2}{u}\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u + C\right]$$

$$= \frac{1}{u^2}\left[\int -2u^2\,\mathrm{d}u + C\right] = -\frac{2}{3}u^2 + \frac{C}{u^2}$$

故原方程通解 $\sqrt{(x^2+y)^3} = x^3 + \frac{3}{2}xy + C$

一、两类二阶微分方程的解法

1. 可降阶微分方程的解法 — 降阶法

- $$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x) \longrightarrow \text{逐次积分求解}$$
- $$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,\frac{dy}{dx}) \xrightarrow{\text{令 } p(x)=\frac{dy}{dx}} \frac{dp}{dx}=f(x,p)$$
- $$\frac{d^2y}{dx^2}=f(y,\frac{dy}{dx}) \xrightarrow{\text{令 } p(y)=\frac{dy}{dx}} p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$$

2. 二阶线性微分方程的解法

- 常系数情形 $\begin{cases} \text{齐次} \\ \text{非齐次} \end{cases}$ ———— 代数法

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q \text{为常数})$$

特征方程: $r^2 + pr + q = 0$, 特征根: r_1, r_2

特征根	通解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

1. $y'' + py' + qy = P_m(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$

λ 为特征方程的 $k\,(=0, 1, 2)$ 重根, 则设特解为

$$y^* = x^k Q_m(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

2. $y'' + py' + qy = \mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x]$

$\lambda \pm \mathrm{i}\,\omega$ 为特征方程的 $k\,(=0, 1)$重根, 则设特解为

$$y^* = x^k\,\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m(x)\cos\omega x + \tilde{R}_m(x)\sin\omega x]$$

$$m = \max\{\,l, n\,\}$$

3. 上述结论也可推广到高阶方程的情形.

例1. 设$F(x)=f(x)\,g(x)$, 其中函数 $f(x), g(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内满足以下条件: $f'(x)=g(x),\ g'(x)=f(x)$, 且 $f(0)=0$, $f(x)+g(x)=2\,\mathrm{e}^{x}$.

(1) 求$F(x)$ 所满足的一阶微分方程 ;

(2) 求出$F(x)$ 的表达式 .

解: (1) $\because\ F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$$=g^2(x)+f^2(x)$$

$$=[g(x)+f(x)]^2-2f(x)g(x)$$

$$=(2\,\mathrm{e}^{x})^2-2F(x)$$

所以$F(x)$ 满足的一阶线性非齐次微分方程:

$$F'(x)+2F(x)=4\mathrm{e}^{2x}$$

(2) 由一阶线性微分方程解的公式得

$$F(x)=\mathrm{e}^{-\int 2\,\mathrm{d}x}\left[\int 4\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{\int 2\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\mathrm{e}^{-2x}\left[\int 4\mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\mathrm{e}^{2x}+C\mathrm{e}^{-2x}$$

将 $F(0)=f(0)g(0)=0$ 代入上式，得 $C=-1$

于是 $F(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}$

例2. 设 $f(x)$ 二阶导数连续, 且满足方程

$$f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)\,f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

求 $f(x)$.

提示: $f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t+\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}\,t$, 则

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t-\cancel{x\,f(x)}+\cancel{x\,f(x)}$$

$$f''(x)=-\sin x-f(x)$$

问题化为解初值问题: $\begin{cases} f''(x)+f(x)=-\sin x \\ f(0)=0\,, \qquad f'(0)=1 \end{cases}$

最后求得 $\qquad f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{x}{2}\cos x$

例3. 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续二阶导数, 且 $y'\neq 0$, $x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数 ,

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$$

变换为 $y=y(x)$ 所满足的微分方程 ;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

解: (1) 由反函数的导数公式知 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y'}$, 即 $y'\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1$,

上式两端对 x 求导, 得

$$y''\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}(y')^2=0$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\frac{y''\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}{(y')^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

代入原微分方程得

$$y''-y=\sin x \qquad ①$$

(2) 方程①的对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$$

设①的特解为 $y^*=A\cos x+B\sin x$, 代入①得 $A=0$, $B=-\frac{1}{2}$, 故 $y^*=-\frac{1}{2}\sin x$, 从而得①的通解:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x$$

由初始条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{3}{2}$，得

$$C_1 = 1,\ C_2 = -1$$

故所求初值问题的解为

$$y = e^{x} - e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x$$

2. 二阶线性微分方程的解法

- 常系数情形 $\begin{cases} \text{齐次} \\ \text{非齐次} \end{cases}$ ———— 代数法

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q\text{为常数})$$

特征方程: $r^2 + pr + q = 0$, 特征根: r_1, r_2

特征根	通解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\,\beta$	$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

例4 求一个以 $y_1 = \mathrm{e}^x,\ y_2 = 2x\mathrm{e}^x,\ y_3 = \cos 2x,$ $y_4 = 3\sin 2x$ 为特解的 4 阶常系数线性齐次微分方程, 并求其通解 .

