《数学物理方程与特殊函数》作业题

练习一

1．写出长为 L 的弦振动的边界条件和初始条件：

（1）端点 $x=0, x=L$ 固定在平衡位置；

（2）初始位移为 $f(x)$；

（3）初始速度为 $g(x)$；

（4）在任何一点上，在时刻 t 时位移是有界的.

2．写出弦振动的边界条件：（1）在端点 $x=0$ 处，弦是移动的，由 $g(t)$ 给出；（2）在端点 $x=L$ 处，弦不固定地自由移动.

3． 验证函数 $u=f(xy)$ 是方程 $xu_x - yu_y = 0$ 的解，其中 f 是任意连续可微函数.

练习二

1. 证明 $u(x,t)=e^{-8t}\sin 2x$ 是如下定解问题的解:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t)=u(\pi,t)=0, \quad u(x,0)=\sin 2x.$$

2. 设 F, G 是二次可微函数，

（1）证明 $y(x,t)=F(2x+5t)+G(2x-5t)$ 是方程 $4y_{tt}=25y_{xx}$ 的通解；

（2）求方程 $4y_{tt}=25y_{xx}$ 满足定解条件 $y(0,t)=y(\pi,t)=0,\quad y(x,0)=\sin 2x$，$y_t(x,0)=0$ 的解.

3．（1）求二阶偏微分方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=x^2 y$ 的通解，（2）求该方程满足定解条 $z(x,0)=x^2,\ z(1,y)=\cos y$ 的特解.

练习三

1. 求下列固有值问题的固有值和固有函数：

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \\ X(0)=X'(l)=0. \end{cases}$$

2．求如下定解问题的解：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad t>0, \\ u(0,t)=u_x(l,t)=0, \\ u(x,0)=3\sin\frac{3\pi x}{2l}+6\sin\frac{5\pi x}{2l}, \\ u_t(x,0)=0. \end{cases}$$

3. 求解以下定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+2u, \quad 0<x<1, \quad t>0, \\ u(0,t)=u(1,t)=0, \\ u(x,0)=0, \\ u_t(x,0)=\sqrt{\pi^2-2}\,\sin\pi x. \end{cases}$$

练习四

1．求下列定解问题的解：

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad t>0, \\ u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \\ u(x,0)=x(l-x). \end{cases}$$

2. 求下列固有值问题的固有值和固有函数：

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \\ X'(0)=X(l)=0. \end{cases}$$

3. 求如下定解问题的解：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = 4\cos\frac{5\pi x}{4}. \end{cases}$$

练习五

1．求下列定解问题的解：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \ 0 < y < 1, \\ u_x(0,y) = 0, \ u_x(1,y) = 0, \\ u(x,0) = 1 + \cos 3\pi x, \ u(x,1) = 3\cos 2\pi x. \end{cases}$$

2． 设有一内半径为r_1，外半径为r_2的圆环形导热板，上下两侧绝热. 如果内圆温度保持零度，而外圆温度保持$u_0(u_0 > 0)$度，试求稳恒状态下该导热版的温度分布规律$u(r,\theta)$. 问题归结为在稳恒状态下，求解拉普拉斯方程$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$边值问题，即在极坐标系下求解定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \ r_1 < r < r_2, \ 0 < \theta < 2\pi, \\ u(r_1,\theta) = 0, \quad u(r_2,\theta) = u_0, \ 0 < \theta < 2\pi, \\ u(r,\theta) = u(r,\theta + 2\pi) \quad (\text{自然边界条件}). \end{cases}$$

3．求下列定解问题的解：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 < r < 1, \ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}, \\ u(r,0) = 0, \quad u\left(r, \dfrac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 < r < 1, \\ u(1,\theta) = \theta\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right), \quad 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

练习六

1．求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \cos \pi x, \quad (0 < x < 1,\ t > 0), \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

2．求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + t \sin \frac{\pi x}{l}, \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \ge 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

3．求下列定解问题的解：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -2x, \quad x^2 + y^2 < 1, \\ u\big|_{x^2+y^2=1} = 1. \end{cases}$$

练习七

1．求定解问题的解：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 1, \\ u(x,0) = \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{x}{l}, \quad u_t(x,0) = x(l-x). \end{cases}$$

2. 求定解问题的解：

$$\begin{cases} u_t = 8u_{xx} + \cos t + e^t \sin \frac{x}{2}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,\ t) = \sin t, \quad u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

3. 求解以下定解问题：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u_x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = e^{-x} \sin \pi x. \end{cases}$$

练习八

1．求定解问题的解：

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + 4 + 2e^{-x}, & 0 < x < 3, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 1, \quad u(3,t) = -18 - e^{-3}, & t > 0, \\ u(x,0) = -(2x^2 + e^{-x}), & 0 < x < 3. \end{cases}$$

2. 求定解问题的解：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 6(x-1), \quad 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(2,t) = 1, \\ u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{4} + x^3 - 3x^2 + x. \end{cases}$$

3．求定解问题的解：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin \pi x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ u(0,y) = 1, \quad u(1,y) = 2, \\ u(x,0) = 1 + x, \quad u(x,1) = 1 + x - \frac{1}{\pi^2}\sin \pi x. \end{cases}$$

练习九

1．求特征值问题的特征值与特征函数：

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(-\pi) = X(\pi), \ X'(-\pi) = X'(\pi). \end{cases}$$

2. 试证明特征值问题

$$\begin{cases} x^2 y''(x) + xy'(x) + \lambda y(x) = 0, \\ y(1) = y(e) = 0. \end{cases}$$

的固有函数系$\{y_n(x)\}$在区间$[1,\ e]$上带权函数$\dfrac{1}{x}$正交.

