REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BATNA 2

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

---

MÉMOIRE DE MASTER 2

EN

MATHEMATIQUES

OPTION

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

ET APPLICATIONS

INTITULE

---

# COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME DE DIFFUSION ÉPIDÉMIQUE S.I.S

---

PRÉSENTÉ PAR

DERRADJI TAREK

Devant le jury :

| | |
|---|---|
| Mr. Bounibane Bachir | Président |
| $M^{elle}$ Touil Asma | Examinatrice |
| Mr. Youkana Amar | Encadreur |

Soutenu le :27-06-2019

*Je dédie ce modeste travail*

*à mes chers parents qui m'ont beaucoup aidé dans*

*mon parcours scolaire, qu' ALLAH les protège,*

*à mes soeurs et mon frère qui m'ont soutenu durant*

*toutes ces années.*

*"(...) On fait la science avec des faits,*

*comme on fait une maison avec*

*des pierres ; mais une accumulation*

*de faits n'est pas plus une science*

*qu'un tas de pierres n'est une maison."*

Henri Poincaré

-La science et l'hypothèse-(1902)

# Remerciements

Tout d'abord, je remercie Allah qui m'a donné la force, le courage, la volonté et la patience pour réaliser ce travail.

Je remercie chaleureusement mon encadreur Mr Amar Youkana qui m'a fait l'honneur d'accepter l'encadrement de ce mémoire. Il était très généreux à travers son soutien, sa disponibilité, et ses conseils et orientations qui m'ont permis de mener ce travail à son terme.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à Mr Bounibane Bachir d'avoir accepter de présider le jury. Je tiens aussi à remercier M$^{elle}$ Touil Asma pour avoir en accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury.

Je tiens aussi à remercier tous les professeurs qui ont contribué à notre formation.

Mon respect et mes remerciements vont, ensuite, à mes chers parents, mon frère, et à mes sœurs pour leurs sacrifices et conseils, sans eux, je ne serais jamais arrivé à ce niveau. Qu'ALLAH les garde.

# Table des matières

# Introdution

LA diffusion spatiale et l'hétérogénéité environnementale sont des facteurs importants qui devraient être pris en compte dans la propagation de plusieurs maladies par exemple la grippe, SRAS : syndrome respiratoire aigu sévère apparu à Hong Kong.
Pour comprendre leurs impacts sur la persistance et l'extinction d'une maladie, et afin de proposer des stratégies optimales de contrôle et de vaccination, Allen [3] a proposé un modèle de réaction diffusion S.I.S (Susceptibles-infectés-susceptibles) dépendant de la fréquence pour une population habitant une habitation spatiale continue. Il s'est penché sur l'existence, l'unicité et particulièrement le comportement asymptotique de l'équilibre endémique lorsque le taux de diffusion des individus susceptibles approche 0.
D'autres travaux ont été faits pour contribuer à une compréhension additionnelle de l'impact des taux de diffusion des susceptibles et infectés sur toute la population, lorsque ils sont grands ou petits . Leurs résultats conduisent à des critères pour contrôler la maladie.

Le but de notre travail est donc de présenter parmi ces résultats ceux de Peng [13] qui a étudié le comportement asymptotique de l'équilibre endémique lorsque le taux des susceptibles ou celui des infectés tend vers l'infini ou zero .
Cette étude est constitué de quatre chapitres.
Dans le chapitre 1, nous donnons des rappels mathématiques, nécessaires à la démonstration des théorèmes 1 et 2 du chapitre quatre, tels que le principe du maximum, théorème de Hopf et quelques outils des espaces de Sobolev.

Dans le chapitre 2, nous présentons le modèle S.I.S régissant les densités S et I des indi-

vidus susceptibles et infectés respectives, ainsi que l'existence, l'unicité et la positivité de la solution du modèle S.I.S.
Le chapitre 3 traite l'état d'équilibre du modèle S.I.S, en particulier l'équilibre sans maladie et l'équilibre endémique.
Le dernier chapitre a pour objectif l'étude des comportements asymptotiques de l'équilibre endémique. Elle se base sur deux théorèmes principaux dont nous donnons leurs démonstrations et leur interprétation épidémiologique.

Chapitre 1

# Rappels Mathématiques :

## 1.1 Classification des équations linéaires aux dérivées partielles du seconde ordre

**Définition 1.1**

a) Un opérateur différentiel linéaire du second ordre est un opérateur continue de $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ dans $C^0(\Omega, \mathbb{R})$ défini par :

$$u \to Lu = \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u(x) + d(x)$$

Ou $a_{i,j}(x), b_i(x), C(x), d(x)$ appartiennent à $C^0(\Omega, \mathbb{R})$.

b) L'équation $Lu = f(x)$ est appelée équation aux dérivées partielles du seconde ordre .

c) L'équation différentielle $Lf(x) = 0$ est dite elliptique si la matrice A(x)=$(a_{i,j}(x))_{d \times d}$ est définie positive pour tout $x \in \Omega$.

d) L'équation différentielle :$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Lu(x,t) = 0$ où $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est dite parabolique.

e) $\Delta u = f$ où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial_d^2}$ appelé le Laplacien est un exemple d'équation elliptique appelé equation de poisson.

Soit $\Omega$ un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^m$.

Considérons l'opérateur différentiel elliptique

$$Lf = \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

où

1) $a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x)$ pour tous les $j, i, x.$

2) Ellipticité uniforme : il existe des constantes $0 < \lambda \leqslant u < \infty$ avec

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \leqslant u|\xi|^2 \quad pour \ \ tous \ \ les \, x, \xi \in \mathbb{R}^m$$

3) Il existe une constante $K$ telle que

$$|b_i(x)| \leqslant K, \ x \in \Omega, \ i = 1, ..., d$$

**Théorème 1.1 [9]**

Soit $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, où $\Omega$ est borné.

a) Si $f$ vérifie $Lf \geqslant 0$ dans $\Omega$, alors $f$ atteint son maximum sur $\partial\Omega$ c.à.d

$$\sup_{x\in\Omega} f(x) = \max_{x\in\partial\Omega} f(x)$$

b) Si $f$ vérifie $Lf \leqslant 0$ dans $\Omega$, alors $f$ atteint son minimum sur $\partial\Omega$ c.à.d

$$\inf_{x\in\Omega} f(x) = \min_{x\in\partial\Omega} f(x)$$

**Corollaire 1.1 [9]**

Soit $f, g \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, où $\Omega$ est borné.

Si

$$Lf \geqslant Lg \ \ dans \ \ \Omega$$

et

$$f(y) \leqslant g(y) \ sur \ \ \partial\Omega$$

alors

$$f(x) \leqslant g(x) \ \ dans \ \ \Omega$$

**Définition 1.2**

a) Une fonction $f \in C^2(\Omega)$ est appelée sous-solution de $Lf = 0$ si $Lf \geqslant 0$ dans $\Omega$

b) Une fonction $f \in C^2(\Omega)$ est appelée sur-solution de $Lf = 0$ si $Lf \leqslant 0$ dans $\Omega$

**Théorème 1.2 (Théorème de Hopf) [9]**

Soit $f$ vérifiant $Lf \geqslant 0$ dans $\Omega$ et $x_0 \in \partial\Omega$.

Supposons de plus que :

1) $f$ est continue au point $x_0$

2) $f(x_0) > f(x)$ dans $x \in \Omega$

3)Il existe une boule $B(y, r) \subset \Omega$ avec $x_0 \in \partial B(y, r)$.

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} > 0$$

où $\nu$ est le vecteur unitaire extérieur normal à $\partial\Omega$.

**Remarque** Dans le cas où $Lf \leqslant 0$ et $f(x_0) < f(x)$, on a $\frac{\partial f(x_0)}{\partial \nu} < 0$

## 1.2 Fonctions propres et vecteurs propres :

**Définition 1.3**

Une fonction $u(x)$ non identiquement nulle est appelée fonction propre du problème de Neumann pour l'opérateur $L$ s'il existe un nombre $\lambda$ tel que $u(x)$ est solution du problème de Neumann .

Le nombre $\lambda$ est appelé la valeur propre associé à la fonction propre $u(x)$.

## 1.3 les espaces de Lebesgue

**Définition 1.4**

Soit $p \in \mathbb{R}$

- Si $1 \leqslant p < \infty$, on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f\ mesurable\ et\ \|f\|_{L^p} < \infty\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

- Si $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f\ mesurable\ et\ \ existe\ C\ telle\ que\ |f(x)| \leqslant C\ \ p.p\ sur\ \Omega\}.$$

On note par

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C; |f(x)| \leqslant C\ \ p.p\ \ sur\ \ \Omega\}$$

**Théorème 1.3 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue).**

Soit $f_n$ une suite de fonctions de $L^1$. On suppose que

a) $f_n(x) \to f(x)$ p.p sur $\Omega$

. b) Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque $n$, $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ p.p sur $\Omega$.

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$$

## 1.4 les espaces de Sobolev

**Définition 1.5**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega);\ tels\ que\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)\ pour\ tout\ i = 1 \ldots N\right\}$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)}$$

ou bien de la norme équivalente :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = (\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} \ (si\ 1 \leqslant p < \infty)$$

Si $p = \infty$ , la norme de l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \sup_{\Omega}|u| + \sup_{\Omega}|\nabla u|.$$

En particulier pour $p = 2$, on note $W^{1,p}(\Omega) = H^1$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}, \ pour\ tout\ \ u,v \in H^1(\Omega)$$

Et la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

Chapitre 2

# Modèle de réaction diffusion

**Introduction**

Pour étudier l'impact de l'hétérogénéité spatiale de l'environnement et le mouvement des individus sur la persistance et l'extinction d'une maladie, Allen [3] a proposé un modèle de réaction-diffusion (S.I.S) (Susceptibles-Infectés-susceptibles).

## 2.1 Modèle S.I.S

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m (m \geqslant 1)$ un domaine borné de $\mathbb{R}^m$ dont la frontière $\partial\Omega$ est régulière. Alors le modèle de réaction-diffusion S.I.S est donné par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{S}}{\partial t} - d_S \Delta \bar{S} = -\dfrac{\beta(x)\bar{S}\bar{I}}{\bar{S}+\bar{I}} + \gamma(x)\bar{I} \quad dans\ \Omega \times (0,\infty). \\ \dfrac{\partial \bar{I}}{\partial t} - d_I \Delta \bar{I} = \dfrac{\beta(x)\bar{S}\bar{I}}{\bar{S}+\bar{I}} - \gamma(x)\bar{I} \quad dans\ \Omega \times (0,\infty). \\ \dfrac{\partial \bar{S}}{\partial \nu} = \dfrac{\partial \bar{I}}{\partial \nu} = 0 \qquad\qquad sur\ \partial\Omega \times (o,\infty). \\ N = \displaystyle\int_\Omega \left[\bar{S}(x,0) + \bar{I}(x,0)\right] dx \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\bar{S}(x,t)$ et $\bar{I}(x,t)$ désignent respectivement les densités des individus susceptibles et des infectés au lieu $x$ et à l'instant $t$.

- $d_S$ et $d_I$ sont des constantes positives désignant respectivement les taux de diffusion des susceptibles et des infectés .