解: 根据给定的特解知特征方程有根 :

$$r_1 = r_2 = 1, \quad r_{3,4} = \pm 2\mathrm{i}$$

因此特征方程为 $(r-1)^2\,(r^2+4) = 0$

即 $r^4 - 2r^3 + 5r^2 - 8r + 4 = 0$

故所求方程为 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0$

其通解为 $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$

P353 题2 (2) 求以$y = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{2x}$为通解的微分方程 .

提示: 由通解式可知特征方程的根为 $r_1 = 1, r_2 = 2$,

故特征方程为 $(r-1)(r-2) = 0$, 即 $r^2 - 3r + 2 = 0$

因此微分方程为 $y'' - 3y' + 2y = 0$

P353 题3 求下列微分方程的通解

(6) $yy'' - y'^2 - 1 = 0,$

提示: (6) 令 $y' = p(y)$, 则方程变为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 - 1 = 0, \quad \text{即} \quad \frac{p\,\mathrm{d}p}{1+p^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

一、内容小结

1. 空间直线与平面的方程

空间平面

一般式 $Ax+By+Cz+D=0 \quad (A^2+B^2+C^2\neq 0)$

点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

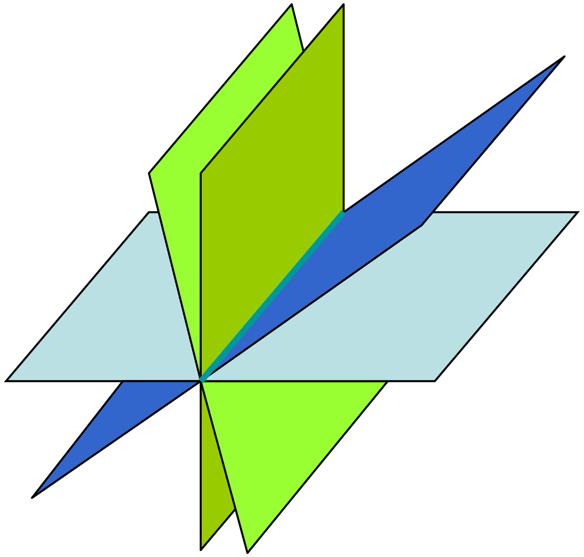
截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

点 : (x_0, y_0, z_0)
法向量 : $\vec{n}=(A, B, C)$

三点式 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$

(1) 过直线

$$L: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$



的平面束 方程

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1) \\ +\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

$(\lambda_1,\lambda_2$ 不全为0$)$

空间直线

一般式 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

对称式 $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

参数式 $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

(x_0, y_0, z_0) 为直线上一点;

$\vec{s} = (m, n, p)$ 为直线的方向向量.

求过点（-1,0,4）且平行于平面 $3x-4y+z=0$

又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线方程。

已知两条直线方程分别为

$$L_1\ \begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases} \qquad L_2\ \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$$

则与两直线都平行、且过原点的平面方程为 $x-y+z=0$

求曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 上的点，使曲线在该点处的切线平行于平面 $3y-z=1$.

解　设所求的点对应于 $t=t_0$

对应切线方向向量

$$\vec{S}=\{1,-2t_0,3t_0^2\}$$

$\vec{S}$ 垂直于平面法向量 $\vec{n}=\{0,3,-1\}$

$$\vec{S}\cdot\vec{n}=-6t_0-3t_0^2=0$$

解得：$t_0=0$ 和 $t_0=-2$

所求点为：$(0,0,0)$ 和 $(-2,-4,-8)$

在直线方程 $\dfrac{x-4}{2-D}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-5}{B+6}$ 中， B, D 为何值时，直线同时平行于平面 π_1:$3x-2y+2z=0$ 和 π_2:$x+2y-3z=0$.

