Licence Informatique — Algorithmique — Mai 2008
Durée 3 heures — documents et calculatrices interdits

Prenez le temps de faire les calculs au brouillon avant de les recopier sur votre copie d'examen. Efforcez–vous de traiter les questions dans l'ordre. Indiquez bien le numéro de chaque question avant la réponse. Les copies mal présentées seront pénalisées.

1 Ordonnancement (5 points)

Un chef de projet a décomposé un projet en un grand nombre de tâches élémentaires notées $t_1, \ldots t_n$. Pour chaque tâche t_i, on connaît la durée d_i de réalisation de la tâche ainsi que la liste des tâches à terminer avant de pouvoir commencer t_i. Le tableau suivant fournit un exemple :

tâche	durée (heures)	tâches à réaliser auparavant
t_1	5	t_3
t_2	10	$t_1,\ t_4$
t_3	8	
t_4	7	

Le chef se pose plusieurs questions au sujet du projet : dans quel ordre exécuter les tâches ? Quelle est la durée minimale du projet ? Les questions qui suivent sont destinées à traiter ces problèmes.

1.1 Graphe associé

Il est possible de modéliser un projet (ainsi décomposé) sous la forme d'un graphe orienté. Si la tâche t_i doit être réalisée *avant* la tâche t_k alors on trace l'arc :

$$t_i \xrightarrow{d_i} t_k.$$

Question 1 [1 pt]. Dessiner le graphe correspondant à l'exemple.

SOLUTION. $t_3 \xrightarrow{8} t_1 \xrightarrow{5} t_2 \xleftarrow{7} t_4$ plus éventuellement une flèche $t_2 \xrightarrow{10} t_f$ où t_f désigne la tâche artificielle « fin de projet ». On peut aussi ajouter une tâche artificielle « début de projet » de durée 0.

Question 2 [1 pt]. Les graphes obtenus à partir de projets, par la méthode décrite ci–dessus, ne sont pas des graphes orientés quelconques. Quelle propriété importante satisfont–ils ?

SOLUTION. Ils sont acycliques (autre réponse admise : ils sont valués positivement).

Question 3 [1 pt]. On souhaite déterminer dans quel ordre exécuter les tâches. Quel algorithme étudié en cours résout cette question ?

SOLUTION. L'algorithme de tri topologique.

1.2 Durée minimale du projet

Question 4 [1 pt]. Quelle est la durée minimale du projet donné en exemple ?

SOLUTION. 23 heures.

Question 5 [1 pt]. Une variante d'un algorithme étudié en cours permet de déterminer cette durée minimale. Préciser en une phrase ou deux.

SOLUTION. La durée minimale du projet est donnée par la valeur maximale des chemins dans le graphe. On peut appliquer la variante de l'algorithme de Bellman étudiée en TD (feuille 9, question 5).

2 Le simplexe (5 points)

On considère le programme linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2\,x_2 & = & z[\max] \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 & \leq & 4 \\ 2\,x_1 + x_2 & \leq & 5 \\ x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0. \end{array}\right.$$

Question 6 [2 pts]. Le résoudre par la méthode du tableau simplicial.

SOLUTION.

```
INITIAL LINEAR PROGRAM

linear program under canonical form
x1 + 2*x2 = z[max]
3*x1 + 2*x2 <= 4
2*x1 + x2 <= 5
x1 + x2 <= 6
x1, x2 >= 0

------------------------------------------------------------

SAME PROGRAM UNDER STANDARD FORM

linear program equivalent to a tableau
x1 + 2*x2 = z[max]
3*x1 + 2*x2 + x3 = 4
2*x1 + x2 + x4 = 5
x1 + x2 + x5 = 6
x1, x2, x3, x4, x5 >= 0
slack variables = [x3, x4, x5]
------------------------------------------------------------
```

```
APPLICATION OF THE DANTZIG ALGORITHM

    x1  x2  x3  x4  x5
   --------------------------
x3   3   2   1   0   0  |  4
x4   2   1   0   1   0  |  5
x5   1   1   0   0   1  |  6
   --------------------------
     1   2   0   0   0  | 0 = - z0

      x1  x2    x3  x4  x5
   -----------------------------
x2   3/2   1   1/2   0   0  |  2
x4   1/2   0  -1/2   1   0  |  3
x5  -1/2   0  -1/2   0   1  |  4
   -----------------------------
      -2   0    -1   0   0  | -4 = - z0

Basis solution: x1 = 0, x2 = 2, x3 = 0, x4 = 3, x5 = 4
Objective 4

Solution of the initial program
Basis solution: x1 = 0, x2 = 2
Objective 4
```

Question 7 [1 pt]. Écrire son dual.

