HOMEWORK

数理方程与特殊函数

王翎羽　U202213806　提高 2201 班

2024 年 3 月 25 日

练习六

3. 求下列定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=-2x, \quad x^2+y^2<1, \\ u|_{x^2+y^2=1}=1. \end{cases}$$

解：将问题转化到极坐标系中解决，得到

$$\begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=-2r\cos\theta, \quad r<1 \\ u|_{r=1}=1. \end{cases}$$

将问题转化为齐次方程和齐次边界的问题，设 $u(r,\theta)=v(r,\theta)+w(r,\theta)$ 得到:

$$\begin{cases} v_{rr}+\dfrac{1}{r}v_r+\dfrac{1}{r^2}v_{\theta\theta}=-2r\cos\theta, \quad r<1 \\ v|_{r=1}=0. \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} w_{rr}+\dfrac{1}{r}w_r+\dfrac{1}{r^2}w_{\theta\theta}=0, \quad r<1 \\ w|_{r=1}=1. \end{cases}$$

固有函数法求解 v，分离变量法求解 w.

齐次方程问题的固有函数系为 $\{1,\cos\theta,\sin\theta,\ldots,\cos n\theta\}$, 则:

$v(r,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n(r)\cos n\theta+b_n(r)\sin n\theta)$, 代入方程中得到:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(a_n^{''}+\dfrac{1}{r}a_n^{'}-\dfrac{n^2}{r^2}a_n)\cos n\theta+(b_n^{''}+\dfrac{1}{r}b_n^{'}-\dfrac{n^2}{r^2}b_n)\sin n\theta\right]=-2r\cos\theta$

得到下列式子:

$$\begin{cases} a_1^{''}+\dfrac{1}{r}a_1^{'}-\dfrac{n^2}{r^2}a_1=-2r, \quad n=1 \\ a_n^{''}+\dfrac{1}{r}a_n^{'}-\dfrac{n^2}{r^2}a_n=0, \qquad n\neq 1 \\ b_n^{''}+\dfrac{1}{r}b_n^{'}-\dfrac{n^2}{r^2}b_n=0. \end{cases}$$

又 $v|_{r=1}=0$ 可知，$a_n(1)=b_n(1)=0$, 又由有界性可知,$|a_n(0)|<+\infty$, $|b_n(0)|<+\infty$, 解欧拉方程得到 $a_n(r)=b_n(r)\equiv 0$.

当 $n=1$ 时, 需要解一个非齐次的欧拉方程, 设特解 $v=cr^3$, 代入方程中得到 $c=-\dfrac{1}{4}$, 又由原点的有界性条件可知，齐次方程通解中 r^{-n} 的系数为 0. 则通解为:

$a_1(r)=Ar-\dfrac{1}{4}r^3$. 代入到方程中, 解得 $A=\dfrac{1}{4}$. 即 $v(r,\theta)=\dfrac{1}{4}(1-x^2-y^2)x$.

对于齐次方程问题，由于边界条件 $w|_{r=1}=1$, 试探法设 $w(r,\theta)=1$ 是方程的解, 所以 $w(r,\theta)=1$.

综上,$u(x,y)=\dfrac{1}{4}(1-x^2-y^2)x+1$.

练习七

1. 求定解问题的解：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u(1,t) = 1, \\ u(x,0) = \sin\dfrac{3\pi x}{l} + \dfrac{x}{l}, \quad u_t(x,0) = x(l-x). \end{cases}$$

解：需要将问题转化为齐次边界条件. 设 $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, 其中 $w = \dfrac{x}{l}$ 是辅助函数. 那么问题就变成了

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \\ v(0,t) = 0, v(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin\dfrac{3\pi x}{l}, \quad u_t(x,0) = x(l-x). \end{cases}$$

方程的固有值和固有函数分别为:$\lambda = \big(\dfrac{n\pi}{l}\big)^2$,$X(x) = A_n \sin\dfrac{n\pi x}{l}$.

$T(t)$ 通解为:$T(t) = B_n \cos\dfrac{n\pi\alpha t}{l} + C_n \sin\dfrac{n\pi\alpha t}{l}$, 由叠加原理可知:

$v(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{n\pi x}{l}\big(a_n \cos\dfrac{n\pi\alpha t}{l} + b_n \sin\dfrac{n\pi v(x,t)\alpha t}{l}\big)$, 其中 $a_n = A_n B_n, b_n = A_n C_n$.

