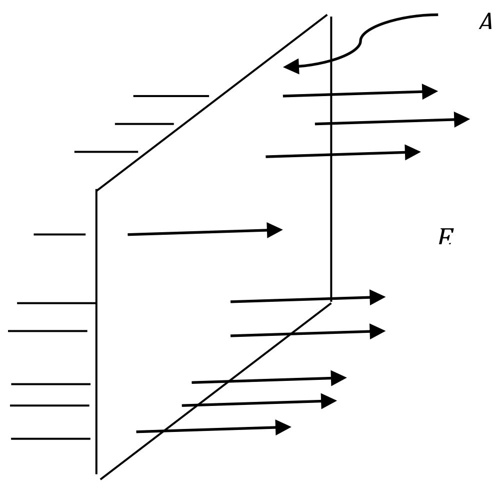
<u>محاضرة 3</u>
<u>قانون جاوس</u> Gauss law

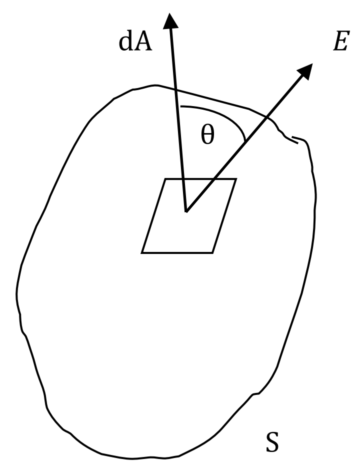
إذا تعرض أى سطح مقفل لمجال كهربى فان عدد خطوط القوى الكهربية التى تنفذ منه إلى الخارج تساوى $\frac{1}{E_0}$ من الشحنة الكلية الموجبه الموجوده داخل هذا السطح بصرف النظر عن كيفية توزيع الشحنة داخل السطح .

$$\emptyset = \oint_{c} \underline{\mathbf{E}}\ .\, \mathbf{d}\underline{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{q_{in}}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$$

حيث E شدة المجال الكهربى عند أى نقطه على السطح المغلق ، $\mathbf{dA}$ عنصر المساحه من السطح المغلق S

فى البداية نفرض مجال كهربى منتظم فى القيمة والاتجاه وخطوط المجال تخترق سطحاً على شكل متوازى أضلاع مساحته A وموضوع عمودى على المجال الكهربى





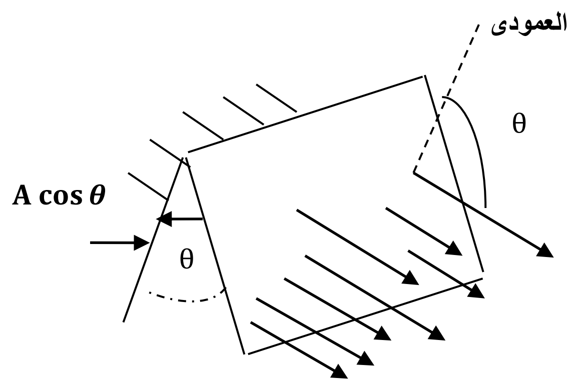
$$\emptyset = \mathbf{EA} \quad \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{C}}\ .\, \mathbf{m^2}$$

وإذا كان السطح غير العمودى على المجال فان عدد خطوط الفيض خلال هذا السطح يجب ان يكون اقل من عدد خطوط الفيض فى الحالة الاولى .

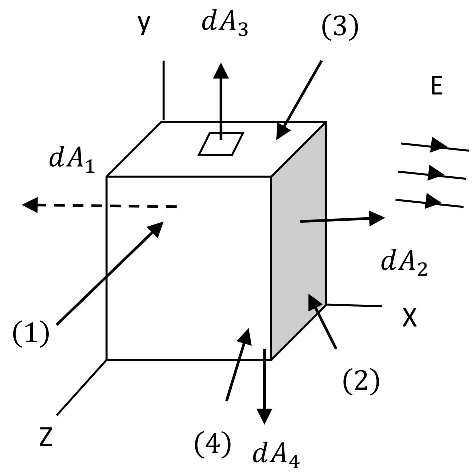
$$\boldsymbol{\varphi} = \int \underline{\boldsymbol{E}}\ .\, \boldsymbol{d}\underline{\boldsymbol{A}}$$