SOLUTION.

```
linear program under canonical form
4*y1 + 5*y2 + 6*y3 = w[min]
3*y1 + 2*y2 + y3 >= 1
2*y1 + y2 + y3 >= 2
y1, y2, y3 >= 0
```

Question 8 [1 pt]. Déduire la solution optimale du dual à partir du tableau simplicial final du primal.

SOLUTION. À l'optimum, $y_i = -f_j$ où f_j désigne le coût sur la colonne de la variable d'écart x_j associée à la variable y_i. On trouve $(y_1, y_2, y_3) = (1, 0, 0)$.

Question 9 [1 pt]. On cherche à résoudre le dual par la méthode des deux phases. Écrire le programme artificiel à résoudre en début de phase I. Ne pas résoudre ce programme.

SOLUTION.

```
linear program equivalent to a tableau
5*y1 + 3*y2 + 2*y3 - y4 - y5 - 3 = z[max]
3*y1 + 2*y2 + y3 - y4 + y6 = 1
```

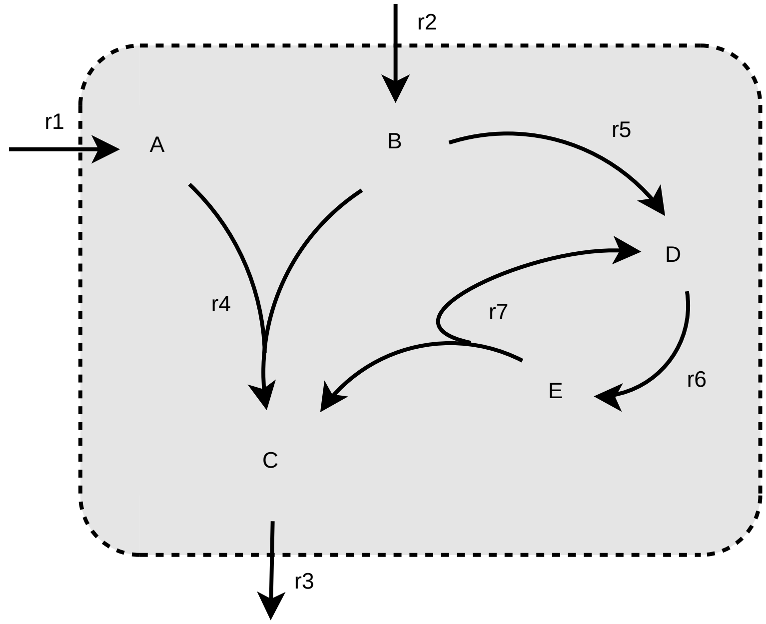


FIG. 1 – Un réseau de réactions.

```
2*y1 + y2 + y3 - y5 + y7 = 2
y1, y2, y3, y4, y5, y6, y7 >= 0
slack variables = [y4, y5]
artificial variables = [y6, y7]
```

3 Modélisation stœchiométrique (10 points)

Les questions de cette section sont liées au devoir à la maison. On considère le réseau de réactions de la figure 1. Il fait intervenir 5 espèces et 7 réactions. Les pointillés matérialisent les frontières avec le « reste du monde ».

Question 10 [1 pt]. Écrire la matrice de stœchiométrie N de ce réseau.

SOLUTION. Avec la notation AMPL :

```
param N :
   r1   r2   r3   r4   r5   r6   r7 :=
A   1    0    0   -1    0    0    0
B   0    1    0   -1   -1    0    0
C   0    0   -1    1    0    0    1
D   0    0    0    0    1   -1    1
E   0    0    0    0    0    1   -1;
```

Question 11 [1 pt]. La matrice de stœchiométrie d'un réseau est une généralisation d'une structure de données classiquement utilisée pour représenter les graphes. Quelle structure de données ?