练习十

1．设一无限长的弦作自由振动，弦的初始位移为$\varphi(x)$，初始速度为$-k\varphi'(x)$ (k 为常数), 求此振动在时刻t在x处的位移$u(x,t)$，即求如下定解问题的解：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad -\infty<x<+\infty, \quad t>0, \\ u(x,0)=\phi(x), \quad u_t(x,0)=-k\phi'(x). \end{cases}$$

2．求解定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad -\infty<x<+\infty, \quad t>0, \\ u(x,0)=\sin x, \quad u_t(x,0)=x^2. \end{cases}$$

3．求解定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+at+x, \quad -\infty<x<+\infty, \quad t>0, \\ u(x,0)=x, \quad u_t(x,0)=\sin x. \end{cases}$$

练习十一

1. 用行波法求解下列定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad -at<x<0, \ t>0, \\ u|_{x=0}=\phi(t), \quad u|_{x+at=0}=\psi(t), \end{cases}$$

其中已知函数ϕ, ψ满足相容性条件$\phi(0)=\psi(0)$.

2. 求解以下三维波动方程的 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), \quad -\infty<x,y,z<+\infty, \quad t>0, \\ u(x,y,z,0)=yz, \quad u_t(x,y,z,0)=xz. \end{cases}$$

3. 求解以下二维波动方程的 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}), \quad -\infty<x,y<+\infty, \quad t>0, \\ u(x,y,0)=x^2(x+y), \quad u_t(x,y,0)=0. \end{cases}$$

练习十二

1．用积分变换法求解下列定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \cos x. \end{cases}$$

2．设有一半无限长固体$(x > 0)$，其初始温度是零度，一个常数温度$u_0 > 0$外加和保持在其表面$x = 0$处，求固体在任何一点x和任一时刻t的温度. 设在点x处和时刻t的温度为$u(x,t)$，则问题归结为求解以下热传导方程的定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u_0, \quad u(x,0) = 0, \\ u(x,t)\text{有界}. \end{cases}$$

3．设A, ω均为常数, 用积分变换法求解下列问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = A\sin \omega t, \quad |u(x,t)| < M \quad (x \to \infty). \end{cases}$$

练习十三

1．用积分变换法求解下列定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ u_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \cos 3\pi x, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

2．用积分变换法求解下列定解问题：

$$\begin{cases} u_t = t^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

3. 用积分变换法求解定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + ku, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

练习十四

1．设 K_R 表示以原点为中心以 R 为半径的球体，Γ_R 表示以原点为中心以 R 为半径的球面．若 u 满足下面的定解问题：

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y, z) \in K_R, \\ u\big|_{\Gamma_R} = 1 + \sin xy^2 z^3, \end{cases}$$

利用极值原理证明：在 K_R 内，$u > 0$.

2．设 K_R 表示以原点为中心以 R 为半径的球体，Γ_R 表示以原点为中心以 R 为半径的球面．若 $0 < r < R$，且 u 满足下面的定解问题：

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y, z) \in K_R \setminus \overline{K_r}, \\ u\big|_{\Gamma_r} = 1, \quad u\big|_{\Gamma_R} = 2, \end{cases}$$

证明：在 $K_R \setminus \overline{K_r}$ 内，$1 < u < 2$.

3. 设 $u(r,\theta,\varphi)$ 是单位球 $K_1 = \{ (r,\theta,\phi):\ 0 \le r < 1, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi \}$ 内的调和函数在球坐标下的表示，且它在闭球 $\overline{K_1}$ 上连续，若 $u(r,\theta,\varphi)$ 在上半单位球面上为 $1-\sin\theta$，在下半单位球面上恒为 0，试证明单位球 K_1 内 $0 < u(r,\theta,\varphi) < 1$，并求 $u(r,\theta,\varphi)$ 在 $r=0$ 的值.

练习十五

1．证明二维调和函数的积分表达式：

$$u(M_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r} \right) - \ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} \right] ds.$$

2．在下半平面 $y < 0$ 内求解拉普拉斯方程的边值问

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad -\infty<x<+\infty,\ y<0, \\ u\big|_{y=0}=f(x). \end{cases}$$

3. 设 A 为常数，分别用分离变量法和格林法求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, \quad 0<r<1, \\ u(1,\theta)=A\cos\theta \ \ (-\pi<\theta\le\pi). \end{cases}$$

4. 设 A, B 为常数，用试探法求如下定解问题的解：

$$\begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, \quad r<a, \\ u\big|_{r=a}=A\cos\theta+B\sin\theta \quad (-\pi<\theta\le\pi). \end{cases}$$

练习十六

1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中以足够光滑的曲面 Γ 为边界的有界区域，若边值问题

$$\begin{cases} \Delta u=f(x,y,z), & (x,y,z)\in\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+ku\Big|_{\Gamma}=g(x,y,z), & (x,y,z)\in\Gamma \end{cases}$$

有解，其中常数 $k>0$，试证明其解是唯一的（提示：用格林第一公式）.

2. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为任何区域，u 的所有二阶偏导数在 Ω 上存在且连续。若对任意闭球面 $\Gamma_a\subset\Omega$，成立 $\iint_{\Gamma_a}\dfrac{\partial u}{\partial n}ds=0$，试证明 u 是 Ω 上的调和函数（提示：用格林第二公式）.

3. u 是 $\mathbb{R}^3$ 内的光滑函数，若 $\Delta u\ge 0$，则称 u 是下调和的。 证明以下两个命题等价：

（1）．u 在 $\mathbb{R}^3$ 内下调和。

（2）．对任意闭球面 Γ_r，$\iint_{\Gamma_r}\dfrac{\partial u}{\partial n}dS\ge 0$ 成立，其中 n 是 Γ_r 的单位外法向量。

练习十七

1．证明： (1) $\dfrac{d}{dx}[xJ_0(x)J_1(x)]=x[J_0^2(x)-J_1^2(x)]$;

(2) $\int x^2 J_1(x)dx = 2xJ_1(x) - x^2 J_0(x) + c.$

(3) $J_2(x) - J_0(x) = 2J_0''(x);$

(4) $\int x^n J_0(x)dx = x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1}J_0(x) - (n-1)^2 \int x^{n-2} J_0(x)dx.$

2. 计算积分：

(1). $\int_0^3 (3-x)J_0(\frac{\mu_2^{(0)}}{3}x)dx$；

(2). $\int_0^R r(R^2-r^2)J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r)dr$.

