HOMEWORK

数理方程与特殊函数

王翎羽　U202213806　提高 2201 班

2024 年 3 月 11 日

练习三

1. 求下列固有值问题的固有值和固有函数：

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X'(l) = 0, \end{cases}$$

解：分三种情况讨论 λ.

(1) 当 $\lambda < 0$ 时，该问题没有平凡解。方程的通解为 $X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$.
将边界条件代入，得到：$A + B = 0$ 和 $A\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l} + B\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0$.
所以有 $A = B = 0$, 方程没有非平凡解.

(2) 当 $\lambda = 0$ 时，该问题没有平凡解。方程的通解为 $X(x) = (A + Bx)e^{\lambda x}$, 很显然，将边界条件代入，得到：$A + B = 0$, 方程没有非平凡解.

(3) 当 $\lambda > 0$ 时，方程的通解为 $X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$, 代入方程的边界条件得到：$-A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l) + B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l) = 0$ 和 $A = 0$. 即 $B\cos(\sqrt{\lambda}l) = 0$, 解得 $\lambda = \lambda_n = (\frac{(2n+1)\pi}{2l})^2(n = 0, 1, 2, \ldots).X_n(x) = B_n\sin(\frac{(2n+1)\pi}{2l}))(n = 0, 1, 2, \ldots)$

2. 求如下定解问题的解：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 3\sin(\frac{3\pi x}{2l}) + 6\sin(\frac{5\pi x}{2l}), \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

解：令 $u(x,t) = X(x)T(t)$, 代入方程分离变量得到两个 ODE,
$T'' + a^2\lambda T = 0$ 和 $X'' + \lambda X = 0$, 由边界条件可知:$X(0) = X'(l) = 0$.
求这个 ODE 的非平凡解：已知当 $\lambda > 0$ 时，问题才会有非平凡解.
通解为：$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$.
代入边界条件得到：$A = 0$ 和 $B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x) = 0(n = 1, 2, \ldots)$. 所以 $\lambda = \lambda_n = (\frac{(2n+1)\pi}{2l})^2$.
从而找到一族非零解：$X_n = B_n\sin(\frac{(2n+1)\pi x}{2l})(n = 1, 2, \ldots)$.
对于 ODE：$T'' + a^2\lambda T = 0$ 而言，将特征值 λ 代入方程得到：
$T''(t) + (\frac{(2n+1)\pi a}{2l})^2T(t) = 0$, 通解为:$T_n(t) = C_n\cos(\frac{(2n+1)\pi at}{2l}) + D_n\sin(\frac{(2n+1)\pi at}{2l})(n = 0, 1, 2, \ldots)$.
由叠加定理得原问题的解表示为：$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l} + b_n\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$,
其中 $a_n = B_nC_n, \quad b_n = B_nD_n$ 是任意常数.
结合初值条件可得:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} = 3\sin(\frac{3\pi x}{2l}) + 6\sin(\frac{5\pi x}{2l}), \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} = 0 \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{l}\int_0^l (3\sin(\frac{3\pi x}{2l}) + 6\sin(\frac{5\pi x}{2l}))\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx, \\ b_n = 0. \end{cases}$$

解得

$$a_n = \begin{cases} 3, & n = 1 \\ 6. & n = 2 \end{cases}$$

所以 $u(x,t) = 3\cos\frac{3\pi at}{2l}\sin\frac{3\pi x}{2l} + 6\cos\frac{5\pi at}{2l}\sin\frac{5\pi x}{2l}$

3. 求解以下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = \sqrt{\pi^2 - 2}\sin\pi x. \end{cases}$$

解：令 $u(x,t) = X(x)T(t)$, 代入方程分离变量得到两个 ODE,$T'' + (\lambda - 2)T = 0$ 和 $X'' + \lambda X = 0$.
由边界条件可知：$X(0) = X(1) = 0$.
求后者的非平凡解：已知当 $\lambda > 0$ 时，问题才会有非平凡解.
通解为：$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$. 由边界条件得：$A = 0$ 和 $A\cos(\sqrt{\lambda}) + B\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$.
即 $\lambda = \lambda_n = (n\pi)^2$, 从而找到一族非零解：$X(x) = B_n\sin(n\pi x)$.
对于 ODE：$T'' + (\lambda - 2)T = 0$ 而言, 将特征值 λ 代入，得到：$T''(t) - ((n\pi)^2 - 2)T(t) = 0$.
其通解为：$T_n(t) = C_n\cos\sqrt{n^2\pi^2 - 2}t + D_n\sin\sqrt{n^2\pi^2 - 2}t$.
原问题的解可表示为：$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\cos\sqrt{n^2\pi^2 - 2}t + b_n\sin\sqrt{n^2\pi^2 - 2}t\right]\sin(n\pi x)$.
其中 $a_n = B_nC_n, \quad b_n = B_nD_n$ 是任意常数.
结合初值条件可得：

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\sin(n\pi x) = 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n\sqrt{n^2\pi^2 - 2}\sin(n\pi x) = \sqrt{\pi^2 - 2}\sin(\pi x). \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} a_n = 0, \\ b_n\sqrt{n^2\pi^2 - 2} = 2\int_0^1 \sqrt{\pi^2 - 2}\sin(\pi x)\sin(n\pi x)dx. \end{cases}$$

解得

$$b_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0. & n \neq 1 \end{cases}$$

所以 $u(x,t) = \sin\sqrt{\pi^2 - 2}t\sin(\pi x)$.

