Licence Informatique — Algorithmique — Juin 2006
Durée 3 heures — documents et calculatrices interdits

Prenez le temps de faire les calculs au brouillon avant de les recopier sur votre copie d'examen. Efforcez–vous de traiter les questions dans l'ordre. Indiquez bien le numéro de chaque question avant la réponse. Les copies mal présentées seront pénalisées.

1 Programmation linéaire (13 points)

Une entreprise d'interim en informatique comporte 100 salariés. Parmi ces salariés, certains vont suivre un stage dans l'année à venir, les autres non. Pour diverses raisons, il faut que le nombre de salariés qui suivent le stage soit compris entre 20 et 60. Le stage coûte 1000 euros par salarié.

Chaque année, des salariés quittent l'entreprise. L'entreprise estime que, parmi les salariés qui suivront le stage, neuf personnes sur dix resteront dans l'entreprise à la fin de l'année. Elle estime aussi que, parmi les salariés qui ne le suivront pas, huit personnes sur dix seulement resteront dans l'entreprise à la fin de l'année.

Chaque personne quittant l'entreprise à la fin de l'année devra être remplacée par au moins un nouveau salarié, de telle sorte que l'effectif à la fin de l'année soit supérieur ou égal à 100.

Pour que la moyenne d'âge des salariés reste basse, l'entreprise souhaite qu'au moins quinze nouvelles personnes soient embauchées. Toutefois, chaque nouveau salarié doit subir une première formation avant d'être opérationnel. Le coût de cette première formation est estimé à 2000 euros par salarié.

On souhaite déterminer le nombre d'anciens salariés à inscrire en stage ainsi que le nombre de nouveaux salariés à embaucher de telle sorte que le coût global (coûts du stage pour les anciens plus coût de première formation pour les nouveaux) soit minimal.

Question 1 [2 pts]. Écrire un programme linéaire *PL* en les deux variables réelles imposées ci–dessous qui modélise le problème. Donner un mot–clef (ou un commentaire) par contrainte.

$$\begin{array}{ll} x_1 & \text{nombre de salariés qui suivent le stage,} \\ x_2 & \text{nombre de nouveaux salariés à embaucher} \end{array}.$$

SOLUTION. Voici le programme linéaire, sous forme canonique (ça a son intérêt lors du calcul du dual).

$$PL \left\{ \begin{array}{rcll} 1000\,x_1 + 2000\,x_2 & = & z[\min] & \\ (1/10)\,x_1 + x_2 & \geq & 20 & \text{(effectif 100 personnes)} \\ x_1 & \geq & 20 & \text{(au moins 20 personnes en stage)} \\ -x_1 & \geq & -60 & \text{(au plus 60 personnes en stage)} \\ x_2 & \geq & 15 & \text{(au moins 15 nouvelles embauches).} \end{array} \right.$$

Question 2 [2 pts]. Résoudre *PL* graphiquement. Dessiner au moins deux exemplaires de la droite de l'objectif.

SOLUTION. On trouve $x_1 = 20$, $x_2 = 18$ et un objectif réalisé de 56000 euros.

Question 3 [1 pt]. Le programme linéaire pose–t–il un problème de démarrage ? Si oui, indiquer pourquoi en une phrase.

SOLUTION. Oui. L'origine n'est pas une solution réalisable.

Question 4 [2 pts]. Écrire le dual de *PL* en s'arrangeant pour que le dual relève du cas favorable.

SOLUTION. Voici le dual. La variable y_i correspond à la $i$ème contrainte du primal.

$$DL \left\{ \begin{array}{rcll} 20\,y_1 + 20\,y_2 - 60\,y_3 + 15\,y_4 & = & w[\max] & \\ (1/10)\,y_1 + y_2 - y_3 & \leq & 1000 & \text{(salariés en stage)} \\ y_1 + y_4 & \leq & 2000 & \text{(nouveaux salariés).} \end{array} \right.$$

Question 5 [2 pts]. Résoudre le dual par l'algorithme du tableau simplicial (il n'y a que deux ou trois itérations, les calculs sont sans difficulté).

SOLUTION. Voici les itérations.

```
      y1   y2   y3   y4   y5   y6
   -----------------------------------
y5  1/10   1   -1    0    1    0   |  1000
y6     1   0    0    1    0    1   |  2000
   -----------------------------------
      20  20  -60   15    0    0   | 0 = - w0

    y1   y2   y3      y4   y5      y6
   ---------------------------------------
y5   0    1   -1   -1/10   1   -1/10   |   800
y1   1    0    0       1   0       1   |  2000
   ---------------------------------------
     0   20  -60      -5   0     -20   | -40000 = - w0

    y1   y2   y3      y4    y5      y6
   ----------------------------------------
y2   0    1   -1   -1/10    1   -1/10   |   800
y1   1    0    0       1    0       1   |  2000
   ----------------------------------------
     0    0  -40      -3  -20     -18   | -56000 = - w0

Solution of the dual program
Basis solution: y1 = 2000, y2 = 800, y3 = 0, y4 = 0
Objective 56000
```

Question 6 [2 pts]. Déduire du tableau simplicial final du dual, la solution optimale ainsi que l'objectif réalisé à l'optimum du primal.

SOLUTION. On a $x_1 = -f_5 = 20$ et $x_2 = -f_6 = 18$ où f_5 et f_6 désignent les coûts associés aux variables d'écart y_5 et y_6 dans le tableau simplicial final du dual. L'objectif réalisé à l'optimum est le même pour le primal et le dual : 56000 euros.