解 直线方向向量为 $\vec{S}=\{2-D, 2, B+6\}$

π_1, π_2 法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=\{3,-2,2\}$, $\overrightarrow{n_2}=\{1,2,-3\}$

由条件 $\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{S}=0$, $\overrightarrow{n_2}\cdot\vec{S}=0$

即 $\begin{cases} 2B-3D+14=0 \\ 3B+D+12=0 \end{cases}$

解得： $B=-\dfrac{50}{11}$, $D=\dfrac{18}{11}$

若平面$x+3y-5+\lambda(x-y-2z+4)=0$在$x$轴，$y$轴上的截距非零且相等，求此平面方程.

解 平面方程为：$(1+\lambda)x+(3-\lambda)y+(-2\lambda)z+(-5+4\lambda)=0$

在x轴，y轴上截距分别为$-\dfrac{4\lambda-5}{1+\lambda},-\dfrac{4\lambda-5}{3-\lambda}$

由条件$-\dfrac{4\lambda-5}{1+\lambda}=-\dfrac{4\lambda-5}{3-\lambda}$

得 $\lambda=1$

故平面方程为：$2x+2y-2z-1=0$

证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点偏导数存在但是不连续.

证明： 利用偏导数定义，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0\Rightarrow f_x(0,0)=0$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0\Rightarrow f_y(0,0)=0$$

故可知函数在 $(0,0)$ 的两个偏导数都存在， 均为 0 .

取特殊路径 $y=kx$ ， 则有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

此表明函数极限随着 k 取值的不同而不同，从而可知函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 极限不存在，进而不连续. 6 分

1. 证明：$z=\sqrt{|xy|}$在点(0,0)处连续,偏导数存在,但不可微.

由$0\le\sqrt{|xy|}\le\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$,得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{|xy|}=0=f(0,0),\quad f(x,y)\text{在}(0,0)\text{处连续。}$$

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0=f_x(0,0)$$ 同理，$f_y(0,0)=0$，$f(x,y)$在(0,0)处偏导数存在

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{\sqrt{|\Delta x\,\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$，不存在

$f(x,y)$在(0,0)处不可微。

设 $g(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，

（1）讨论 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的连续性

（2）讨论 $g(x,y)$ 的偏导函数在 $(0,0)$ 点的连续性

（3）讨论 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的可微性

解：（1）由于 $0\leq\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leq x^2+y^2$，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0$$

所以有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0=g(0,0)$，即 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续。

（2）当 $x \neq 0$ 时，$g(x,0) = x^2 \sin\frac{1}{x^2}$，$y \neq 0$ 时，$g(0,y) = y^2 \sin\frac{1}{y^2}$，

因此

$$g'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x,0)-g(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x^2} = 0$$

$$g'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{g(0,y)-g(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{y^2} = 0$$

当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时，

$$g'_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$g'_y(x,y) = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$

而

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cos\frac{1}{2x^2}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{2y}\cos\frac{1}{2y^2}$$

不存在，因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g'_x(x,y)$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g'_y(x,y)$ 不存在，从而 $g'_x(x,y)$，$g'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续。

（3）当 $\Delta x^2+\Delta y^2\neq 0$ 时，

$$g(\Delta x,\Delta y)-g(0,0)=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

而 $g'_x(0,0)\Delta x+g'_y(0,0)\Delta y=0$，

当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时，$(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=o(\Delta x^2+\Delta y^2)$

从而

$$g(\Delta x,\Delta y)-g(0,0)-g'_x(0,0)\Delta x-g'_y(0,0)\Delta y$$

$$=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

这说明 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的可微。

例2. 设 $z = xf(x+y)$, $F(x,y,z)=0$, 其中 f 与 F 分别具有一阶导数或偏导数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$. (1999 考研)

解法1 方程两边对 x 求导, 得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f + xf' \cdot \left(1 + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \\ F_1' + F_2' \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_3' \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -xf' \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f + xf' \\ F_2' \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_3' \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -F_1' \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\begin{vmatrix} -xf' & f + xf' \\ F_2' & -F_1' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -xf' & 1 \\ F_2' & F_3' \end{vmatrix}} = \frac{xF_1' f' - xF_2' f' - f F_2'}{-xf' F_3' - F_2'}$$

$$(xf' F_3' + F_2' \neq 0)$$

$$z = x f(x+y),\ F(x,y,z)=0$$

解法2 方程两边求微分, 得

$$\begin{cases} \mathrm{d}z = f\,\mathrm{d}x + x f'\cdot(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) \\ F_1'\mathrm{d}x + F_2'\mathrm{d}y + F_3'\mathrm{d}z = 0 \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \text{化简}$$

$$\begin{cases} (f + x f')\mathrm{d}x + x f'\mathrm{d}y - \mathrm{d}z = 0 \\ F_1'\,\mathrm{d}x + F_2'\,\mathrm{d}y + F_3'\mathrm{d}z = 0 \end{cases}$$

