Capacitors المكثفات

يعمل المكثف الكهربى كمستودع لتخزين الشحنات الكهربية وما يصاحبها من طاقة وضع كهربية كذلك يستخدم المكثف قى توليد المجالات الكهربية التى تمكننا فى التحكم فى حركة الشحنات الكهربية.

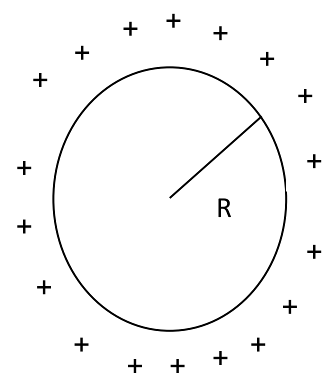
1- المكثف الكروى الشكل

عند شحن كره نصف قطرها R فان جهد الكرة يزداد بزيادة الشحنة وينقص بنقصانها اى ان $Q \, \alpha \, V$ اى ان

$$Q = Const \;\; V = C \;\; V \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

اى ان ثابت التناسب يعرف بسعه المكثف الكروى وبالتالى

$$C = \frac{Q}{V}$$



فلو زادت الشحنة فان قيمة فرق الجهد يزداد بحيث يظل C ثابتاً . ويمكن استنتاج قيمة C حيث أن جهد الموصل الكروى

$$V = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{Q}{R}$$

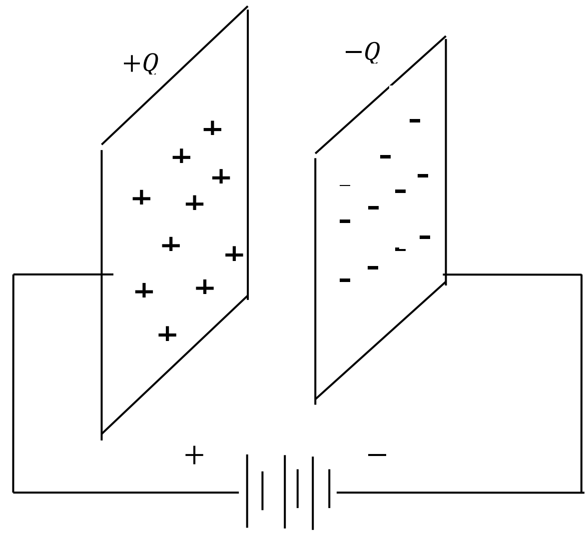
$$Q = (4\pi\,\varepsilon_0\,R)\,V \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

بمقارنة المعادلتين (2) , (1) يتضح ان سعة المكثف الكروى

$$C = 4\pi\,\varepsilon_0\,R$$

اى ان سعة المكثف الكروى يعتمد فقط على نصف قطر الموصل R.

2- المكثف ذو اللوحين المتوازيين :



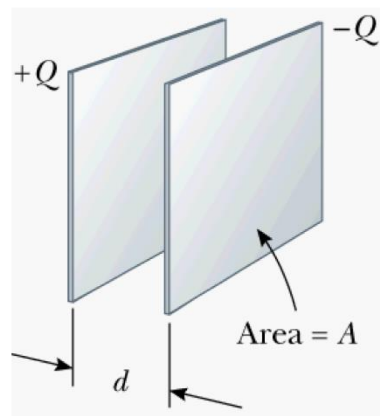
ΔV

المكثف ذو اللوحين المتوازيين مساحة كل منها **A** والمسافة بين اللوحين **d** وهى صغيرة بالنسبة لابعاد هذين اللوحين وشحنة كل لوح هى Q فيكون فرق الجهد بين اللوحين

$$\Delta V = Ed$$

حيث E شدة المجال بين اللوحين

$$\Delta V = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{\mathrm{Q}}{R^2}\,.\mathrm{d} = \frac{\mathrm{Q}\,d}{4\pi R^2\,\varepsilon_0}$$



حيث $A = 4\pi R^2$ مساحة سطح اللوح باعتبار ان اللوح جزء كرة نصف قطرها لا نهائى

$$\Delta V = \frac{Q}{\varepsilon_0\,A}\,d$$

$$Q = C\,\Delta V$$

وحيث ان

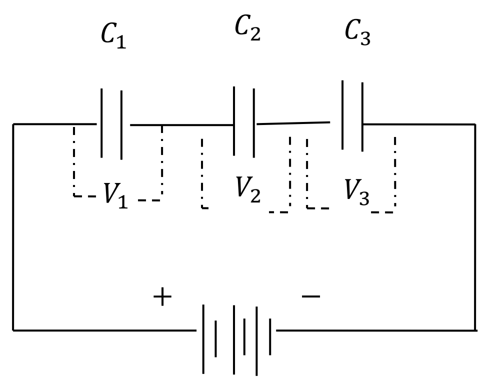
$$Q = (\varepsilon_0\,A/d)\;\;\Delta V$$