$v_t(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{n\pi x}{l}\big(-a_n\dfrac{n\pi\alpha}{l}\sin\dfrac{n\pi\alpha t}{l} + b_n\dfrac{n\pi\alpha}{l}\cos\dfrac{n\pi\alpha t}{l}\big)$.

$v(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\dfrac{n\pi}{l}x = \sin\dfrac{3\pi x}{l}$ 和 $v_t(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\dfrac{n\pi\alpha}{l}\sin\dfrac{n\pi}{l}x = x(l-x)$. 解得

$$b_n = \begin{cases} 1, & n = 3, \\ 0, & n \neq 3. \end{cases}$$

和 $a_n = \dfrac{4l^3[1-(-1)^n]}{(n\pi)^4\alpha}$.

所以 $u(x,t) = \dfrac{x}{l} + \cos\dfrac{3\pi\alpha t}{l}\sin\dfrac{3\pi x}{l} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4l^3[1-(-1)^n]}{(n\pi)^4\alpha}\sin\dfrac{n\pi\alpha}{l}t\sin\dfrac{n\pi}{l}x$.

2. 求定解问题的解：

$$\begin{cases} u_t = 8u_{xx} + \cos t + e^t \sin\dfrac{x}{2}, \quad 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0,t) = \sin t, u_x(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

解：同上题, 需要将问题转化为齐次边界条件. 设 $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, 其中 $w = \sin t$ 是辅助函数. 那么问题就变成了

$$\begin{cases} u_t = 8u_{xx} + e^t \sin\dfrac{x}{2}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u_x(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

方程的固有值和固有函数分别为:$\lambda = \big(\dfrac{2n+1}{2}\big)^2, n = 0,1,2,\ldots$,$X(x) = \sin\dfrac{2n-1}{2}x$. 可知:

$v(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(t)\sin\dfrac{2n-1}{2}x$.$v_t(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n'(t)\sin\dfrac{2n-1}{2}x$,$v_{xx}(x,t) = v_n(t)\dfrac{-(2n-1)^2}{4}\sin\dfrac{2n-1}{2}x$.

代入到方程中得到:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big[v_n'(t) + \dfrac{8(2n-1)^2}{4}v_n(t)\big]\sin\dfrac{2n-1}{2}x = e^t \sin\dfrac{x}{2}$,$v_n(0) = 0$.

所以有:$v_1^{'}(t)+2v_1(t)=e^t$, 由 $Laplace$ 变换可得到:$sV_1(s)-v(0)+2V_1(0)=\dfrac{1}{s-1}$.
易得 $v_1(t)=\dfrac{1}{3}(e^t-e^{-2t})$.
当 $n\neq 1$ 时，由试探法可得 $v_n(t)\equiv 0$. 所以 $v(x,t)=\dfrac{1}{3}(e^t-e^{-2t})\sin\dfrac{x}{2}$.
所以 $u(x,t)=\dfrac{1}{3}(e^t-e^{-2t})\sin\dfrac{x}{2}+\sin t$

3. 求解以下定解问题：

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+2u_x, & 0<x<1,t>0,\\ u(0,t)=u(1,t)=0, & \\ u(x,0)=e^{-x}\sin\pi x. & \end{cases}$$

解：设 $u(x,t)=X(x)T(t)$, 则有

$$\begin{cases} X^{''}+2X^{'}-\lambda X=0,\\ T^{'}-\lambda T=0. \end{cases}$$

求解 ODE 易得 $X_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_ne^{-x}\sin n\pi x.\quad T=C_ne^{(1-(n\pi)^2)t}$.
所以 $u(x,t)=C_ne^{(1-(n\pi)^2)t}\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_ne^{-x}\sin n\pi x$. 解得

$$a_n=\begin{cases} 1, & n=1,\\ 0, & n\neq 1. \end{cases}$$

所以 $x(x,t)=e^{(1-\pi^2)t}e^{-x}\sin\pi x$.