消去 $\mathrm{d}y$ 即可得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

3.设函数 $w=f(x,y,z)$ 具有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由下面两式确定：

$$\sin y+\cos(xy)=0，\quad e^{z}=\int_{0}^{x+z}e^{t^{2}}dt，\text{求}\frac{dw}{dx}。$$

解： $$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

对 $\sin y+\cos(xy)=0$ 两边关于 x 求导，得

$$\cos y\frac{dy}{dx}-\sin(xy)(y+x\frac{dy}{dx})=0$$

整理得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{y\sin(xy)}{\cos y-x\sin(xy)}$$

对 $e^{z}=\int_{0}^{x+z}e^{t^{2}}dt$ 两边关于 x 求导，得 $$e^{z}\frac{dz}{dx}=e^{(x+z)^{2}}(1+\frac{dz}{dx})$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{e^{(x+z)^{2}}}{e^{z}-e^{(x+z)^{2}}}$$

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{y\sin(xy)}{\cos y-x\sin(xy)}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{e^{(x+z)^{2}}}{e^{z}-e^{(x+z)^{2}}}$$

3. 设 $u = f(x, y, z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数

$y = y(x)$ 及 $z = z(x)$ 分别由下两式确定

$$e^{xy} - xy = 2, \qquad e^{x} = \int_{0}^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$$

求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. (2001考研)

答案: $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f_1' - \frac{y}{x} f_2' + [1 - \frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}] f_3'$$

$u = xy^2 + yz^3$在点（1，2，－1）处沿哪个方向的方向导数值最大，并求此最大方向导数的值.

解　$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(y^2\cos\alpha + (2xy + z^3)\cos\beta + 3yz^2\cos\gamma\right)\Big|_{(1,2,-1)}$$

$$= 4\cos\alpha + 3\cos\beta + 6\cos\gamma$$

设 $\vec{g} = \{4,3,6\}$　　$\vec{l}^{\,0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

则 $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \vec{g}\cdot\vec{l}^{\,0} = |\vec{g}|\cos\varphi$，其中 φ 为 $\vec{g}$ 与 $\vec{l}^{\,0}$ 的夹角。

所以当 $\vec{l}^{\,0}$ 与 $\vec{g}$ 同向时，$\dfrac{\partial u}{\partial l} = |\vec{g}| = \sqrt{61}$ 取最大值。

定理2 (充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数，且

$$f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0$$

令 $A=f_{xx}(x_0,y_0),\ B=f_{xy}(x_0,y_0),\ C=f_{yy}(x_0,y_0)$

则: 1) 当 $AC-B^2>0$ 时, 具有极值 $\begin{cases} A<0 \text{ 时取极大值;} \\ A>0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

2) 当 $AC-B^2<0$ 时, 没有极值.

3) 当 $AC-B^2=0$ 时, 不能确定 , 需另行讨论.

证明见 第九节(P121) .

设 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2fy+g$，且 $a>0, b^2-ac<0$，证明：存在一点 (x_0,y_0)，使得 $f(x_0,y_0)$ 为极小值.

解　由 $\begin{cases} f_x=2ax+2by+2d=0 \\ f_y=2bx+2cy+2f=0 \end{cases}$，$\because b^2-ac\neq 0 \therefore$ 该方程组有唯一解：

$$x_0=\frac{bf-cd}{ac-b^2}, y_0=\frac{bd-af}{ac-b^2}$$，这样得到驻点 $P(x_0,y_0)$

在 $P(x_0,y_0)$ 点，

$$\Delta=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{vmatrix}=4(ac-b^2)>0 \qquad ,A=f_{xx}(P)=2a>0$$

故函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处取极小值 $f(x_0,y_0)$.

求平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xoy 平面距离最短的点.

答：构造拉格朗日函数：

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(20x+15y+12z-60)+\mu(x^2+y^2-1).$$

求解方程组：

$$\begin{cases} L_x=20\lambda+2\mu x=0 \\ L_y=15\lambda+2\mu y=0 \\ L_z=2z+12\lambda=0 \\ L_\lambda=20x+15y+12z-60=0 \\ L_\mu=x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

可得两组解分别是 $A\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5},\frac{85}{12}\right)$ 以及 $B\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12}\right)$.