$$= \int \boldsymbol{E}\ \ \boldsymbol{dA}\cos\boldsymbol{\theta}$$

$$= \boldsymbol{E}\ \boldsymbol{A}\ \cos\boldsymbol{\theta}$$



The flux through a cube الفيض عبر سطح مكعب



ونفرض مجال كهربى فى الاتجاه الموجب لمحور x وانه يوجد مكعب طول ضلعه L كما بالشكل الفيض الناتج من كل وجه من اوجهه المكعب يعطى الفيض الكلى للمكعب الفيض عبر اربعة أوجه من اوجه المكعب تساوى صفر حيث اتجاه dA عمودى على المجال الكهربى حيث الزاويه بين المتجهين $\underline{E}$ ، $d\underline{A}$ تساوى 90^0 ويتبقى الوجهين 1،2

$$\varphi_{cube} = \int E\, dA\, \cos 180^0 + \int E\, dA \cos 0 = 0$$

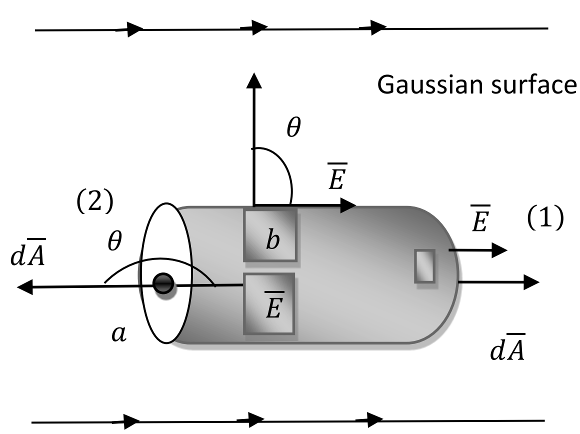
ويتضح مما سبق أن فيض المجال الناتج من السطح المقفل يساوى صفراً

The flux through a cylinderical الفيض الكهربى عبر اسطوانة :

بفرض مجال كهربى فى الاتجاه الموجب لمحور x .

الفيض الكهربى عبر السطح العلوى والسفلى للاسطوانة صفراً لان الاتجاه dA عمودى على المجال الكهربى ويتبقى الوجهين 1 ، 2 للاسطوانة

$$\varphi = \int_1 E\, dA \cos 0 + \int_2 E\, dA\, \cos 180^0$$



أى ان الفيض الناتج خلال الاسطوانة صفراً.

$$\emptyset_c = \int_c \underline{E} \cdot d\underline{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

وينص قانون جاوس أن صافى الفيض خلال سطح مغلق يساوى صافى الشحنة بداخل السطح مقسوماً على الثابت ε_0 .

مثال :

اذا كان الفيض الكهربى خلال سطح جاوس صفراً فأي من العبارات الآتيه صحيحاً؟

i. لا توجد شحنات كهربية بداخل السطح
ii. صافى الشحنة الكهربية بداخل السطح صفراً
iii. المجال الكهربى صفراً فى أى مكان بداخل السطح
iv. عدد خطوط الفيض الداخله إلى السطح تساوى عدد خطوط المجال الخارجة منه

الاجابه

i. قد يكون الفيض صفراً رغم وجود شحنات كهربية داخل السطح فمثلاً اذا كان السطح يحوى $-q$ ، $+q$ فان الفيض يساوى صفراً

$$q_{in} = +q - q = o$$

$$\emptyset_c = o$$

ii. الفيض صفراً اذا كان صافى الشحنة الكهربية صفر داخل السطح
iii. قد يوجد مجال كهربى بداخل السطح وعلى الرغم من ذلك فان الفيض الكهربى صفراً

$$E_1 \neq 0 \ , E_2 \neq 0$$
$$\emptyset_c = \emptyset_{out} - \emptyset_{in} = 0$$

iv. الفيض صفراً اذا كان عدد الخطوط الداخلة تساوى الخارجه.

