HOMEWORK

数理方程与特殊函数

王翎羽　U202213806　提高 2201 班

2024 年 3 月 18 日

练习五

1. 求下列定解问题的解：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<1, 0<y<1, \\ u_x(0,y)=u_x(1,y)=0, \\ u(x,0)=1+\cos 3\pi x, \quad u(x,1)=3\cos 2\pi x. \end{cases}$$

解：设 $u(x,y)=X(x)Y(y)$, 则得到 $YX''+XY''=0$, 即得到 $\dfrac{X''}{X}=-\dfrac{Y''}{Y}=-\lambda$.
即有 $Y''-\lambda Y=0$ 和 $X''+\lambda X=0$. 其中 $X'(0)=X'(1)=0$.
当 $\lambda<0$ 时，方程没有非平凡解. 当 $\lambda=0$ 时，$X(x)=A+Bx$,
又 $X'(0)=X'(1)=0, X(x)\equiv A., Y(y)=D+Ey$
当 $\lambda>0$ 时,X 的通解为 $X(x)=B\cos\sqrt{\lambda}x+C\sin\sqrt{\lambda}x, X'(x)=-B\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+C\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$.
由边界条件得，$\lambda=(n\pi)^2, n=1,2,3\ldots, X(x)=B\cos n\pi x$.
由通解可得，$Y(y)=Fe^{n\pi y}+Ge^{-n\pi y}$.
那么 $u(x,y)=A(D+Ey)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n(F_ne^{n\pi y}+G_ne^{-n\pi y})\cos n\pi x$, 令 $a_n=B_nF_n, b_n=B_nG_n$.
$u(x,0)=AD+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)\cos n\pi x=1+\cos 3\pi x$. 易得 $AD=1$，
以及 $a_n+b_n=2\int_0^1\cos 3\pi x\cdot\cos n\pi x dx=\begin{cases}1, & n=3,\\ 0, & n\neq 3.\end{cases}$
$u(x,1)=A(D+E)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_ne^{n\pi}+b_ne^{-n\pi})\cos n\pi x=3\cos 2\pi x$.
可得 $AD+AE=0, a_ne^{n\pi}+b_ne^{-n\pi}=2\int_0^13\cos 2\pi x\cdot\cos n\pi x dx=\begin{cases}3, & n=2,\\ 0, & n\neq 2.\end{cases}$
解方程,得:$u(x,y)=1-y+\dfrac{3}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}(e^{2\pi y}-e^{-2\pi y})\cos 2\pi x+\dfrac{1}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}(e^{3\pi}e^{3\pi y}+e^{-3\pi}e^{-3\pi y})\cos 3\pi x$.

2. 设有一内半径为 r_1，外半径为 r_2 的圆环形导热板, 上下两侧绝热. 如果内圆温度保持零度，而外圆温度保持 $u_0(u_0>0)$ 度，试求稳恒状态下该导热版的温度分布规律 $u_r(r,\theta)$. 问题归结为在稳恒状态下，求解拉普拉斯方程 $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$ 边值问题，即在极坐标系下求解定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial u}{\partial r})+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0, & r_1<r<r_2, 0<\theta<2\pi, \\ u(r_1,\theta)=0, \quad u(r_2,\theta)=u_0, & 0<\theta<2\pi, \\ u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi). & (Natural Boundary Condition) \end{cases}$$

解：设 $u(r,\theta)=R(r)\varPhi(\theta)$, 则有 $R''+\dfrac{1}{r}R'\varPhi+\dfrac{1}{r^2}R\varPhi''=0$, 得到 $\dfrac{r^2R''+rR'}{R}=-\dfrac{\varPhi''}{\varPhi}=\lambda$.
对于 $\varPhi''+\lambda\varPhi=0, \varPhi(\theta)=\varPhi(\theta+2\pi)$, 当 $\lambda<0$ 时，问题没有非平凡解.

当 $\lambda=0$ 时,$\varPhi(\theta)=A_0\theta+B_0$, 又由周期条件可知,$A_0=0$,$\varPhi(\theta)_0=B_0$.
对于 $R(r)$ 而言,$r^2R^{''}+rR^{'}=0$, 解得 $R_0(r)=C_0\ln r+D_0$.
当 $\lambda>0$ 时, 通解为 $\varPhi(\theta)=E\cos\sqrt{\lambda}\theta+F\sin\sqrt{\lambda}\theta$. 由边界条件可知,$\lambda=n^2,n=1,2\ldots.$
代入可得,$r^2R^{''}+rR^{'}-\lambda R=0$, 解欧拉方程，解得:$R_n(r)=C_nr^n+D_nr^{-n}$.
得到:$u(r,\theta)=B_0(C_0\ln r+D_0)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(E_n\cos n\theta+F_n\sin n\theta)(C_nr^n)+D_nr^{-n}$.
又 $u(r_1,\theta)=B_0C_0\ln r_1+B_0D_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(E_n\cos n\theta+F_n\sin n\theta)(C_nr_1^n)+D_nr_1^{-n}$ 得到

$$\begin{cases}B_0C_0\ln r_1+B_0D_0=0,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(E_n\cos n\theta+F_n\sin n\theta)(C_nr_1^n)+D_nr_1^{-n}=0.\end{cases}$$

和 $u(r_2,\theta)=B_0C_0\ln r_2+B_0D_0=u_0$
解得 $B_0C_0=\dfrac{u_o}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$ 和 $B_0D_0=\dfrac{\ln r_1u_0}{\ln\frac{r_1}{r_2}}$. 所以 $u(r,\theta)=\dfrac{u_0\ln\frac{r}{r_1}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$.