显然 $B\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12}\right)$ 点到 xoy 平面的距离更短.

求二元函数$z=f(x,y)=x^2+y^2-x-y$在闭区域$x^2+y^2\le 1$上的最大值和最小值。

解： $f(x,y)$为闭区域上的连续函数，其最值必定存在。

先求出在开区域$x^2+y^2<1$上 $f(x,y)$可能的极值点，令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-1=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y-1=0\end{cases}$$

，得驻点为$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

再求出在边界$x^2+y^2=1$上 $f(x,y)$可能的极值点，引入拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-x-y+\lambda(x^2+y^2-1)$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x-1+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y-1+2\lambda y=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1=0\end{cases}$$

由前两个方程得 $2x(1+\lambda)=1, 2y(1+\lambda)=1$，从而 $x=y$，代入第三个方程得

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda_1=\frac{1}{\sqrt{2}}-1, y_1=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}-1, y_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

拉格朗日函数的驻点为$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}-1)$，$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}-1)$，故

$f(x,y)$可能的最值点为$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$，$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$，$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，经过计算

$$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})=-\frac{1}{2}, \quad f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})=1-\sqrt{2}, \quad f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})=1+\sqrt{2}$$

比较这些值后知，$f(x,y)$在 $x^2+y^2\le 1$ 上的最大值为 $f_{\max}=1+\sqrt{2}$，最小值为

$$f_{\min}=-\frac{1}{2}$$

13. 求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$、x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的极值、最大值与最小值.

13. 解：由方程组

$$\begin{cases} f_x'(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0, \\ f_y'(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0, \end{cases}$$

得 $x=0(0\leqslant y\leqslant 6)$ 及点 $(4,0),(2,1)$.

点 $(4,0)$ 及线段 $x=0$ 在 D 的边界上，只有点 $(2,1)$ 是可能的极值点.

$f_{xx}''=8y-6xy-2y^2$,

$f_{xy}''=8x-3x^2-4xy$,

$f_{yy}''=-2x^2$,

在点 $(2,1)$ 处，

$$A=f_{xx}''(2,1)=(8y-6xy-2y^2)\Big|_{\substack{x=2\\y=1}}=-6<0,$$

$$B=f_{xy}''(2,1)=(8x-3x^2-4xy)\Big|_{\substack{x=2\\y=1}}=-4,$$

因此点 $(2,1)$ 是极大值点，极大值 $f(2,1)=4$.

在边界 $x=0(0\leqslant y\leqslant 6)$ 和 $y=0(0\leqslant x\leqslant 6)$ 上，$f(x,y)=0$，

在边界 $x+y=6$ 上，$y=6-x$，代入 $f(x,y)$ 中得 $z=2x^3-12x^2(0\leqslant x\leqslant 6)$.

由 $z'=6x^2-24x=0$ 得 $x=0$ 或 $x=4$. $z''\Big|_{x=4}=12x-24\Big|_{x=4}=24>0$，所以点 $(4,2)$ 是边界上的极小值点. 极小值为 $f(4,2)=-64$.

经比较得，最大值为 $f(2,1)=4$，最小值为 $f(4,2)=-64$.

【方法点击】求连续函数在有界闭域 D 上最值的步骤：

(1) 求 D 内的驻点和不可导点；

计算三重积分$\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}dv$，其中$\Omega$是由平面曲线$\begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$绕z轴旋转所形成的曲面与平面z=1所围成的立体.

5.（**本小题8分**）

计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv$，其中 Ω 是由$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的空间有界闭区域.

解： $\because \Omega$ 关于 yoz 面为对称，$f(x,y,z)=x$ 为 x 的奇函数，

有 $\iiint\limits_{\Omega} x dv = 0.$

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv = \iiint\limits_{\Omega} z dv$$

利用球面坐标$\therefore \iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv = \iiint\limits_{\Omega} z dv$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r\cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr = \frac{\pi}{8}.$$

设 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=1$ 所围的有界闭区域，试计算 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v$ 。

解 $$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}r^3\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{3\cos^3\varphi}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1)$$

设 $f(u)$为连续函数，$\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \le 1$，试证

$$\iiint_{\Omega} f(z)dxdydz = \pi\int_{-1}^{1} f(u)(1-u^2)du$$

解 $\iiint_{\Omega} f(z)dxdydz$

$= \int_{-1}^{1} dz \iint_{D_z} f(z)dxdy$ 这里 $D_z: x^2 + y^2 \le 1 - z^2$

$= \int_{-1}^{1} [f(z)\iint_{D_z} dxdy]dz$

$= \int_{-1}^{1} f(z)\pi(1-z^2)dz$

$= \pi\int_{-1}^{1} f(z)(1-z^2)dz$

$= \pi\int_{-1}^{1} f(u)(1-u^2)du$

证明：$\int_0^x \int_0^u f(t)dtdu = \int_0^x (x-u)f(u)du$.