اى ان سعة المكثف ذو اللوحين المتوازيين $C = \varepsilon_0\,A/d$ وتعتمد السعة على مساحة سطح اللوح **A** طردياً حيث بزيادة مساحة السطح يزداد تراكم الشحنات على اللوح وعكسياً مع المسافة الفاصلة بين اللوحين .

وتقاس سعة المكثف بوحدة تسمى الفاراد **Farad** ويرمز لها بالرمز **F** وهناك وحدات اصغر

$1\mu\,F = 10^{-6}\,F$ او $1m\,F = 10^{-3}\,F$

توصيل المكثفات على التوالى: Series Combination



ΔV

بفرض توصيل مكثفات على التوالى بمصدر كهربى ΔV فيكون

$$\Delta V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{C}_1} + \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{C}_2} + \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{C}_3}$$

وفى حالة على التوالى تكون الشحنة ثابته اى ان

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

وفى حالة توصيل مكثفين فقط فان

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_2 + C_1}{C_1 \times C_2}$$

اى ان

$$C = \frac{C_2 \times C_1}{C_1 + C_2}$$

واذا كان المكثفان متساوى السعه $C_1 = C_2$ فان

$$C = \frac{C_1}{2} = \frac{C_2}{2}$$

اى احدهما على عددهما اى ان السعة المكافئة لمجموعة المكثفات المتصلة على التوالى تكون دائماً اقل من اصغر سعة فى مكثفات المجموعة

توصيل المكثفات على التوازى :

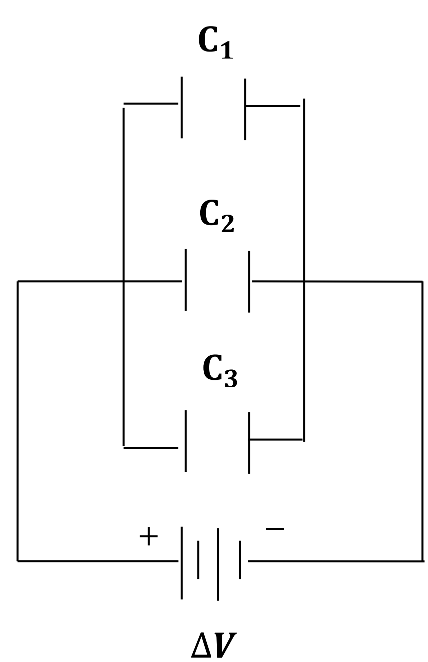
فى حالة توصيل مجموعة من المكثفات على التوازى فان الشحنة الكهربية على المكثفات تكون متساوية

$$\because \Delta V = V_1 + V_2 + V_3$$

اى ان

$$CQ = C_1Q + C_2Q + C_3Q$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$



اى ان السعة المكافئة تساوى المجموع الجبرى لسعة المكثفات وبالتالى السعة المكافئة على التوازى اكبر من سعة فى مكثفات المجموعة.

واذا كانت المكثات المتصلة على التوازى متساوية السعة فان

$$C = n\, c_i$$

الكثافة الحمجية للطاقة الحجمية :

الشغل يختزن فى المكثف على شكل طاقة وضع كهربية U

$$U = W = q\,\Delta V$$

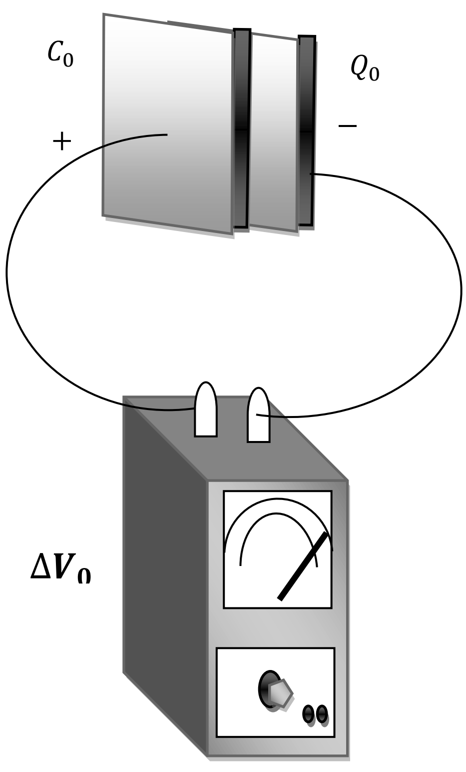
$$= \frac{1}{2}\,q^2/C \quad = \frac{1}{2}\,C\,(\Delta V)^2 = \frac{1}{2} q\Delta V$$

