**Correction Problème de Démarrage**

# 1 Problèmes de démarrage

$$(P_2)\left\{\begin{array}{lcl} x_1 - 2\,x_2 + x_3 & = & z[min] \\ 3\,x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ -2\,x_1 + x_2 - 2\,x_3 & = & 1 \\ x_1,\, x_2,\, x_3 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Pour pouvoir appliquer l'algorithme du simplexe il faut avant tout mettre le programme sous forme standard. $(P_2)$ n'est pas sous forme standard car ce n'est pas un problème de maximisation. Ces contraintes sont cependant bien exprimées sous forme d'égalités, on ne doit pas les transformer.

$$(P_2)\left\{\begin{array}{lcl} -x_1 + 2\,x_2 - x_3 & = & z[max] \\ 3\,x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ -2\,x_1 + x_2 - 2\,x_3 & = & 1 \\ x_1,\, x_2,\, x_3 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Le programme est maintenant sous forme standard mais aucune variable n'à l'air d'être une variable de base : aucune n'a un coéfficient nul dans $z$ et elles apparaissent toutes dans chaque contrainte, il semble y avoir un problème de démarrage. Ce problème de démarrage est confirmé par le fait que la solution origine $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ n'est pas une solution réalisable, aucune des deux contraintes n'est en effet satisfaite.

Il faut donc construire un programme auxilliaire qui va permettre de trouver une première solution réalisable du programme $(P_2)$. Pour cela il faut ajouter une variable auxilliaire par contrainte qui n'est pas satisfaite par la solution $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, ici il s'agit des deux contraintes. On ajoute les variables auxilliaires positives $x_4$ et $x_5$ qui seront les premières variables de base.

On doit égalemement modifier la fonction objectif : on doit maintenant minimiser $w = x_4 + x_5$ c'est-à-dire maximiser $-w = -x_4 - x_5$. La valeur attendue à la fin du calcul pour $w$ est 0. Si c'est une autre valeur c'est que le programme de départ n'a pas de solution réalisable.

Cependant avec cet objectif $x_4$ et $x_5$ ne remplissent pas toutes les conditions pour pouvoir être dans la base : leur coefficient dans l'expression de l'objectif $w$ n'est pas nul. On remplace donc $x_4$ et $x_5$ dans $w$ par leur expression obtenue grâce à l'équation où chacune apparaît :

$$x_4 = 1 - 3x_1 - x_2 + x_3 \text{ et } x_5 = 1 + 2x_1 - x_2 + 2x_3$$

ce qui donne le programme auxilliaire suivant :

$$(P_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & & & & = & -w[max] \\ 3\,x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \\ -2\,x_1 & + & x_2 & - & 2\,x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_5 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Notons que grâce à ces nouvelles variables $x_4$ et $x_5$ la solution $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ et $x_4 = x_5 = 1$ est une solution réalisable du problème auxiliaire. On peut maintenant écrire le premier tableau pour démarrer l'algorithme du simplexe :

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 3 | 1 | $-1$ | 1 | 0 | 1 | |
| $x_5$ | $-2$ | 1 | $-2$ | 0 | 1 | 1 | |
| | 1 | 2 | $-3$ | 0 | 0 | 2 | $= w$ |

Dans la ligne $w$ c'est $x_2$ qui a le plus grand coefficient positif, c'est donc lui qui est choisi pour entrer dans la base.

On a ensuite le choix de faire sortir $x_4$ ou $x_5$ car leurs rapports coef dernière colonne / coef colonne $x_2$ sont égaux. Finallement on choisit $x_4$ car c'est la variable de plus petit indice.

Pour effectuer l'échange entre $x_4$ et $x_2$ en base on procéde au calcul suivant :

– ligne $x_5 \leftarrow$ ligne $x_5$- ligne $x_4$

– ligne $w \leftarrow$ ligne $w$- 2 $\times$ ligne $x_4$

ce qui donne le tableau suivant :

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 3 | 1 | $-1$ | 1 | 0 | 1 | |
| $x_5$ | $-5$ | 0 | $-3$ | $-1$ | 1 | 0 | |
| | $-5$ | 0 | $-1$ | $-2$ | 0 | 0 | $= w$ |

Tous les coefficients sur la ligne $w$ sont $\leq 0$ et $w = 0$, donc le programme de départ a bien au moins une solution réalisable. Le problème est qu'une des variables auxilliaires ($x_5$) est encore dans la base. La valeur dans la colonne de gauche associée à cette valeur est alors nécessairement nulle, ce qui permet de la faire sortir de la base et ce qui est bien le cas pour $x_5$.

Pour faire sortir de la base cette variable on l'échange avec une variable du problème initial qui n'est pas dans la base (opération de pivot). On choisit d'échanger $x_5$ avec $x_1$.

Pour effectuer l'échange entre $x_1$ et $x_5$ en base on procéde au calcul suivant :

– ligne $x_5 \leftarrow -\frac{1}{5}\times$ligne $x_5$

– ligne $x_2 \leftarrow$ ligne $x_2$- 3 $\times$ ligne $x_5$

– ligne $w \leftarrow$ pas la peine de faire le calcul, cette ligne ne sert plus dans la suite

Notes également que le calcul des coefficients de $x_5$ et $x_4$, les variables auxilliaires, est inutil car ces valeurs ne serviront plus dans la suite du calcul. On obtient donc le tableau suivant :

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | $-14/5$ | ? | ? | 1 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | $3/5$ | ? | ? | 0 | |
| | ? | ? | ? | ? | ? | 0 | $= w$ |

A partir de ce tableau on peut maintenant réecrire le programme initial sous une forme qui met en évidence la solution réalisable $x_1 = x_3 = 0$ et $x_2 = 1$ obtenue à l'issue de la résolution du programme auxilliaire :

$$(P_2)\left\{\begin{array}{ccccccc} -x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & = & -z[max] \\ & & x_2 & - & \frac{14}{5}x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & + & \frac{3}{5}x_3 & = & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \geq & 0 & & \end{array}\right.$$

Il faut ensuite résoudre ce programme en utilisant l'algorithme du simplexe. On peut constater que le coefficient de $x_2$ est 2 dans l'expression de $z$ et que celui de $x_1$ est -1, or ce sont les variables qui ont été désignées par la première phase de calcul pour être dans la base. Comme précédement pour $w$, on remplace dans l'expression de $z$ les variables $x_2$ et $x_1$ par leur expression obtenue dans les deux contraintes du problème :

$$x_2 = 1 + \frac{14}{5}\ x_3 \text{ et } x_1 = -\frac{3}{5}\ x_3$$

c'est-à-dire $-z = 2 + \frac{26}{5}\ x_3$

On écrit maintenant le premier tableau :

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | $-14/5$ | 1 | |
| $x_1$ | 1 | 0 | $3/5$ | 0 | |
| | 0 | 0 | $26/5$ | $-2$ | $= z$ |

et on résoud ...