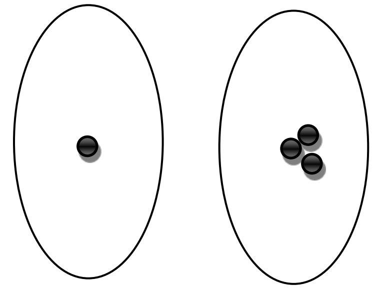
مثال :

اذا فرض أن سطح جاوس يحيط بشحنة كهربية قدرها q صف ماذا يحدث فى الحالات الأتيه:-

i. اذا زادت الشحنة بمقدار ثلاث مرات (3q)
ii. اذا تضاعف حجم السطح الحاوى للشحنه
iii. اذا تغير شكل السطح من كرة إلى مكعب
iv. اذا تحركت الشحنة من موضعها داخل السطح .

الاجابة

i



1 2

$$Q_c = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{q^{\backprime}}{\varepsilon_0}$$

$$i) \quad q^{\backprime} = 3\mathrm{q}$$

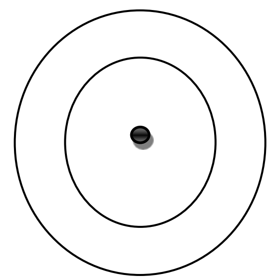
$$\emptyset_c^{\backprime} = \frac{3\mathrm{q}}{\varepsilon_0} = 3 \ Q_c$$

اذا تضاعفت الشحنة ثلاث مرات فان الفيض سوق يتضاعف أيضا بمقدار ثلاث مرات .

ii **اذا تضاعفت حجم الكرة لمرتين مثلا أى أن**

$$V^{\backprime} = 2V$$

$$Q_c = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

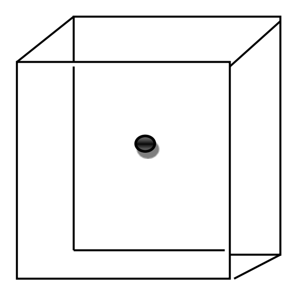


وهذا لا يعتمد على *r* فهذا يعنى ان الفيض سيظل ثابتاً

iii **اذا تغير شكل سطح جاوس من كرة الى مكعب**

$$Q_c = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

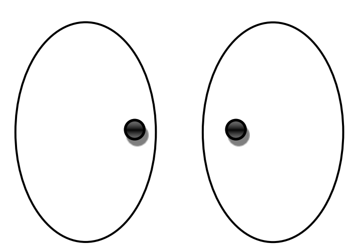
لا يعتمد الفيض على شكل السطح الحاوى للشحنة



iv **اذا تحركت الشحنة إلى موضع اخر داخل السطح المغلق**

الفيض لا يعتمد على موضع الشحنة داخل السطح

$$Q_c = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$



كثافة الشحنة

بفرض أن هناك توزيع منظم للشحنة على حجم قدره V فان الشحنة الكلية

$$Q = \rho V$$

حيث ρ هى شحنه وحده الحجوم من السطح .

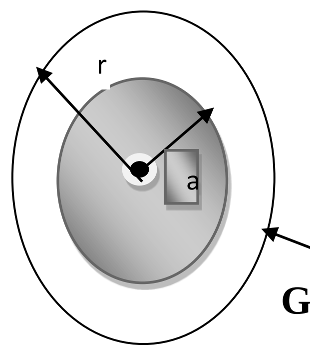
- **واذا كان توزيع الشحنة منتظم على سطح A فان الشحنة الكلية حيث $Q = \sigma A$**
  حيث σ شحنة وحدة السطوح
- **واذا كان توزيع الشحنة طولياً على سلك طوله L**

$$Q = \lambda L$$

حيث λ هى شحنة وحده الاطوال .