练习四

1. 求如下定解问题的解：

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = x(l - x), \end{cases}$$

解：令 $u(x,t)=X(x)T(t)$, 代入方程分离变量得到两个 ODE,$X''+\lambda X=0$ 和 $T'+a^2\lambda T=0$.
由边界条件可知：$X(0)=X(l)=0$. 求前者的非平凡解：已知当 $\lambda>0$ 时，问题才会有非平凡解.
通解为：$X(x)=A\cos(\sqrt{\lambda}x)+B\sin(\sqrt{\lambda}x)$. 将边界条件代入，得到：
$A=0$ 和 $B\sin(\sqrt{\lambda}x)=0(n=1,2,\dots)$. 所以 $\lambda=\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2$.
从而找到一族非零解：$X_n=B_n\sin(\frac{n\pi x}{l})(n=1,2,\dots)$.
对于 ODE：$T'+a^2\lambda T=0$ 而言, 将特征值 λ 代入，得到：$T'+a^2(\frac{n\pi}{l})^2T=0$. 其通解为：$T(t)=Ce^{-a^2\lambda t}$.
原问题的解可表示为：$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{-a^2(\frac{n\pi}{l})^2t}\sin(\frac{n\pi x}{l})$. 其中 $a_n=B_nC_n$ 为任意常数.
由初值条件，得到 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sin(\frac{n\pi x}{l})=x(l-x)$.
所以 $a_n=\infty_0^lx(l-x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx=(-\frac{2l^2}{n\pi}+\frac{2x^2}{n\pi})-\frac{4l^2}{n^3\pi^3}\cos(n\pi)+\frac{4l^2}{n^3\pi^3}$. 解得

$$a_n=\begin{cases}\frac{2(x^2-l^2)}{n\pi}, & n \quad is \quad even\\ \frac{8l^2}{n^3\pi^3}+\frac{2(l^2-x^2)}{n\pi}. & n \quad is \quad odd\end{cases}$$

所以 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l^2}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n)\sin(\frac{n\pi x}{l})e^{-(\frac{n\pi x}{l})^2t}$

2. 求下列固有值问题的固有值和固有函数：

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0,\\ X'(0)=X(l)=0,\end{cases}$$

解：分三种情况讨论 λ.

(1) 当 $\lambda<0$ 时，该问题没有平凡解。方程的通解为 $X(x)=Ae^{\sqrt{-\lambda}x}+Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$.
将边界条件代入，得到：$A+B=0$ 和 $Ae^{\sqrt{-\lambda}l}+Be^{-\sqrt{-\lambda}l}=0$.
所以有 $A=B=0$, 方程没有非平凡解.

(2) 当 $\lambda=0$ 时，该问题没有平凡解。方程的通解为 $X(x)=(A+Bx)e^{\lambda x}$, 很显然，将边界条件代入，得到：$A+B=0$, 方程没有非平凡解.

(3) 当 $\lambda>0$ 时，方程的通解为 $X(x)=A\cos(\sqrt{\lambda}x)+B\sin(\sqrt{\lambda}x)$, 代入方程的边界条件得到：
$B\cos(\sqrt{\lambda}l)=0$ 和 $A=0$. 解得 $\lambda=\lambda_n=(\frac{(2n+1)\pi}{2l})^2(n=1,2,\dots).X_n(x)=B_n\cos(\frac{(2n+1)\pi x}{2l})(n=1,2,\dots)$

3. 求如下定解问题的解：

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}, \quad 0<x<2, \quad t>0\\ u_x(0,t)=u(2,t)=0,\\ u(x,0)=4\cos\frac{5\pi x}{4},\end{cases}$$

解：令 $u(x,t)=X(x)T(t)$, 代入方程分离变量得到两个 ODE,$X''+\lambda X=0$ 和 $T'+\lambda T=0$.
由前题易得：$X(x)=B_n\cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{4}\right)$. 代入第二个 ODE 得：$T_n=C_ne^{-(\frac{\pi+2n\pi}{4})^2t}$.
$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{\pi+2n\pi}{4})x\right)e^{-(\frac{\pi+2n\pi}{4})^2t}$. 结合初值条件得：解得

$$a_n=\begin{cases}4, & n=2\\ 0. & n\neq 2\end{cases}$$

所以 $u(x,t)=4[\cos(\frac{5\pi x}{4})]e^{-(\frac{5\pi}{4})^2}$.