3．设u_0为常数，求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_t = k(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r), \quad 0<r<1,\ t>0 \\ u(1,t)=0, \quad |u(r,t)|<M\,(当 r\to 0), \\ u(r,0)=u_0. \end{cases}$$

练习十八

1．求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz} = 0, \quad 0\le r<1, \quad 0<z<1, \\ u_z(r,0)=0, \quad u(r,1)=1,, \\ u(1,z)=0, \quad |u(0,z)|<+\infty. \end{cases}$$

2. 设A为常数，求解如下定解问题（用固有函数展开法）：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) + A, \quad 0<r<1,\ t>0, \\ u(1,\ t)=0, \quad |u(r,\ t)|<M\ (当 r\to 0), \\ u(r,\ 0)=0, \quad u_t(r,\ 0)=0. \end{cases}$$

《数学物理方程与特殊函数》测试题（一）

一　（15 分）　求特征值问题的特征值与特征函数$\{y_n(x)\}$

$$\begin{cases} x^2 y''(x) + xy'(x) + \lambda y(x) = 0, & 1 < \mathrm{x} < \mathrm{e}, \\ y(1) = 0, y(e) = 0. \end{cases}$$

并证明特征函数系$\{y_n(x)\}$在$[1, e]$上带权函数$\dfrac{1}{x}$正交。

二　（12 分）求特征值问题的特征值与特征函数。

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0 \end{cases}$$

三　（15 分）求下述有界弦的自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < \mathrm{x} < \mathrm{l}, \mathrm{t} > 0) \\ \mathrm{u_x}(0,\mathrm{t}) = 0, \mathrm{u_x}(\mathrm{l},\mathrm{t}) = 0 & (\mathrm{t} > 0) \\ \mathrm{u}(\mathrm{x},0) = \cos\dfrac{3\pi x}{l}, \mathrm{u_t}(x,0) = 1 & (\mathrm{x} > 0). \end{cases}$$

四　（15 分）求下述有界弦的强迫振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{4\pi x}{l}, & (0 < x < l,\ t > 0) \\ u(0,t) = 3, \quad u(l,t) = 6, & (t > 0) \\ u(x,0) = 3(1 + \dfrac{x}{l}), u_t(x,0) = \sin\dfrac{4\pi x}{l}, & (0 < x < l). \end{cases}$$

五　（15 分）　求均匀薄圆盘的热传导问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 (u_{rr} + \dfrac{1}{r} u_r), & (0 \le r < R,\ t > 0), \\ u|_{r=R} = 0, & (t > 0), \\ u|_{t=0} = 1 - \dfrac{r^2}{R^2}, & (0 \le r < R). \end{cases}$$

六　（10 分）用积分变换法求无限长杆的热传导问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u(x,0) = \cos x, & (t > 0). \end{cases}$$

七 （10 分）利用波动方程$u_{tt}=a^2u_{xx}$ 的通解公式$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$

求无界弦的自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & (-\infty<x<+\infty,\ t>0), \\ u|_{x-at=0}=x^2, \quad u|_{x+at=0}=\sin x+x^2, & (0<x<l). \end{cases}$$

八 （8 分）求解上半空间 z>0 内的狄利克莱问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0, & (z>0), \\ u|_{z=0}=f(x,y), & (-\infty<x,y<+\infty\ ). \end{cases}$$

《数学物理方程与特殊函数》测试题（一）参考答案

一．解 令 $x=e^t, t=\ln x, \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=e^{-t}\mathrm{d}x,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=e^{-t}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-e^{-2t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+e^{-2t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},$$

原问题化为 $\begin{cases} y''(t)+\lambda y(t)=0, \\ y(0)=0, y(1)=0. \end{cases}$

$$\lambda_n=(n\pi)^2, y_n(t)=\sin n\pi t, \quad n=1,2,...$$

$$\lambda_n=(n\pi)^2, y_n(x)=\sin n\pi\ln x, \quad n=1,2,...$$

$$\int_1^e\frac{1}{x}y_n(x)y_m(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 y_n(t)y_m(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{1}{2}, & m=n \\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

二．解 关于λ作三种情况讨论

(i)$\lambda<0,\quad X(x)=Ae^{-\sqrt{-\lambda}x}+Be^{\sqrt{-\lambda}x}$, 由边条件得$A=B=0,\ \ X(x)=0.$

(ii)$\lambda=0,\quad X(x)=Ax+B,\quad X(x)=B=const.$

(iii)$\lambda>0,\quad X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$

$X'(x)=-\sqrt{\lambda}A\sin\sqrt{\lambda}x+B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$

$$X'(0)=\sqrt{\lambda}B=0\Rightarrow B=0$$
$$X'(l)=-\sqrt{\lambda}A\sin\sqrt{\lambda}l=0\Rightarrow\sqrt{\lambda}l=n\pi,n=1,2,...$$
$$\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2\quad X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x,n=1,2,...$$

总之 $\lambda_{\mathrm{n}}=(\frac{\mathrm{n}\pi}{\mathrm{l}})^2\quad X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x,n=0,1,2,...$

三． **解** 设$u(x,t)=X(x)T(t)$代入方程得到两个常微分方程

$$X''(x)+\lambda X(x)=0$$
$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$$

解特征值问题$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\X'(0)=0,X'(l)=0\end{cases}$

$\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2\quad X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x,n=0,1,2,...$ 。 解关于 t 的方程

$$n=0,\lambda_0=0,\quad T_0(t)=\frac{1}{2}b_0t+\frac{1}{2}a_0$$
$$n>0,\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2,\quad T_n(t)=a_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi a}{l}t$$

