HOMEWORK

数理方程与特殊函数

王翎羽　U202213806　提高 2201 班

2024 年 3 月 3 日

练习一

1. 写出长为 L 的弦振动的边界条件和初始条件：

    (1) 端点 $x = 0$,$x = L$ 固定在平衡位置；

    (2) 初始位移为 $f(x)$;

    (3) 初始速度为 $g(x)$;

    (4) 在任何一点上, 在时刻 t 时的位移是有界的.

    解：下列各式中,u 表示弦上 t 时刻 x 位置的位移.

    (1) $u|_{x=0} = 0, u|_{x=L} = 0$,

    (2) $u|_{t=0} = f(x)$,

    (3) $\frac{\partial u}{\partial x}|_{t=0} = g(x)$,

    (4) $|u(x,t)| < +\infty$.

2. 写出弦振动的边界条件：

    (1) 在端点 $x = 0$ 处，弦是移动的，由 $g(t)$ 给出；

    (2) 在端点 $x = L$ 处，弦不固定地自由移动.

    解：下列各式中,u 表示弦上 t 时刻 x 位置的位移.

    (1) $u|_{x=0} = g(t)$,

    (2) $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=L} = 0$.

3. 验证函数 $u = f(xy)$ 是方程 $xu_x - yu_y = 0$ 的解，其中 f 是任意连续可微函数.
    解：左边 $= x\frac{\partial u}{\partial x} = xyf'(xy)$,
    右边 $= y\frac{\partial u}{\partial y} = xyf'(xy)$.
    左边 = 右边，即证函数 $u = f(xy)$ 是方程 $xu_x - yu_y = 0$ 的解.

练习二

1. 证明 $u(x,t) = e^{-8t}\sin 2x$ 是如下定解问题的解:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = \sin 2x.$$

解：$\frac{\partial u}{\partial t} = -8e^{-8t}\sin 2x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4e^{-8t}\sin 2x$,
所以 $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 成立. 又显然有 $u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0$ 且 $u(x,0) = \sin 2x$. 即证成立.

2. 设 F, G 是二次可微函数，

(1) 证明 $y(x,t) = F(2x+5t) + G(2x-5t)$ 是方程 $4y_{tt} = 25y_{xx}$ 的通解，

(2) 求方程 $4y_{tt} = 25y_{xx}$ 满足定解条件 $y(0,t) = y(\pi,t) = 0, y(x,0) = \sin 2x, y_t(x,0) = 0$ 的解.

解：

(1) $y_{tt} = 25F''(2x+5t) + 25G''(2x-5t), y_{xx} = 4F''(2x+5t) + 4G''(2x-5t)$
所以可以得到 $4y_{tt} = 25y_{xx}$, 证毕.

(2) 由 $y(x,t) = F(2x+5t) + G(2x-5t)$,
可得 $y(0,t) = F(5t) + G(-5t) = 0 = y(\pi,t) = F(2\pi+5t) + G(2\pi-5t)$,
又 $y(x,0) = 2F(2x) = \sin 2x$, 则 $F(2x) + G(2x) = \sin 2x$,
由 $y_t = 5F'(2x+5t) - 5G'(2x-5t)$，则 $y_t(x,0) = 5F'(2x) - 5G'(2x)$, 即 $F'(2x) = G'(2x)$,
所以 $F'(2x) = G'(2x) = \frac{1}{2}\cos 2x$,
显然有 $F(x) = \frac{1}{2}\sin x + C_1, \quad G(x) = \frac{1}{2}\sin x + C_2$,
即 $y(x,t) = \frac{1}{2}\sin(2x+5t) + \frac{1}{2}\sin(2x-5t) + C_3$, 其中 $C_3 = C_1 + C_2$.
由 $y(0,t) = 0$ 可知 $C_3 = 0$,
所以 $y(x,t) = \frac{1}{2}\sin(2x+5t) + \frac{1}{2}\sin(2x-5t) = \sin 2x \cos 5t$.

3. (1) 求二阶偏微分方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 y$ 的通解,

(2) 求该方程满足定解条件 $z(x,0) = x^2, z(1,y) = \cos y$ 的特解.

解：

(1) 对方程两边积分，得 $z(x,y) = \frac{1}{6}x^3y^2 + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$, 其中 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(y)$ 是任意二阶连续可导函数.

(2)
$$\begin{cases} z(x,0) = \varphi_1(x) + \varphi_2(0) = x^2, \\ z(1,y) = \frac{1}{6}y^2 + \varphi_1(1) + \varphi_2(y) = \cos y, \end{cases}$$
可得 $\varphi_1(1) + \varphi_2(0) = 1$, 那么 $\varphi_1(x) + \varphi_2(y) = -\frac{y^2}{6} + x^2 + \cos y - 1$,
则 $z(x,y) = \frac{1}{6}x^3y^2 - \frac{y^2}{6} + x^2 + \cos y - 1$.