HOMEWORK

数理方程与特殊函数

王翎羽　U202213806　提高 2201 班

2024 年 4 月 16 日

练习十四

1. 设 K_R 表示以原点为中心以 R 为半径的球体,Γ_R 表示以原点为中心以 R 为半径的球面. 若 u 满足下面的定解问题:
$$\begin{cases} \Delta u = 0, (x, y, z) \in K_R, \\ u|_{\Gamma_R} = 1 + \sin xy^2z^3. \end{cases}$$
利用极值原理证明：在 K_R 内,$u > 0$.
解: 由 $\Delta u = 0$ 可知,u 是区域 K_R 下的调和函数, 那么由极值定理可知,u 的最大值或最小值都只能在边界 Γ_R 上取得. 显然 u 不是常数.
若边界上取得最小值, 显然有边界上的最小值为 0，即在区域 K_R 内有 $u > 0$.

2. 设 K_R 表示以原点为中心以 R 为半径的球体,Γ_R 表示以原点为中心以 R 为半径的球面. 若 $0 < r < R$, 且 u 满足下面的定解问题:
$$\begin{cases} \Delta u = 0, (x, y, z) \in K_R \backslash \overline{K_r}, \\ u|_{\Gamma_r} = 1, \quad u|_{\Gamma_R} = 2. \end{cases}$$
证明：在 $K_R \backslash \overline{K_r}$ 内, $1 < u < 2$.
解：由 $\Delta u = 0$ 可知,u 是区域 K_R 下的调和函数. 那么由极值定理可知,u 的最大值或最小值都只能在边界上取得. 显然 u 不是常数.
对于区域 $K_R \backslash \overline{K_r}$,$u$ 的最值在 Γ_r 和 Γ_R 上取得, 又 $u|_{\Gamma_r} < u < u|_{\Gamma_R}$, 则 $1 < u < 2$.

3. 设 $u(r, \theta, \varphi)$ 是单位球 $K_1 = \{(r, \theta, \phi) : 0 \le r < 1, 0 \le \theta < \pi, 0 \le \phi \le 2\pi\}$ 内的调和函数在球坐标下的表示，且它在闭球 $\overline{K_1}$ 上连续, 若 $u(r, \theta, \varphi)$ 在上半单位球面上为 $1 - \sin\theta$, 在下半单位球面上恒为 0，试证明单位球 K_1 内 $0 < u(r, \theta, \varphi) < 1$, 并求 $u(r, \theta, \varphi)$ 在 $r = 0$ 的值.
解：u 是区域 K_1 下的调和函数. 那么由极值定理可知,u 的最大值或最小值都只能在边界上取得. 显然 u 不是常数.
由于 $0 \le \theta < \pi$,$0 \le u(r, \theta, \varphi) \le 1$ 在上球面成立, 由极值定理,$0 < (r, \theta, \varphi) < 1$ 在区域 K_1 成立.
由调和函数的性质:
$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\int_{\Gamma_a} u dS$$
代入条件，计算积分则有:
$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int\int_S u(r, \theta, \varphi) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \sin\theta) \cdot 1^2 \cdot \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$$

练习十五

1. 证明二维调和函数的积分表达式：

$$u(M_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_C\big[u\frac{\partial}{\partial n}\big(\ln\frac{1}{r}\big)-\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\big]ds.$$

解：令 u 为调和函数, 且取 $v=\ln\dfrac{1}{r}$, 在点 M_0 处挖一个以 M_0 为心, 充分小的正数 ε 为半径的圆 $K_\varepsilon^{M_0}$.