由叠加原理可得

$$u(x,t)=\frac{1}{2}b_0t+\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi a}{l}t)\cos\frac{n\pi x}{l}$$

代入初始条件得解：$u(x,t)=t+\cos\frac{3\pi at}{l}\cos\frac{3\pi x}{l}$ 。

四．**解** 设$u(x,t)=v(x,t)+w(x)$， $w(x)=\frac{l^2}{32\pi^2a^2}\sin\frac{4\pi x}{l}+\frac{3}{l}x+3$,则 v 满足

$$\begin{cases}v_{tt}=a^2v_{xx}, & (0<x<l,\ t>0)\\ v(0,t)=0,\quad v(l,t)=0, & (t>0)\\ v(x,0)=\frac{l^2}{32\pi^2}\sin\frac{4\pi x}{l},\quad v_t(x,0)=\sin\frac{4\pi x}{l}, & (0<x<l).\end{cases}$$

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l-\frac{l^2}{32\pi^2a^2}\sin\frac{4\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\begin{cases}-\dfrac{l^2}{32\pi^2a^2} & n=4\\ 0 & n\neq 4\end{cases}$$

$$b_n=\frac{l}{n\pi a}\frac{2}{l}\int_0^l\sin\frac{4\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{l}{4\pi a} & n=4\\ 0 & n\neq 4\end{cases}$$

$$u(x,t)=\frac{l^2}{32\pi^2}\sin\frac{4\pi x}{l}+\frac{3}{l}x+3+(-\frac{l^2}{32\pi^2}\cos\frac{4\pi at}{l}+\frac{l}{4\pi a}\sin\frac{4\pi at}{l})\sin\frac{4\pi x}{l}$$

五．解 $u(r,t)=F(r)T(t)$，代入方程得要求 $\begin{cases}r^2F''(r)+rF'(r)+\lambda r^2F(r)=0,\\ T'(t)+\lambda a^2T(t)=0.\end{cases}$

由边界条件和有界性条件 $F(R)=0,|F(0)|<+\infty$ 解特征值问题

$\begin{cases}r^2F''(r)+rF'(r)+\lambda r^2F(r)=0.\\ F(R)=0,|F(0)|<+\infty,\end{cases}$ $\lambda_m=(\frac{\mu_m^{(0)}}{R})^2$， $F_m(r)=J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r)$，

$T_m(t)=a_me^{-(\frac{\mu_m^{(0)}a}{R})^2t}$ $.u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}a_me^{-(\frac{\mu_m^{(0)}a}{R})^2t}J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r)$

$$a_m=\frac{\int_0^R r(1-\frac{r^2}{R^2})J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r)\mathrm{d}r}{\frac{R^2}{2}J_1^2(\mu_m^{(0)})}=\frac{4J_2(\mu_m^{(0)})}{\mu_m^{(0)2}J_1^2(\mu_m^{(0)})}$$

$$u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4J_2(\mu_m^{(0)})}{\mu_m^{(0)2}J_1^2(\mu_m^{(0)})}e^{-(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}a)^2t}J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r)$$

六．解　关于 x 作傅氏变换，原问题化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U(\lambda,t)}{\mathrm{d}t}=-a^2\lambda^2U(\lambda,\mathrm{t}) & (-\infty<\lambda<+\infty,t>0)\\ U(\lambda,0)=\pi[\delta(\lambda+1)+\delta(\lambda\text{-}1)] & (t>0)\end{cases}$$

$$U(\lambda,t)=\pi[\delta(\lambda+1)+\delta(\lambda\text{-}1)]\ \mathrm{e}^{-a^2\lambda^2t}$$

由逆变换的定义可得

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi[\delta(\lambda+1)+\delta(\lambda-1)]\,\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}e^{j\lambda x}\mathrm{d}\lambda=\mathrm{e}^{-a^2 t}\cos x.$$

七． **解** 将边界条件代入可得

$$x=at,\quad f(0)+g(2x)=x^2, g(x)=\frac{x^2}{4}-f(0)$$

$$x=-at,\quad f(2x)+g(0)=\sin x+ax, f(x)=\sin\frac{x}{2}+\frac{ax}{2}-g(0),$$

$$f(0)+g(0)=0$$

$$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$$

$$=\sin\frac{\mathrm{x-at}}{2}+\frac{(x-at)^2}{4}+\frac{(x+at)^2}{4}.$$

八．**解** 上半空间的格林函数为

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{1}{r_{MM_1}}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}G(M,M_0)|_{z=0}=-\frac{\partial}{\partial z}G(M,M_0)|_{z=0}=-\frac{1}{2\pi}\frac{z_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+{z_0}^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\frac{z_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

《数学物理方程与特殊函数》测试题（二）

一、(本题满分 12 分)求周期特征值问题的特征值和特征函数(请写出

解题过程).

$$X''(\theta)+\lambda X(\theta)=0,\ X(\theta)=X(\theta+2\pi).$$

二、(本题满分 15 分)设 a,l 是正常数,用分离变量法求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l,t>0, & (1)\\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\ge 0, & (2)\\ u(x,0)=0, & 0\le x\le l & (3)\\ u_t(x,0)=\sin(\dfrac{3\pi x}{l})-2\sin(\dfrac{6\pi x}{l}), & 0\le x\le l, & (4)\end{cases}$$

三、(本题满分 15 分) 设 B 是正常数，用分离变量法求求解如下定解问题

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}+B,\quad 0<x<\pi,\ t>0 & (1)\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ t\ge 0, & (2)\\ u(x,0)=0,\quad 0\le x\le \pi, & (3)\end{cases}$$

四、(10 分)用行波法求解下列问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+xt^2, & -\infty<x<+\infty,t>0,\\ u(x,0)=\sin x,\quad u_t(x,0)=4xe^{-x^2}, & -\infty<x<+\infty.\end{cases}$$