证明：构造直角坐标系内区域D，其范围为$D:\begin{cases}0\le u\le x\\0\le t\le u\end{cases}$，则

$$\int_0^x \int_0^u f(t)dtdu = \iint_D f(t)dtdu .$$

显然D还可以表示为$D:\begin{cases}0\le t\le x\\t\le u\le x\end{cases}$，因此

$$\begin{aligned}\int_0^x \int_0^u f(t)dtdu &= \iint_D f(t)dtdu\\&= \int_0^x \int_t^x f(t)dudt\\&= \int_0^x (x-t)f(t)dt\\&= \int_0^x (x-u)f(u)du\end{aligned}$$

求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=2$ 内的那部分面积 S .

解： 由 $z=x^2+y^2$ 可知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\text{，}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y\text{，}\quad \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\text{，}$$

又所给曲面在 xoy 平面上的投影区域为 D_{xy}： $x^2+y^2\le 2$，

$$\text{因此 } S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial x})^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\cdot rdr$$

计算 $\int_L x\,\mathrm{d}s$，其中 L 是星形线 $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ 经点 A(2，0)，C(0，2)，B$(-2,0)$ 的 ACB 弧段

解 $$\int_L xds = \int_0^{\pi} 2\cos^3 t\sqrt{(6\sin t\cos t)^2}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^3 t \cdot 6\sin t\cos t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cos^3 t \cdot (-6\sin t\cos t)dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 12\cos^4 t \cdot d(\cos t) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 12\cos^4 t \cdot d(\cos t)dt$$

$$= -\frac{12}{5}\cos^5 t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + + \frac{12}{5}\cos^5 t\,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0$$

计算$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}y$，其中$L$是从$O(0，0)$沿曲线$x=\begin{cases}\sqrt{y}, 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 2-y, 1< y\leqslant 2\end{cases}$，到$B(0，2)$。

解

$$L_1: x=\sqrt{y}, 0\le y\le 1$$

$$L_2: x=2-y, 1\le y\le 2$$

$$\int_L (x^2+y^2)dy=\int_{L_1}(x^2+y^2)dy+\int_{L_2}(x^2+y^2)dy$$

$$=\int_0^1 (y+y^2)dy+\int_1^2 [(2-y)^2+y^2)dy$$

$$=\frac{5}{6}+\frac{8}{3}=\frac{7}{2}$$

6. 试确定 a, b 的值，使曲线积分 $\int_L \frac{ax+y}{x^2+y^2}dx+\frac{y-x-b}{x^2+y^2}dy$ 与路径无关，并求 $f(x,y)$ 使 $gradf(x,y)=\left(\frac{ax+y}{x^2+y^2},\frac{y-x-b}{x^2+y^2}\right)$。

解：依题意知 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y-x-b}{x^2+y^2})=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{ax+y}{x^2+y^2})$，得

$$\frac{-(x^2+y^2)-2x(y-x-b)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(x^2+y^2)-2y(ax+y)}{(x^2+y^2)^2}$$

比较得 $-2axy=-2xy+2bx$，即 $a=1,b=0$

设 $gradf(x,y)=\left(\frac{ax+y}{x^2+y^2},\frac{y-x-b}{x^2+y^2}\right)$，则

$$df(x,y)=\frac{ax+y}{x^2+y^2}dx+\frac{y-x-b}{x^2+y^2}dy$$

$$f(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{ax+y}{x^2+y^2}dx+\frac{y-x-b}{x^2+y^2}dy+C$$

由于$(0,0)$是奇点，取$x_0=0, y_0=1$，因积分与路径无关，故可选由$(0,1)$到$(x,1)$再到(x,y)的折线，于是

$$f(x,y)=\int_{(0,1)}^{(x,1)}\frac{ax+y}{x^2+y^2}dx+\frac{y-x-b}{x^2+y^2}dy$$

$$+\int_{(x,1)}^{(x,y)}\frac{ax+y}{x^2+y^2}dx+\frac{y-x-b}{x^2+y^2}dy+c$$

$$=\int_0^x\frac{x+1}{x^2+1}dx+\int_1^y\frac{y-x}{x^2+y^2}dy+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan x-\arctan\frac{y}{x}-\arctan\frac{1}{x}C$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{x}{y}+C$$

6. （本小题 8 分）

设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的二阶导数，并使曲线积分

$\int_L [3\varphi'(x)-2\varphi(x)+xe^{2x}]ydx+\varphi'(x)dy$ 与路径无关，求函数 $\varphi(x)$.