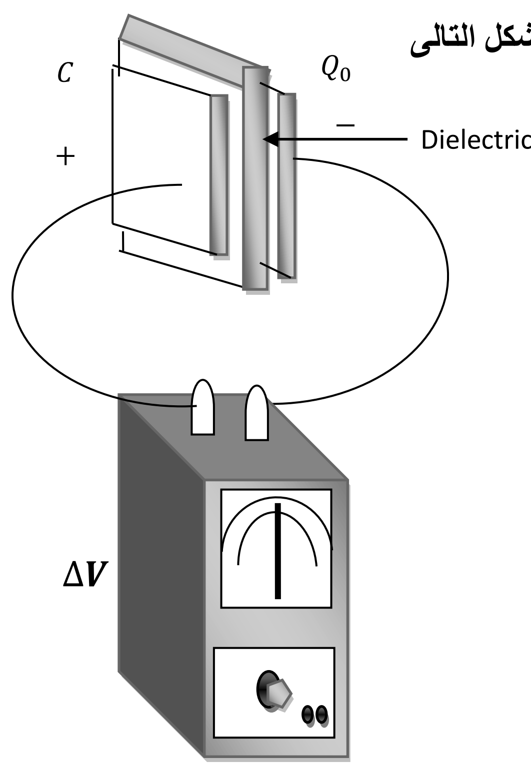
وتعرف الطاقة الحجمية بانها الطاقة لوحدة الحجوم $\acute{U} = \frac{U}{V}$

$$\acute{U} = \frac{\frac{1}{2}\,C(\Delta V)^2}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}\,\varepsilon_0 A/d\,(\Delta V)^2}{Ad}$$

$$= \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,\frac{(\Delta V)^2}{d^2} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E^2 \quad (J/m^2)$$

تأثير وضع عازل داخل مكثف : عند وضع مادة عازلة بين لوحي مكثف وقراءة فرق الجهد بواسطة فولتميتر نلاحظ انخفاض قراءة الفولتميتر عند حالته فى وجود هواء او فراغ كما هو مبين بالشكل التالى





(a) ΔV_0 (b) ΔV

$$\Delta V_0 = \frac{Q_0}{C_0} \qquad\qquad \Delta V = \frac{Q_0}{C}$$

ای ان

$$\Delta V_0 > \Delta V \quad \Rightarrow \quad \Delta V_0 = \Delta V$$

$$\frac{Q_0}{C_0} = K\frac{Q_0}{C} \Rightarrow C = KC_0$$

ای ان $C > C_0$ حيث $K > 1$

- فى حالة وضع مادة عازلة لمكثف ذى لوحين متوازيين فان

$$C = K\,\varepsilon_0\,A/d$$

- فى حالة مكثف كروى

$$C = 4\pi\,\varepsilon_0\,K\,R$$

Example:1

مكثف ذو لوحين لوحين متوازيين حيث مسافة مقطع كل من لوحيه $7.6m^2$ والمسافة الفاصلة بين لوحين 1.8mm. فاذا كان فرق الجهد المطبق بين لوحيه 20V اوجد

An air–filled capacitor consists of two plates, each with an area of $7.6\,cm^2$, separated by a distance of 1.8mm. If a 20V potential difference is applied to these plates, calculate,

- **The electric field between the plates,** — المجال الكهربى بين اللوحين
- **The surface charge density,** — كثافة الشحنة السطحية
- **The capacitance, and** — سعة المكثف
- **The charge on each plate.** — الشحنة على كل سطح

Solution:

(a) $E = \frac{V}{d} = \frac{20}{1.8\times10^{-3}} = 1.11 \times 10^4\ V/m$

(b) $\sigma = E_0 E = (8.85 \times 10^{-12})(1.11 \times 10^4) = 9.83 \times 10^{-8}\ C/m^2$