五、(13 分)用积分变换法求解下列问题（提示:y 的 Laplace 变换 $L(y)=\dfrac{1}{s^2}$，

$L(1)=\dfrac{1}{s}$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1, & x>0,y>0, & (1)\\ u\big|_{x=0}=y+1, & y\ge 0, & (2)\\ u\big|_{y=0}=1, & x\ge 0. & (3)\end{cases}$$

六、(15 分） 求均匀薄圆盘的热传导问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{rr} + u_r / r) & (0 \le r < R,\ t > 0), \\ u|_{r=R} = 0 & (t > 0), \\ u|_{t=0} = 1 - r^2 / R^2 & (0 \le r < R). \end{cases}$$

七、（本题满分 10 分）写出半平面（$-\infty < x < +\infty,\ y > 0$）上的格林函数，并利用此格林函数写出下列拉普拉斯方程第一边值解的形式

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\infty < x < +\infty,\ y > 0, \\ u(x,0) = f(x), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x,y) \to 0 & \text{当 } x^2 + y^2 \to +\infty \text{ 时}. \end{cases}$$

八、(10 分)设 u 在区域 $\Omega \subset R^3$ 内调和,以点 a 为球心 R 为半径的球 $B(a,R) \subset \Omega$.

试证明对任何 $0 < \rho < R$，如下球平均值公式成立：

$$u(a) = \frac{3}{4\pi\rho^3}\int_{B_\rho(a)} u(x,y,z)dxdydz.$$

《数学物理方程与特殊函数》测试题（二）参考答案

一. 解: 对应方程的特征方程为 $r^2 + \lambda = 0$,

(1) 当 $\lambda < 0$ 时, 方程通解为 $X(\theta) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\theta} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$，代入定解条件得 $C_1 = C_2 = 0$, 没有非零解. (3 分)

(2) 当 $\lambda = 0$ 时, 方程通解为 $X(\theta) = C_1 + C_2\theta$,代入定解条件得 $X(\theta) = C_1$. 所以特征值 $\lambda = 0$ 时 ,特征函数为 $X(\theta) = 1$.（3 分）

(3) 当 $\lambda > 0$ 时,方程通解为 $X(\theta) = C_1\sin(\sqrt{\lambda}\theta) + C_2\cos(\sqrt{\lambda}\theta)$,代入定解条件后得特征值 $\lambda_n = n^2$，特征函数为 $X_n(\theta) = \cos(n\theta), \sin(n\theta)$，$n = 1,2,\cdots$.（3 分）

所以特征方程的特征根为 $\lambda_n = n^2, n = 0, 1, 2, \cdots$. 特征函数为

$$\{1, \cos(n\theta), \sin(n\theta); \qquad n = 1, 2, \cdots\}. \qquad (3\text{分}).$$

二. **解:** 由分离变量法，令 $u(x, y) = X(x)T(t)$，代入方程（1）得特征值问题:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ X(0) = X(l) = 0. \qquad (5)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \qquad (6) \qquad (5\text{分})$$

则(5)特征值为: $\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$，对应特征函数为: $X_n(x) = \sin(\frac{n}{l}\pi x)$， $n = 1,2,...$.

将 λ_n 代入方程（6），得其通解为：$T_n(t) = C_n \cos(\frac{n\pi a t}{l}) + D_n \sin(\frac{n\pi a t}{l})$，

$n = 1,2,...$. 于是，得到问题(1)-(4)的一系列特征解：

$$u_n(x, y) = X_n(x)T_n(t) = [C_n \cos(\frac{n\pi a t}{l}) + D_n \sin(\frac{n\pi a t}{l})]\ \sin(\frac{n}{l}\pi x),\ n = 1,2,...$$

（5 分）

由叠加原理，原问题的解可表示为：

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \ [C_n \sin(\frac{\mathrm{n}\pi a\mathrm{t}}{1}) + D_n \sin(\frac{\mathrm{n}\pi a\mathrm{t}}{1})]\ \sin(\frac{n}{l}\pi x).$$

由初始条件(3)和(4)得：$C_n = 0, D_3 = -D_6 = \dfrac{l}{3\pi a}$，其余 $D_n = 0$. 故原问题的解为：

$$u(x, y) = \frac{l}{3\pi a}[\cos(\frac{3\pi at}{l})\sin(\frac{3\pi x}{l}) - \cos(\frac{6\pi at}{l})\sin(\frac{6\pi x}{l})]. \qquad (5\text{分})$$

三. **解:** 由相应的特征值问题可知：$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin(nx) \qquad (4)$ （5 分）

由傅立叶变换知: $B = \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{2B}{n\pi}(1-(-1)^n)]\sin(nx), \qquad (5)$

将(4)(5)代入方程(1)有: $u_n'(t) + a^2 n^2 u_n(t) - \dfrac{2B}{n\pi}[1-(-1)^n] = 0, \qquad (6)$

利用初始条件(3)得到: $u_n(0) = 0. \qquad (7)$ （5 分）

解(6)(7)有: $$u_n(t)=\frac{2B}{a^2n^3\pi}[1-(-1)^n][1-e^{-a^2n^2t}],$$

所以原问题解为: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{2B}{a^2n^3\pi}(1-(-1)^n)][1-e^{-a^2n^2t}]\sin(nx)$ （5 分）

四. 解: $u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin(s+t)+\sin(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}4\alpha e^{-\alpha^2}d\alpha+\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\xi\tau^2 d\xi$

$=\sin x\cos t+e^{-(x-t)^2}-e^{-(x+t)^2}+\frac{1}{12}xt^4$（5 分）(若用积分变换, 对比给分).

