HOMEWORK

数理方程与特殊函数

王翎羽　U202213806　提高 2201 班

2024 年 4 月 3 日

练习十二

1. 用积分变换法求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x,0) = \cos x. \end{cases}$$

解：等式两边同时对 x 求 $Fourier$ 变换，则有

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = -a^2\lambda^2 U \\ u(\lambda,t)|_{t=0} = \mathscr{F}[\cos x]. \end{cases}$$

求解该一阶 ODE，得到:$U' + a^2\lambda^2 U = 0$. 解得:$U(\lambda,t) = C(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}$.
由边界条件可得:$U(\lambda,t) = \mathscr{F}[\cos x]e^{-a^2\lambda^2 t}$, 做傅里叶逆变换，得:
$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}[U(\lambda,t)] = \mathscr{F}^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}] * \cos x = \cos x * \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$.
所以 $u(x,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\xi \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$.

2. 设有一半无限长固体 ($x > 0$)，其初始温度是零度，一个常数温度 $u_0 > 0$ 外加和保持在其表面 $x = 0$ 处，求固体在任何一点 x 和任一时刻 t 的温度. 设在点 x 处和时刻 t 的温度为 $u(x,t)$，则问题归结为求解以下热传导方程的定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = u_0, \quad u(x,0) = 0, \\ |u(x,t)| < +\infty. \end{cases}$$

解：PDE 两端同时对 t 做 $Laplace$ 变换，则得到:

$$\begin{cases} \dfrac{dU^2}{dx^2} - \dfrac{s}{a^2}U = 0 \\ U(0,s) = u_0, \quad U(x,t) = 0, \\ |u(x,s)| < +\infty. \end{cases}$$

那么方程的通解为:$U(x,s) = A(s)e^{\frac{\sqrt{s}}{a}x} + B(s)e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}$. 由有界性和边界条件得:$A(s) = 0, B(s) = u_0$.
则 $u(x,s) = u_0 e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}$, 查表得:$\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}] = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-y^2}dy$.

则

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathscr{L}^{-1}[u_0 s \cdot \frac{1}{s} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{s}}] \\
&= u_0 \frac{d}{dt}\Big[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-y^2} dy\Big] \\
&= \frac{u_0 x}{2a\sqrt{\pi} t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.
\end{aligned}
$$

3. 设 A,ω 均为常数, 用积分变换法求解下列问题：

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, t > 0 \\
u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \\
u(0,t) = A\sin\omega t, |u(x,t)| < M(x \to \infty)
\end{cases}
$$

解：将各式两端关于 t 进行 $Laplace$ 变换，则得到:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2U}{dx^2} - \dfrac{s^2}{a^2} U = 0, \\
U(x,0) = U_t(x,0) = 0, \\
U(0,s) = A\mathscr{L}[\sin wt].
\end{cases}
$$

则通解为 $u(x,s) = c_1 e^{\frac{s}{a}x} + c_2 e^{-\frac{s}{a}x}$. 由有界性和边界条件可知:
$u(x,s) = A\mathscr{L}[\sin wt] e^{-\frac{s}{a}x}$. 查表可得:$\mathscr{L}^{-1}[F(s)e^{-sa}] = f(s-a), (t > a)$. 所以:
$u(x,t) = \mathscr{L}^{-1}[A\mathscr{L}[\sin wt]e^{-\frac{s}{a}x}] = A\sin(t - \dfrac{s}{a})u(t - \dfrac{s}{a})$.

练习十三

1. 用积分变换法求解下列定解问题：

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\
u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \\
u(x,0) = \cos 3\pi x, u_t(x,0) = 0.
\end{cases}
$$

解：将各式两端关于 t 进行 $Laplace$ 变换，则得到:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2U}{dx^2} - \dfrac{s^2}{a^2} U = -\dfrac{s}{a^2} \cos 3\pi x, \\
u_x(0,s) = u_x(1,s) = 0, \\
u(x,0) = \cos 3\pi x, u_t(x,0) = 0.
\end{cases}
$$

易得方程的解为:$u(x,s) = Ae^{\frac{s}{a}x} + Be^{-\frac{s}{a}x} + \dfrac{s\cos 3\pi x}{s^2 + 9a^2\pi^2}$.
又由边界条件可知,$u(x,s) = \dfrac{s\cos 3\pi x}{s^2 + 9a^2\pi^2}$, 所以 $u(x,t) = \cos 3\pi x \cdot \cos 3a\pi t$.

2. 用积分变换法求解下列定解问题：

$$
\begin{cases}
u_t = t^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\
u(x,0) = \varphi(x).
\end{cases}
$$

解：等式两端对 x 求 $Fourier$ 变换，

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + \lambda^2 t^2 U = 0, \\ u(\lambda, 0) = \Phi(\lambda). \end{cases}$$

解得 $U(\lambda, t) = Ce^{-\frac{1}{3}\lambda^2 t^3}$, 由初值条件可得 $U(\lambda, t) = \Phi(\lambda)e^{-\frac{1}{3}\lambda^2 t^3}$. 所以 $u(x,t) = \varphi(x) * \sqrt{\dfrac{3}{4\pi t^3}} e^{\frac{3}{4t^3}x^2}$

3. 用积分变换法求解定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + ku, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

解：两边同时关于 x 做 $Fourier$ 变换，得到:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + (a^2\lambda^2 - k)U = 0, \\ u(\lambda, 0) = \Phi(\lambda). \end{cases}$$

与上题相同,$u(x,t) = [\varphi(x) * \sqrt{\dfrac{1}{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}] \cdot e^{kt}$.