SOLUTION. La matrice d'incidence.

3.1 Modélisation en AMPL

On considère l'extrait de modèle AMPL suivant. Il est destiné à modéliser l'exemple de la figure 1. Pour faire simple, on suppose que toute réaction est irréversible (comme dans l'exemple). La variable f correspond aux flux. On suppose que des valeurs maximales ont été estimées pour chaque flux du réseau.

```
set ESPECES;
set REACTIONS;

param N {ESPECES,REACTIONS};
var f {REACTIONS} >= 0;
```

Question 12 [1 pt]. Donner une contrainte liant N et f, exprimant le fait que f est un flux du réseau.

SOLUTION.

```
subject to definition_flux {e in ESPECES} :
    sum {r in REACTIONS} N [e,r] * f[r] = 0;
```

Question 13 [1 pt]. Donner la déclaration d'un paramètre *f_max* permettant de désigner les valeurs maximales des flux.

SOLUTION.

```
param f_max {REACTIONS} >= 0;
```

Question 14 [1 pt]. Donner une contrainte spécifiant que chaque flux est inférieur ou égal à sa valeur maximale (ne pas modifier la déclaration de f).

SOLUTION.

```
subject to f_bornes {r in REACTIONS} : f [r] <= f_max [r];
```

3.2 Réactions bloquées

Lorsqu'un réseau est construit par tâtonnements successifs à partir d'observations, il arrive qu'il comporte des réactions *bloquées*, c'est–à–dire des réactions pour lesquelles le seul flux possible est $f = 0$.

Question 15 [1 pt]. Le réseau de la figure 1 comporte exactement une réaction bloquée. Laquelle ? Expliquer.

SOLUTION. Il s'agit de r_5. Il y a plusieurs façons de le voir. Si on développe le système $N \cdot f = 0$, on trouve deux équations $f_5 - f_6 + f_7 = 0$ et $f_6 - f_7 = 0$ qui impliquent que $f_5 = 0$.

En introduisant une variable et des contraintes supplémentaires ainsi qu'un objectif économique adapté, il est possible de déterminer si un réseau comporte des réactions bloquées.

Question 16 [2 pts]. Proposer une solution en AMPL (compléter le modèle donné ci–dessus). Note : on cherche juste à savoir s'il existe des réactions bloquées, pas quelles réactions sont bloquées. On rappelle aussi que, pour simplifier, toutes les réactions sont supposées irréversibles et bornées.

SOLUTION. Là aussi, plusieurs solutions. Une façon de faire consiste à se donner une variable *borne*, poser qu'elle est inférieure à chaque flux et maximiser cette variable. Un flux est alors bloqué si et seulement si l'objectif réalisé vaut 0. Cela donne, en AMPL :

```
var borne >= 0;
subject to def_borne {r in REACTIONS} : borne <= f [r];
maximize objectif : borne;
```

Question 17 [2 pts]. Supposons maintenant que le réseau comporte des réactions bloquées. On souhaite savoir lesquelles. Quelle(s) commande(s) AMPL, appliquée(s) au modèle de la question précédente, répond à cette question ? Comment interpréter son résultat ?

SOLUTION. Il suffit de consulter les valeurs marginales de la contrainte *def_borne*. Les flux bloqués sont ceux pour lesquels la valeur marginale est non nulle. Cela donne.