五. **解 1:** 记u关于 y 的拉氏变换为$\widetilde{u}$, 对方程两边作拉氏变换, 有:

$\frac{\partial}{\partial x}\{s\widetilde{u}-1\}=\frac{1}{s},\widetilde{u}(0,s)=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s},$ （5 分）

解此常微分方程,得: $\widetilde{u}=\frac{x}{s^2}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s},$ （3 分）

用逆拉氏变换,得到原方程的解为: $u(x,y)=xy+y+1.$ （5 分）

解 2 记u关于 x 的拉氏变换为$\widetilde{u}$, 对方程两边作拉氏变换, 有:

$\frac{\partial}{\partial y}\{t\widetilde{u}-y-1\}=\frac{1}{t},\widetilde{u}(t,0)=\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t},$ （5 分）

解此常微分方程,得: $\widetilde{u}=\frac{y}{t^2}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}$ （3 分）

用逆拉氏变换,得到原方程的解为: $u(x,y)=xy+y+1.$ （5 分）

六. 解: $u(r,t)=F(r)T(t)$，代入方程得

$r^2F''(r)+rF'(r)+\lambda r^2F(r)=0,\quad T'(t)+\lambda a^2T(t)=0$ （5 分）

由边界条件和有界性条件 $F(R)=0,|F(0)|<+\infty$,解特征值问题

$$\begin{cases}r^2F''(r)+rF'(r)+\lambda r^2F(r)=0\\ F(R)=0,|F(0)|<+\infty\end{cases}$$

$\lambda_m=(\frac{\mu_m^{(0)}}{R})^2,F_m(r)=J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r),T_m(t)=a_m e^{-(\frac{\mu_m^{(0)}a}{R})^2t}$ （5 分）

由叠加原理 $u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-(\frac{\mu_m^{(0)}a}{R})^2 t} J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r)$

$$a_m=\frac{\int_0^R r(1-\frac{r^2}{R^2})J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r)\mathrm{d}r}{\frac{R^2}{2}J_1^2(\mu_m^{(0)})}=\frac{4J_2(\mu_m^{(0)})}{\mu_m^{(0)2}J_1^2(\mu_m^{(0)})}$$ （5 分）

$$u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4J_2(\mu_m^{(0)})}{\mu_m^{(0)2}J_1^2(\mu_m^{(0)})}e^{-(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}a)^2 t}J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r)$$

七． 解：设上半平面内任意一点 $M_0(x_0,y_0)$ 关于 $y=0$ 的对称点 $M_1(x_1,y_1)=M_1(x_0,-y_0)$，因此 $q=\left.\frac{r_{MM_1}}{r_{MM_0}}\right|_{y=0}=1$，从而，所求格林函数为:

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}[ln(\frac{1}{r_{MM_0}})-ln\frac{1}{r_{MM_1}}]$$
$$=\frac{1}{2\pi}[ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}-ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}}]$$ （5 分）

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{y=0}=-\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0}=-\frac{1}{\pi}\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0{}^2},$$

于是，所求问题的解为

$$u(x_0,y_0)=-\int_{\Gamma}f(M)\frac{\partial G}{\partial n}ds=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y_0 f(x)}{(x-x_0)^2+y_0{}^2}dx.$$ （5 分）

八．解：由球面平均值公式, 有:

$$\int_{B_\rho(a)}u(x,y,z)dxdydz.=\int_0^{\rho}(\int_{\Gamma_r(a)}u(x,y,z)dS)dr=\int_0^{\rho}4\pi r^2u(a)dr$$
$$=\frac{4}{3}\pi\rho^3u(a)$$ （5 分）

所以 $u(a)=\frac{3}{4\pi\rho^3}\int_{B_\rho(a)}u(x,y,z)dxdydz.$ （5 分）

《数学物理方程与特殊函数》测试题（三）

一、(10 分) 设 a, l 是正常数，用分离变量法求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad (0<x<l, \quad t>0) \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 3\sin(\dfrac{3\pi x}{2l}) + 5\sin(\dfrac{5\pi x}{2l}), \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

二、(15 分)设 a, l 是正常数, 求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + t\cos\dfrac{\pi x}{l}, \qquad (0<x<l, \quad t>0) \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

三、(15 分) 设 a, l 是正常数，求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + 16\sin\dfrac{4\pi}{l}x, \quad (0<x<l,\ t>0) \\ u(0,t) = 1, \quad u(l,t) = 2 \\ u(x,0) = 1 + \dfrac{x}{l}. \end{cases}$$

四、(10 分)用行波法求解下列问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + t, \qquad (-\infty < x < +\infty,\ t>0) \\ u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = \mathrm{x}. \end{cases}$$

五、(10 分)用积分变换法求解下列问题（提示: Laplace 变换 $L(y^2) = \dfrac{2}{s^3}$， $L(1) = \dfrac{1}{s}$)：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 1, \quad (x>0,\ t>0) \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(x,t) \to 0 (x \to \infty). \end{cases}$$

六、(15 分)　求如下定解问题：

$$
\begin{cases}
u_{tt} = u_{rr} + \dfrac{1}{r} u_r & (0 \le r < 1,\ t > 0) \\
u(1,t) = 0, \quad |u(0,t)| < \infty, & \\
u(r,0) = 0, \quad u_t(r,0) = 1 - r^2. &
\end{cases}
$$

七、（15 分）用试探法和格林函数法求解如下定解问题：

$$
\begin{cases}
u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 6, & (-\infty < x < +\infty,\ -\infty < z < +\infty,\ y < 0), \\
u(x,0,z) = f(x,\mathrm{z}). &
\end{cases}
$$

八、（10 分）叙述调和函数的极值原理，并用其证明如下方程解的唯一性:

$$
\begin{cases}
\Delta u = F(x,y,z), & (x,,y,z) \in \Omega \\
u\big|_{\Gamma} = f(x,y,z). & (x,y,z) \in \Gamma
\end{cases}
$$

《数学物理方程与特殊函数》测试题（三）参考答案

一.解： 设 $u(x,y) = X(x)T(t)$，带入方程分离变量，得到下面两个常微分方程

$$
\begin{cases}
X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\
T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0,
\end{cases}
$$