- $\beta$ et $\gamma$ sont des fonctions hölderiennes positives sur $\Omega$ désignant les taux de transmission de la maladie et de guérison au lieu $x$ .

- $N$ désigne le nombre total d'individus à l'instant $t$.

- On dit que $x$ est un site à faible risque "Low-risk site " si le taux de transmission local de la maladie $\beta(x)$ est inférieur au taux de guérison local $\gamma(x)$.

- On dit que $x$ est un site à haut risque "high-risk site "si le taux de transmission local de la maladie $\beta(x)$ est inférieur au taux de guérison local $\gamma(x)$.

- Les ensembles $H^+ = \{x \in \Omega : \beta(x) > \gamma(x)\}$ et $H^- = \{x \in \Omega : \beta(x) < \gamma(x)\}$ sont appelés respectivement sites à faible et haut risque .

- On dit que $\Omega$ est un domaine à faible risque si : $\int_\Omega \beta(x)dx < \int_\Omega \gamma(x)dx$.

- On dit que $\Omega$ est un domaine à haut risque si : $\int_\Omega \beta(x)dx > \int_\Omega \gamma(x)dx$.

- $H^0 = \{x \in \Omega : \beta(x) = \gamma(x)\}$

Dans le travail de Allen [3] on suppose que $\beta(x) - \gamma(x)$ change de signe sur le domaine $\Omega$ i.e

(A2) $H^-$ et $H^+$ sont non vides.

De la continuité de $\beta - \gamma$ et de son changement de signe, l'ensemble $H^0$ est non vide.

(A3) $H^0$ consiste en un nombre fini de surfaces régulières disjointes ou en un nombre fini de points dans le cas où $m = 1$, chacun d'eux est racine simple de $\beta(x) - \gamma(x)$.

- On suppose que l'on a pas de flux d'individus à travers la frontière $\partial\Omega$ , c'est à dire :

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial \nu} = \frac{\partial \bar{I}}{\partial \nu} = 0$$

où $\nu$ est le vecteur unitaire extérieur normal à $\partial\Omega$ .

- On suppose aussi qu'il y a initialement un nombre positif d'individus , c'est à dire

(A1) $\int_\Omega \bar{I}(x,0)dx \geqslant 0$ avec $\bar{S}(x,0) \geqslant 0$ et $\bar{I}(x,0) \geqslant 0$ pour tout $x \in \Omega$

**Remarque :** Le nombre total d'individus à l'instant $t \geqslant 0$ est constant , c'est à dire

$$N = \int_\Omega \left[\bar{S}(x,t) + \bar{I}(x,t)\right] dx \quad \forall t \geq 0. \tag{2.2}$$

En effet, ajoutons membre a membre les deux premières équations du système (2.1) nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{S}+\bar{I})-\Delta(d_s\bar{S}+d_I\bar{I})=0$$

Intégrons cette equation sur $\Omega$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}(\bar{S}+\bar{I})dx-\int_{\Omega}\Delta(d_s\bar{S}+d_I\bar{I})dx=0$$

or, d'après l'identité première de Green,

$$\int_{\Omega}\Delta(d_s\bar{S}+d_I\bar{I})dx=-\int_{\Omega}\nabla(d_s\bar{S}+d_I\bar{I})\nabla(1)dx+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\nu}(d_s\bar{S}+d_I\bar{I})ds$$

$$=d_s\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\bar{S}}{\partial\nu}ds+d_I\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\bar{I}}{\partial\nu}ds=0$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}(\bar{S}+\bar{I})dx=0\Rightarrow\int_{\Omega}(\bar{S}+\bar{I})dx=cte\ \forall t\geq 0$$

Comme, par définition,

$$N=\int_{\Omega}\left[\bar{S}(x,0)+\bar{I}(x,0)\right]dx$$

alors

$$N=\int_{\Omega}\left[\bar{S}(x,t)+\bar{I}(x,t)\right]dx\quad\forall t\geq 0 \tag{2.3}$$

## 2.2 Existence et unicité de la solution

Notons par :

$$A=\begin{pmatrix}-d_1\Delta & 0\\ 0 & -d_2\Delta\end{pmatrix}$$

et

$$U=\begin{pmatrix}\bar{S}\\ \bar{I}\end{pmatrix}\qquad F(U)=\begin{pmatrix}-\frac{\beta(x)\bar{S}\bar{I}}{\bar{S}+\bar{I}}+\gamma(x)\bar{I}\\ \frac{\beta(x)\bar{S}\bar{I}}{\bar{S}+\bar{I}}-\gamma(x)\bar{I}\end{pmatrix}$$

Alors le système (2.1) est équivalent à

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = F(U) \\ U(0) = U_0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \nu} = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

D'après [3], la théorie classique des semi-groupes et le principe du maximum permettent de donner l'existence locale et la positivité des solutions du système (2.4) dans $]0, T_{max}[$, où $T_{max}$ est le temps maximal d'existence des solutions.

L'existence globale des solutions du système (2.4) est déduite par le principe de maximum.

Chapitre 3

# État d'équilibre

**Définition 3.1 :**

On dit qu'un système est en état d'équilibre lorsque après un certain temps les variables décrites par ce système ne dépendent plus du temps.

Dans notre cas, les variables de notre système sont $\bar{S}$ et $\bar{I}$ et par conséquent

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = 0 \quad et \quad \frac{\partial \bar{I}}{\partial t} = 0 \;\; et \; \bar{S} = \tilde{S}, \bar{I} = \tilde{I}$$

Le système (2.1) se réduit donc à :

$$\begin{cases} -d_s \Delta \tilde{S} = \dfrac{-\beta(x)\tilde{S}\tilde{I}}{\tilde{S}+\tilde{I}} + \gamma(x)\tilde{I} \quad dans \; \Omega \times (0,\infty) \\ -d_I \Delta \tilde{I} = \dfrac{\beta(x)\tilde{S}\tilde{I}}{\tilde{S}+\tilde{I}} - \gamma(x)\tilde{I} \quad dans \; \Omega \times (0,\infty). \\ \dfrac{\partial \tilde{S}}{\partial \nu} = \dfrac{\partial \tilde{I}}{\partial \nu} = 0 \quad sur \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\int_\Omega [\tilde{S}(x) + \tilde{I}(x)]dx = N \tag{3.2}$$

$(\tilde{S}(x), \tilde{I}(x))$ est appelé solution d'équilibre de (2.1)

Nous nous intéressons seulement aux solutions $(\tilde{S}(x), \tilde{I}(x))$ de (3.1) vérifiant :

$\tilde{S} \geqslant 0$ et $\tilde{I} \geqslant 0$

## 3.1 Équilibre sans maladie :

**Définition 3.2 :**

$(\tilde{S}, \tilde{I})$ est dite solution d'équilibre sans maladie si elle est une solution non négative dont $\tilde{I}(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$. On la note $\left(\tilde{S}, 0\right)$.

Dans ce cas, $\tilde{S} = \frac{N}{|\Omega|}$ où $|\Omega|$ représente le volume de $\Omega$.

En effet, portons $\tilde{I} = 0$ dans la $1^{ère}$ équation de (3.1) nous obtenons :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{S} = 0 \\ \dfrac{\partial \tilde{S}}{\partial \nu} = 0. \end{cases}$$

Par le principe du maximum $\tilde{S} = cste$. De même portons $\tilde{I} = 0$ dans la $4^{ème}$ équation de (3.1) nous obtenons :

$$\int_\Omega \tilde{S} dx = N$$

$$\tilde{S} \int_\Omega dx = N$$

$$\tilde{S} = \frac{N}{|\Omega|} \qquad où \quad |\Omega| = \int_\Omega dx$$

**Définition 3.3 :**

Le nombre $R_0 = \sup\limits_{\varphi \in H^1(\Omega), \varphi \neq 0} \left\{ \dfrac{\int_\Omega \beta \varphi^2}{\int_\Omega d_I |\nabla \varphi|^2 + \gamma \varphi^2} \right\}$ est appelé le nombre de reproduction de base.

## 3.2 Propriétés de $R_0$ [3]

1) Il existe une fonction positive unique $\Phi(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ vérifiant $\|\Phi\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$ telle que

$$\begin{cases} - d_I \Delta \Phi + \gamma(x) \Phi = \dfrac{\beta(x)}{R_0} \Phi \quad dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \quad sur \quad \partial \Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

De plus, sous l'hypothèse (A2) on a :

2) $R_0$ est une fonction monotone décroissante de $d_I$ avec $R_0 \to \max\{\frac{\beta(x)}{\gamma(x)} : x \in \bar{\Omega}\}$ lorsque $d_I \to 0$ et $R_0 \to \frac{\int_\Omega \beta}{\int_\Omega \gamma}$ lorsque $d_I \to +\infty$.

4) Dans un domaine à faible risque il existe une valeur seuil $d_I^* \in ]0, +\infty[$ telle que $R_0 > 1$ pour $d_I < d_I^*$ et $R_0 < 1$ pour $d_I > d_I^*$.

5) Dans un domaine à haut risque $R_0 > 1$ pour tout $d_I$.

6) Désignons par $\lambda_1(d, f)$ la première (principale ) valeur propre du problème de valeurs propres :

$$\begin{cases} -d\Delta\varphi + f(x)\varphi = \lambda\varphi \quad dans \;\; \Omega \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \qquad sur \;\; \partial\varphi \end{cases} \tag{3.4}$$

où $d$ est une constante positive donnée et $f \in C(\bar{\Omega})$. Alors $R_0 = 1$ si et seulement si $\lambda_1(d_I, \gamma - \beta) = 0$

$\lambda_1(d, f)$ est une fonction croissante par rapport à $f$.

## 3.3 Equilibre endémique (E.E)

**Définition 3.4 :**

Un équilibre endémique est une solution $(\tilde{S}(x), \tilde{I}(x))$ de (3.1) telle que $\tilde{I} > 0$ pour un certain $x \in \Omega$.

### 3.3.1 Problèmes Equivalents :

Dans ce qui suit , nous donnons deux problèmes équivalents à (3.1)

**Lemme 3.1**

$(\tilde{S}, \tilde{I})$ est une solution de (3.1) si et seulement si $(\tilde{S}(x), \tilde{I}(x))$ est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} d_s\tilde{S} + d_I\tilde{I} = \kappa & x \in \Omega \\ -d_I\Delta\tilde{I} = \tilde{I}\left(\beta - \gamma - \dfrac{\beta\tilde{I}}{\tilde{I}+\tilde{S}}\right) & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial\tilde{S}}{\partial\nu} = \dfrac{\partial\tilde{I}}{\partial\nu} = 0 & x \in \partial\Omega \\ N = \displaystyle\int_\Omega \left[\tilde{S} + \tilde{I}\right] dx \end{cases} \tag{3.5}$$

où $\kappa$ est une constante positive indépendante de $x \in \Omega$

**Démonstration :**

a) Supposons que $(\tilde{S}, \tilde{I})$ est une solution de (3.1) alors on a :

$$\begin{cases} \Delta(d_S\tilde{S} + d_I\tilde{I}) = 0 & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial\nu}(d_S\tilde{S} + d_I\tilde{I}) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Par le principe du maximum, $d_S\tilde{S} + d_I\tilde{I} = \kappa$ sur $\Omega$ , $\kappa$ est une certaine constante. Comme $\tilde{S}, \tilde{I} \geqslant 0$ sur $\Omega$ et N $> 0$ alors il existe $x \in \Omega$ tel que $d_S\tilde{S} + d_I\tilde{I} > 0$. En effet, si on a $d_S\tilde{S} + d_I\tilde{I} = 0 \; \forall \; x \in \Omega$ c.à.d $\tilde{S} = 0 \; et \; \tilde{I} = 0$ et par conséquent $\int_\Omega [\tilde{S} + \tilde{I}]dx = N = 0$ contradiction.