解： 由已知得 $3\varphi'(x)-2\varphi(x)+xe^{2x}=\varphi''(x)$

$$\Rightarrow \varphi''(x)-3\varphi'(x)+2\varphi(x)=xe^{2x} \qquad (*)$$

此为二阶常系数非齐次线性微分方程.

与 (*) 相对应的齐方程的特征方程为

$$r^2-3r+2=0 \Rightarrow r_1=1, r_2=2.$$

因为 $\lambda=2$ 是特征单根，故 (*) 特解可设为 $y^*=x(Ax+B)e^{2x}$，

代入 (*) 中可以求得 $A=\dfrac{1}{2}, B=-1 \Rightarrow y^*=\dfrac{1}{2}x(x-2)e^{2x}$.

于是所求函数为 $\varphi(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}+\dfrac{1}{2}x(x-2)e^{2x}$.

计算 $I=\int_L (x+y)^2dx-(x^2+y^2\sin y)dy$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 从点 $A(-1,1)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段曲线弧.

解：补充线段 $\overline{BA}$： $y=1$， x 从1变到 -1，

记 $\overline{BA}$ 与 L 所围成平面区域为 D： $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ x^2\le y\le 1\end{cases}$

从而

$$I=\oint_{L+\overline{BA}}(x+y)^2dx-(x^2+y^2\sin y)dy-\int_{\overline{BA}}(x+y)^2dx-(x^2+y^2\sin y)dy$$

$$=\iint_D(-2y)dxdy+\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx$$

$$=-2\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}ydy+\frac{8}{3}=-2\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(x^4-1)dx+\frac{8}{3}=\frac{16}{15}.$$

计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} z^2 dS$，$\Sigma$ 是锥面 $z^2=x^2+y^2$ 介于平面 $z=1$ 与 $z=2$ 之间的部分.

解： 设 Σ 在 xoy 平面上的投影为圆环域 D_{xy}：$1\le x^2+y^2\le 4$,

$$\Sigma：\quad z=\sqrt{x^2+y^2}\,,\qquad z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\quad z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

从而 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy$，

$$故\ I=\iint\limits_{\Sigma} z^2 dS=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r^3dr=\frac{15\sqrt{2}}{2}\pi\,.$$

计算$\iint\limits_{\Sigma}|x|z\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是柱面$x^2+y^2=R^2$介于$z=0$及$z=R$之间的部分曲面，$R$是正数。

证　　Σ在yoz面上的投影域为D：$-R\leqslant y\leqslant R,\ 0\leqslant z\leqslant R.$

$\Sigma: x^2+y^2=R^2$，即$x=\pm\sqrt{R^2-y^2}$

记$\Sigma_1: x=\sqrt{R^2-y^2}$

$\Sigma_2: x=-\sqrt{R^2-y^2}$

在$\Sigma_1: x=\sqrt{R^2-y^2}$上，$dS=\sqrt{1+(\frac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}})^2+0^2}\,dydz=\frac{Rdydz}{\sqrt{R^2-y^2}}$

由对称性，得

$$\iint\limits_{\Sigma}|x|zdS=2\iint\limits_{\Sigma_1}|x|zdS=2\iint\limits_{\Sigma_1}xzdS$$

$$=2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{R^2-y^2}\,z\,\frac{Rdydz}{\sqrt{R^2-y^2}}$$

$$=2R\iint\limits_{D_{yz}}zdydz=2R\int_{-R}^{R}dy\int_0^R zdz=2R^4$$

计算$\iint_{\Sigma}\frac{e^{z}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中$\Sigma$是由半锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$，平面$=1$和$z=2$所围成的圆台的侧面下侧.

答：Σ曲面在xoy坐标平面的投影为$D:1\le x^2+y^2\le 4$.