تطبيقات على قانون جاوس

(1) حساب المجال الكهربى خارج كرة مشحونه ومعزولة



نفرض كرة معزوله وشحنتها q وان نصف قطرها a والمطلوب هو حساب شدة المجال الكهربى على بعد r من مركزها أى أن $r > a$ فى هذه الحاله ستختار سطح جاوس عبارة عن كرة متحدة المركز مع الكرة الاصلية بحيث تقع النقطة المراد حساب المجال الكهربى عندها على سطح جاوس . وبتطبيق قانون جاوس

$$\oint_c \underline{E} \cdot d\underline{A} = \frac{q_{in}}{E_0}$$

الطرف الايسر من المعادلة السابقة

$$\oint_c \underline{E} \cdot d\underline{A} = E \int dA \cos\theta$$

حيث θ هى الزاوية بين المجال الكهربى المنظم والعمودى على السطح .وحيث أن خطوط المجال عمودية على السطح والعمودى على السطح فى نفس الاتجاه فان $\theta = 0$ أى ان $\cos\theta = 1$ وبالتالى يصبح الطرف الايسر

$$\oint_c \underline{E} \cdot d\underline{A} = E \int_c dA = EA = E\, 4\pi r^2$$

حيث مساحة الكرة $A = 4\pi r^2$

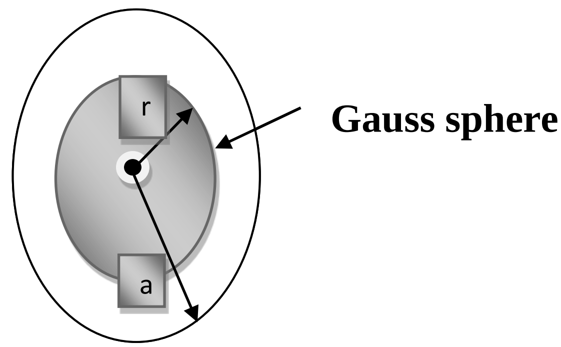
وبمساواة الطرفين الايمن والايسر

$$E\ 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad q/r^2 \quad , r > a$$

- وهذا المجال الكهربى عند النقطة التى على بعد r من المركز يكافئ الالمجال الكهربى لشحنة نقطية قدرها q موضوعة عند المركز

(2) <u>حساب المجال الكهربى عند نقطة داخل الكرة المشحونة أى</u> $r > a$



عندما تكون النقطة المراد ايجاد المجال عندها داخل الكرة المشحونه والمعزوله $r > a$ نختار سطح جاوس يمر بالنقطة المراد ايجاد المجال عندها ومتمركزة مع الكرة الاصلية أى أن

$$\oint_c \underline{E} \cdot d\underline{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

حيث q_{in} الشحنة الموجودة داخل سطح جاوس ، والمعلوم لدينا شحنة الكره ذات نصف القطر a وتساوى

$$q = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi\, a^3$$

أما شحنه سطح جاوس $q` = \rho V` = \rho \frac{4}{3} \pi\, a^3$ **وهى غير معلومه** وبقسمة الشحنتين

$$q` = q\ \frac{r^3}{a^3}$$

واصبحت $q`$ معلومة الآن بدلاله q, r, a بالتعويض فى قانون جاوس

$$E\ A = \frac{q\ \frac{r^3}{a^3}}{\varepsilon_0}$$

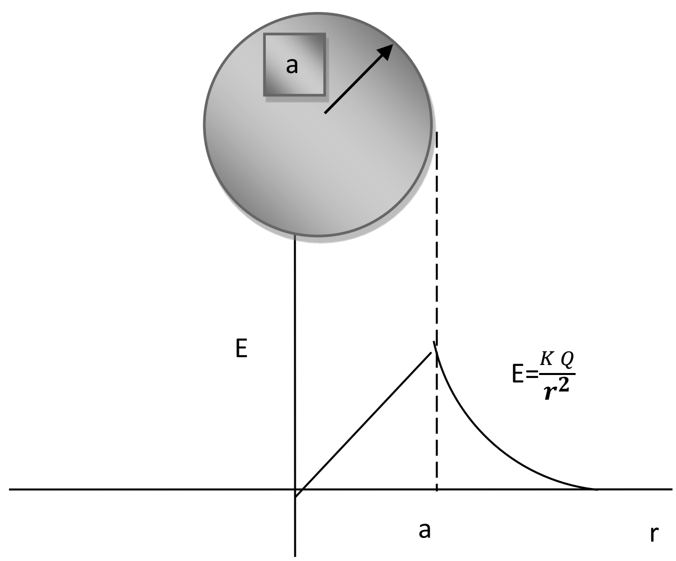
$$E\ 4\pi r^2 = \frac{q\ r^3}{\varepsilon_0\ a^3}$$

$$E = \frac{1}{4\pi E_0} \frac{q\,r}{a^3} \quad , \quad r < a$$

ويتضح من هذه العلاقة أن المجال الكهربى يزداد بزيادة نصف القطر r حتى يصل لاعلى قيمة له عندما r = a اى

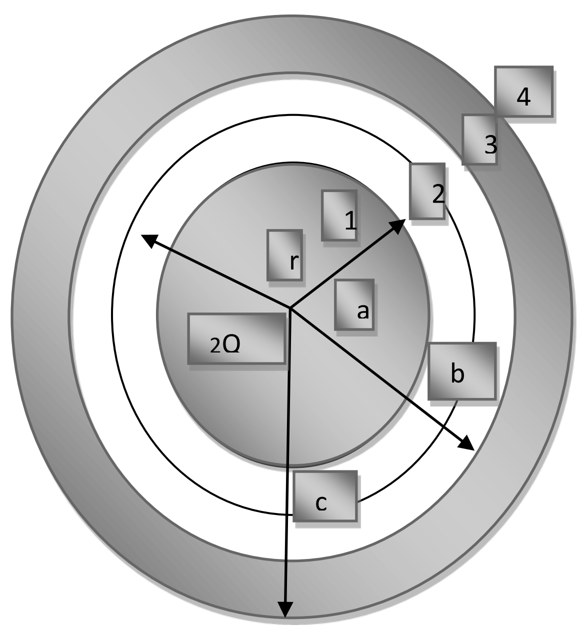
$$E = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{a^2}$$

ثم يعود المجال الكهربى مرة أخرى للنقصان بزيادة r حيث $E \,\alpha\, \frac{1}{r^2}$



(3) <u>المجال الكهربى لقشرة كروية Spherical shell</u>

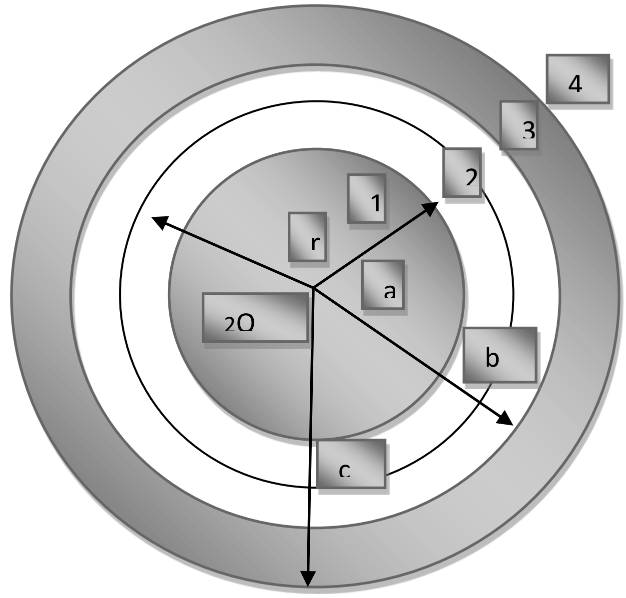
بفرض قشرة كروية رقيقة نصف قطرها الداخلى ط والخارجى C اذا وضعت كره موصلة مشحونه $2\,Q$ عند مركز القشرة وكان نصف قطرها a فان الشحنه سوف تتمركز على سطح هذه الكرة ، هذه الشحنة سوف تنشئ بالحث على السطح الداخلى للقشرة شحنة مساويه لها فى المقدار ومخالفة لها فى الاشارة أى شحنة قدرها ، وتكون الشحنة على القشرة