练习八

1. 求定解问题的解：

$$\begin{cases} u_t=2u_{xx}+4+2e^{-x}, & 0<x<3,t>0,\\ u_x(0,t)=1,u(3,t)=-18-e^{-3}, & t>0,\\ u(x,0)=-(2x^2+e^{-x}), & 0<x<3. \end{cases}$$

解：需要将问题转化为齐次方程和齐次初值问题, 设 $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$.
则需要满足

$$\begin{cases} w^{''}(x)=-2-e^{-x},\\ w^{'}(0)=1,\\ w(3)=-18-e^{-3}. \end{cases}$$

解得 $w(x)=-x^2-e^{-x}-9$. 问题转化为:

$$\begin{cases} v_t=2v_{xx}, & 0<x<3,t>0,\\ v_x(0,t)=0,v(3,t)=0, & t>0,\\ v(x,0)=9-x^2, & 0<x<3. \end{cases}$$

由分离变量法, 需要解下面两个 ODE:

$$\begin{cases} X^{''} + \lambda X = 0, \\ T^{'} + 2\lambda T = 0. \end{cases}$$

显然第一个 ODE 的特征值和固有函数分别为:$\lambda = \big(\dfrac{(2n-1)\pi}{6}\big)^2, n = 1, 2, \ldots,$ 和 $X = A_n \cos \dfrac{(2n-1)\pi}{6} x.$
以及 $T = B_n e^{-2\lambda t}$.
那么 $v(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos \dfrac{(2n-1)\pi}{6} x \cdot e^{-2\lambda t}$, 其中 $a_n = A_n B_n$. 又由初值条件可得:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos \dfrac{(2n-1)\pi}{6} x = 9 - x^2$, 那么 $a_n = \dfrac{2}{3} \int_0^3 (9-x^2) \cos \dfrac{(2n-1)\pi}{6} x dx = \dfrac{288}{(2n-1)^3 \pi^3} \cdot (-1)^{n+1}$.
所以 $u(x,t) = -x^2 - e^{-x} - 9 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{288}{(2n-1)^3 \pi^3} \cdot (-1)^{n+1} \big[e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{18} t} \big] \cdot \cos \dfrac{(2n-1)\pi}{6} x.$

2. 求定解问题的解:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 6(x-1), & 0 < x < 2, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u_x(2,t) = 1, \\ u(x,0) = \sin \dfrac{\pi x}{4} + x^3 - 3x^2 + x. \end{cases}$$

解: 需要将问题转化为齐次方程和齐次初值问题, 设 $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$.
则需要满足

$$\begin{cases} w^{''}(x) = 6(x-1), \\ w^{'}(2) = 1, \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

解得 $w(x) = x^3 - 3x^2 + x$. 问题转化为:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, \\ v_x(2,t) = 0, v(0,t) = 0, \\ v(x,0) = \sin \dfrac{\pi}{4} x. \end{cases}$$

由分离变量法, 需要解下面两个 ODE:

$$\begin{cases} X^{''} + \lambda X = 0, \\ T^{'} + \lambda T = 0. \end{cases}$$

显然第一个 ODE 的特征值和固有函数分别为:$\lambda = \dfrac{(2n-1)^2 \pi^2}{16}, n = 1, 2, \ldots,$ 和 $X = A \sin \dfrac{(2n-1)\pi}{4} x.$
以及 $T = B e^{-\lambda t}$.
那么 $v(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin \dfrac{(2n-1)\pi x}{4} \cdot e^{-\lambda t}$, 其中 $a_n = AB$.
由初值条件,$v(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n \sin \dfrac{(2n-1)\pi x}{4} = \sin \dfrac{\pi x}{4}$. 显然有:

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

所以 $u(x,t) = x^3 - 3x^2 + x + e^{-\frac{\pi^2}{16} t} \sin \dfrac{\pi x}{4}$.