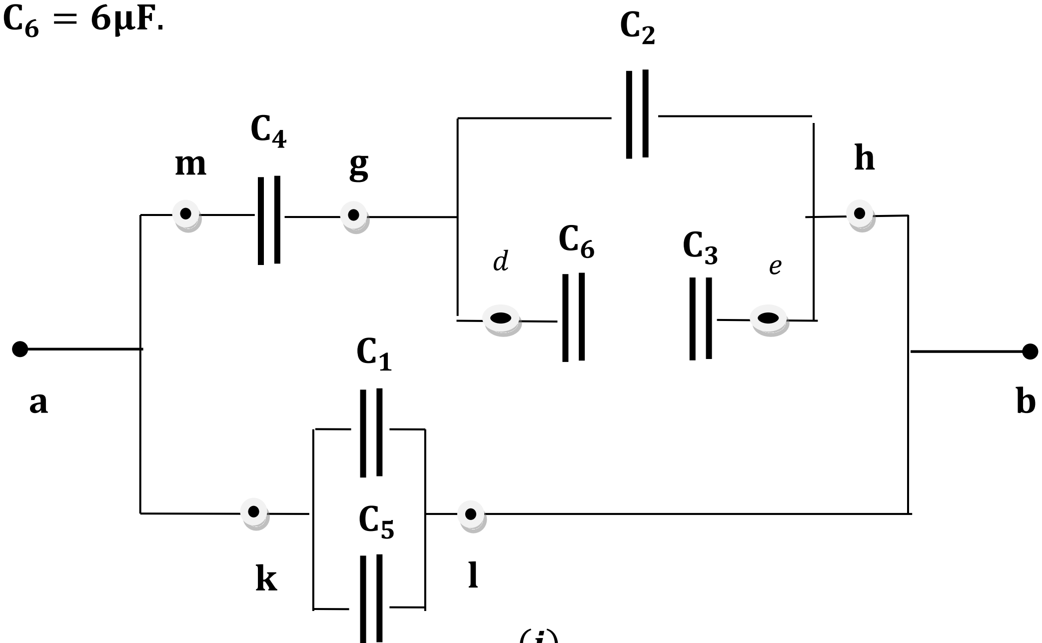
(c) $C = \frac{E_0 A}{d} = \frac{(8.85\times10^{-12})(7.6\times10^{-4})}{1.8\times10^{-3}} = 3.73 \times 10^{-12}\ F$

(d) $q = CV = (3.74 \times 10^{-12})(20) = 7.48 \times 10^{-11}\ C$

Example:2

اوجد السعة المكافئة بين النقطتين a , b لمجموعة المكثفات فى الشكل التالي

Find the equivalent capacitance between points a and the group of capacitors shown in figure below. $C_1 = 1\mu F, C_2 = 2\mu F , C_3 = 3\mu F , C_4 = 4\mu F , C_5 = 5\mu F$ **, and** $C_6 = 6\mu F$.



(i)

Solution:

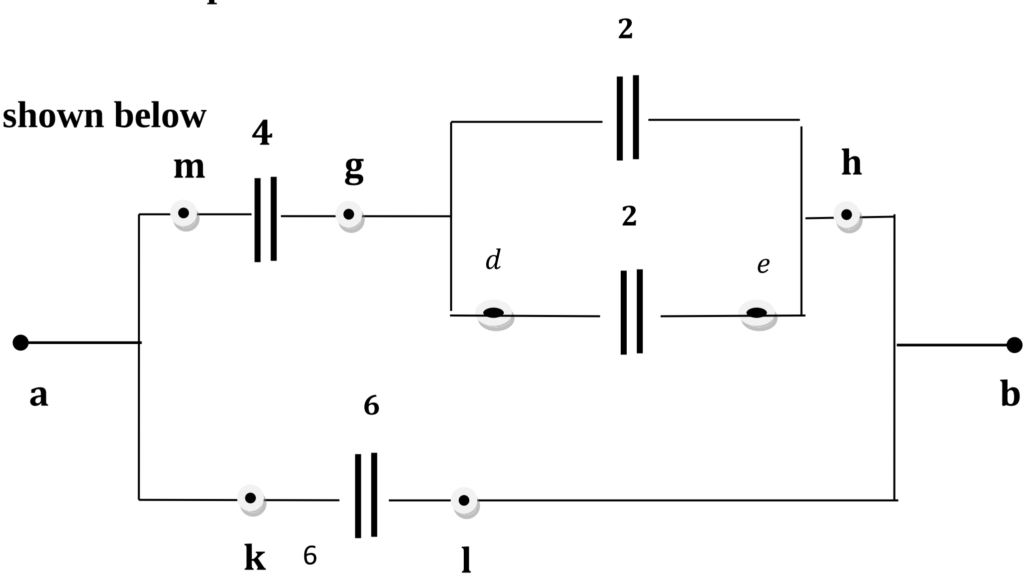
First the capacitor C_3 **and** C_6 **are connected in series so that the equivalent capacitance** C_{de} **is**

$$\frac{1}{C_{de}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}; \Rightarrow C_{de} = 2\mu F$$