（2 分）

由边界条件得 $X(0) = X'(l) = 0.$ 考虑固有值问题：

$$
\begin{cases}
X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\
X(0) = X'(l) = 0.
\end{cases}
$$

其固有值为：$\lambda_n = [\dfrac{(2n-1)\pi}{2l}]^2, n = 1,2,\dots$，

对应的固有函数为：$X_n(x) = \sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2l} x.$ （4 分）

将 λ_n 代入另外一个常微分方程，得其通解为：

$$
T_{\mathrm{n}}(\mathrm{t}) = \mathrm{C}_{\mathrm{n}} \cos\frac{(2n-1)\pi a}{2l} t + \mathrm{D}_{\mathrm{n}} \sin\frac{(2n-1)\pi a}{2l} t, \quad n = 1,2,\dots.
$$

（6 分）

由叠加原理，原问题的解可表示为：

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}[\mathrm{C}_{\mathrm{n}}\cos\frac{(2n-1)\pi a}{2l}t+\mathrm{D}_{\mathrm{n}}\sin\frac{(2n-1)\pi a}{2l}t]\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x.$$

由初始条件得

$$C_n=\begin{cases}3, & n=2,\\ 5, & n=3,\\ 0 & n\neq 2,3,\end{cases}\quad D_n=0.$$ （9 分）

故原问题的解为：

$$u(x,y)=3\cos(\frac{3\pi a}{2l}t)\sin(\frac{3\pi}{2l}x)+5\cos(\frac{5\pi a}{2l}t)\sin(\frac{5\pi}{2l}x).$$ （10 分）

二. 解：方程所对应的固有函数系为 $\left\{\cos\frac{n\pi}{l}x, n=0,1,...\right\}$， （2 分）

设

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

$$t\cos\frac{\pi}{l}x=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x,$$ （6 分）

由傅里叶级数可知

$$f_n(t)=\begin{cases}t, & n=1,\\ 0, & n\neq 1.\end{cases}$$ （8 分）

将级数形式代入方程得：

$$u_1'(t)+(\frac{\pi a}{l})^2u_1(t)=t, u_n'(t)+(\frac{n\pi a}{l})^2u_n(t)=0,\qquad n\neq 1$$ （10 分）

又由初始条件有 $u_n(0)=0$, 解常微分方程得

$$u_n(t)=0,\qquad n\neq 1,$$

$$u_1(t)=\int_0^t e^{-(\frac{\pi a}{l})^2(t-\tau)}\tau d\tau=(\frac{l}{\pi a})^2t-(\frac{l}{\pi a})^4[1-e^{-(\frac{\pi a}{l})^2t}].$$

（13 分）

故方程的解为：

$$u(x,t=\{(\frac{l}{\pi a})^2 t-(\frac{l}{\pi a})^4[1-e^{-(\frac{\pi a}{l})^2 t}]\}\cos\frac{\pi}{l}x. \qquad （15 分）$$

三． **解**：设问题的解为

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x), \qquad （2 分）$$

带入方程得

$$v_{tt}=a^2(v_{xx}+w_{xx})+16\sin\frac{4\pi}{l}x\,,$$

为使关于 v 的方程及边界条件为齐次的， $w(x)$ 需满足

$$\begin{cases} a^2 w_{xx}+16\sin\frac{4\pi}{l}x=0, \\ w(0)=1, w(l)=2. \end{cases} \qquad （6 分）$$

上面常微分方程的解为

$$w(x)=\frac{l^2}{\pi^2 a^2}\sin\frac{4\pi}{l}x+(1+\frac{x}{l}). \qquad （8 分）$$

因此，$v(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} v_t=a^2 v_{xx}, \\ v(0,t)=v(l,t)=0, \\ v(x,0)=-\frac{l^2}{\pi^2 a^2}\sin\frac{4\pi}{l}x. \end{cases} \qquad （10 分）$$

满足方程及边界条件的解为

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad （12 分）$$

又由初始条件 $c_n=\begin{cases} 0, & n\neq 4, \\ -\frac{l^2}{\pi^2 a^2}, & n=4, \end{cases}$

所以 $$v(x,t)=-\frac{l^2}{\pi^2 a^2}e^{-(\frac{4\pi a}{l})^2 t}\sin\frac{4\pi}{l}x. \qquad （14 分）$$

原问题的解为$u(x,t)=v(x,t)+w(x)$

$$=-\frac{l^2}{\pi^2a^2}e^{-(\frac{4\pi a}{l})^2t}\sin\frac{4\pi.}{l}x+\frac{l^2}{\pi^2a^2}\sin\frac{4\pi}{l}x+(1+\frac{x}{l}).\text{（15 分）}$$

四．解：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin(x+at)+\sin(x-at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}ydy+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\tau dyd\tau$$

（5 分）

$$=\frac{1}{2}[\sin(x+at)+\sin(x-at)+tx+\int_0^t\tau(t-\tau)d\tau \qquad \text{（7 分）}$$

$$=\frac{1}{2}[\sin(x+at)+\sin(x-at)+tx+\frac{1}{6}t^3. \qquad \text{（10 分）}$$

或（ $=\sin x\cos at++tx+\frac{1}{6}t^3$ ）

五. 解：记$U(x,s)=L[u(x,t)]$，对方程关于t作拉普拉斯变换，

$$U_{xx}-s^2U=\frac{1}{s} \qquad \text{（4 分）}$$

对边界条件作拉普拉斯变换得

$$U(0,s)=0,\quad U(x,s)\to 0,(x\to\infty). \qquad \text{（6 分）}$$

解方程得 $U(x,s)=\frac{1}{s^3}(e^{-\frac{x}{a}s}-1).$ （8 分）

取拉普拉斯逆变换，并利用延迟性质得

$$u(x,t)=L^{-1}[U(x,s)]=\begin{cases}-\frac{1}{2}t^2, & 0\le t<x,\\ \frac{1}{2}x^2-tx, & t\ge x.\end{cases} \qquad \text{（10 分）}$$