3. 求解以下定解问题：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=\sin\pi x, & 0<x<1, 0<y<1, \\ u(0,y)=1, u(1,y)=2, \\ u(x,0)=1+x, u(x,1)=1+x-\dfrac{1}{\pi^2}\sin\pi x. \end{cases}$$

解：需要将问题转化为齐次方程和齐次初值问题, 设 $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$.
则需要满足

$$\begin{cases} w''(x)=\sin\pi x, \\ w(1)=2, \\ w(0)=1. \end{cases}$$

解得 $w(x)=-\dfrac{1}{\pi^2}\sin\pi x+x+1$. 问题转化为:

$$\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=0, \\ v(0,y)=0, v(1,y)=0, \\ v(x,0)=\dfrac{1}{\pi^2}\sin\pi x, \quad v(x,1)=0. \end{cases}$$

由分离变量法, 需要解下面两个 ODE:

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, \\ Y''+\lambda Y=0. \end{cases}$$

显然第一个 ODE 的特征值和固有函数分别为:$\lambda=\left(n\pi\right)^2, n=1,2,\ldots,$ 和 $X_n=A_n\sin n\pi x$. 以及 $Y_n=B_ne^{\sqrt{\lambda}y}+C_ne^{-\sqrt{\lambda}y}$.
所以 $v(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_ne^{\sqrt{\lambda}y}+b_ne^{-\sqrt{\lambda}y})\sin n\pi x$, 其中,$a_n=A_nB_n, b_n=A_nC_n$. 由初值条件得到:

$$\begin{cases} v(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)\sin n\pi x=\dfrac{1}{\pi^2}\sin\pi x & \Rightarrow a_1+b_1=\dfrac{1}{\pi^2}, \\ v(x,1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_ne^{n\pi}+b_ne^{-n\pi})\sin n\pi x=0 & \Rightarrow a_ne^{n\pi}+b_ne^{-n\pi}=0. \end{cases}$$

练习九

1. 求特征值问题的特征值与特征函数：

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, \\ X(-\pi)=X(\pi), X'(-\pi)=X'(\pi). \end{cases}$$

解：得到特征值方程 $r^2+\lambda=0$.

(1) 当 $\lambda<0, \Delta>0, X(x)=Ae^{-\sqrt{-\lambda}x}+Be^{\sqrt{-\lambda}x}$，容易得到 $A=B=0$, 方程没有非平凡解.

(2) 当 $\lambda=0, \Delta=0, X(x)=A+Bx$, 由边界条件易得 $B=0$. 则 $X(x)=A$.

(3) 当 $\lambda>0, \Delta<0, X(x)=B\cos\sqrt{\lambda}x+C\sin\sqrt{\lambda}x$.

又由 $X(\pi)=X(-\pi)=B\cos\sqrt{\lambda}(-\pi)+C\sin\sqrt{\lambda}(-\pi)=B\cos\sqrt{\lambda}(\pi)+C\sin\sqrt{\lambda}(\pi)$, 所以 $C\sin\sqrt{\lambda}=0$. 又由 $X'(-\pi)=X'(\pi)$, 得到 $B\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi=0$.
那么得到 $\lambda_n=n^2, n=1,2,\ldots.X_n=B_n\cos nx+C_n\sin nx$.

2. 试说明特征值问题：

$$\begin{cases} x^2y^{''}(x)+xy^{'}(x)+\lambda y(x)=0, \\ y(1)=y(e)=0. \end{cases}$$

的固有函数系 $\{y_n(x)\}$ 在区间 $[1,e]$ 上带权函数 $\dfrac{1}{x}$ 正交.

解：令 $x=e^t$, 那么 $y_x=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}=y_te^{-t}$, $\quad y_{xx}=\dfrac{d^2y}{dt^2}(\dfrac{dt}{dx})^2+\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2t}{dx^2}=y_{tt}e^{-2t}-y_te^{-2t}$.

则 $y_{tt}+\lambda y=0$. 得到特征方程:$r^2+\lambda=0$.

当 $\lambda>0$ 时, 通解为 $y(t)=A\cos\sqrt{\lambda}t+B\sin\sqrt{\lambda}t$.

由边界条件可得 $\lambda=\big(n\pi\big)^2$, 特征函数 $y_n(x)=B_n\sin(n\pi\ln x)$. 所以固有函数系为 $\{y_n(x)\}=\{sin(n\pi\ln x)\}, n=1,2,\ldots$.

$$\int_1^e\frac{1}{x}y_n(x)y_m(x)dx=\int_0^1 y_n(t)y_m(t)dt=\int_0^1\sin n\pi t\sin m\pi tdt=\begin{cases}0, & n\neq m\\ 1, & n=m.\end{cases}$$

所以固有函数系 $\{y_n(x)\}$ 在区间 $[1,e]$ 上带权函数 $\dfrac{1}{x}$ 正交.