Second C_1 **and** C_2 **are connected in parallel**

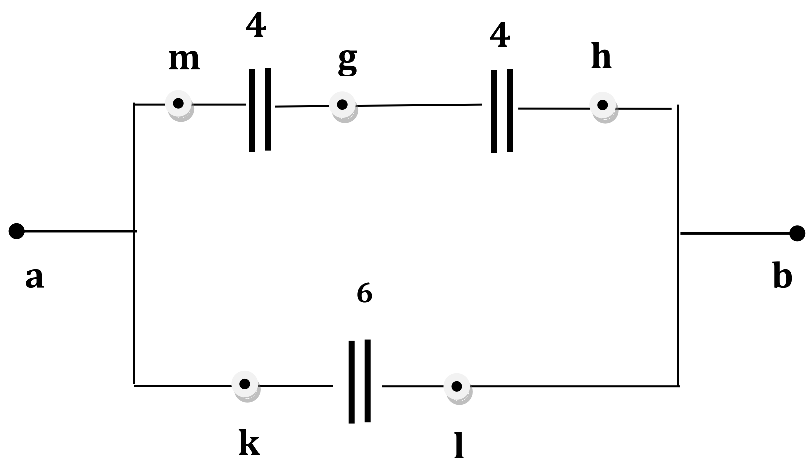
$C_{KI} = 1 + 5 = 6\mu F$

The circuit become as shown below



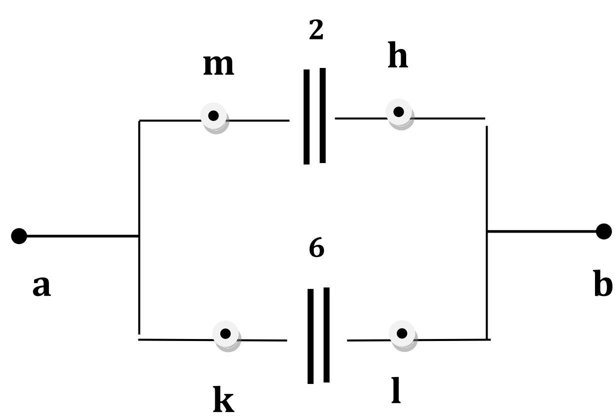
(ii)

Continue with the same way to reduce the circuit for the capacitor C_2 and C_{de} to $C_{gh} = 4\mu F$



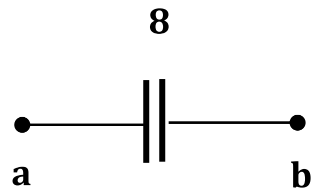
(iii)

Capacitors C_{mg} and C_{gh} are connected in series the result is $C_{mh} = 2\mu F$. The circuit become as shown below



(IV)

Capacitor C_{mh} and C_{KI} are connected in parallel the result is



(V)

$C_{eq} = 8\mu F$.

<u>Energy stored in a charged capacitor (in electric field)</u>

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\,QV = \frac{1}{2}\,CV^2$$

The energy per unit volume *u* (energy density) in parallel plate capacitor is the total energy stored *U* divided by the volume between the plates *Ad*

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad}$$ **الطاقة المختزنة لوحدة الحجوم**

For parallel plate capacitor $C = \frac{E_0 A}{d}$

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{V}{d}\right)^2$$

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,E^2$$

Therefore the electric energy density is proportional with square of the electric field.

لاحظ هنا ان الطاقة الكهربية المخزنة بين لوحى المكثف يمكن التعبير عنها باستخدام الطاقة الكلية U أو من خلال كثافة الطاقة U. الطاقة الكلية تساوى كثافة الطاقة فى الحجم المحصور بين لوحى المكثف .

<u>Example</u>:3

ثلاث مكثفات $14\mu F$ ، $10\mu F$ ، $8\mu F$ متصلة ببطارية قوتها الدافعة 12V ما مقدار الطاقة التى تمدها البطارية للمكثفات فى حالة توصيلها على التوالى – التوازى

Three capacitors of $8\mu F$, $10\mu F$ are connected to a battery of 12V . How much energy does the battery supply if the capacitors are connected?
(a) in series, and (b) in parallel?

