

随机过程试卷

一、设随机过程 $X(t) = a \cdot \cos(\omega t + \theta)$, 其中 a, ω 为常数, θ 是在 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布的随机变量, $-\infty < t < +\infty$; 试求 $m_X(t), R_X(t, t + \tau), D_X(t)$ 。

二、设随机过程为 $X(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$, 其中 ω 为常数, A, B 是相互独立且均服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 的随机变量;

1. 试求 $m_X(t), D_X(t), R_X(t, t + \tau)$
2. 试写出其一维概率密度函数
3. 试写出 $[X(t = 1), X(t = 2), X(t = 3)]$ 的协方差矩阵。

三、设 $\{X(t), t \geq 0\}, \{Y(t), t \geq 0\}$ 是两个相互独立的Poisson过程, 参数分别为 λ_1, λ_2 ;

1. 试写出Poisson过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的数字特征: $m_X(t), D_X(t), R_X(t, t + \tau)$, 令 $\tau \geq 0$
2. 令 $w_x^{(1)}, w_y^{(1)}$ 分别是过程 $\{X(t), t \geq 0\}, \{Y(t), t \geq 0\}$ 第一个事件到达的时刻, 试求 $P\{w_x^{(1)} < w_y^{(1)}\}$ 。

四、以下是某其次markov链的一步转移概率矩阵, 试分别判断该链是否是遍历链? 若遍历, 求出其平稳分布。

(1)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

五、设 $\{X(n), n = 0, 1, 2 \dots\}$ 是一齐次markov链, $X(n) \in I = \{0, 1, 2\}$, 其一步转移概率矩阵P:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

1. 试验证该链遍历

2. 若在初始时刻 $n = 0$, $X(n = 0)$ 的概率分布如下, 试求 $X(n = 1)$ 的概率分布。

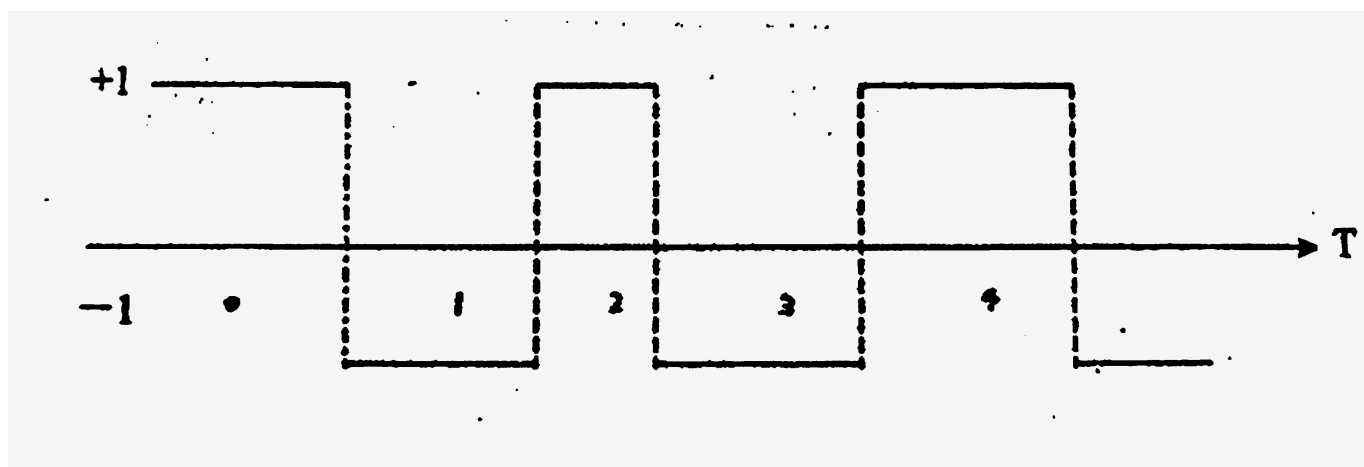
$X(n = 0)$	0	1	2
$P\{X(0)\}$	1	0	0

3. 当 $n \rightarrow +\infty$, 试求 $X(n)$ 的概率分布。

六、 设随机过程 $X(t) = \sin(2\pi\theta t)$, 其中 θ 是 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机变量, $-\infty < t < +\infty$ 是连续时间集。试讨论 $X(t)$ 的平稳性。

七、 设 $X(t)$ 为二元波过程, $X(t)$ 表示波形在时刻 t 的状态 (+1 或者 -1), $\forall t$, $X(t)$ 取 +1 或 -1 的概率相等, 均为 $\frac{1}{2}$, 其样本函数如下图。波形翻转 (由 +1 跳至 -1 或由 -1 跳至 +1) 的时刻是随机的, 在任何一段时间 τ 内 ($[t, t + \tau]$) 波形翻转的次数 k 的概率服从参数为 $\lambda\tau$ 的 Poisson 分布, 即:

$$P\{\tau, k\} = \frac{e^{-\lambda\tau}}{k!} \cdot (\lambda\tau)^k, k = 0, 1, 2, \dots$$



1. 试求 $m_X(t)$, $R_X(t, t + \tau)$, 并指出 $X(t)$ 是否平稳

2. 求 $X(t)$ 功率密度函数 $s_X(\omega)$

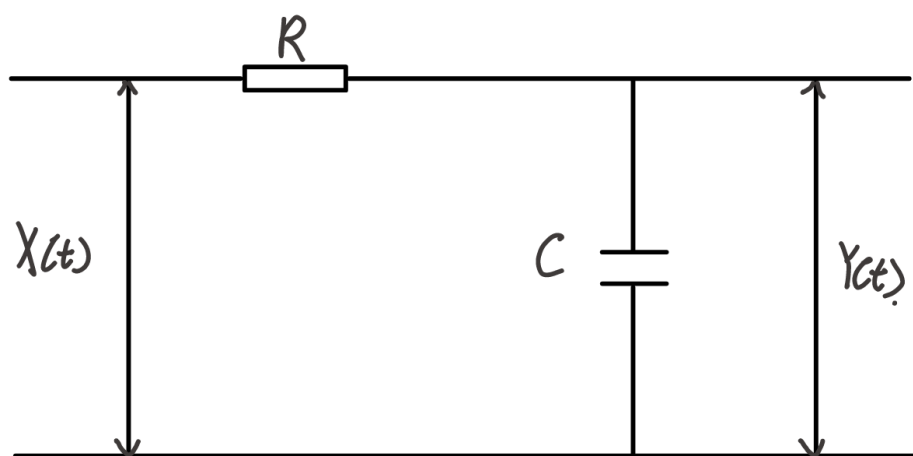
八、 设平稳过程 $X(t)$ 的功率谱密度函数 $s_X(\omega) = \frac{2}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$, 试求其相关函数 $R_X(\tau)$ 及平均功率 Ψ^2

九、 设平稳正态过程 $\{X(t)\}$ 的均值 $m_X(t) = 0$ 且谱密度函数 $s_X(\omega) = \frac{2}{\omega^2 + 1}$, 试求:

1. 相关函数 $R_X(\tau)$

2. 一维概率密度函数

十、 设 $X(t)$ 是均值为 0 的平稳随机信号, 其相关函数 $R_X(\tau) = e^{-|\tau|}$, 将 $X(t)$ 做如下简单 RC 电路的电压输入信号, 令 $Y(t)$ 是电容两端的电压输出



令 $RC = \frac{1}{\beta} \neq 1$ 是常数。

试求 $m_Y(t)$, $R_Y(t, t + \tau)$, $s_Y(\omega)$