Montrons que $(\tilde{S}, \tilde{I})$ vérifie la $2^{éme}$ équation de (3.5)

On a :

$$-d_I\Delta\tilde{I} = \frac{\beta\tilde{S}\tilde{I}}{\tilde{S}+\tilde{I}} - \gamma\tilde{I}$$

$$-d_I\Delta\tilde{I} = \tilde{I}\left(\frac{\beta\tilde{S}}{\tilde{S}+\tilde{I}} - \gamma\right)$$

$$-d_I\Delta\tilde{I} = \tilde{I}\left(\frac{\beta\left(\tilde{S}+\tilde{I}\right)}{\tilde{S}+\tilde{I}} - \frac{\beta\tilde{I}}{\tilde{S}+\tilde{I}} - \gamma\right)$$

$$-d_I\Delta\tilde{I} = \tilde{I}\left(\beta - \gamma - \frac{\beta\tilde{I}}{\tilde{S}+\tilde{I}}\right)$$

De (3.1) on a $\int_\Omega \tilde{S} + \tilde{I} = N$ donc $(\tilde{S}, \tilde{I})$ solution de(3.1) est aussi une solution de (3.5).

b) supposons maintenant que $(\tilde{S}, \tilde{I})$ est une solution de (3.5) pour somme $\kappa > 0$

de la $1^{ére}$ equation du système (3.5) on a :

$$\Delta\kappa = \Delta(d_S\tilde{S} + d_I\tilde{I}) = 0$$

$$d_S\Delta\tilde{S} = -d_I\Delta\tilde{I} = \tilde{I}\left(\frac{\beta\left(\tilde{S}+\tilde{I}\right)}{\tilde{S}+\tilde{I}} - \frac{\beta\tilde{I}}{\tilde{S}+\tilde{I}} - \gamma\right) = \frac{\beta\tilde{S}\tilde{I}}{\tilde{S}+\tilde{I}} - \gamma\tilde{I}$$

donc la $1^{ére}$ equation du système (3.1) est vérifiée.
il est clair que $(\tilde{S}, \tilde{I})$ vérifie (3.1)b-(3.1)d.

Dans ce qui suit, posons :

$$S(x) = \frac{\tilde{S}(x)}{\kappa} \quad et \quad I(x) = \frac{d_I\tilde{I}(x)}{\kappa} \quad où \quad \kappa = d_S\tilde{S} + d_I\tilde{I} \tag{3.6}$$

$$f(x,u) = \beta(x)\left(1 - \frac{d_S u}{d_I + (d_S - d_I)u}\right) - \gamma(x) \quad x \in \Omega \;\; et \;\; u \in [0,1] \tag{3.7}$$

Remarquons que $f$ est strictement décroissante de $\beta(x) - \gamma(x)$ à $-\gamma$ lorsque $u$ croit de 0 à 1 .

**Lemme 3.2 :**

$(\tilde{S}, \tilde{I})$ est une solution de (3.5) si et seulement si (S,I) est une solution de problème suivant :

$$\begin{cases} d_S S + I = 1 & x \in \Omega \\ -d_I\Delta I = If(x,I) & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial I}{\partial \nu} = 0 & x \in \partial\Omega \\ \kappa = \dfrac{d_I N}{\int_\Omega (d_I S + I)} \end{cases} \tag{3.8}$$

**Démonstration :**

a) Montrons que $d_s S + I = 1$

$(\tilde{S},\tilde{I})$ est une solution de (3.5) alors de la $1^{ére}$ equation de (3.5) on a :

$$\frac{d_S}{\kappa}\tilde{S}+d_I\frac{\tilde{I}}{\kappa}=1$$

En tenant compte des changements de variables (3.6), nous obtenons :

$$d_sS+I=1$$

b) Montrons que $-d_I\Delta I=If(x,I)$

De la $2^{éme}$ équation de (3.5) on a :

$$-d_I\frac{\kappa}{d_I}\Delta I=\frac{\kappa}{d_I}I\left(\beta-\gamma-\frac{\frac{\beta\kappa I}{d_I}}{\kappa S+\frac{\kappa I}{d_I}}\right)$$
$$-d_I\Delta I=I\left(\beta\left(1-\frac{\frac{I}{d_I}}{\frac{1-I}{d_s}+\frac{I}{d_I}}\right)-\gamma\right)=I\left(\beta\left(1-\frac{d_SI}{d_I+(d_S-d_I)I}\right)-\gamma\right)$$

c) Montrons que $\kappa=\frac{d_IN}{\int_\Omega(d_IS+I)}$

On a :

$$\int_\Omega\left[\tilde{S}+\tilde{I}\right]dx=N$$
$$\int_\Omega\kappa S+\frac{\kappa I}{d_I}dx=N$$
$$\kappa\int_\Omega(Sd_I+I)dx=Nd_I$$
$$\frac{d_IN}{\int_\Omega(Sd_I+I)dx}=\kappa$$

## 3.4 Existence et unicité de l'équilibre endémique

**Lemme 3.3 :**

Supposons que $R_0>1$. Alors (3.8) possède une solution non négative $(S,I)$ vérifiant :

1) $S(x),I(x)\in C^2(\bar{\Omega})$ et $I\neq 0$ sur $\Omega$.

2) Cette solution avec $I\neq 0$ est unique , $S(x)>0$ et $0<I(x)<1$ pour tout $x\in\Omega$

Démonstration voir Allen [3]

**Lemme 3.4 :**

Supposons que $R_0 > 1$. Alors (3.1) possède une solution non négative $(\tilde{S}, \tilde{I})$ vérifiant :
1) $\tilde{S}(x), \tilde{I}(x) \in C^2(\bar{\Omega})$
2) $\tilde{I} \neq 0$ sur $\Omega$.
De plus,
3)$(\tilde{S}, \tilde{I})$ est unique et elle est donnée par : $\tilde{S} = \kappa S$ et $\tilde{I} = \frac{\kappa I}{d_I}$ où $\kappa = \frac{d_I N}{\int_\Omega d_I S + I}$
4)$\tilde{S}$ $et$ $\tilde{I}$ sont positives .

**Démonstration**

Les résultats de ce théorème découlent des lemmes 3.1, 3.2 et 3.3, et du changement de variables

$$S = \frac{\tilde{S}}{\kappa}, I = \frac{d_I \tilde{I}}{\kappa}$$

Chapitre 4

# Comportement asymptotique :

## 4.1 Résultats préliminaires

**Lemme 4.1 (Principe du maximum )**

Supposons que $g \in C(\bar{\Omega}) \times \mathbb{R}$

a) Assumons que $\omega \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\bar{\Omega})$ et satisfait à

$$\begin{cases} -\Delta\omega(x) \leqslant g(x, \omega(x)) & dans \;\; \Omega \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial\nu} \leqslant 0 & sur \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Si $\omega(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} \omega$, alors $g(x_0, \omega(x_0)) \geqslant 0.$

b) Assumons que $\omega \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\bar{\Omega})$ et satisfait à

$$\begin{cases} -\Delta\omega(x) \geqslant g(x, \omega(x)) & dans \;\; \Omega \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial\nu} \geqslant 0 & sur \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Si $\omega(x_0) = \min_{\bar{\Omega}} \omega$, alors $g(x_0, \omega(x_0)) \leqslant 0.$

**Démonstration voir [11]**

**Lemme 4.2 (Inégalité de Harnack )**

Soit $c(x) \in L^q(\Omega)$ pour un certain $q > \frac{m}{2}$. Si $\omega \in W^{1,2}(\Omega)$ est une solution faible non négative du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta\omega + c(x)\omega = 0 & dans\ \Omega \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial\nu} = 0 \qquad sur \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Alors, il existe une constante C dépendant seulement de $\|c\|_q$, $q$ et $\Omega$ et telle que :

$$\sup_\Omega \omega \leq C \inf_\Omega \omega$$

**Démonstration voir [17]**

**Lemme 4.3**

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta\omega + \omega = g & dans\ \Omega \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial\nu} = 0 \qquad sur\ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

a) Soit $g \in L^1(\Omega)$ et soit $\omega \in W^{1,1}(\Omega)$ une solution faible de (4.1). Alors, $\omega \in W^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q \in \left[1, \frac{m}{(m-1)}\right]$ et $\|\omega\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leqslant C\|g\|_{L^1(\Omega)}$, où C est une constante indépendante de $\omega$.

b) Soit $g \in L^r(\Omega)$ avec $1 < r < +\infty$ et soit $\omega \in W^{1,1}(\Omega)$ une solution faible de (4.1). Alors, $\omega \in W^{2,r}(\Omega)$ et satisfait à $\|\omega\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leqslant C\|g\|_{L^r(\Omega)}$ où C est une constante indépendante de $\omega$.

**Démonstration**

a) Voir [4].

b) Voir [1].

**Lemme 4.4**

Assumons que $d_I$ et $d$ sont deux constantes positives, et soit $\beta(x)$ et $\gamma(x)$ deux fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ avec $\beta(x) > 0$ sur $\bar{\Omega}$. Alors, le problème elliptique :

$$\begin{cases} -d_I \Delta\omega = \omega \left[\beta(x)\left(1 - \dfrac{\omega}{d(1-\omega)+\omega}\right) - \gamma(x)\right] \quad dans\ \Omega \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial \nu} = 0 \qquad sur \quad \partial\Omega \end{cases}$$

possède une solution positive unique si et seulement si $R_0 > 1$, notée $\tilde{\omega}$. De plus, $0 < \tilde{\omega}(x) < 1$ sur $\bar{\Omega}$ et $\tilde{\omega}(x)$ croit avec $d$. Par ailleurs,

a) Si $d_I \to 0$ et $d \to d_0 \in [0, +\infty)$, alors

$$\tilde{\omega} \to A(d_0; x) \quad uniformment \quad sur \quad \bar{\Omega}.$$

b) Si $d_I \to 0$ et $d \to \infty$, alors,

$$\tilde{\omega} \to A(\infty; x)$$

uniformément sur tout sous ensemble compact de $H^-$ et $H^+$, respectivement .

c) Si $d_I \to \infty$ et $d \to d_0 \in [0, \infty)$, alors :

$$\tilde{\omega} \to \frac{d_0\left[1 - \left(\int_\Omega \beta\right)^{-1} \int_\Omega \gamma\right]}{1 + (d_0 - 1)\left[1 - \left(\int_\Omega \beta\right)^{-1} \int_\Omega \gamma\right]} \quad dans\ C^2(\bar{\Omega})$$

d) Si $d_I \to \infty$ et $d \to \infty$, alors :

$$\tilde{\omega} \to 1 \quad dans\ C^2(\bar{\Omega})$$

## 4.2 Principaux résultats

Dans ce qui suit, nous donnons deux principaux théorèmes qui sont l'objet de notre étude.

