HOMEWORK

数理方程与特殊函数

王翎羽 U202213806 提高 2201 班

2024 年 4 月 22 日

练习十五

2. 在下半平面 $y < 0$ 内求解拉普拉斯方程的边值问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, -\infty < x < +\infty, y < 0, \\ u|_{y=0} = f(x). \end{cases}$$

解：由

$$u(M_0) = -\int_C f(x, y) \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

和

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} - \ln \frac{1}{r_{MM_1}} \right)$$

由于外法向是沿 Oy 轴向上，所以有

$$\frac{\partial G}{\partial n}|_{y=0} = \frac{\partial G}{\partial y}|_{y=0}$$

求导可得:

$$u(M_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) y_0 dx}{(x - x_0)^2 + y_0^2}$$

3. 设 A 为常数，分别用分离变量法和格林法求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, 0 < r < 1, \\ u(1, \theta) = A \cos \theta (-\pi < \theta \leq \pi). \end{cases}$$

解：

(a) 分离变量法:

设 $u(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta)$, 则有 $R'' + \frac{1}{r} R' \Phi + \frac{1}{r^2} R \Phi'' = 0$.

得到 $r^2 R'' + r R' = \lambda R, \Phi'' + \lambda \Phi = 0$. 当 $\lambda = 0$ 时, 易得 $\Phi_0(\theta) = B_0$.

当 $\lambda > 0, \Phi(\theta) = C_n \cos \sqrt{\lambda}\theta + D_n \sin \sqrt{\lambda}\theta$ 得到 $\lambda = n^2, (n = 1, 2, \cdots)$.

代入得到一个欧拉方程, 解得 $R_n(r) = E_n r^n$.

则 $u(r, \theta) = B_0(C_0 \ln r + D_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (E_n r^n)(C_n \cos n\theta + D_0 \sin n\theta)$.

$u(1, \theta) = B_0 D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n (C_n \cos n\theta + D_0 \sin n\theta) = A \cos \theta$.

所以 $u(r, \theta) = Ar \cos \theta$.

(b) 格林函数法:

代入公式可得:

$$u(M_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A x y_0 dx}{(x - x_0)^2 + y_0^2}$$

又有

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R,\theta)\frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\cos(\theta-\theta-0)}d\theta$$

经过复杂的积分计算, 得到

$$u(r,\theta) = Ar\cos\theta$$

.

4. 设 A, B 为常数，用试探法求如下定解问题的解：

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, r < a, \\ u|_{r=a} = A\cos\theta + B\cos\theta, (-\pi < \theta \leq \pi). \end{cases}$$

解：由边界条件设 $u(r,\theta) = Cr\cos\theta + Dr\sin\theta + E$ 代入原始方程得到:$E = 0, A = Ca, B = Da$. 又由解的唯一性可知 C, D, E 唯一存在.

即 $u(r,\theta) = \dfrac{Ar\cos\theta}{a} + \dfrac{Br\cos\theta}{a}$.