3. 求下列定解问题的解:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\big(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\big)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0, & 0<r<1,0<\theta<\dfrac{\pi}{2},\\ u(r,0)=0,\quad u(r,\dfrac{\pi}{2})=0, & 0<r<1,\\ u(1,\theta)=\theta(\dfrac{\pi}{2}-\theta). & 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

解：设 $u(r,\theta)=R(r)\varPhi(\theta)$, 则有 $R^{''}+\dfrac{1}{r}R^{'}\varPhi+\dfrac{1}{r^2}R\varPhi^{''}=0$, 得到 $\dfrac{r^2R^{''}+rR^{'}}{R}=-\dfrac{\varPhi^{''}}{\varPhi}=\lambda$.
对于 $\varPhi^{''}+\lambda\varPhi=0$,$\varPhi(\theta)=\varPhi(\frac{\pi}{2})$, 当 $\lambda<0$ 时，问题没有非平凡解.
当 $\lambda=0$ 时,$\varPhi(\theta)=A_0\theta+B_0$, 又 $\varPhi(0)=B=0,\varPhi\big(\frac{\pi}{2}\big)=\dfrac{\pi}{2}A=0$, 所以 $x\equiv0$.
当 $\lambda>0$ 时, 通解为 $\varPhi(\theta)=E\cos\sqrt{\lambda}\theta+F\sin\sqrt{\lambda}\theta$,
又 $\varPhi(0)=C\cos\sqrt{\lambda}\times0=C=0$,$\varPhi(\frac{\pi}{2})=D\sin\sqrt{\lambda}\cdot\dfrac{\pi}{2}=0$. 即 $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}=n\pi$.
所以 $\lambda=(2n)^2,n=1,2,\ldots$, 那么 $\varPhi_n(\theta)=D_n\sin2n\theta,n=1,2,\ldots.$
将 $\lambda=(2n)^2\ldots$ 代入，解欧拉方程，得到:$R_n(r)=E_nr^{2n}+F_nr^{-2n}$.
所以有 $u(r,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nr^{2n}+b_nr^{-2n})\sin2n\theta$, 其中 $a_n=E_nD_n,b_n=F_nD_n$. 由 $|R(0)|<+\infty$, 则 $F_n=0$.
所以 $a_n+b_n=\dfrac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta(\frac{\pi}{2}-\theta)\sin2n\theta d\theta=\dfrac{4}{\pi}\times\dfrac{2[1-(-1)^n]}{8n^3}$.
所以 $u(r,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{\pi n^3}r^{2n}\sin2n\theta$.

练习六

1. 求解如下定解问题：

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}+\cos\pi x, & 0<x<1,t>0\\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=0,\\ u(x,0)=0\end{cases}$$

解：方程所对应的齐次方程 $u_t=u_{xx}$ 满足该边界条件的固有函数系为 $\{\cos n\pi x\}$.
设 $U(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)\cos n\pi x$. 代入方程中，得：

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[u_n^{'}(t)+n^2\pi^2u_n(t)\cos n\pi x\right]\cos n\pi x=\cos\pi x.$ 当 $n\neq 1$ 时, 问题没有非平凡解.

当 $n=1$ 时, 由 *Laplace* 变换，$sU(s)-u(0)+\pi^2U(s)=\frac{1}{s}$, 得到 $U(s)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{1}{s}-\frac{1}{\pi^2+s})$,

由 *Laplace* 逆变换, 得到 $u(t)=\frac{1}{\pi^2}(1-e^{-\pi^2t})$.

所以 $u(x,t)=\frac{1}{\pi^2}(1-e^{-\pi^2t})\cos\pi x$.

2. 求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+t\sin\frac{\pi x}{l}, & 0\le x\le l, t\ge 0 \\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\ge 0, \\ u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0, & 0\le x\le l \end{cases}$$

解：方程所对应的齐次方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 满足该边界条件的固有函数系为 $\{\sin\frac{n\pi x}{l}x\}$.

设 $U(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}x$. 代入方程中，得：

$u_{tt}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^{''}(t)\sin\frac{n\pi x}{l}x$ 和 $u_{xx}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)(-1)\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{l}x$.

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[u_n^{''}(t)+\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2\right]\sin\frac{n\pi x}{l}=t\sin\frac{\pi x}{l}$.

当 $n=1$ 时,$u_1^{''}(t)+\left(\frac{\pi\alpha}{l}\right)^2u_n(t)=t$, 且 $u_1^{''}(0)=u_1(0)=0$.

由 *Laplace* 变换, 得:$s^2U_1(s)-su_1(0)-s^{'}u_1(0)+\left(\frac{\pi\alpha}{l}\right)^2U_1(s)=\frac{1}{s^2}$

即 $U_1(s)=\left(\frac{l}{\pi\alpha}\right)^2\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{\pi\alpha}\frac{\frac{\pi\alpha}{l}}{s^2+(\frac{\pi\alpha}{l})^2}\right)$.

由 *Laplace* 逆变换, 得:$u_1(t)=\left(\frac{l}{\pi\alpha}\right)\left(t-\frac{l}{\pi\alpha}\sin\frac{\pi\alpha t}{l}\right)$. 即:$u(x,t)=\left(\frac{l}{\pi\alpha}\right)\left(t-\frac{l}{\pi\alpha}\sin\frac{\pi\alpha t}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}$.