六.解 设$u(r,t)=F(r)T(t)$，代入方程得

$$\begin{aligned}&r^2F''(r)+rF'(r)+\lambda r^2F(r)=0\\&T''(t)+\lambda T(t)=0\end{aligned} \qquad \text{（5 分）}$$

由边界条件和有界性条件 $F(1)=0, |F(0)|<+\infty.$

解特征值问题

$$\begin{cases} r^2F''(r)+rF'(r)+\lambda r^2F(r)=0 \\ F(1)=0, |F(0)|<+\infty \end{cases},$$

其固有值和固有函数为

$$\lambda_m=(\mu_m^{(0)})^2, F_m(r)=J_0(\mu_m^{(0)}r),$$ （9 分）

将 λ_n 代入另外一个常微分方程，得其通解为：

$$T_m(t)=c_m\cos(\mu_m^{(0)}t)+d_m\sin(\mu_m^{(0)}t)$$ （10 分）

由叠加原理 $u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}[c_m\cos(\mu_m^{(0)}t)+d_m\sin(\mu_m^{(0)}t)]J_0(\mu_m^{(0)}r)$,

由初始条件得

$$c_m=0$$

$$d_m=\frac{\int_0^1 r(1-r^2)J_0(\mu_m^{(0)}r)\mathrm{d}r}{\frac{1}{2}J_1^2(\mu_m^{(0)})\mu_m^{(0)}}=\frac{4J_2(\mu_m^{(0)})}{(\mu_m^{(0)})^3J_1^2(\mu_m^{(0)})}$$ （13 分）

故方程的解为

$$u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4J_2(\mu_m^{(0)})}{(\mu_m^{(0)})^3J_1^2(\mu_m^{(0)})}\sin(\mu_m^{(0)}t)J_0(\mu_m^{(0)}r).$$ （15 分）

七．解：容易得到方程的一个特解为$u_*(x,y,z)=3y^2$. （形式有很多） （3 分）

令 $v=u-u_*$， 则 v 满足 $\begin{cases}\Delta v=0, \\ v|_{y=0}=f(x,z).\end{cases}$ （5 分）

设右半平面内任意一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 关于 $y=0$ 的对称点 $M_1(x_1,y_1)=M_1(x_0,-y_0,z_0)$，因此所求格林函数为:

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{1}{r_{MM_1}}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right)$$

（9 分）

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0}=\frac{1}{2\pi}\frac{y_0}{[(x-x_0)^2+{y_0}^2+(z-z_0)^2]^{3/2}},$$ （13 分）

于是，

$$v(x_0,y_0,\ z_0)=-\int_\Gamma f(M)\frac{\partial G}{\partial n}ds=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y_0 f(x,z)}{[(x-x_0)^2+{y_0}^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}dxdz.$$

（14 分）

原问题的解为

$$u(x_0,y_0,\ z_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y_0 f(x,z)}{[(x-x_0)^2+{y_0}^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}dxdz+3y_0^2.$$

（15 分）

八．**解**：极值原理：若函数在Ω内调和，在$\Omega+\Gamma$上连续，且不为常数，则它的最大值和最小值只能在边界上取得。 （5 分）

假设u_1，u_2 为方程的两个解，则$v=u_1-u_2$满足

$$\begin{cases}\Delta v=0,\\ v|_\Gamma=0.\end{cases}$$

由极值原理 $v=0$. 所以方程的解事唯一的。 （10 分）

《数学物理方程与特殊函数》测试题（四）

一 、　（15 分）用分离变量法求解如下定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 2, t > 0, \\ u(0,t) = u_x(2,t) = 0,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = x^2 - 4x,\ u_t(x,0) = 3\sin\dfrac{3\pi x}{4},\ 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

二、（15 分）设 a 为正常数，求以下定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + t\sin\dfrac{\pi x}{l},\ 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \sin\dfrac{3\pi x}{l},\ 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

三、　（15 分）求以下定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + 1, 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = 2, u_x(l,t) = 3, t > 0, \\ u(x,0) = 8\sin\dfrac{3\pi x}{2l} + 2 - \dfrac{x^2}{2a^2} + (3 + \dfrac{l}{a^2})x, 0 < x < l. \end{cases}$$

四、（15 分）解以下初边值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r),\ 0 \leq r < R,\ t > 0, \\ u(R,t) = 0,\ |u(0,t)| < +\infty,\ t > 0, \\ u(r,0) = R^2 - r^2,\ 0 \leq r < R. \end{cases}$$

五、（10 分）用分离变量法求以下定解问题.

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, 0<r<a, 0\le\theta\le\pi, \\ u(r,0)=u(r,\pi)=0, 0<r<a, \\ u(a,\theta)=\sin 2\theta+3\sin 5\theta. \end{cases}$$

六、（10 分）求解以下初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+t\sin x, -\infty<x<+\infty, t>0, \\ u(x,0)=\sin x, -\infty<x<+\infty, \\ u_t(x,0)=\frac{x}{1+x^2}, -\infty<x<+\infty. \end{cases}$$

七、（10 分）写出半空间（$-\infty<x,y<+\infty, z<0$) 上的 Green 函数，并用 Green 函数法求解以下定解问题.

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\ -\infty<x,y<+\infty,\ z<0, \\ u(x,y,0)=f(x,y),\ -\infty<x,y<+\infty. \end{cases}$$

八、（10 分）在以下两题中任选一题，若做两题，按第一题评分.

1、设$u(x,y,z)$是区域Ω内的调和函数，Γ为区域Ω的边界，$u(x,y,z)$在$\Omega+\Gamma$上有一阶连续偏导数，利用 Green 第二公式证明

$$\iint_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}dS = 0.$$

2、用积分变换法解下列定解问题

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}-tu=0,\ -\infty<x<+\infty,\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ -\infty<x<+\infty. \end{cases}$$

（已知 $F^{-1}(e^{-\lambda^2 t})=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ ）.