Exercices: Probabilités sur un espace fini

Exercice 1. Une urne contient 3 boules rouges et 3 boules blanches. On tire deux boules au hasard, que l'on met dans un sac. Puis on tire au hasard une de ces deux boules.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
2. Sachant qu'elle l'est, quelle est la probabilité que la boule encore dans le sac le soit aussi ?

Exercice 2. Soit n un entier naturel non nul. Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on note A et B deux événements de probabilité non nulle.

1. On suppose que $P_B(A) \leqslant P(A)$. Comparer $P_A(B)$ et $P(B)$.
2. Une boite contient des boules indiscernables, numérotés de 1 à $2n$. Benoît en tire une au hasard et sans remise puis Gilles en tire une à son tour. Gilles obtient un numéro compris entre $n+1$ et $2n$.

   La probabilité que Benoît ait obtenu un numéro compris entre $n+1$ et $2n$ est-elle supérieure, égale ou inférieure à $\frac{1}{2}$?

Exercice 3. Un étudiant connaît une proportion $p \in]0,1[$ du programme. Lors du contrôle, si l'étudiant ne connaît pas la réponse, il répond au hasard parmi 3 choix possibles. La réponse à une question étant bonne, quelle est la probabilité que l'étudiant connaisse effectivement la réponse ?

Exercice 4. Pour monter un appareil, on n'utilise que les pièces provenant de deux fournisseurs A et B. La fiabilité (probabilité de fonctionnement sans défaillance) d'un tel appareil durant une année est de 0.9 s'il est monté uniquement avec des pièces du fournisseur A ; de 0.7 s'il est monté uniquement avec des pièces du fournisseur B ; et de 0.8 s'il est monté avec un mélange des pièces des deux fournisseurs A et B. De plus, les pièces du fournisseur A sont utilisées dans 80% des appareils et celles du fournisseur B dans 50% des appareils. Un appareil est extrait au hasard de la chaîne de montage. Calculer la fiabilité de l'appareil pour une période d'un an.

Exercice 5 (Le lion et les gazelles)**.** A chaque repas, un lion mange soit un zèbre avec une probabilité $\frac{1}{3}$, soit une gazelle avec une probabilité $\frac{2}{3}$. On suppose que les compositions des repas du lion sont indépendantes.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut calculer la probabilité u_n qu'en n repas, le lion n'ait jamais mangé deux gazelles consécutives. Montrer à l'aide de la formule des probabilités totales que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n.$$

En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 6 (Ruine du joueur)**.** Un joueur joue à un jeu d'argent : à chaque tour il gagne 1 euros avec une probabilité p, ou perd 1 euros avec une probabilité $1-p$ ($p \in]0,1[$). On voudrait calculer la probabilité qu'il termine ruiné (au bout d'un nombre quelconque de tours), partant d'une fortune initiale de n euros ($n \in \mathbb{N}$). On note cette probabilité u_n. Notons que $u_0 = 1$ puisqu'il commence ruiné.
Montrer à l'aide de la formule des probabilités totales que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = p.u_{n+1} + (1-p).u_{n-1}.$$

En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 7. On lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois une pièce dont la probabilité de donner pile est $p \in]0,1[\setminus\{\frac{1}{2}\}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose E_k l'événement « le premier pile est au k-ième lancer ». Calculer $P(E_k)$.
2. Soit E l'événement « on tire au moins un pile ». En utilisant la question précédente, calculer $P(E)$.

Exercice 8. Dans une usine, un service contrôle les colis destinés à la livraison. Ce contrôle est effectué pour tous les colis par deux personnes, de manière indépendante, qui détectent chacune un colis non conforme dans 90 pour cent des cas.

On sait d'autre part que 5 pour cent des colis en moyenne sont non conformes.

On note A l'événement "le colis n'est pas conforme" et C_i l'événement "le contrôleur numéro i détecte la non conformité du colis".

1. Calculer la probabilité qu'un colis soit non conforme et ne soit pas détecté.
2. Quelle est la probabilité qu'un colis soit non conforme et soit détecté ?
3. Un lot de 100 colis est présenté au contrôle en vue d'une livraison. On suppose que la répétition des contrôles se fait de manière indépendante.
   (a) Quelle est la probabilité que les 100 colis soient conformes ?
   (b) Quelle est la probabilité que les 100 colis soient déclarés bons pour la livraison ?

Exercice 9 (Chaîne de Markov)**.** On considère un mobile qui se déplace sur les sommets d'un triangle A_1, A_2 et A_3. On suppose qu'initialement le mobile se trouve en A_1. Ensuite les déplacements s'effectuent de la manière suivante : si le mobile est en A_i,

— il passe en A_j $(j \neq i)$ avec la probabilité $\dfrac{2}{5}$ dans les deux cas.

— il reste en A_i avec la probabilité $\dfrac{1}{5}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les événements : U_n ="après n déplacements le mobile se trouve en A_1" ; V_n ="après n déplacements le mobile se trouve en A_2" ; W_n ="après n déplacements le mobile se trouve en A_3". On pose $u_n = P(U_n)$, $v_n = P(V_n)$ et $w_n = P(W_n)$.

1. Déterminer u_0, v_0 et w_0.
2. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

3. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n, pour tout entier n.
5. Quelles sont les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) ?