$$q_{shell} = q_{in} + q_{out}$$

حيث q_{in} الشحنة على السطح الداخلى للكرة ، q_{out} الشحنة على السطح السطح الخارجى اذا فرص أن الشحنة على القشرة $-Q$ فان

$$-Q = -2Q + q_{out} \implies q_{out} = +Q$$



والآن لحساب المجال الكهربى عند النقاط 1,2,3,4

- **حيث ان الكرة الموصلة المشحونة بشحنة $2Q$ ذات نصف القطرa شحنتها تتمركز على السطح الخارجى وبالتالى فان المجال عند النقطة (1) صفراً لعدم وجود شحنات بداخل الكرة.**

- **النقطة (2) المجال الكهربى عندها :-**

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\ \frac{2Q}{r^2}$$

- **النقطة (3) يكون بداخلها الشحنتين $q_{in} = -2Q$ على السطح الداخلى للقشرة وكذلك الشحنة على السطح الخارجى للكرة ذات نصف القطر a وتساوى $+2Q$ أى ان**

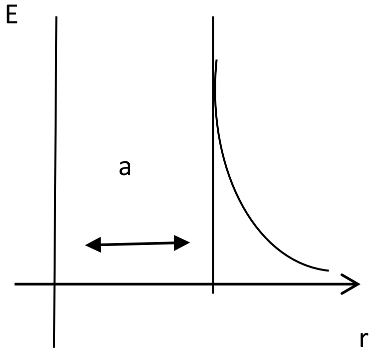
$$q_{in} = +2Q - 2Q = 0$$

$$E_3 = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\ \frac{q_{in}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\ \frac{0}{r^2} = 0$$

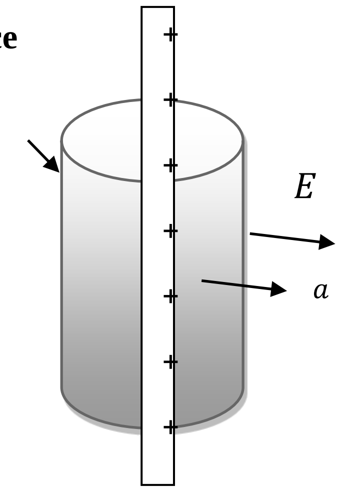
- **النقطة (4) والتى تقع خارج القشرة**

$$E_4 = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\ \frac{q_{out}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\ \frac{Q}{r^2}$$

والمجال الكهربى صفراً اذا كانت $r < a$ لعدم وجود شحنات ، وأعلى قيمة للمجال عند $r = a$ ثم يقل المجال بعد ذلك حيث $E\ \alpha\ \frac{1}{r^2}$



(4) المجال الكهربى الناتج من شحنة خطية (اسطوانة)



المطلوب الان حساب المجال الكهربى E عند مسافة r من شحنة موجبة متناهية فى الطول وكثافة الشحنة الخطية λ وهى ثابتة . باختيار سطح جاوس على شكل اسطوانه نصف قطرها r *وطولها* L ومحور هذه الاسطوانه هو محور الشحنة الخطية خطوط المجال الكهربى عمودية على السطح والعمودى على السطح والعمودى على السطح موازى لخطوط المجال أى ان $\theta = 0$

$$Q_c = \oint_c \underline{E} \cdot d\underline{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$E\,A = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$E\,2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

أى ان المجال الكهربى الناتج من قضيب اسطوانى مشحون يتغير بالمقدار $\frac{1}{r}$ فى حين ان المجال الكهربى فى حالة سطح كروى يتغير بمقدار $\frac{1}{r^2}$.

$$\therefore \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$