**Théorème 1 (R.Peng)**

(1) Assumons que

$$\int_\Omega [\beta(x) - \gamma(x)]\, dx > 0 \tag{4.2}$$

et

$$d_S, d_I \to \infty$$

alors :

$$(\tilde{S}, \tilde{I}) \to \left( \frac{N}{|\Omega|} \frac{\int_\Omega \gamma}{\int_\Omega \beta}, \frac{N}{|\Omega|} \left( 1 - \frac{\int_\Omega \gamma}{\int_\Omega \beta} \right) \right) \ dans\ C^2(\bar{\Omega}).$$

(2) Supposons que $H^- \ et\ H^+$ sont non vides et notons, $\frac{d_I}{d_S} = d,\ d_I \to 0.$

Soit $d \to d_0 \in [0, \infty]$.

i) Si $d_0 = 0$, alors :

$$\tilde{S} \to \frac{N}{\int_\Omega (1 + (\beta - \gamma) + \gamma^{-1})} =: S^*$$

et

$$\tilde{I} \to \frac{N(\beta - \gamma) + \gamma^{-1}}{\int_\Omega (1 + (\beta - \gamma) + \gamma^{-1})} =: I^*$$

uniformément sur $\bar{\Omega}$

ii) Si $d_0 \in (0, \infty)$, alors :

$$\tilde{S} \to \frac{N d_0 (1 - A(d_0; x))}{\int_\Omega (A(d_0; x) + d_0(1 - A(d_0; x))} =: S^*$$

et

$$\tilde{I} \to \frac{N A(d_0; x)}{\int_\Omega (A(d_0; x) + d_0(1 - A(d_0; x))} =: I^*$$

uniformément sur $\bar{\Omega}$.

iii) Si $d_0 = \infty$, alors $\tilde{I} \to 0 = I^*$ uniformément sur $\bar{\Omega}$ et

$$\tilde{S} \to \frac{N(1 - A(\infty; x)}{\int_\Omega (1 - A(\infty; x))} =: S^*$$

uniformément sur tout sous ensemble compact de $H^- \; et \; H^+$ respectivement .

**Démonstration du théorème 1 :**

Dans ce qui suit, nous supposons toujours que $d_I, d_S \geqslant 1$.

Rappelons que $\tilde{S} \; et \; \tilde{I}$ vérifient le système (3.1).

Du lemme 4.2 appliqué à l'équation 2 de (3.1), il existe une constante $C_1$ positive dépendant seulement de $\beta \, , \gamma \; et \; \Omega$ telle que pour toute solution positive $(\tilde{S}, \tilde{I})$ de (3.1) on a :

$$\max_{\bar{\Omega}} \tilde{I}(x) \leq C_1 \min_{\bar{\Omega}} \tilde{I}(x). \tag{4.3}$$

Donc, il existe une constante positive $C_2$ dépendant seulement de $\beta, \; \gamma \; et \; \Omega$ telle que :

$$\|\tilde{I}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_2. \tag{4.4}$$

Autrement, nous pouvons trouver une suite $\{d_{I,n}\}_{n=1}^{\infty}$ avec $d_{I,n} \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ et la suite de solutions positives correspondantes $\left\{ \left( \tilde{S}_n, \tilde{I}_n \right) \right\}$ de (3.1) telle que $\|I_n\|_{L^\infty(\Omega)} \to \infty$ et donc $\tilde{I}_n(x) \to \infty$ uniformément sur $\bar{\Omega}$ par (4.3), ce qui contredit $\int_\Omega (I(x) + S(x))dx = N.$

Remarquons que $\frac{\beta(x)\tilde{S}\tilde{I}}{\tilde{S}+\tilde{I}} - \gamma(x)\tilde{I}$ est continue sur $\Omega$ alors il existe une constante positive dépendant seulement de $\beta, \; \gamma \; et \; \Omega$.

$$\|\frac{\beta(x)\tilde{S}\tilde{I}}{\tilde{S} + \tilde{I}} - \gamma(x)\tilde{I}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_3$$

Nous pouvons appliquer la théorie standard des équations elliptiques pour voir qu'il existe une suite $\left\{ \left( \tilde{S}_n, \tilde{I}_n \right) \right\}$ de solutions positives de (3.1) avec $d_I = d_{I,n} \; et \; d_{I,n} \to \infty$ lorsque

$n \to \infty$ telle que $\tilde{I}_n(x) \to I^*$ dans $C^1(\bar{\Omega})$ lorsque $n \to \infty$ *et* $I^*$ satisfaisant à :

$$\begin{cases} -\Delta I^* = 0 \quad sur \quad \Omega \\ \dfrac{\partial I^*}{\partial \nu} = 0 \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.5}$$

Évidement, $I^*$ doit être une constante non négative car de (4.5) on a $I^*$ constante et puisque $I^*$ est la limite d'une suite positive.

Montrons que $I^*$ est une constante positive .

Posons $\tilde{S}_n(y_0) = \min_{\bar{\Omega}} \tilde{S}_n(x)$ où $\tilde{S}_n(x)$ vérifie

$$-d_S \Delta \tilde{S}_n = -\frac{\beta \tilde{S}_n \tilde{I}_n}{\tilde{S}_n + \tilde{I}_n} + \gamma \tilde{I}_n. \tag{4.6}$$

Alors le principe du maximum (lemme 4.1) appliqué à (4.6), on a :

$$-\frac{\beta(y_0)\tilde{S}_n(y_0)\tilde{I}_n(y_0)}{d_s(\tilde{S}_n(y_0) + \tilde{I}_n(y_0))} + \frac{\gamma(y_0)\tilde{I}_n(y_0)}{d_s} \leqslant 0$$

$$\min_{\bar{\Omega}} \gamma(x) \min_{\bar{\Omega}} \tilde{I}_n(x) \leqslant \gamma(y_0)\tilde{I}_n(y_0) \leqslant \frac{\beta(y_0)\tilde{S}_n(y_0)\tilde{I}_n(y_0)}{(\tilde{S}_n(y_0) + \tilde{I}_n(y_0))} \leqslant \beta(y_0)\tilde{S}_n(y_0) \leqslant \max_{\bar{\Omega}} \beta(x)\tilde{S}_n(x)$$

pour tout $x \in \bar{\Omega}$.

Or de (4.3)

$$\tilde{I}_n(x) \leqslant C_3 \min_{\bar{\Omega}} \tilde{I}_n$$

donc

$$\tilde{I}_n(x) \leqslant \frac{C_3 \max_{\bar{\Omega}} \beta(x)\, \tilde{S}_n(x)}{\min_{\bar{\Omega}} \gamma(x)} = C_4 \tilde{S}_n(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \tag{4.7}$$

Posons :

$$h_n(x) = \frac{\tilde{I}_n}{\tilde{S}_n} \left( \gamma(x) - \frac{\beta(x)\tilde{S}_n}{\tilde{S}_n + \tilde{I}_n} \right)$$

alors (4.6) s'écrit

$$\begin{cases} -d_{s_n} \Delta \tilde{S}_n = h_n(x)\tilde{S}_n \quad sur\ \Omega \\ \dfrac{\partial \tilde{S}_n}{\partial \nu} = 0 \qquad sur\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.8}$$

Remarquons que $h_n(x)$ vérifie :

$$h_n(x) = \frac{\tilde{I}_n}{\tilde{S}_n}\left(\gamma(x) - \frac{\beta(x)\tilde{S}_n}{\tilde{S}_n + \tilde{I}_n}\right) \leqslant C_4\gamma(x)$$

donc :

$$\|h_n\|_{L^\infty} \leqslant C_4\|\gamma\|_{L^\infty} = C_5 \tag{4.9}$$

où $C_5$ ne dépend ni de $\tilde{S}_n, \tilde{I}_n$ et $d_{S,n}, d_{I,n}$.

Par conséquent,(4.8) et l'inégalité de Harnack (lemme 4.2 ) garantissent l'existence d'une constante positive indépendante de $\tilde{S}_n$ , $\tilde{I}_n$ *et* $d_{I,n}$ , $d_{S,n} \geqslant 1$ vérifiant

$$\max_{\bar{\Omega}} \tilde{S}_n(x) \leqslant C_6 \min_{\bar{\Omega}} \tilde{S}_n(x) \tag{4.10}$$

Si $\|\tilde{S}_n\|_{L^\infty(\Omega)} \to \infty$ alors de (4.10) montre que $\tilde{S}_n(x) \to \infty$ uniformément sur $\bar{\Omega}$ contradisant (3.2).

Si $\|\tilde{S}_n\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$, alors (4.7) montre que $\tilde{S}_n(x), \tilde{I}_n(x) \to 0$ uniformément sur $\bar{\Omega}$ ce qui contredit (3.2) donc $m \leqslant \|\tilde{S}_n\|_{L^\infty} \leqslant M$, où $m$ et $M$ sont positives indépendantes de $d_{I,n}, d_{S,n} \geqslant 1$.

Donc il existe une sous suite de $\left\{(\tilde{S}_n, \tilde{I}_n)\right\}$ que nous appelons avec son même nom correspondant à $(d_S, d_I) = (d_{S,n}, d_{I,n})$ et $d_{S,n} \to \infty, d_{I,n} \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ telle que $S_n \to S^*$ dans $C^1$ et $S^*$ satisfait la même équation (4.5) que $I^*$ .

Donc $S^*$ est une constante positive en tenant compte du théorème de régularité pour les équations elliptiques, on a aussi : $(\tilde{S}_n, \tilde{I}_n) \to (S^*, I^*)$ dans $[C^2]^2$ lorsque $n \to \infty^{\cdot}$

Si $I^* = 0$, nous posons :

$$\widehat{I}_n = \frac{\tilde{I}_n}{\|\tilde{I}_n\|_{L^\infty(\Omega)}}$$

alors, $\widehat{I}_n$ vérifie :

$$\begin{cases} -\, d_{I,n}\Delta\widehat{I}_n = \left[\dfrac{\beta(x)\tilde{S}_n}{\tilde{S}_n + \tilde{I}_n} - \gamma(x)\right]\widehat{I}_n \quad dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial\widehat{I}_n}{\partial\nu} = 0 \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.11}$$

De la même manière que précédemment, nous pouvons supposer que $\widehat{I}_n \to \widehat{I}$ dans $C^1$

et $\widehat{I}$ est une constante non négative vérifiant (4.5). Notons que $\|\widehat{I}_n\|_{L^\infty} = 1$ pour chaque $n \geqslant 1$ donc il est nécessaire que $\widehat{I} \neq 0$.