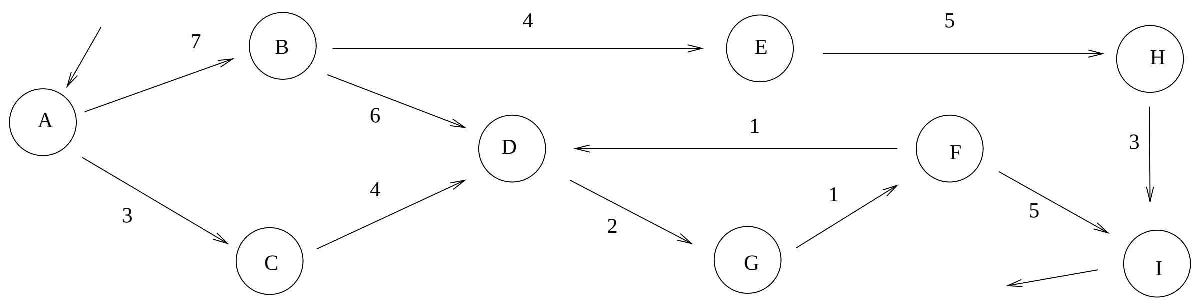
```
model mon-modele.ampl;
solve;
display def_borne;

def_borne [*] :=
r1  0
r2  0
r3  0
r4  0
r5  1
r6  0
r7  0
;
```

4 Flot maximal (3 points)

Question 18 [3 pts]. Appliquer l'algorithme d'Edmonds–Karp sur le réseau de transport suivant. Il est fortement conseillé de répondre à la question en utilisant la feuille préremplie jointe à l'énoncé.

À la fin de la dernière itération, indiquer la coupe exhibée par l'algorithme d'Edmonds–Karp.

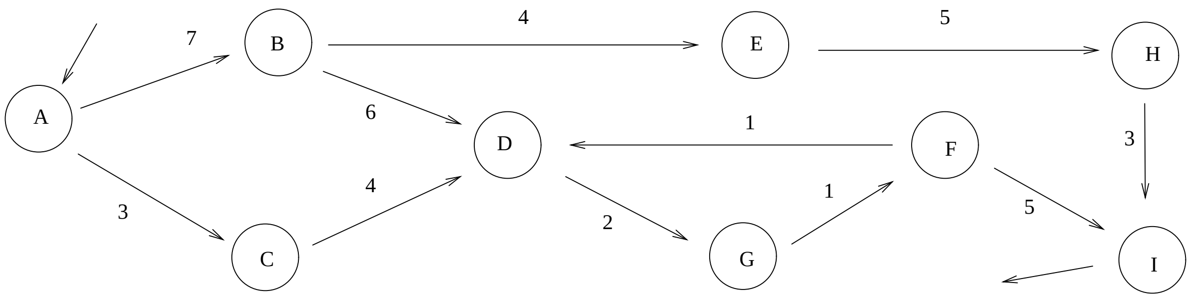
SOLUTION. On trouve deux chaînes améliorantes $A \to B \to E \to H \to I$, longueur 4, $\Delta = 3$ puis $A \to B \to D \to G \to F \to I$, longueur 5, $\Delta = 1$ (on peut aussi passer par C). La valeur maximale des flots est 4. La coupe exhibée par l'algorithme sépare F et I des autres sommets.



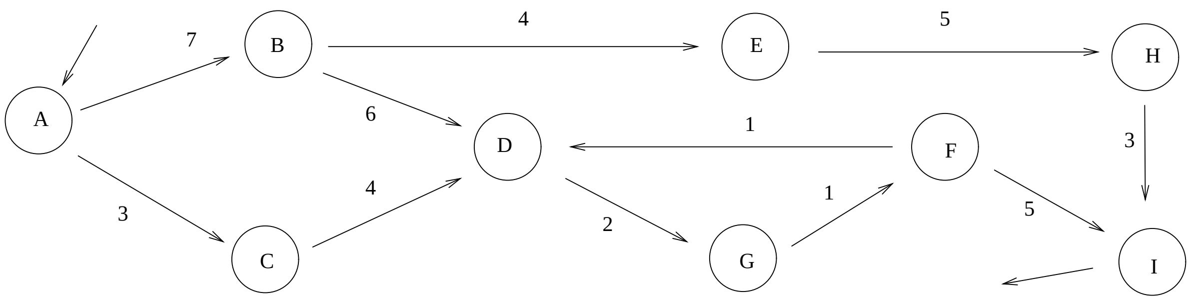
Annexe pour la question sur le flot maximal
Numéro de place (seul indice de recherche en cas de perte) :

Au début de chaque itération, reporter les flux, indiquer la valeur du flot, surligner la chaîne améliorante, donner la valeur Δ. Préciser si la chaîne comporte des arcs indirects.

