

HOMEWORK

数理方程与特殊函数

王翎羽 U202213806 提高 2201 班

2024 年 3 月 24 日

练习六

3. 求下列定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -2x, & x^2 + y^2 < 1, \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1. \end{cases}$$

解: 将问题转化到极坐标系中解决, 得到

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = -2r \cos \theta, & r < 1 \\ u|_{r=1} = 1. \end{cases}$$

将问题转化为齐次方程和齐次边界的问题, 设 $u(r, \theta) = v(r, \theta) + w(r, \theta)$ 得到:

$$\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = -2r \cos \theta, & r < 1 \\ v|_{r=1} = 0. \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + \frac{1}{r^2}w_{\theta\theta} = 0, & r < 1 \\ w|_{r=1} = 1. \end{cases}$$

固有函数法求解 v , 分离变量法求解 w .

齐次方程问题的固有函数系为 $\{1, \cos \theta, \sin \theta, \dots, \cos n\theta\}$, 则:

$v(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta)$, 代入方程中得到:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_n'' + \frac{1}{r}a_n' - \frac{n^2}{r^2}a_n \right) \cos n\theta + \left(b_n'' + \frac{1}{r}b_n' - \frac{n^2}{r^2}b_n \right) \sin n\theta \right] = -2r \cos \theta$$

得到下列式子:

$$\begin{cases} a_1'' + \frac{1}{r}a_1' - \frac{1}{r^2}a_1 = -2r, & n = 1 \\ a_n'' + \frac{1}{r}a_n' - \frac{n^2}{r^2}a_n = 0, & n \neq 1 \\ b_n'' + \frac{1}{r}b_n' - \frac{n^2}{r^2}b_n = 0. \end{cases}$$

又 $v|_{r=1} = 0$ 可知, $a_n(1) = b_n(1) = 0$, 又由有界性可知, $|a_n(0)| < +\infty, |b_n(0)| < +\infty$, 解欧拉方程得到 $a_n(r) = b_n(r) \equiv 0$.

当 $n = 1$ 时, 需要解一个非齐次的欧拉方程, 设特解 $v = cr^3$, 代入方程中得到 $c = -\frac{1}{4}$, 又由原点的有界性条件可知, 齐次方程通解中 r^{-n} 的系数为 0. 则通解为:

$$a_1(r) = Ar - \frac{1}{4}r^3. \text{ 代入到方程中, 解得 } A = \frac{1}{4}. \text{ 即 } v(r, \theta) = \frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2)x.$$

对于齐次方程问题, 由于边界条件 $w|_{r=1} = 1$, 试探法设 $w(r, \theta) = 1$ 是方程的解, 所以 $w(r, \theta) = 1$.

综上, $u(x, y) = \frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2)x + 1$.

练习七

1. 求定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 1, \\ u(x, 0) = \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{x}{l}, & u_t(x, 0) = x(l-x). \end{cases}$$

解: 需要将问题转化为齐次边界条件. 设 $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, 其中 $w = \frac{x}{l}$ 是辅助函数. 那么问题就变成了

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \\ v(0, t) = 0, v(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin \frac{3\pi x}{l}, & u_t(x, 0) = x(l-x). \end{cases}$$

方程的固有值和固有函数分别为: $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, X(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$.

$T(t)$ 通解为: $T(t) = B_n \cos \frac{n\pi \alpha t}{l} + C_n \sin \frac{n\pi \alpha t}{l}$, 由叠加原理可知:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left(a_n \cos \frac{n\pi \alpha t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi \alpha t}{l} \right), \text{ 其中 } a_n = A_n B_n, b_n = A_n C_n.$$

$$v_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left(-a_n \frac{n\pi \alpha}{l} \sin \frac{n\pi \alpha t}{l} + b_n \frac{n\pi \alpha}{l} \cos \frac{n\pi \alpha t}{l} \right).$$

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \sin \frac{3\pi x}{l} \text{ 和 } v_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n\pi \alpha}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = x(l-x). \text{ 解得}$$

$$b_n = \begin{cases} 1, & n = 3, \\ 0, & n \neq 3. \end{cases}$$

$$\text{和 } a_n = \frac{4l^3[1 - (-1)^n]}{(n\pi)^4 \alpha}.$$

$$\text{所以 } u(x, t) = \frac{x}{l} + \cos \frac{3\pi \alpha t}{l} \sin \frac{3\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4l^3[1 - (-1)^n]}{(n\pi)^4 \alpha} \sin \frac{n\pi \alpha}{l} t \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