应用平面上的格林公式得到:

$$0=\int_{C+C_\varepsilon}\big(u\frac{\partial}{\partial n}\big(\ln\frac{1}{r}\big)-\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\big)dS$$

即

$$\int_C\big(u\frac{\partial}{\partial n}\big(\ln\frac{1}{r}\big)-\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\big)dS+\int_{C_\varepsilon}\big(u\frac{\partial}{\partial n}\big(\ln\frac{1}{r}\big)-\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\big)dS$$

又

$$\frac{\partial}{\partial n}\big(\ln\frac{1}{r}\big)=-\frac{\partial}{\partial r}\big(\ln\frac{1}{r}\big)=\frac{1}{r}=\frac{1}{\varepsilon}$$

则有

$$\int_{C_\varepsilon}u\frac{\partial}{\partial n}\big(\ln\frac{1}{r}\big)dS=\frac{1}{\varepsilon}\int_{C_\varepsilon}udS=\frac{1}{\varepsilon}\cdot 2\pi\varepsilon\overline{u}=2\pi\overline{u}$$

其中 $\overline{u}$ 是函数 u 在圆周 C_ε 的平均值. 对于积分的另一项,

$$\int_{C_\varepsilon}\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}dS=\ln\frac{1}{\varepsilon}\int_{C_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}dS=-\ln\frac{1}{\varepsilon}\int_{C_\varepsilon}\overrightarrow{n}\cdot\nabla udS=\ln\frac{1}{\varepsilon}\int_{C_\varepsilon}\Delta udV=0$$

那么则有

$$\int_C\big(u\frac{\partial}{\partial n}\big(\ln\frac{1}{r}\big)-\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\big)dS+2\pi\overline{u}=0$$

那么当 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\overline{u}=u(M_0)$ 即

$$u(M_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_C\big(u\frac{\partial}{\partial n}\big(\ln\frac{1}{r}\big)-\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\big)dS$$

练习十六

1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中以足够光滑的曲面 Γ 为边界的有界区域，若边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=f(x,y,z), & (x,y,z)\in\Omega\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+ku|_\Gamma=g(x,y,z), & (x,y,z)\in\Gamma.\end{cases}$$

有解, 其中常数 $k>0$, 试证明其解是唯一的 (提示: 用格林第一公式).

解：设问题有两个解 u_1,u_2, 令 $u=u_1-u_2$, 则有 $\Delta u=\Delta u_1-\Delta u_2=0$.

同理也有 $u|_\Gamma=0,\dfrac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma=0$, 则 u 是调和函数. 那么有格林第一公式

$$\int_\Omega u\Delta vd\Omega=\int\int_\Gamma u\nabla v\cdot\overrightarrow{n}dS-\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla vd\Omega$$

令 $u=v$ 则有

$$\int_\Omega u\Delta vd\Omega=\int\int_\Gamma u\nabla u\cdot\overrightarrow{n}dS-\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla ud\Omega$$

则有

$$\int\int_{\Gamma} u\nabla u\cdot\vec{n}dS=\int_{\Omega}(\nabla u)^2 d\Omega$$

由 $\dfrac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma}=0$ 得到

$$\int_{\Omega}(\nabla u)^2 d\Omega=0$$

也就是 $\nabla u=0$, 推出 $u=c$,c 为常数. 由 $u|_{\Gamma}=0$ 可知,$c=0$, 则 $u=0$, 即 $u_1=u_2$, 解是唯一的.

2. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 为任何区域,u 的所有二阶偏导数在 Ω 上存在且连续。若对任意闭球面 $\Gamma_a\in\Omega$, 成立 $\displaystyle\int\int_{\Gamma_a}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0$, 试证明 u 是 Ω 上的调和函数 (提示: 用格林第二公式).

解: 由格林第二公式

$$\int_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)d\Omega=\int_{\Gamma}u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}dS$$

取 $v=1$, 则有

$$\int_{\Omega}\Delta u d\Omega=\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0$$

即 $\Delta u=0$, 所以 u 是 Ω 上的调和函数.

3. u 是 $\mathbb{R}^3$ 内的光滑函数，若 $\Delta u\geq 0$，则称 u 是下调和的. 证明以下两个命题等价：

(1) u 在 $\mathbb{R}^3$ 内下调和,

(2) 对任意闭球面 Γ_r,$\displaystyle\int\int_{\Gamma_r}\frac{\partial u}{\partial n}dS\geq 0$ 成立, 其中 n 是 Γ_r 的单位外法向量.

解：由格林第二公式

$$\int_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)d\Omega=\int_{\Gamma}u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}dS$$

取 $v=1$, 则有

$$\int_{\Omega}\Delta u d\Omega=\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}dS$$

很显然两个命题等价.