<u>Solution:</u>

فى حالة توصيلها على التوالى

(a) For series combination

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14}$$

This give

$$C = 3.37\mu F$$

Then they energy U is

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

$$U = {}^{1}\!/_{2}\,(3.37 \times 10^{-6})(12)^2 = 2.43 \times 10^{-4} J$$

(b) For parallel combination فى حالة توصيلها على التوازى

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

$$C = 8 + 10 + 14 = 32\ \mu F$$

The energy U is

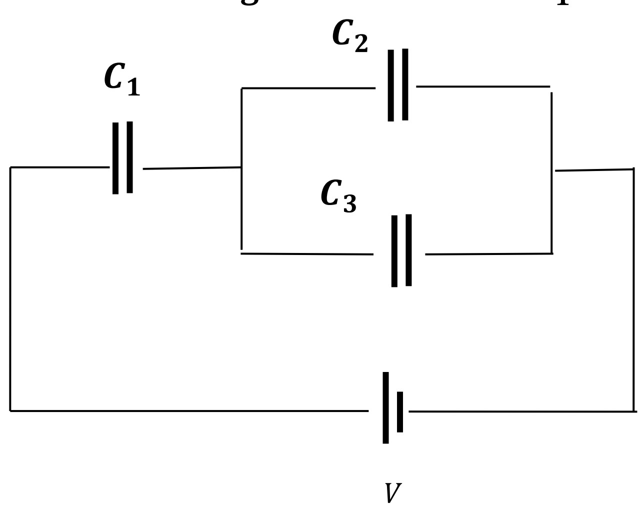
$$U = {}^{1}\!/_{2}\,(3.37 \times 10^{-6})(12)^2 = 2.3 \times 10^{-4}\ J$$

<u>Example</u>:4

دائرة كما بالرسم حيث $C_1 = 6\mu F$ $C_3 = 12\mu F$, $C_2 = 4\mu F$, والجهد المطبق V=12V volts
عين الجهد عبر كل مكثف أوجد الشحنة لكل مكثف وعين السعة المكافئة؟

Consider the circuit shown in the figure below where $C_1 = 6\mu F$, $C_2 = 4\mu F$, $C_3 = 12\mu F$ and V=12V.

<u>Solution:</u>



(a) Calculate the equivalent capacitance.

(b) Calculate the potential difference across each capacitor.

(c) Calculate the charge on each of the three capacitors.

C_2 and C_3 are connected in parallel, therefore

$$C^{`} = C_2 + C_3 = 4 + 12 = 16\ \mu F$$

Now $C^{`}$ is connected in series with C_1. Therefore the equivalent capacitance is

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C^{`}} + \frac{1}{C_1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{16} = \frac{1}{48}$$

$$C = 4.36\ \mu F$$

The total charge $Q = CV = 4.36 \times 12 = 52.36 \mu C$

The charge will be equally distributed on the capacitor C_1 and $C^{`}$

$$Q_1 = Q^{`} = Q = 52.36 \mu C$$

But $Q^{`} = C^{`}V$, Therefore

$$V^{`} = 52 \times {}^{36}/_{16} = 3.27\ \text{volts}$$

The potential difference on C_1 is

$$V_1 = 12 - 3.27 = 8.73\ \text{volts}$$

The potential difference on both C_2 and C_3 is equivalent to $V^{`}$ since they are connected in parallel.

$$V_2 = V_3 = 3.27\ \text{volts}$$

$$Q_2 = C_2 V_2 = 13.08\ \mu C$$

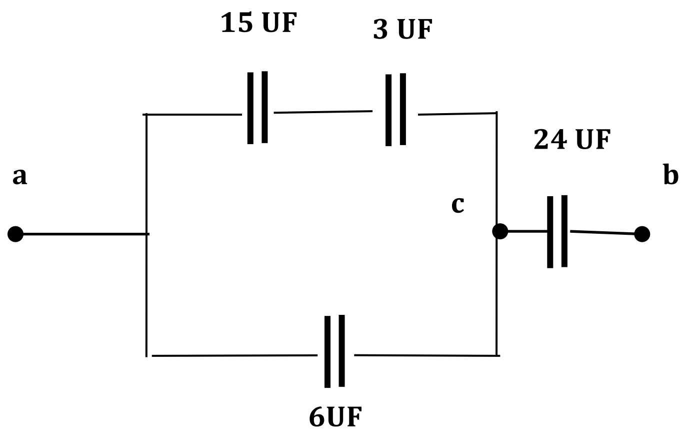
$$Q_3 = C_3 V_3 = 39.24\ \mu C$$

Example:5

Four capacitors are connected as shown in Figure 6.13 . (a) Find the equivalent capacitance between point a and b . (b) Calculate the charge on each capacitor if $V_{ab} = 15\ V$.