2. 求定解问题的解:

$$\begin{cases} u_t = 8u_{xx} + \cos t + e^t \sin \frac{x}{2}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0, t) = \sin t, u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

解: 同上题, 需要将问题转化为齐次边界条件. 设 $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, 其中 $w = \sin t$ 是辅助函数. 那么问题就变成了

$$\begin{cases} u_t = 8u_{xx} + e^t \sin \frac{x}{2}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0, t) = 0, u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

方程的固有值和固有函数分别为: $\lambda = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2, n = 0, 1, 2, \dots, X(x) = \sin \frac{2n+1}{2}x$. 可知:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin \frac{2n+1}{2}x, v_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v'_n(t) \sin \frac{2n+1}{2}x, v_{xx}(x, t) = v_n(t) \frac{-(2n+1)^2}{4} \sin \frac{2n+1}{2}x.$$

$$\text{代入到方程中得到: } \sum_{n=1}^{\infty} \left[v'_n(t) + \frac{8(2n+1)^2}{4} v_n(t) \right] \sin \frac{2n+1}{2}x = e^t \sin \frac{x}{2}, v_n(0) = 0.$$

所以有: $v_1'(t) + 2v_1(t) = e^t$, 由 Laplace 变换可得到: $sV_1(s) - v(0) + 2V_1(0) = \frac{1}{s-1}$.

易得 $v_1(t) = \frac{1}{3}(e^t - e^{-2t})$.

当 $n \neq 1$ 时, 由试探法可得 $v_n(t) \equiv 0$. 所以 $v(x, t) = \frac{1}{3}(e^t - e^{-2t}) \sin \frac{x}{2}$.

所以 $u(x, t) = \frac{1}{3}(e^t - e^{-2t}) \sin \frac{x}{2} + \sin t$

3. 求解以下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u_x, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = e^{-x} \sin \pi x. \end{cases}$$

解: 设 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 则有

$$\begin{cases} X'' + 2X' - \lambda X = 0, \\ T' - \lambda T = 0. \end{cases}$$

求解 ODE 易得 $X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-x} \sin n\pi x$. $T = C_n e^{(1-(n\pi)^2)t}$.

所以 $u(x, t) = C_n e^{(1-(n\pi)^2)t} \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-x} \sin n\pi x$. 解得

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

所以 $u(x, t) = e^{(1-\pi^2)t} e^{-x} \sin \pi x$.

练习八

1. 求定解问题的解:

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + 4 + 2e^{-x}, & 0 < x < 3, t > 0, \\ u_x(0, t) = 1, u(3, t) = -18 - e^{-3}, & t > 0, \\ u(x, 0) = -(2x^2 + e^{-x}), & 0 < x < 3. \end{cases}$$

解: 需要将问题转化为齐次方程和齐次初值问题, 设 $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$.

则需要满足

$$\begin{cases} w''(x) = -2 - e^{-x}, \\ w'(0) = 1, \\ w(3) = -18 - e^{-3}. \end{cases}$$

解得 $w(x) = -x^2 - e^{-x} - 9$. 问题转化为:

$$\begin{cases} v_t = 2v_{xx}, & 0 < x < 3, t > 0, \\ v_x(0, t) = 0, v(3, t) = 0, & t > 0, \\ v(x, 0) = 9 - x^2, & 0 < x < 3. \end{cases}$$

由分离变量法, 需要解下面两个 ODE:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ T' + 2\lambda T = 0. \end{cases}$$

显然第一个 ODE 的特征值和固有函数分别为: $\lambda = \left(\frac{(2n-1)\pi}{6}\right)^2, n = 1, 2, \dots$, 和 $X = A_n \cos \frac{(2n-1)\pi}{6}x$. 以及 $T = B_n e^{-2\lambda t}$.

那么 $v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{(2n-1)\pi}{6}x \cdot e^{-2\lambda t}$, 其中 $a_n = A_n B_n$. 又由初值条件可得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{(2n-1)\pi}{6}x = 9 - x^2, \text{ 那么 } a_n = \frac{2}{3} \int_0^3 (9 - x^2) \cos \frac{(2n-1)\pi}{6}x dx = \frac{288}{(2n-1)^3 \pi^3} \cdot (-1)^{n+1}.$$

$$\text{所以 } u(x, t) = -x^2 - e^{-x} - 9 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{288}{(2n-1)^3 \pi^3} \cdot (-1)^{n+1} \left[e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{18} t} \right] \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi}{6}x.$$

2. 求定解问题的解:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 6(x-1), & 0 < x < 2, t > 0, \\ u(0, t) = 0, u_x(2, t) = 1, \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{4} + x^3 - 3x^2 + x. \end{cases}$$

解: 需要将问题转化为齐次方程和齐次初值问题, 设 $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$.