因此

$$\iint_{\Sigma}\frac{e^{z}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\iint_{D}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$=-\int_0^{2\pi}\int_1^2\frac{e^r}{r}\cdot rdrd\theta$$

$$=-2\pi\left(e^2-e\right)$$

计算$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中Σ是 $z=1-x^2-y^2$ 在 xoy 面上方的部分曲面的上侧。

解　补一平面块Σ_1：$z=0, x^2+y^2\leqslant 1$，取下侧，

$$\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy=0$$

Σ和Σ_1围成立体Ω，由高斯公式

$$\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega} 3dxdydz$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{1-r^2}dz=6\pi\int_0^1 r(1-r^2)dr=\frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore \iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy-\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\frac{3}{2}\pi-0=\frac{3}{2}\pi$$

试求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$在$(-1,\ 1)$内的和函数。

解　幂级数的收敛域是$[-1,\ 1]$，所以当$x\in(-1,\ 1)$时，有

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)dx$$

$$=\int_0^x\left(\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}dx\right)dx$$

$$=(1-x)\ln(1-x)-x$$

证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n^p}, \quad (p>0)$$

收敛，并说明该级数何时绝对收敛。

证 由莱伯尼兹判别法，知 $p>0$ 时原级数收敛，

又因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\sin\frac{1}{n^p}\right|}{\frac{1}{n^p}}=1 \quad (p>0)$$

所以 $p>1$时，所论级数绝对收敛。

判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n}{3}\pi}{2^n}$的敛散性.

解： 因为$\frac{n\cos^2\frac{n}{3}\pi}{2^n}\le\frac{n}{2^n}$，

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$满足：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\times\frac{2^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1,$$

利用比值判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛，

若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 也收敛.

证明：由正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，显然有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则 $\{u_n\}$ 是有界的，

即 $\exists M_1 > 0$，使得对于任意 $n \in N$，总有 $|u_n| < M_1$.

同理，$\exists M_2 > 0$，使得对于任意 $n \in N$，总有 $|v_n| < M_2$.

则由 $u_n^2 < M_1 u_n$，可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛；由 $u_n v_n < M_1 v_n$，可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛；由 $v_n^2 < M_2 v_n$，可知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$.

综上，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 也收敛.

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$ 发散。

证　记 $a_n=\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$，于是

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{\sqrt{n+1}}}}{\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}}=\frac{n+1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}(n+1)^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}=1$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

因而

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln(n+1)^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}e^{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ln(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}=1$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$

故所论级数发散。

将函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x-2}$ 展开成 x 的幂级数.

解： 因为 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x-2}=\dfrac{x}{(x-2)(x+1)}$

$$=\frac{1}{3}(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2})=\frac{1}{3}(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-\frac{x}{2}})$$

且 $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \ (-1<x<1)$，

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n \ (-2<x<2)\text{，}$$

故 $f(x)=\dfrac{1}{3}[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}x^n]=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}[(-1)^n-\dfrac{1}{2^n}]x^n$，

收敛域为 $(-1<x<1)\cap(-2<x<2)$，即 $-1<x<1$.

在（－1，1）内把 $f(x)=x$ 展开成以 2 为周期的傅立叶级数。

解 $f(x)$ 为奇函数，故其傅立叶系数为

$$a_n = 0 \qquad ,n = 0,1,2,\cdots$$

$$b_n = 2\int_0^1 x\sin n\pi x\,\mathrm{d}\,x$$

$$= -\frac{2}{n\pi}x\cos n\pi x\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} \qquad ,n = 1,2,3,\cdots$$

故

$$x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x \qquad ,-1 < x < 1$$

已知 $f(x,y)$ 是 R^2 上的连续函数，求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)dxdy$.

答：因为 $f(x,y)$ 是连续函数，则由中值定理可知：

对于任意 $t>0$，在区域 $x^2+y^2\le t^2$ 上均存在 $(\xi,\eta)\in\{(x,y)|x^2+y^2\le t^2\}$，使得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)dxdy=\pi t^2\cdot f(\xi,\eta)。$$

因此

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)dxdy=\lim_{t\to 0^+}\pi\cdot f(\xi,\eta).$$

而显然有 $|\xi|<t$ 以及 $|\eta|<t$，所以在 $t\to 0^+$ 时，同时有 $|\xi|\to 0$ 以及 $|\eta|\to 0$.

综上，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)dxdy&=\lim_{t\to 0^+}\pi\cdot f(\xi,\eta)\\&=\pi\cdot f(0,0)\end{aligned}$$

为所求结论.