Rappelons que nous avons démontré que $\tilde{S}_n \to S^*$ dans $C^2(\bar{\Omega})$ lorsque $n \to \infty$ pour une constante positive $S^*$. Donc, si $I^* = 0$ alors en intégrant (4.11) sur $\Omega$ par parties et en prenant la limite on obtient :

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega d_{I,n}\Delta\widehat{I}_n dx &= \int_\Omega \left[\frac{\beta(x)\tilde{S}_n}{\tilde{S}_n+\tilde{I}_n} - \gamma(x)\right]\widehat{I}dx = 0 \\
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega d_{I,n}\Delta\widehat{I}_n dx &= \int_\Omega \left[\frac{\beta(x)S^*}{S^*+0} - \gamma(x)\right]\widehat{I}\,dx \\
&\int_\Omega [\beta(x)-\gamma(x)]dx = 0.(car\ \ \widehat{I}\neq 0)
\end{aligned}$$

Ce qui contredit $\int_\Omega [\beta(x)-\gamma(x)]dx > 0$. Donc $I^* > 0$.

Ainsi, nous avons donc montré que $S^*$ et $I^*$ sont des constantes positives.

En intégrant (4.6) sur $\Omega$ par parties et en prenant la limite quand $t$ vers l'infini, on obtient

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega d_S\Delta\tilde{S}_n = -\int_\Omega \frac{\beta(x)\tilde{S}_n\tilde{I}_n}{\tilde{S}_n+\tilde{I}_n}dx + \int_\Omega \gamma(x)\tilde{I}_n(x)dx = 0 \\
&\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \tilde{I}_n\left(\gamma(x) - \frac{\beta(x)\tilde{S}_n}{\tilde{S}_n+\tilde{I}_n}\right)dx = 0 \\
&\int_\Omega I^*\left(\gamma(x) - \frac{\beta(x)S^*}{I^*+S^*}\right)dx = 0 \\
&\int_\Omega \left[\gamma(x) - \frac{\beta(x)S^*}{I^*+S^*}\right]dx = 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left[\tilde{S}_n+\tilde{I}_n\right]dx &= N \\
\int_\Omega [S^*+I^*]\,dx &= N \\
(S^*+I^*)|\Omega| &= N \\
S^* &= \frac{N}{|\Omega|} - I^*
\end{aligned}$$

$$\int_\Omega \gamma(x) - \frac{\beta(x)\left(\frac{N}{|\Omega|} - I^*\right)}{\frac{N}{|\Omega|}} = 0$$

$$I^* = \frac{N}{|\Omega|} - \frac{N}{|\Omega|}\frac{\int_\Omega \gamma(x)}{\int_\Omega \beta(x)} \qquad S^* = \frac{N}{|\Omega|} - \left(\frac{N}{|\Omega|}\left(1 - \frac{\int_\Omega \gamma(x)}{\int_\Omega \beta(x)}\right)\right)$$
$$I^* = \frac{N}{|\Omega|}\left(1 - \frac{\int_\Omega \gamma(x)}{\int_\Omega \beta(x)}\right) \qquad S^* = \frac{N}{|\Omega|}\frac{\int_\Omega \gamma(x)}{\int_\Omega \beta(x)}.$$

Par suite,

$$(S^*, I^*) = \left(\frac{N}{|\Omega|}\frac{\int_\Omega \gamma(x)}{\int_\Omega \beta(x)}, \frac{N}{|\Omega|}\left(1 - \frac{\int_\Omega \gamma(x)}{\int_\Omega \beta(x)}\right)\right).$$

Montrons la $2^{eme}$ partie du théorème 1.

En utilisant le problème (3.8) équivalent du problème (3.1),

$$\begin{cases} -d_I \Delta I = I\left[\beta(x) - \gamma(x) - \dfrac{\beta(x) I}{d(1-I)+I}\right] & dans\ \ \Omega \\ \dfrac{\partial I}{\partial \nu} = 0 \quad sur\ \ \partial\Omega \\ 0 < I < 1. \end{cases} \tag{4.12}$$

**Cas 1 :**

$d_I \to 0$ et $d = \frac{d_I}{d_S} \to 0$.

Posons

$$\omega = \frac{d_S I}{d_I} = \frac{I}{d} \tag{4.13}$$

$$f(x,I) = \beta(x)\left(1 - \frac{d_S I}{d_I(1-I) + d_S I}\right) - \gamma(x)$$
$$f(x,I) = \beta(x)\left(1 - \frac{d_S I}{d_S\left(\frac{d_I}{d_S}(1-I) + I\right)}\right) - \gamma(x)$$
$$f(x,I) = \beta(x)\left(1 - \frac{I}{d(1-I) + I)}\right) - \gamma(x)$$
$$f(x,I) = (\beta(x) - \gamma(x)) - \frac{\beta(x)}{d(1-I)+I}.$$

Portons (4.13) dans (4.12)

$$-d_I d\Delta\omega = d\omega\left[\beta(x)-\gamma(x)-\frac{d\beta(x)\omega}{d(1-d\omega)+d\omega}\right]$$

$$\begin{cases} -d_I\Delta\omega = \omega\left[\beta(x)-\gamma(x)-\dfrac{\beta(x)\omega}{1+(1-d)\omega}\right] \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial\nu}=0 \quad sur\ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.14}$$

En procédant de la même manière que dans la démonstration du lemme 4.4, nous pouvons démontrer

$$\omega \to \frac{(\beta-\gamma)_+}{\gamma} \quad uniformement\ sur\ \Omega \quad lorsque \quad d_I\to 0\ \ et\ \ d\to 0 \tag{4.15}$$

de (3.6) et (3.8) on a

$$\tilde{S}=\kappa S=\frac{d_I NS}{\int_\Omega(d_I S+I)}=\frac{Nd_I\frac{(1-I)}{d_S}}{\int_\Omega(d_I\frac{(1-I)}{d_S}+I)}=\frac{Nd(1-d\omega)}{\int_\Omega\frac{d_I}{d_S}(1-d\omega)+d\omega}$$

$$\tilde{S}=\frac{N(1-d\omega)}{\int_\Omega(1-d\omega)+\omega}=\frac{N(1-d\omega)}{\int_\Omega(1+(1-d)\omega)} \tag{4.16}$$

et

$$\tilde{I}=\frac{\kappa I}{d_I}=\frac{\kappa d\omega}{d_I}=\frac{d_I Nd\omega}{d_I\int_\Omega d_I S+I}=\frac{dN\Omega}{\int_\Omega\frac{d_I}{d_S}(1-d\omega)+d\omega}=\frac{N\omega}{\int_\Omega(1-d\omega)+\omega} \tag{4.17}$$

et de (4.15),(4.16) et (4.17) on a

$$\tilde{S}\to\frac{N}{\int_\Omega 1+(\beta-\gamma)_+\gamma^{-1}}=S^*$$

$$\tilde{I}\to\frac{N(\beta-\gamma)_+\gamma^{-1}}{\int_\Omega 1+(\beta-\gamma)_+\gamma^{-1}}=I^*$$

lorsque $d_I\to 0$ et $d\to 0$

**Cas 2 :**

$d_I \to 0$ et $d = \frac{d_I}{d_S} \to d_0 \in ]0, \infty[$.

Dans ce cas, nous pouvons utiliser (4.12) directement.

De (3.6),(3.8) on a

$$\tilde{S} = \kappa S = \frac{d_I N S}{\int_\Omega (d_I S + I)} = \frac{N d(1-I)}{\int_\Omega (I + d(1-I))} \tag{4.18}$$

et

$$\tilde{I} = \frac{\kappa I}{d_I} = \frac{NI}{\int_\Omega (d_I S + I)} = \frac{NI}{\int_\Omega I + d(1-I)} \tag{4.19}$$

Comme $I \to A(d_0; x)$ uniformément sur $\bar{\Omega}$ lorsque, $d_I \to 0$ et $d \to d_0 \in ]0; \infty[$, (4.18) et (4.19) assurent que

$$\tilde{S} \to \frac{N d_0 (1 - A(d_0; x))}{\int_\Omega A(d_0; x) + d_0(1 - A(d_0; x)))}$$

et

$$\tilde{I} = \frac{N A(d_0; x)}{\int_\Omega A(d_0; x) + d_0(1 - A(d_0; x)))}$$

uniformément sur $\bar{\Omega}$ lorsque $d_I \to 0$ et $d \to d_0$.

**Cas 3 :**

$d_I \to 0$ et $d = \frac{d_I}{d_S} \to \infty$. Dans ce cas, nous avons $0 < I < 1$ dans $\Omega$, donc $\omega = \frac{I}{d} \to 0$ uniformément sur $\bar{\Omega}$ lorsque $d_I \to 0$ et $d \to \infty$.

Pour la limite de $\tilde{I}$ on a

$$\tilde{I} = \frac{NI}{\int_\Omega (d_I S + I)} = \frac{N\omega}{\int_\Omega (1 - I + \omega)} \to 0$$

uniformément sur $\bar{\Omega}$ lorsque $d_I \to 0$ et $d \to \infty$.

Pour la limite de $\tilde{S}$, en utilisant le lemme 4.4, on a

$$\tilde{S} = \frac{N(1-I)}{\int_\Omega (1 - I + d^{-1} I)} \to \frac{N(1 - A(\infty; x))}{\int_\Omega (1 - A(\infty; x))}.$$

Uniformément sur tout compact de $H^-$ et $H^+$ respectivement.

**Corollaire 4.1 :**

Soit :

$$\Omega^+_{S^*} = \left\{x \in \bar{\Omega} : S^*(x) > 0\right\} \qquad \Omega^0_{S^*} = \left\{x \in \bar{\Omega} : S^*(x) = 0\right\}$$

$$\Omega^+_{I^*} = \left\{x \in \bar{\Omega} : I^*(x) > 0\right\} \qquad \Omega^0_{I^*} = \left\{x \in \bar{\Omega} : I^*(x) = 0\right\}$$

Et supposons que (A2) est vérifiée, alors on a :

i) Si $d_I \to 0$ et $d \to d_0 \in [0, \infty)$ , alors

$$\Omega^+_{S^*} = \bar{\Omega} \quad et \;\; \Omega^0_{S^*} = \emptyset$$

et

$$\Omega^+_{I^*} = H^+ \quad et \;\; \Omega^0_{I^*} = \bar{H}^-$$

ii) Si $d_I \to 0$ et $d_0 = \infty$, alors

$$\Omega^+_{S^*} = H^- \quad et \quad \Omega^0_{S^*} = H^+$$

et

$$\Omega^+_{I^*} = \emptyset \quad et \quad \Omega^0_{I^*} = \bar{\Omega}$$

**Démonstration du Corollaire :**

**cas 1 :** $d_I \to 0$ et $d \to d_0 = 0$

De (2)(i) on a :

$$S^* = \frac{N}{\int_\Omega (1 + (\beta - \gamma)_+ \gamma^{-1})} > 0 \quad car \quad N > 0, \quad \int_\Omega (1 + (\beta - \gamma)_+ \gamma^{-1} > 0$$

Donc $\Omega^+_{S^*} = \bar{\Omega}$ et $\Omega^0_{S^*} = \varnothing$

On a aussi

$$I^* = \frac{N(\beta - \gamma)_+ \gamma^{-1}}{\int_\Omega (1 + (\beta - \gamma)_+ \gamma^{-1})} > 0 \quad si \;\; x \in H^+$$

Donc $\Omega^+_{I^*} = H^+$

On a $(\beta-\gamma) \leqslant 0$ si $x \in \bar{H}^-$ et par conséquent $(\beta-\gamma)_+ = 0$ ce qui entraine que $I^* = 0$ si $x \in \bar{H}^-$