Question 7 [2 pts]. Quelle est la valeur marginale de la contrainte qui impose que le nombre de personnes à inscrire en stage doit être supérieur ou égal à 20 ? Quelle est la dimension de cette valeur ? En donner une interprétation.

SOLUTION. Il s'agit de la valeur à l'optimum de la variable duale y_2 de la deuxième contrainte : 800 euros par personne. Interprétation : Au delà des 20 minimum, chaque salarié inscrit en stage coûterait à l'entreprise 800 euros.

2 Graphes (8 points)

On considère la fonction suivante.

function bizarre ($G = (S, A)$: graphe non orienté et connexe)
begin
  $B := A$
  for chaque arête $a \in A$ dans un ordre quelconque do
    commentaire : $B \setminus \{a\}$ se lit « B privé de l'arête a »
    if $B \setminus \{a\}$ est connexe then
      $B := B \setminus \{a\}$
    fi
  od
  return (S, B)
end

Question 8 [3 pts]. (question indépendante des quatre autres). Que retourne la fonction ci–dessus (répondre en deux ou trois mots) ? Justifier en explicitant une ou deux propriétés explicitement testées dans l'algorithme et qui correspondent à l'une des caractérisations données dans un théorème vu en cours.

SOLUTION. Un arbre. En effet, le graphe retourné est connexe et cesserait de l'être si on lui retirait n'importe laquelle de ses arêtes (cf. poly, théorème 13, point 5).

Question 9 [2 pts]. Indiquer en une ou deux phrases comment, en appliquant l'un des algorithmes étudiés en cours au graphe $B \setminus \{a\}$, on peut tester à chaque itération si $B \setminus \{a\}$ est connexe.

SOLUTION. Il suffit d'appliquer un des deux algorithmes génériques de parcours sur l'une des extrémités de l'arête a. Le graphe $B \setminus \{a\}$ est connexe si et seulement si l'autre extrémité a été visitée (coloriée en rouge).

Question 10 [1 pt]. Donner en fonction de $n = |S|$ et $m = |A|$, une majoration de la complexité en temps, dans le pire des cas, du test ainsi effectué.

SOLUTION. Les algorithmes de parcours ont une complexité en $O(n+m)$ ou encore en $O(m)$ puisque le graphe G est connexe et que $B \subset A$.

Question 11 [1 pt]. Donner en fonction de $n = |S|$ et $m = |A|$ le nombre d'itérations effectuées par la fonction *bizarre*.

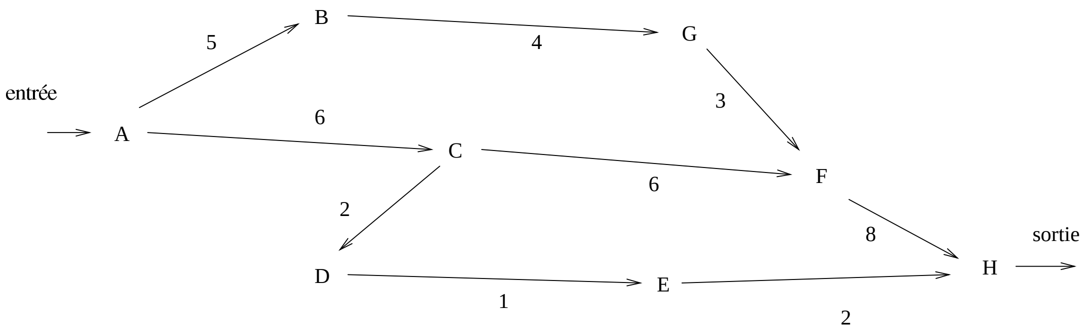
SOLUTION. Il y a exactement m itérations.

Question 12 [1 pt]. Déduire des deux questions précédentes une majoration de la complexité en temps, dans le pire des cas, de la fonction *bizarre*.

SOLUTION. La fonction *bizarre* a une complexité en temps, dans le pire des cas en $O(nm + m^2)$ ou encore en $O(m^2)$.

3 Flot maximal (6 points)

Question 13 [3 pts]. Appliquer l'algorithme de Ford–Fulkerson sur le réseau de transport suivant. On demande qu'à chaque itération, la longueur de la chaîne améliorante calculée soit la plus petite possible.



Il est fortement conseillé de répondre à la question en utilisant la feuille préremplie jointe à l'énoncé.

SOLUTION. On trouve trois chaînes.
Itération 1. Valeur du flot 0. Chaîne $A \to C \to F \to H$ de longueur 3. $\Delta = 6$.
Itération 2. Valeur du flot 6. Chaîne $A \to B \to G \to F \to H$ de longueur 4. $\Delta = 2$.
Itération 3. Valeur du flot 8. Chaîne $A \to B \to G \to F \leftarrow C \to D \to E \to H$ de longueur 7 avec un arc indirect. $\Delta = 1$.
Itération 4. Valeur du flot 9. Pas de chaîne améliorante.

Question 14 [2 pts]. À la fin de l'exécution, indiquer la coupe exhibée par l'algorithme. Justifier le fait que le flot obtenu est maximal en utilisant un théorème étudié en cours.

SOLUTION. La coupe exhibée par l'algorithme sépare A, B et G des autres sommets. Sa capacité est égale à la valeur du flot. D'après le théorème « flot maximal et coupe minimale » le flot est maximal.

Question 15 [1 pt]. Comment appelle–t–on la variante de Ford–Fulkerson où la chaîne améliorante la plus courte possible est calculée à chaque itération ?

SOLUTION. Edmonds-Karp.