Devoir N°4

Exercice : 01

On considère un dé cubique équilibré à six faces dont deux portent le chiffre 1 et les autres portent le chiffre 2.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

- L'urne U_1 contient une boule blanche et trois boules rouges.
- L'urne U_2 contient deux boules blanches et deux boules rouges.

Une épreuve consiste à lancer une fois le dé : Si la face supérieure porte le chiffre 1, on tire au hasard une boule de l'urne U_1 ; si la face supérieure porte le chiffre 2 , on tire au hasard une boule de l'urne U_2 .

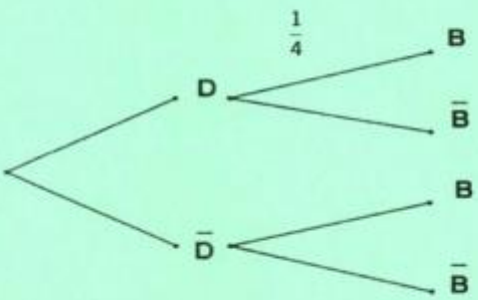
On considère les événements suivants :

D : « La face supérieure du dé porte le chiffre 1 ».

B : « Tirer une boule blanche ».

1) a) Montrer que $p(D) = \frac{1}{3}$

b) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.



2) a) Montrer que $p(B) = \frac{5}{12}$.

b) Sachant que l'on a tiré une boule blanche, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_2 ?

3) On répète l'épreuve cinq fois de suite en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer la probabilité d'obtenir une seule fois une boule blanche.

c) Soit q la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge. Calculer q .

Exercice :02

On considère les intégrales $K=\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{x\ln x}{(x^2-1)^2}dx$ et $J=\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{x(x^2-1)}dx$

1) a) Vérifier que pour tout $x \in \left[\sqrt{e}\ ,\ e\right]$, $\frac{1}{x(x^2-1)}=\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x}$

b) Calculer alors l'intégrale J .

2) a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $2K=J+\frac{1}{2(e+1)}$.

b) En déduire que $K=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln(e+1)+\frac{1}{4(e+1)}$.

Exercice : 03

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=-x+2x\ln x & \text{si } x\in\,]0,+\infty[\\ f(0)=0 \end{cases}$

et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a - Montrer que f est continue à droite en 0.

b - Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a - Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b - Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a - Montrer que pour tout réel $x\in\,]0,+\infty[$ on a $f'(x)=1+2\ln x$.

b - Dresser le tableau de variations de f.

c - Vérifier que $f(\sqrt{e})=0$.

d - Déterminer le deuxième point d'intersection autre que O de la courbe (C) et de la droite Δ d'équation cartésienne $y=x$.

e - Tracer la droite Δ et la courbe (C). (On prendra $e\simeq 2,7$)

4) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $\left[\sqrt{e},+\infty\right[$ et (C_1) sa représentation graphique dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Tracer dans le même repère la courbe (C_2) de g^{-1}.

5) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, en u.a, de la partie (E) du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\sqrt{e}$ et $x=e$ et par $\mathcal{A}'$ l'aire, en u.a, de la partie (E') limitée par les courbes (C_1), (C_2) et les axes des abscisses et des ordonnées.

a - Justifier que $\mathcal{A}'=e^2-2\mathcal{A}$.

b - Montrer que $\int_{\sqrt{e}}^{e}(x\ln x)\,dx=\frac{1}{4}e^2$.

c - En déduire la valeur de $\mathcal{A}'$.