则需要满足

$$\begin{cases} w''(x) = 6(x-1), \\ w'(2) = 1, \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

解得 $w(x) = x^3 - 3x^2 + x$. 问题转化为:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, \\ v_x(2, t) = 0, v(0, t) = 0, \\ v(x, 0) = \sin \frac{\pi}{4}x. \end{cases}$$

由分离变量法, 需要解下面两个 ODE:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ T' + \lambda T = 0. \end{cases}$$

显然第一个 ODE 的特征值和固有函数分别为: $\lambda = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{16}, n = 1, 2, \dots$, 和 $X = A \sin \frac{(2n-1)\pi}{4}x$. 以及 $T = B e^{-\lambda t}$.

那么 $v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{4} \cdot e^{-\lambda t}$, 其中 $a_n = AB$.

由初值条件, $v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{4} = \sin \frac{\pi x}{4}$. 显然有:

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

所以 $u(x, t) = x^3 - 3x^2 + x + e^{-\frac{\pi^2}{16}t} \sin \frac{\pi x}{4}$.

3. 求解以下定解问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin \pi x, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u(0, y) = 1, u(1, y) = 2, \\ u(x, 0) = 1 + x, u(x, 1) = 1 + x - \frac{1}{\pi^2} \sin \pi x. \end{cases}$$

解: 需要将问题转化为齐次方程和齐次初值问题, 设 $u(x, y) = v(x, y) + w(x)$.

则需要满足

$$\begin{cases} w''(x) = \sin \pi x, \\ w(1) = 2, \\ w(0) = 1. \end{cases}$$

解得 $w(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sin \pi x + x + 1$. 问题转化为:

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, \\ v(0, y) = 0, v(1, y) = 0, \\ v(x, 0) = \frac{1}{\pi^2} \sin \pi x, \quad v(x, 1) = 0. \end{cases}$$

由分离变量法, 需要解下面两个 ODE:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ Y'' + \lambda Y = 0. \end{cases}$$

显然第一个 ODE 的特征值和固有函数分别为: $\lambda = (n\pi)^2, n = 1, 2, \dots$, 和 $X_n = A_n \sin n\pi x$. 以及 $Y_n = B_n e^{\sqrt{\lambda}y} + C_n e^{-\sqrt{\lambda}y}$.

所以 $v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{\sqrt{\lambda}y} + b_n e^{-\sqrt{\lambda}y}) \sin n\pi x$, 其中, $a_n = A_n B_n, b_n = A_n C_n$. 由初值条件得到:

$$\begin{cases} v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \sin n\pi x = \frac{1}{\pi^2} \sin \pi x & \Rightarrow a_1 + b_1 = \frac{1}{\pi^2}, \\ v(x, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{n\pi} + b_n e^{-n\pi}) \sin n\pi x = 0 & \Rightarrow a_n e^{n\pi} + b_n e^{-n\pi} = 0. \end{cases}$$

练习九

1. 求特征值问题的特征值与特征函数:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(-\pi) = X(\pi), X'(-\pi) = X'(\pi). \end{cases}$$

解: 得到特征值方程 $r^2 + \lambda = 0$.

(1) 当 $\lambda < 0, \Delta > 0, X(x) = Ae^{-\sqrt{-\lambda}x} + Be^{\sqrt{-\lambda}x}$, 容易得到 $A = B = 0$, 方程没有非平凡解.

(2) 当 $\lambda = 0, \Delta = 0, X(x) = A + Bx$, 由边界条件易得 $B = 0$. 则 $X(x) = A$.

(3) 当 $\lambda > 0, \Delta < 0, X(x) = B \cos \sqrt{\lambda}x + C \sin \sqrt{\lambda}x$.

2. 试说明特征值问题:

$$\begin{cases} x^2 y''(x) + xy'(x) + \lambda y(x) = 0, \\ y(1) = y(e) = 0. \end{cases}$$

的固有函数系 $\{y_n(x)\}$ 在区间 $[1, e]$ 上带权函数 $\frac{1}{x}$ 正交.

解: