**Licence Informatique — Algorithmique 2 — Épreuve de juin 2004**
**Durée trois heures — Documents et calculatrices interdits**

# 1 Méthode MPM (4 points)

**Question 1** [3 pts]. Appliquer la méthode MPM sur le problème d'ordonnancement suivant (tracé du graphe, tableau, dates au plus tôt, au plus tard, durée totale du projet, tâches critiques). Combien y a–t–il de chemins critiques ?

| Opération | Durée | Opérations antérieures |
|---|---|---|
| A | 2 | aucune |
| B | 4 | A |
| C | 2 | B, F, H |
| D | 3 | aucune |
| E | 1 | D |
| F | 2 | E |
| G | 2 | E |
| H | 4 | B, G |
| I | 3 | H |

SOLUTION. Toutes les tâches sont critiques sauf $C$ et $F$. Il y a deux chemins critiques. La durée totale du projet est 13. [dessiner le graphe et présenter le tableau vu en TD.]

| Opération | date au plus tôt | date au plus tard |
|---|---|---|
| A | 0 | 0 |
| B | 2 | 2 |
| C | 10 | 11 |
| D | 0 | 0 |
| E | 3 | 3 |
| F | 4 | 9 |
| G | 6 | 6 |
| H | 6 | 6 |
| I | 10 | 10 |
| Fin | 13 | 13 |

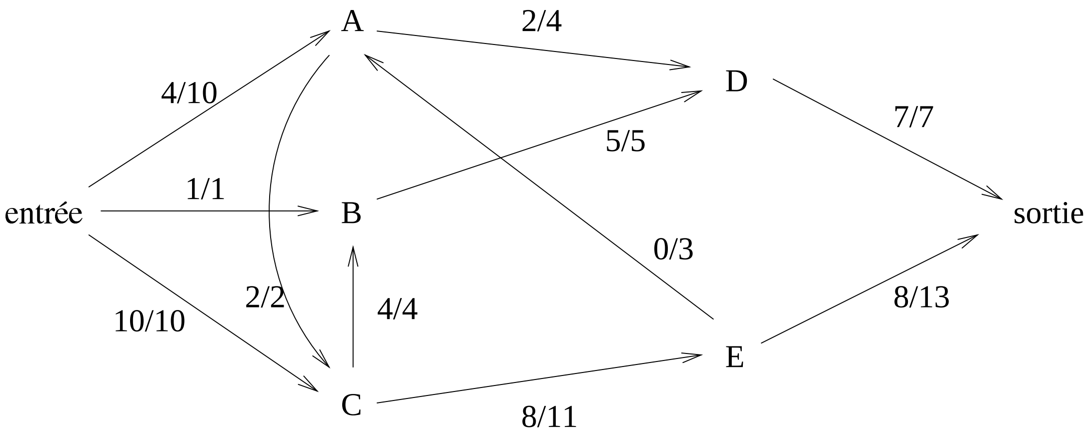
**Question 2** [1 pt]. Il y a une maladresse dans le problème ci–dessus. Laquelle ? Pourquoi ?

SOLUTION. Dire que $B$ est une opération antérieure de $C$ n'est pas faux mais c'est redondant.

# 2 Application de Ford–Fulkerson (3 points)

**Question 3** [2 pts]. Appliquer l'algorithme de Ford–Fulkerson au flot suivant (donner à chaque itération une chaîne améliorante, mais ne pas détailler le calcul de la chaîne).

**Question 4** [1 pt]. À la fin de l'exécution de l'algorithme, montrer que le flot est bien maximal en utilisant un théorème vu en cours.




SOLUTION. La chaîne améliorante est constituée par la suite de sommets : *entrée*, $A$, $D$, $B$, $C$, $E$, *sortie*. Le flux peut être augmenté de 2 le long de cette chaîne. La valeur du flot obtenu est 17.

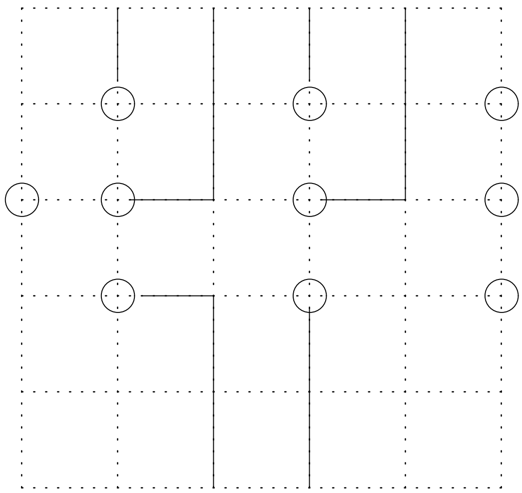
On prouve que le flot obtenu après augmentation est maximal en utilisant le théorème « flot maximal, coupe minimale » et en exhibant une coupe dont la capacité est égale à la valeur du flot. Il s'agit de la coupe obtenue en coloriant *entrée* et $A$ en rouge et les autres sommets en bleu. La capacité de cette coupe est $4 + 1 + 10 + 2 = 17$. [énoncer le théorème et dessiner le graphe après augmentation.]

# 3 Le problème de l'évacuation (5 points)

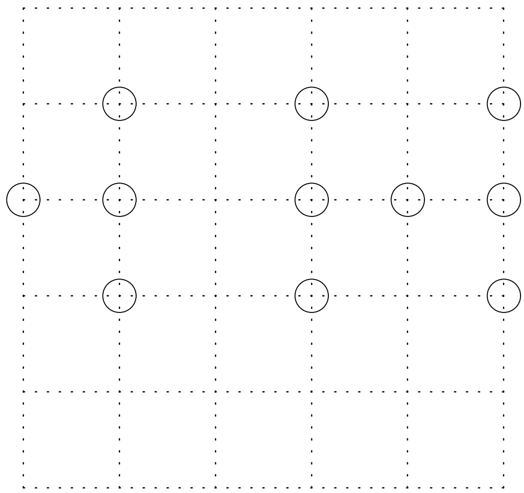
Une *grille* $n \times n$ est un graphe non orienté constitué de $n$ lignes et $n$ colonnes, numérotées de 1 à $n$. Tous les sommets d'une grille ont exactement quatre voisins à l'exception des sommets situés sur le bord de la grille, qui en ont moins.

On considère $p$ personnes réparties sur $p$ sommets distincts de la grille. En cas d'alerte, on veut que les $p$ personnes évacuent la grille en suivant des trajets qui ne se coupent pas (on ne se préoccupe pas des longueurs des trajets). En d'autres mots, on dit que l'évacuation est possible s'il existe $p$ chaînes reliant chacun des $p$ sommets à un sommet quelconque du bord telles que tout sommet de la grille n'appartienne qu'à une chaîne au plus.

*Les cercles représentent les personnes et les traits pleins des trajets d'évacuation*



*Évacuation possible*



*Évacuation impossible*

**Question 5** [2 pts]. Il est parfois utile de résoudre le problème du flot maximal pour des réseaux de transport dans lesquels les sommets aussi ont des capacités (pour chaque sommet, il y a une limite sur la somme des flux entrants). Indiquer en quelques phrases comment réduire le problème du flot maximal pour ce type de réseaux en le problème étudié en cours.

SOLUTION. Il suffit de dédoubler tout sommet $x$ de capacité $c$ en deux sommets reliés par un arc $x_a \xrightarrow[c]{} x_b$ et de transformer les arcs de la forme $(z,x)$ en $(z,x_a)$ et les arcs de la forme $(x,z)$ en $(x_b,z)$. [accompagner l'explication d'un dessin.]

**Question 6** [3 pts]. Décrire en quelques phrases un algorithme basé sur l'algorithme de Ford–Fulkerson qui résolve le problème de l'évacuation. Bien préciser le réseau de transport auquel appliquer Ford–Fulkerson et justifier. On peut supposer résolu le problème de la question précédente.

SOLUTION. On transforme le graphe non orienté en un graphe orienté en transformant chaque arête en deux arcs. On ajoute une supersource reliée aux $p$ sommets comportant les personnes. On ajoute une supersortie reliée aux sommets en bord de grille. Tous les arcs sont de capacité 1. Tous les sommets aussi (voir question précédente). La contrainte sur les sommets est destinée à éviter que les chemins ne se coupent. On applique Ford–Fulkerson. Si le flot maximal est de valeur $p$ l'évacuation est possible sinon elle ne l'est pas.

# 4 Le simplexe (9 points)

Une brasserie s'est engagée à produire 4000 bouteilles de bière blonde, 3000 bouteilles de bière brune et 5000 bouteilles de bière ambrée. Elle hésite entre une méthode artisanale et une méthode plus industrielle (un mélange des deux méthodes est possible aussi). La méthode artisanale lui permet de produire 100 bouteilles de bière de chaque type. La méthode industrielle lui permet de produire 150 bouteilles de bière blonde, 300 de bière brune et 50 de bière ambrée par semaine. La méthode artisanale coûte 500 euros par semaine contre 300 euros par semaine pour la méthode industrielle. La brasserie cherche à minimiser ses coûts.

**Question 7** [2 pts]. Modéliser le problème sous la forme d'un programme linéaire $(P)$. Bien préciser le sens des variables.

SOLUTION. La variable $x_1$ représente le nombre de semaines d'utilisation de la méthode artisanale. La variable $x_2$ représente le nombre de semaines d'utilisation de la méthode industrielle.

$$(P) \left\{ \begin{array}{rcll} 500\,x_1 + 300\,x_2 & = & z[min] & \\ 100\,x_1 + 150\,x_2 & \geq & 4000 & \text{(blonde)} \\ 100\,x_1 + 300\,x_2 & \geq & 3000 & \text{(brune)} \\ 100\,x_1 + 50\,x_2 & \geq & 5000 & \text{(ambrée)} \end{array} \right.$$

**Question 8** [1 pt]. Écrire le programme linéaire dual $(D)$.

SOLUTION. Le dual s'écrit

$$(D) \left\{ \begin{array}{rcll} 4000\,y_1 + 3000\,y_2 + 5000\,y_3 & = & w[max] & \\ 100\,y_1 + 100\,y_2 + 100\,y_3 & \leq & 500 & \text{(artisanale)} \\ 150\,y_1 + 300\,y_2 + 50\,y_3 & \leq & 300 & \text{(industrielle)} \end{array} \right.$$

**Question 9** [1 pt]. Proposer une interprétation du programme dual (imaginer une brasserie concurrente ; que représentent les variables du dual ?).

SOLUTION. Les coefficients des contraintes du dual ont la dimension de bouteilles par semaine. Les seconds membres sont des euros par semaine. Les variables ont donc la dimension d'euros par bouteille.
Cela compris, plusieurs interprétations sont possibles. En voici une : la méchante brasserie tente de vendre des bouteilles des trois types de bière à la gentille brasserie en pratiquant des prix tels que la production de bière ne soit plus rentable pour la gentille brasserie. Les variables $y_i$ représentent les prix à la bouteille pratiqués par par la méchante brasserie.

**Question 10** [2 pts]. Résoudre l'un des deux programmes linéaires $(P)$ ou $(D)$ par la méthode du tableau simplicial.

SOLUTION. Le plus simple consiste à résoudre $(D)$. La solution optimale du dual est $(0, 0, 5, 0, 50)$. L'objectif réalisé est 25000 euros.

```
          y1        y2        y3        y4        y5
    --------------------------------------------------
 y4      100       100       100         1         0 |        500
 y5      150       300        50         0         1 |        300
    --------------------------------------------------
        4000      3000      5000         0         0 |          0 = - z0
```

```
        y1       y2       y3       y4       y5
  -----------------------------------------------------
y3       1        1        1    1/100        0 |        5
y5     100      250        0     -1/2        1 |       50
  -----------------------------------------------------
     -1000    -2000        0      -50        0 |   -25000 = - z0
```

**Question 11** [1 pt]. Déduire sans faire de calcul la solution optimale de l'autre ainsi que l'objectif réalisé à l'optimum.

> SOLUTION. La solution optimale du primal se lit dans le tableau simplicial final du dual. On trouve $(x_1, x_2) = (50, 0)$. Il vaut donc mieux pratiquer la méthode artisanale pendant 50 semaines. L'objectif réalisé est le même que celui du dual : 25000 euros.

**Question 12** [2 pts]. Déterminer sans faire de calcul supplémentaire comment évolueraient les dépenses de la brasserie dans le cas où les clients augmenteraient les quantités commandées.

> SOLUTION. Augmenter les quantités commandées c'est augmenter les seconds membres des contraintes du primal. Une augmentation d'une bouteille d'un second membre entraîne une augmentation de l'objectif réalisé égale à la valeur marginale de la contrainte. La valeur marginale d'une contrainte est la valeur à l'optimum de la variable du dual correspondant à la contrainte.
> Une petite augmentation des commandes de bière blonde ou brune ne change pas l'objectif réalisé (valeurs marginales nulles : contraintes inactives). Une augmentation d'une bouteille de la commande de bière ambrée entraîne une augmentation des dépenses de 5 euros.