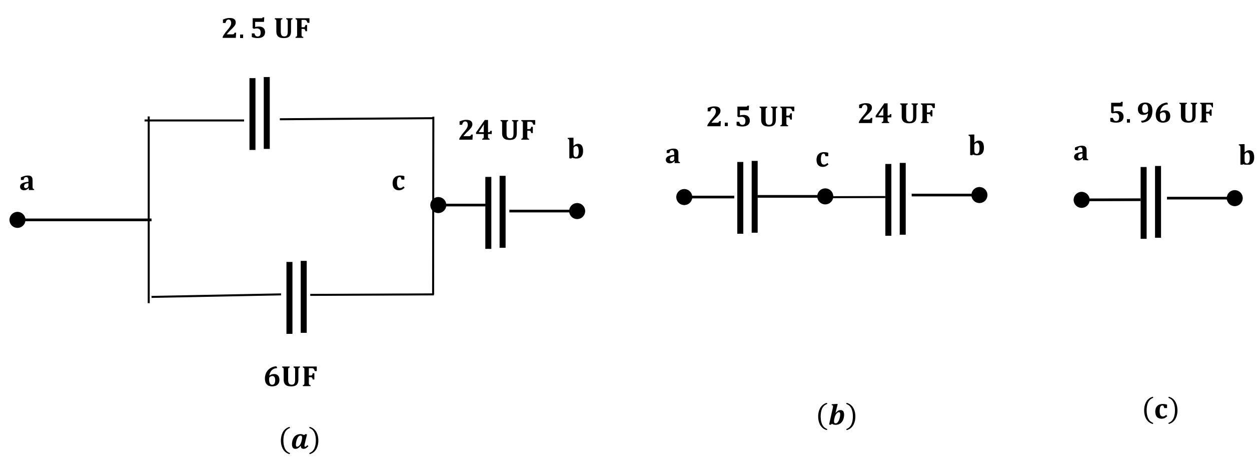
أربع مكثفات متصلة فى دائرة كهربية كما بالرسم

- اوجد السعة المكافئة بين النقطتين (a , b)
- أوجد الشحنة عبر كل مكثف اذا كان الجهد المطبق بين النقطتين (a , b) يساوى 15 Volts



Solution:

(a) We simplify the circuit as shown in the figure from (a) to (c)



First the $15\mu F$ and 3 μF in series are equivalent to

$$\frac{1}{\left(1/_{15}\right)+\left(1/_{3}\right)}=2.5\mu F$$

Next $2.5\mu F$ combines in parallel with . Creating an equivalent capacitance of $.5\mu F$.

The $8.5\mu F$ and $20\mu F$ are in series. Equivalent to

$$\frac{1}{\left(1/_{8.5}\right) + \left(1/_{20}\right)} = 5.96\mu F$$

(b) We find the charge and the voltage across each capacitor by working backwards through solution figures (c) through (a).

For the $5.96\mu F$ capacitor we have

$$Q = CV = 5.96 \times 15 = 89.5\mu C$$

In figure (b) we have. For the $8.5\mu F$ capacitor

$$\Delta V_{ac} = \frac{Q}{C} = \frac{89.5}{8.5} = 10.5V$$

And for the $20\mu F$ in figure (b) and (a) $Q_{20} = 89.5\mu C$

$$\Delta V_{cb} = \frac{Q}{C} = \frac{89.5}{20} = 4.47V$$

Next (a) is equivalent to (b). so $\Delta V_{cb} = 4.47V$ and $\Delta V_{ac} = 10.5V$

Thus for the $2.5\mu F$ and $6\mu F$ capacitors $\Delta V = 10.5V$

$Q_{2.5} = CV = 2.5 \times 10.5 = 26.3\mu C$

$Q_6 = CV = 6 \times 10.5 = 63.2\ \mu C$

Therefore

$Q_{15} = 26.3\ \mu C$ $\qquad$ $Q_3 = 26.3\ \mu C$

Fore the potential difference across the capacitors C_{15} and C_3 are

$\Delta V_{15} = \frac{Q}{C} = \frac{26.3}{15} = 1.75V$

$\Delta V_3 = \frac{Q}{C} = \frac{26.3}{3} = 8.77V$

فى حالة وضع مادة عازلة بين لوحى مكثف

Capacitor with dielectric

For a parallel plate capacitor with dielectric we can capacitance

$C = K\frac{\varepsilon_0 A}{d}$

A parallel plate capacitor of area A and separation d is connected to a battery to charge the capacitor to potential difference V_0. Calculate the stored energy before and after introducing a dielectric material.