Donc $\Omega^0_{I^*} = \bar{H}^-$

**Cas 2 :** $d_I \to 0$ et $d_0 \in (0, \infty)$ on a

Si $x \in \bar{H}^- \cup H^+$, alors $0 \leqslant A(d_0; x) < 1$ par conséquent $1 - A(d_0; x) > 0$

Donc

$$S^* = \frac{Nd_0(1 - A(d_0; x)}{\int_\Omega (A(d_0; x) + d_0(1 - A(d_0; x)} > 0$$

Donc $\Omega^+_{S^*} = \bar{\Omega}$ et $\Omega^0_{S^*} = \varnothing$

et $I^* > 0$ si $x \in H^+$ car $A(d_0; x) > 0$

Donc $\Omega^+_{I^*} = H^+$

$I^* = 0$ si $x \in \bar{H}^-$ car $A(d_0; x) = 0$ Donc $\Omega^0_{I^*} = \bar{H}^-$

**Cas 3** $d_I \to 0$ et $d_0 = \infty$ On a

$$S^* = \frac{N(1 - A(\infty; x))}{\int_\Omega (1 - A(\infty; x))}$$

Si $x \in \bar{H}^-$ alors $A(\infty; x) = 0$ et par conséquent $S^* > 0$ Donc $\Omega^+_{S^*} = \bar{H}^-$

Si $x \in H^+$ alors $A(\infty; x) = 1$ et par conséquent $S^* = 0$ Donc $\Omega^0_{S^*} = H^+$

On a $I^* = 0$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$. Donc $\Omega^+_{I^*} = \varnothing$ et $\Omega^0_{I^*} = \bar{\Omega}$

**Théorème 2 (R.Peng)**

Supposons que $\int_\Omega [\beta(x) - \gamma(x)]dx > 0$ est vérifiée, alors :

$$1)\ (\tilde{S}, \tilde{I}) \to \left( \frac{d_I N}{\int_\Omega (d_I + \omega^*)}, \frac{N\omega^*}{\int_\Omega (d_I + \omega^*)} \right) \quad dans \quad C^2(\bar{\Omega})$$

lorsque $d_s \to \infty$

où $\omega^*$ est la solution positive unique de l'équation elliptique semi-linéaire :

$$\begin{cases} -d_I \Delta \omega = \omega \left[ \beta(x) \left( 1 - \dfrac{\omega}{d_I + \omega} \right) - \gamma(x) \right] & dans\ \Omega \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial \nu} = 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.20}$$

2) $(\tilde{S}, \tilde{I}) \to (S^*, I^*)$ dans $\left[C^2(\bar{\Omega})\right]^2$ lorsque $d_I \to \infty$ où $S^*$ est une fonction

positive sur $\bar{\Omega}$ et $I^*$ une constante positive, de plus $(S^*, I^*)$ vérifie :

$$\begin{cases} -d_s\Delta S^* = I^*\left[\gamma(x) - \dfrac{\beta(x)S^*}{S^*+I^*}\right] & dans\ \Omega \\ \dfrac{\partial S^*}{\partial \nu} = 0 \qquad sur\ \partial\Omega \\ \displaystyle\int_\Omega (S^*+I^*)dx = N \end{cases} \tag{4.21}$$

Par ailleurs, si l'hypothèse (A2) est vérifiée et si $d_S$ tend vers 0 dans alors, on a :

a) $I^* \to 0$ et $S^* \to S_*$ dans $C^1(\bar{\Omega})$ pour une certain $S_*(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ vérifiant

$$\begin{cases} S_* \geqslant 0 \quad sur \quad \Omega \\ \dfrac{\partial S_*}{\partial \nu} = 0 \qquad sur\Omega \\ \displaystyle\int_\Omega S_* dx = N \end{cases} \tag{4.22}$$

b) $\Omega^+ = \{x \in \ \bar{\Omega} : S_*(x) > 0\}$ contient $H^-$ et dans $\Omega^+$. c) $\Omega^0 = \{x \in \bar{\Omega} : S_*(x) = 0\}$ possède une mesure positive.

d) Si (A3) est vérifiée, alors $\Omega^+$ contient $\bar{H}^-$.

**Démonstration :**

Posons $\omega = d_s I$ alors (4.12) se réduit à :

$$\begin{cases} -d_I\Delta\omega = \omega\left[\beta(x)\left(1 - \dfrac{\omega}{d_I(1-d_s^{-1}\omega)+\omega}\right) - \gamma(x)\right] & dans\ \Omega \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial \nu} = 0 \qquad\qquad sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.23}$$

$\|\omega\|_{L^\infty(\Omega)}$ est uniformément bornée et indépendante de $d_s$.

En effet, posons

$\omega(x_0) = \max\limits_{\bar{\Omega}} \omega(x)$ donc d'après principe du maximum (lemme 4.1) on a :

$$\omega(x_0)\left[\beta(x_0) - \gamma(x_0) - \frac{\beta(x_0)\omega(x_0)}{d_I(1-d_s^{-1}\omega(x_0)) + \omega(x_0)}\right] \geqslant 0$$

$$\frac{(\beta(x_0)-\gamma(x_0))\left(d_I(1-d_s^{-1}\omega(x_0))+\omega(x_0)\right) - \beta(x_0)\omega(x_0)}{d_I(1-d_s^{-1}\omega(x_0))+\omega(x_0)} \geqslant 0.$$

Or

$$[d_I(1-d_s^{-1}\omega(x_0))+\omega(x_0)]>0$$

car

$$d_I>0\ ,\ \omega(x_0)>0\ et\ 0<d^{-1}\omega(x_0)=I<1$$

Donc

$$(\beta(x_0)-\gamma(x_0))\left(d_I(1-d_s^{-1}\omega(x_0))+\omega(x_0)\right)-\beta(x_0)\omega(x_0)\geqslant 0$$

où

$$\gamma(x_0)\omega(x_0)\leqslant d_I\left[\beta(x_0)-\gamma(x_0)\right](1-d_s^{-1}\omega(x_0))\leqslant d_I\left[\beta(x_0)-\gamma(x_0)\right]$$
$$\omega(x_0)\leqslant d_I(\beta(x_0)-\gamma(x_0))\gamma^{-1}\leqslant d_I\max_{\bar\Omega}\left[(\beta-\gamma)\gamma^{-1}\right]$$
$$\omega(x)\leqslant\max_{\bar\Omega}\omega(x)=\omega(x_0)\leqslant d_I\max_{\bar\Omega}\left[(\beta-\gamma)\gamma^{-1}\right]$$

$$\|\omega(x)\|_{L^\infty(\bar\Omega)}\leqslant d_I\max_{\bar\Omega}\left[(\beta-\gamma)\gamma^{-1}\right].$$

Montrons que $\|\omega(x)\|_{L^\infty(\bar\Omega)}$ ne tend pas vers 0 lorsque $d_s\to\infty$.
Supposons que $\|\omega(x)\|_{L^\infty(\bar\Omega)}\to 0$ lorsque $d_s\to\infty$ alors il existe une suite de solution $\omega_n$ telle que $\omega_n\to 0$ uniformément sur $\bar\Omega$ lorsque $d_{s,n}\to\infty$.
Posons :

$$\widehat{\omega_n}=\frac{\omega_n}{\|\omega(x)\|_{L^\infty(\bar\Omega)}}.$$

Alors il existe une sous suite de $\{\widehat{\omega_n}\}$ que nous notons aussi $\widehat{\omega_n}$, telle que $\widehat{\omega_n}\to\widehat{\omega}$ dans $C^1(\bar\Omega)$ lorsque $n\to\infty$ de plus, $\widehat{\omega}$ est une solution positive de :

$$\begin{cases}-d_I\Delta\widehat{\omega}=\left[\beta(x)-\gamma(x)\right]\widehat{\omega} & dans\ \ \Omega\\ \dfrac{\partial\omega}{\partial\nu}=0 & sur\ \ \partial\Omega\end{cases}\tag{4.24}$$

car :

$$
\begin{aligned}
-d_I \Delta \omega_n &= \omega_n \left[ \beta(x) \left( 1 - \frac{\omega_n}{d_I(1 - d_s^{-1}\omega_n) + \omega_n} \right) - \gamma(x) \right] \\
-d_I \|\omega_n\| \Delta \widehat{\omega_n} &= \|\omega_n\| \widehat{\omega_n} \left[ \beta(x) \left( 1 - \frac{\|\omega_n\| \widehat{\omega_n}}{d_I(1 - d_s^{-1}\|\omega_n\| \widehat{\omega_n}) + \|\omega_n\| \widehat{\omega_n}} \right) - \gamma(x) \right] \\
-d_I \lim_{n\to\infty} \Delta \widehat{\omega_n} &= \lim_{n\to\infty} \widehat{\omega_n} \left[ \beta(x) - \gamma(x) - \frac{\|\omega_n\| \widehat{\omega_n}}{d_I(1 - d_s^{-1}\|\omega_n\| \widehat{\omega_n}) + \|\omega_n\| \widehat{\omega_n}} \right] \\
-d_I \Delta \widehat{\omega} &= \widehat{\omega} \left[ \beta(x) - \gamma(x) \right]
\end{aligned}
$$

car :

$$
\frac{\|\omega_n\| \widehat{\omega_n}}{d_I(1 - d_s^{-1}\|\omega_n\| \widehat{\omega_n}) + \|\omega_n\| \widehat{\omega_n}} \to 0 \ lorsque \ n \ \to \infty
$$

Donc, d'après (4.24) nous avons $\lambda_1 (d_I, \gamma - \beta) = 0$ et par conséquent $R_0 = 1$ de (3.4). Comme $R_0$ est indépendant de $d_s$ et (3.1) possède une solution unique EE si et seulement si $R_0 > 1$ ce qui est une contradiction.

De ce qu'on vient de démontrer et de la théorie standard des équations elliptiques, il existe donc une suite de solutions $\{\omega_n\}$ de (4.10) correspondant à $d_{s,n} = d_s$ avec $d_{s,n} \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ telle que $\omega_n \to \omega^*$ dans $C^2(\bar{\Omega})$ lorsque $n \to \infty$, où est $\omega^*$ la solution unique de (4.20).

En effet on a :

$$
\begin{aligned}
-d_I \Delta \omega_n &= \omega_n \left[ \beta(x) - \left( 1 - \frac{\omega_n}{d_I(1 - d_s^{-1}\omega_n) + \omega_n} \right) - \gamma(x) \right] \\
-d_I \lim_{n\to\infty} \Delta \omega_n &= \lim_{n\to\infty} \omega_n \left[ \beta(x) - \left( 1 - \frac{\omega_n}{d_I(1 - d_s^{-1}\omega_n) + \omega_n} \right) - \gamma(x) \right] \\
-d_I \omega^* &= \omega^* \left[ \beta(x) \left( 1 - \frac{\omega^*}{d_I + \omega^*} \right) - \gamma(x) \right]
\end{aligned}
$$

l'unicité de $\omega^*$ montre que $d_{S,n} I_n = \omega_n \to \omega^*$ dans $C^2(\bar{\Omega})$ lorsque $d_{S,n} \to \infty$ donc, $I_n \to 0$ dans $C^2(\bar{\Omega})$.