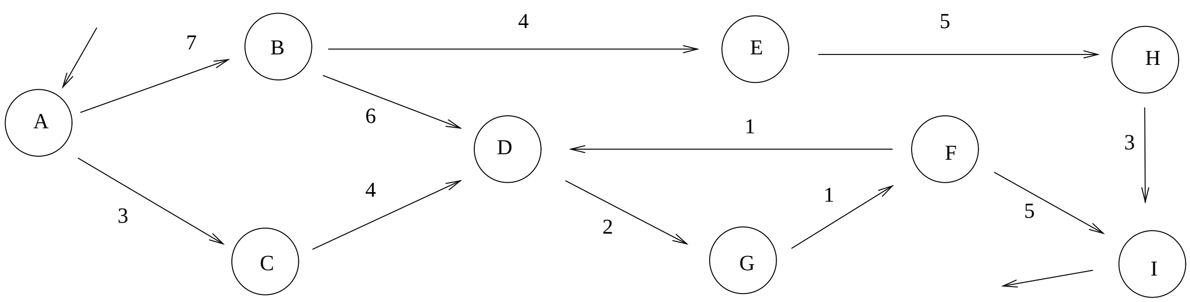
Valeur du flot :
Longueur de la chaîne améliorante :
Valeur de Δ :



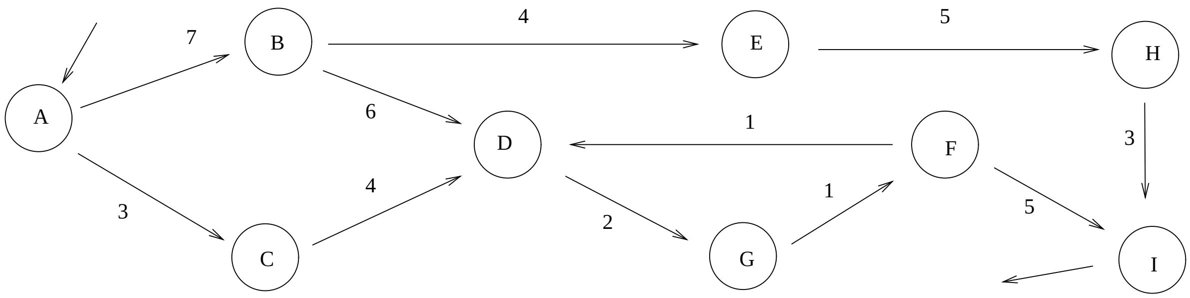
Valeur du flot :
Longueur de la chaîne améliorante :
Valeur de Δ :



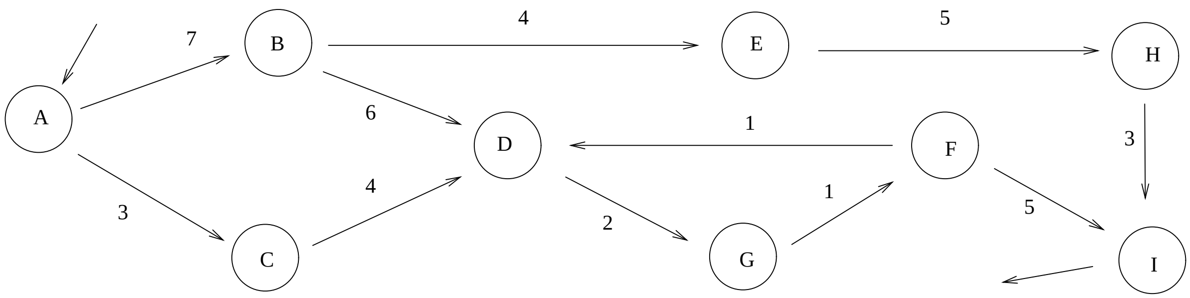
Valeur du flot :
Longueur de la chaîne améliorante :
Valeur de Δ :



Valeur du flot :
Longueur de la chaîne améliorante :
Valeur de Δ :



Valeur du flot :
Longueur de la chaîne améliorante :
Valeur de Δ :



Valeur du flot :
Longueur de la chaîne améliorante :
Valeur de Δ :