Example: 6

مكثف ذو لوحين متوازيين مساحة مقطعه A والمسافة الفاصلة بين لوحيه d وصل ببطارية فرق الجهد لها V_0
احسب الطاقة المختزنة قبل وبعد ادخال المادة العازلة

A parallel plate capacitor of area A and separation d is connected to a battery to charge the capacitor to potential difference V_0. Calculate the stored energy before and after introducing a dielectric material.

The energy stored before introducing the dielectric.

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_1^2$$

The energy stored after introducing the dielectric material.

$C = KC_0$ **and** $V_d = \frac{V_0}{K}$

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} KC_0 \left(\frac{V_0}{K}\right)^2 = \frac{U_0}{K}$$

Therefore, the energy is less by a factor of I/K .

Example:7

مكثف ذو لوحين متوازيين مساحة مقطعه A $0.64\ cm^2$ اذا كانت سعته فى حاله الهواء او الفراغ $4.9\ PF$

A parallel plate capacitor of area $.64\ cm^2$. when the plates are in vacuum, the capacitance of the capacitor is $4.9\ PF$.

(a) Calculate the value of the capacitance if the space between plates is filled with nylon $(k = 3.4)$

(b) What is the maximum potential difference that can be applied to the plates without causing discharge $(E_{max} = 14 \times 10^6\ V/m)$.

Solution:

(a) احسب السعة فى حالة وجود مادة من النيلون ثابت العزل لها $K = 3.4$

(*b*) احسب القيمة العظمى للجهد يمكن وضعها على اللوحين بدون حدوث تفريغ للشحنه اذا كانت القيمة العظمى للمجال $E_{max} = 14 \times 10^{6}$؟

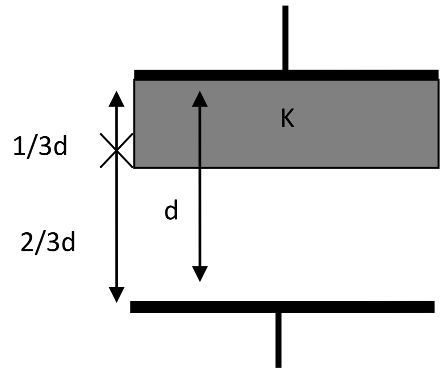
(a) $C = KC_0 = 3.4 \times 4.9 = 16.7PF$

(b)$V_{max} = E_{max} \times d$

To evaluate d we the equation

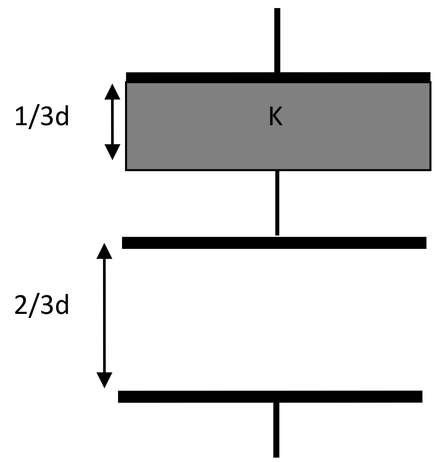
$$d = \frac{\varepsilon_0 A}{C_0} = \frac{8.85\times10^{-12}\times6.4\times10^{-12}}{4.9\times10^{-12}} = 1.16 \times 10^{-4}$$

$$V_{max} = 1 \times 10^{6} \times 1.16 \times 10^{-4} = 1.62 \times 10^{3}V$$



Example:8

A parallel-plate capacitor has a capacitance C_0 In The absence of dielectric, A slab of dielectric material of dielectric constant K and thickness d/3 is inserted between the plates as shown in figure 6.16. what is the new capacitance when the dielectric is present?



Solution:

We can assume that two parallel plate capacitor are connected in series as shown in figure

$$C_1 = \frac{k\varepsilon_0 A}{d/3} \qquad and \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{2d/3}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d/3}{k\varepsilon_0 A} + \frac{2d/3}{\varepsilon_0 A}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{3\varepsilon_0 A}\left(\frac{1}{k} + 2\right) = \frac{d}{3\varepsilon_0 A}\left(\frac{1 + 2k}{k}\right)$$

$$C = \left(\frac{3K}{2K + 1}\right)\frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad \Rightarrow C = \left(\frac{3K}{2K + 1}\right)C_0$$