De (3.8), on a : $d_{s,n} S_n = 1 - I_n$ ce qui implique $d_{s,n} S_n \to 1$ dans $C^2(\bar{\Omega})$ lorsque

$d_{s,n} \to \infty$ donc de (3.6) et de l'expression de $\kappa$ dans (3.8), nous obtenus :

$$\tilde{S} = \kappa S_n = \frac{d_I N S_n}{\int_\Omega (d_I S_n + I_n)} = \frac{d_I N d_{S,n} S_n}{\int_\Omega (d_I d_{s,n} S_n + d_{s,n} I_n)} \to \frac{d_I N}{\int_\Omega (d_I + \omega^*)}$$

et

$$\tilde{I} = \frac{\kappa I_n}{d_I} = \frac{N I_n}{\int_\Omega (d_I S_n + I_n)} = \frac{N d_{S,n} I_n}{\int_\Omega (d_I d_{s,n} S_n + d_{s,n} I_n)} \to \frac{N\omega^*}{\int_\Omega (d_I + \omega^*)}$$

lorsque $d_{s,n} \to \infty$ dans $C^2(\bar{\Omega})$.

Montrons que si $d_I \to \infty$ alors $(\tilde{S}, \tilde{I}) \to (S^*, I^*)$ dans $\left[C^2(\bar{\Omega})\right]^2$.

Où $S^*$ est une fonction positive sur $\bar{\Omega}$ et $I^*$ est une constante positive, vérifiant :

$$\begin{cases} -d_s \Delta S^* = I^* \left[\gamma(x) - \dfrac{\beta(x) S^*}{S^* + I^*}\right] & dans \ \Omega \\ \dfrac{\partial S^*}{\partial \nu} = 0 \qquad sur \ \partial\Omega \\ \displaystyle\int_\Omega (S^* + I^*) dx = N \end{cases}$$

Cette démonstration est très similaire à celle de la conclusion 1 du théorème 1. En utilisant les mêmes notations que celles de ce théorème, il est facile de voir que (4.3), (4.4),(4.10) restent vraies dans notre cas présent.

Nous pouvons donc supposer que $(\tilde{S}, \tilde{I}) \to (S^*, I^*)$ dans $\left[C^2(\bar{\Omega})\right]^2$ lorsque $d_I \to \infty$ où $S^*$ est une fonction positive et $I^*$ une constante positive sur $\bar{\Omega}$. De plus, en utilisant les équations de $\tilde{S}$ et $\tilde{I}$, nous savons aussi que $(S^*, I^*)$ vérifie (3.1).

Montrons que si, de plus,(A2) est satisfaite alors :

a) $I^* \to 0$ et $S^* \to S_*$ dans $\left[C^2(\bar{\Omega})\right]^1$ lorsque $d_s \to 0$ où $S_*$ vérifiant (4.22)

$S_* \geqslant 0$ sur $\Omega$, $\frac{\partial S_*}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\int_\Omega S_* dx = N$

puisque $I^*$ est une constante positive, nous pouvons supposer que,

$$I^* \to I_* \in \left[0, \frac{N}{|\Omega|}\right] \ lorsque \ d_s \to 0$$

Où $I_*$ est une constante.

Montrons premièrement que $\frac{I^*}{d_S}$ possède un minorant et un majorant positifs lorsque $d_s \to 0$

Nous commençons par démontrer que $\frac{I^*}{d_s}$ a un minorant positif lorsque $d_s \to 0$.
Pour ce faire, supposons que $\frac{I^*}{d_s}$ ne possède pas un minorant positif, alors il existe une suite $d_{s,n}$ vérifiant $d_{s,n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$ telle que $\frac{I^*}{d_{s,n}} \to 0$ lorsque $n \to \infty$ alors $\frac{I^*}{d_{s,n}} \leqslant M$ où M est une constante positive.

$$0 \leqslant I_n^* \leqslant M d_{s,n} \Rightarrow I_n^* \to I_* = 0 \, lorsque \, n \to \infty$$

de

$$\int_\Omega (S_n^* + I_n^*) dx = N$$

On a :

$$\int_\Omega S_n^* dx \leqslant N, \quad pour \quad n \geqslant 1$$

et $S_n^*$ vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta S_n^* + S_n^* = \dfrac{I_n^*}{d_{s,n}} \left[ \gamma(x) - \dfrac{\beta(x) S_n^*}{S_n^* + I_n^*} \right] + S_n^* \;\; dans \;\; \Omega \\ \dfrac{\partial S_n^*}{\partial \nu} = 0 \;\; sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.25}$$

En utilisant le lemme 4.3, nous pouvons conclure qu'il existe une sous suite de $S_n^*$, que nous notons aussi $S_n^*$, telle que $S_n^* \to S_*$ dans $C^2(\bar{\Omega})$ lorsque $n \to \infty$, où $S_*$ est une constante non négative. Remarquons que $(S_*, I_*)$ vérifie :

$$\int_\Omega (S_* + I_*) dx = N. \tag{4.26}$$

En intégrant par partie (4.25), nous obtenons

$$\int_\Omega \left[ \gamma(x) - \frac{\beta(x) S_*}{S_* + I_*} \right] dx = 0. \tag{4.27}$$

Il est évident que $S_* > 0$, en effet si $S_* = I_* = 0$ alors (4.26) est contrariée.
En tenant compte de $S_* > 0$ et $I_* = 0$, nous obtenons :

$$\int_\Omega \left[ \gamma(x) - \beta(x) \right] dx = 0. \tag{4.28}$$

Ceci est une contradiction avec $\int_\Omega \left[ \gamma(x) - \beta(x) \right] dx > 0$ donc $\frac{I^*}{d_s}$ possède un minorant positif lorsque $d_S \to 0$.

Montrons maintenant que $\frac{I^*}{d_s}$ possède un majorant positif.

pour ce faire, supposant que $\frac{I^*}{d_s}$ ne possède pas un majorant positif, alors il existe une suite $d_{s,n}$ avec $d_{s,n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$, telle que :

$$\frac{I_n^*}{d_{s,n}} \to \infty \quad lorsque\ n \to \infty$$

pour tout $x_* \in H^-$, définissons $B_\rho(x_*)$ comme la boule de centre $x_*$ et de rayon $\rho$. Alors nous pouvons choisir $\rho$ aussi petit de sorte que $\bar{B}_\rho(x_*) \subset H^-$ et $\gamma(x) - \beta(x) \geqslant r_0$ pour tout $x \in \bar{B}_\rho(x_*)$, où $r_0$ est une constante positive indépendante de $d_{s,n}$, $S_n^*$ et $I_n^*$ donc :

$$\gamma(x) - \frac{\beta(x)S_n^*}{S_n^* + I_n^*} = \frac{\gamma(x)I_n^* + (\gamma(x) - \beta(x))S_n^*}{S_n^* + I_*^n} \geqslant r_0 \ pour\ tout\ x \in \tilde{B}_\rho(x_*) \tag{4.29}$$

car

$$\frac{\gamma(x)I_n^* + (\gamma(x) - \beta(x))S_n^*}{S_n^* + I_*^n}$$

est la moyenne pondérée de $\gamma(x)$ et $(\gamma(x) - \beta(x))$ donc :

$$r_0 \leqslant \gamma(x) - \beta(x) \leqslant \frac{\gamma(x)I_n^* + (\gamma(x) - \beta(x))S_n^*}{S_n^* + I_*^n} \leqslant \gamma(x)$$

En tenant compte de (4.29) et (4.25) nous obtenons :

$$\begin{cases} -\Delta S_n^* \geqslant \dfrac{I_n^*}{d_{s,n}} r_0 \quad dans\ \ B_0(x_0) \\ \qquad\qquad S_n^* > 0\ sur\ \partial B_{\rho(x_*)} \end{cases} \tag{4.30}$$

Notons par $\psi$ la solution unique de l'équation elliptique :

$$\begin{cases} -\Delta\psi = 1 \quad sur \quad B_\rho(x_*) \\ \psi(0) = 0 \quad sur \quad \partial B_\rho(x_*). \end{cases} \tag{4.31}$$

Alors, d'après le principe du maximum $\psi > 0$ dans $B_\rho(x_*)$ et $\psi_n = \frac{I_n^*}{d_{s,n}} r_0 \psi$ vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta\psi_n = \dfrac{I_n^*}{d_{s,n}} r_0 \quad dans \quad B_\rho(x_*) \\ \psi_n = 0 \quad sur \quad \partial B_\rho(x_*). \end{cases} \tag{4.32}$$

En effet :

$$-\Delta\psi_n = -\Delta\left(\frac{I_n^*}{d_{s,n}} r_0 \psi\right) = -\frac{I_n^*}{d_{s,n}} r_0 \Delta\psi = \frac{I_n^*}{d_{s,n}} r_0$$
$$\psi_n(0) = \frac{I_n^*}{d_{s,n}} r_0 \psi(0) = \frac{I_n^*}{d_{s,n}} r_0(0) = 0 \quad sur \ \partial B_\rho(x_*).$$

Remarquons que $S_n^*$ et 0 sont les solutions supérieure et inférieure de (4.32). On a aussi $\psi_n \leqslant S_n^*$ dans $B_\rho(x_*)$. En effet, de (4.32) et (4.30) nous obtenons $\Delta\psi_n \geqslant \Delta S_n^*$ dans $B_\rho(x_*)$ et $\psi_n < S_n^*$ sur $\partial B_\rho(x_*)$, donc d'après le corollaire (1.1) on a $\psi_n \leqslant S_n^*$ dans $B_\rho(x_*)$. Donc, $S_n^* \to \infty$ puisque $\frac{I_n^*}{d_{s,n}} \to \infty$, ceci conduit à

$$\int_\Omega S_n^*(x)dx \to \infty \quad lorsque \quad n \to \infty$$

ce qui est une contradiction avec (4.26) par conséquent $\frac{I_n^*}{d_{s,n}}$ doit avoir un majorant. comme conséquence, on a :

$$I^* \to 0 \ \ et \ \ S^* \to S_* \ \ dans \ \ C^1(\bar{\Omega}) \ lorsque \ \ d_s \to 0$$

où $S_*$ vérifie :

$$\begin{cases} S_* \geqslant 0 \quad sur \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial S_*}{\partial \nu} = 0 \quad sur \quad \Omega \\ \displaystyle\int_\Omega S_* dx = N. \end{cases}$$

2) Montrons que $H^- \subset \Omega^+ = \{x \in \bar{\Omega} : S_*(x) > 0\}$ :

D'après l'étape précédente, il existe une sous suite de $\left\{\frac{I_n^*}{d_{s,n}}\right\}$, qu'on note aussi $\left\{\frac{I_n^*}{d_{s,n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ telle que :

$$\frac{I_n^*}{d_{s,n}} \to \tau \in (0, \infty), \qquad lorsque \quad n \to \infty$$

Donc il existe $M > 0$ telle que :

$$0 \leqslant I_n^* \leqslant M d_{s,n}$$

et par conséquent $I_n^* \to 0$ lorsque $n \to \infty$, car $d_{s,n} \to 0$.
Par (4.25), nous pouvons aussi assumer que $S_n^* \to S_*$ dans $C^1(\bar{\Omega})$ lorsque $n \to \infty$ où $S_*$ est une fonction non négative sur $\bar{\Omega}$ et :

$$\frac{\partial S_*}{\partial \nu} = 0 \quad sur \quad \partial\Omega \tag{4.33}$$

procédons de la même manière que précédemment, soit $x_* \in H^-$, choisissons $B_\rho(x_*)$ et soit $\rho$ aussi petit de telle sorte que $\bar{B}_\rho(x_*) \subset H^-$, et $\gamma(x) - \beta(x) \geqslant r_0$ pour tout $x \in \bar{B}_\rho(x_*)$ où $r_0$ est une constante positive indépendante de $d_{s,n}, S_n^*$ *et* $I_n^*$ . Alors, $S_n$ vérifie :

$$-\Delta S_n^* \geqslant \frac{1}{2}\tau r_0 > 0 \quad dans \;\; B_\rho(x_*), S_n^* > 0 \;\; sur \quad \partial B_\rho(x_*) \tag{4.34}$$

De plus, on a $S_n^* \geqslant \frac{1}{2}\tau r_0 \psi > 0$ dans $B_\rho(x_*)$ pour tout $n$ assez grand. En effet, de (4.34) et (4.31) on a $\Delta(\frac{1}{2}\tau r_0 \psi) \geqslant \Delta S_n^*$ dans $B_\rho(x_*)$ et $S_n^* > \frac{1}{2}\tau r_0 \psi$ ($S_n^* > 0$ et $\frac{1}{2}\tau r_0 \psi = 0$) sur $\partial B_\rho(x_*)$, donc d'après le corollaire (1.1) on a $S_n^* \geqslant \frac{1}{2}\tau r_0 \psi > 0$ dans $B_\rho(x_*)$
Donc lorsque, $n \to \infty$, on a :

$$S_* \geqslant \frac{1}{2}\tau r_0 \psi > 0 \quad dans \quad B_\rho(x_*) \tag{4.35}$$

Puisque $x_*$ est élément quelconque de $H^-$, alors de (4.35) on a $S_*(x) > 0$ dans $H^-$ c.à.d $H^- \subset \Omega^+$.

3) Montrons que la mesure de $\Omega^0 = \left\{x \in \bar{\Omega} : S_*(x) = 0\right\}$ est positive.
Supposons que la mesure de $\Omega^0$ est nulle. Alors, $S_* > 0$ p.pt dans $\Omega$.
En tenant compte de (4.27) et $S_*(x) > 0$, nous obtenons : $\int_\Omega (\gamma(x) - \beta(x))dx = 0$ ce qui contredit $\int_\Omega (\gamma(x) - \beta(x))dx > 0$.

4) Montrons que, si de plus la condition (A3) est satisfaite, alors $S_* > 0$ sur $\bar{H}^-$.

De l'équation (4.25) on a :

$$\Delta S_* = \tau(\gamma(x) - \beta(x)) > 0 \quad dans \;\; H^-$$

Alors la théorie de régularité intérieure des équations elliptiques garantit $S_* \in C^2(H^-)$ et par conséquent $S_* \in C^2(H^-) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Supposons qu'il existe $x_* \in \partial H^-$ tel que $S_*(x_*) = 0$. Si $x_* \in \partial H^- \setminus \partial\Omega$ alors, puisque $\partial H^-$ est de classe $C^1$, d'après le lemme de Hopf on a :

$$\frac{\partial S_*(x_*)}{\partial \ell}(x_*) < 0$$

où $\ell$ est le vecteur unitaire extérieur normal à $\partial H^-$.

Donc suivant la direction de $\ell(x^*), S_*(x) < 0$ sur un voisinage relative de $x_*$ par rapport à $\ell(x_*) \cap \Omega$. Ceci est impossible, puisque $S_*(x) \geqslant 0$ sur $\bar{\Omega}$.
Si $x_* \in \partial\Omega$, alors d'après le lemme de Hopf, nous avons

$$\frac{\partial S_*(x_*)}{\partial \nu}(x_*) < 0$$

Ce qui contredit (4.33). Donc $S_* > 0$ sur $\partial H^-$, par conséquent $\bar{H^-} \subset \Omega^+$.

## 4.3 Interprétation épidémiologique des résultats mathématiques

Cette étude a montré l'impact des grands et petits taux de diffusion de la population susceptible et infectée sur la persistance et l'extinction de la maladie épidémique ce qui conduit à l'étude du comportement asymptotique lorsque $d_s$ ou $d_I$ tend vers l'infini ou zéro. Dans ce qui suit, nous donnons une explication des résultats des théorème 1 et 2.
(B1)
1) Si $d_I \to 0$ et $\frac{d_I}{s} \to 0$, le résultat (2) du théorème 1 montre que la solution converge vers l'équilibre endémique qui est limite où les individus susceptibles existent de manière

homogène par rapport à l'espace en chaque site de l'habitat; cependant la maladie disparait seulement en chaque site à faible risque et la population infectée est distribuée d'une manière hétérogène par rapport à l'espace dans les zones à haut risques. Il est à remarquer que l'équilibre endémique est indépendant de $d_s$. Donc, d'un point de vue du contrôle de maladie, une fois le taux de diffusion des susceptibles est loin de zéro, il n'est pas suffisant juste de restreindre le mouvement des individus infectés pour éradiquer la maladie dans l'habitat tout entier.

2) Si $d_I \to 0$ et $\frac{d_I}{d_S} \to d_0 \in (0;\infty)$, comme le montre corollaire 1(ii), la population susceptible se distribue dans l'habitat tout entier et les infectés survivent seulement dans la régions à haut risque. Cependant, dans ce cas, les susceptibles et les infectés sont hétérogènes dans leurs domaines de survie respectifs.

3) Quand $d_I \to 0$ et $\frac{d_I}{d_S} \to \infty$, un phénomène fantastique et radical apparait.
Dans un tel cas extrême, la maladie est totalement éradiquée sur l'habitat et toute la population réside seulement dans les sites à faible risque. Ceci peut être expliquée de la manière suivante : puisque la population infectée a été mise presque en quarantaine, certainement la maladie disparaitra éventuellement.
Il est naturel que chaque individu ( susceptible et rétablit de la maladie), due à sa faible mobilité et à l'extinction de la maladie, préfère vivre dans la zone à faible risque plus favorable.
(B2)
1) Si $d_S \to \infty$, (1) du théorème 2 dit que l'équilibre endémique tend vers un équilibre limite de coexistence dont la composante des individus susceptibles est une constante positive et celle des infectés est un état limite non homogène par rapport à l'espace. Ceci suggère que la maladie reste inégale dans l'habitat tout entier pourvu que la diffusion des individus susceptibles est très rapide.
Si $d_S$ et $d_I$ tous les deux diffusent à l'infini, (1) du théorème 1 montre que l'équilibre limite approche un état de coexistence uniforme par rapport à l'espace et par conséquent la maladie persiste partout d'une manière homogène.
(B3)

1) Si $d_I \to \infty$, (2) du théorème affirme que l'équilibre endémique approche un équilibre limite de coexistence dans lequel le susceptible existe d'une manière homogène par rapport l'espace mais l'infecté existe d'une manière hétérogène dans l'habitat tout entier.

2) Si de plus $d_S \to 0$, l'équilibre endémique limite approche un équilibre sans maladie non homogène par rapport à l'espace, qui a un nombre positif d'individus susceptibles en tous les site à faible risque et aussi en quelques sites à haut risques.
3) De 2 et 3, nous pouvons conclure qu'une grande diffusion des susceptibles ou des infectés aide à l'homogénéité de la distribution par rapport à l'espace des individus correspondants. Par contre une petite diffusion cause l'hétérogénéité de la distribution. De plus, selon la discussion (B1) précédente, nous avons trouvé que réduire le mouvement des individus susceptibles à zéro conduira à l'extinction de la maladie dans l'habitat tout entier; par contre réduire le mouvement des infectés peut faire disparaitre la maladie seulement dans la zone à faible risque. Cependant, il parait impossible d'éradiquer la maladie en augmentant le taux de migration de l'un deux au tous les deux. Donc, réduire au moins un des deux taux à zero est nécessaire afin d'éliminer la maladie au moins dans la région à faible risque.
D'un autre coté, si chaque site de l'habitat est à haut risque, alors quelles que soient les mesures prises pour limiter ou augmenter la mobilité des susceptibles ou des infectés la maladie persiste en chaque site de l'habitat tout entier. En d'autre termes, la création d'une zone à faible risque est aussi nécessaire pour éradiquer la maladie épidémique.
En résumé, nos résultats montrent que si l'environnement spatial peut être modifié de telle sorte qu'il contient des sites à faible risque et si le taux de migration des individus susceptibles ou infectés est limité, alors il est très probable d'éradiquer la maladie au moins dans la zone à faible risque. Le plus important est que ces résultats suggèrent, qu'une fois une zone à faible risque est crée, la stratégie optimale d'éradication de la maladie est de restreindre le taux de migration des individus susceptibles plutôt que celui des des individus infectés.

# Bibliographie

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959) 623–727.

[2] L.J.S. Allen, B.M. Bolker, Y. Lou, A.L. Nevai, Asymptotic profiles of the steady states for an SIS epidemic disease patch model, SIAM J. Appl. Math. 67 (2007) 1283–1309.

[3] L.J.S. Allen, B.M. Bolker, Y. Lou, A.L. Nevai, Asymptotic profiles of the steady states for an SIS epidemic reaction–diffusion model, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A 21 (1) (2008) 1–20.

[4] H. Brezis, W.A. Strauss, Semi-linear second-order elliptic equations in L1, J. Math. Soc. Japan 25 (1) (1973) 565–590.

[5] R.S. Cantrell, C. Cosner, Spatial Ecology via Reaction–Diffusion Equations, Wiley Ser. Math. Comput. Biol., Wiley, Chichester, UK, 2003.

[6] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equation of Second Order, Springer-Verlag, 2001.

[7] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, third ed., Lecture Notes in Math., vol. 840, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1993.

[8] P. Hess, Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity, Pitman Res. Notes Math., vol. 247, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991.

[9] J.Jost Postmodern Analysis, third ed, sringer verlag, berlin 2005 [10] G.M. Lieberman, Bounds for the steady-state Sel'kov model for arbitrary p in any number of dimensions, SIAM J. Math. Anal. 36 (2005) 1400–1406.

[11] Y. Lou, W.M. Ni, Diffusion, self-diffusion and cross-diffusion, J. Differential Equations 131 (1996) 79–131.

Trans. Amer. Math. Soc. 297 (1) (1986) 351–368.

[12] R. Peng, Qualitative analysis of steady states to the Sel'kov model, J. Differential Equations 241 (2007) 386–398.

[13] R. Peng, Asymptotic profiles of the positive steady state for an SIS epidemic reaction–diffusion model. Part I, in preparation.

[14] R. Peng, Asymptotic profiles of the positive steady state for an SIS epidemic reaction–diffusion model. Part II, in preparation.

[15] R. Peng, Asymptotic profiles of the positive steady state for an SIS epidemic reaction–diffusion model. Part III, in preparation.

[16] M.H. Protter, H.F. Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[17] I. Takagi,C.S. Lin, W.M. Ni Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system, J. Differential Equations 72 (1988) 1–27.