Licence Informatique — Algorithmique — Mai 2005
Durée 3 heures — documents et calculatrices interdits

Prenez le temps de faire les calculs au brouillon avant de les recopier sur votre copie d'examen. Efforcez–vous de traiter les questions dans l'ordre. Indiquez bien le numéro de chaque question avant la réponse. Les copies mal présentées seront pénalisées.

1 Programmation linéaire (7 points)

À l'occasion de la tenue du referendum sur le projet de constitution européenne, vous êtes embauché pour aider un homme politique à structurer son intervention télévisée. L'émission dure 60 minutes. L'homme politique peut consacrer son temps, soit à expliquer certains articles du projet de constitution (explications) soit à réfuter les arguments du camp adverse (réfutations). Chaque explication demande 8 minutes et permet de convaincre trois cent mille électeurs indécis. Chaque réfutation demande 4 minutes et permet de convaincre cent mille électeurs indécis. Pour être crédible, l'homme politique doit fournir au moins deux fois plus d'explications que de réfutations. Le projet de constitution ne comporte que sept articles susceptibles d'être expliqués. L'homme politique aimerait savoir combien d'explications et de réfutations il doit donner pendant l'émission pour convaincre un maximum d'électeurs indécis.

Question 1 [1 pt]. Modéliser le problème ci–dessus sous la forme d'un programme linéaire (PL) en variables réelles. Donner les dimensions des variables et au moins un mot–clef par contrainte.

SOLUTION. Le programme linéaire est

$$\left\{\begin{array}{rcll} 300000\,x_1 + 100000\,x_2 & = & z[\max] & \\ 8\,x_1 + 4\,x_2 & \leq & 60 & \text{(durée émission TV)} \\ -x_1 + 2\,x_2 & \leq & 0 & \text{(deux fois plus d'explications)} \\ x_1 & \leq & 7 & \text{(nombre d'articles expliquables)} \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}\right.$$

La variable x_1 représente le nombre d'explications. La variable x_2 représente le nombre de réfutations.

Question 2 [1 pt]. Résoudre le programme graphiquement. Faire apparaître le polygone des solutions réalisables et deux exemplaires de la droite de l'objectif (dont celui passant par la solution optimale). Indiquer la solution optimale et l'objectif réalisé à l'optimum.

SOLUTION. On trouve $(x_1, x_2) = (7, 1)$ et $z = 2200000$ électeurs.

Question 3 [2 pts]. Résoudre le programme par l'algorithme du tableau simplicial. À chaque étape, entourer le pivot choisi, donner la base, la solution de base et le sommet du polygone des solutions réalisables associé.

SOLUTION. Voici au moins les tableaux simpliciaux.

```
         x1       x2       x3       x4       x5
   ------------------------------------------------------
x3        8        4        1        0        0 |       60
x4       -1        2        0        1        0 |        0
x5        1        0        0        0        1 |        7
   ------------------------------------------------------
     300000   100000        0        0        0 |        0 = - z0

         x1       x2       x3       x4       x5
   ------------------------------------------------------
x3        0        4        1        0       -8 |        4
x4        0        2        0        1        1 |        7
x1        1        0        0        0        1 |        7
   ------------------------------------------------------
          0   100000        0        0  -300000 | -2100000 = - z0

         x1       x2       x3       x4       x5
   ------------------------------------------------------
x2        0        1      1/4        0       -2 |        1
x4        0        0     -1/2        1        5 |        5
x1        1        0        0        0        1 |        7
   ------------------------------------------------------
          0        0   -25000        0  -100000 | -2200000 = - z0
```

Question 4 [1 pt]. Écrire le programme linéaire dual de (PL).

SOLUTION. Voici le programme dual avec les notation habituelles

$$\left\{\begin{array}{rcll} 60\,y_1 + 7\,y_3 & = & w[\min] & \\ 8\,y_1 - y_2 + y_3 & \geq & 300000 & \text{(explications)} \\ 4\,y_1 + 2\,y_2 & \geq & 100000 & \text{(réfutations)} \\ y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 & \end{array}\right.$$

Question 5 [2 pts]. Donner (justifier) les valeurs marginales des contraintes de (PL) et les interpréter.

SOLUTION. Les valeurs marginales des contraintes du primal se lisent dans le tableau simplicial final du primal. On trouve :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25000 \\ 0 \\ 100000 \end{pmatrix}.$$

On voit que la deuxième contrainte est inactive (valeur marginale nulle). Si on augmente d'une minute la durée de l'émission, on gagne 25000 électeurs. Si on donne une explication de plus, on en gagne 100000 (note : c'est en fait faux pour une augmentation de 1 explication parce que 1 n'est pas une « petite » augmentation mais c'est vrai pour une diminution).

2 Phylogénétique (6 points)

Le problème qui suit est une version abstraite et simplifiée d'un problème classique de phylogénétique, qui consiste à déterminer l'histoire des mutations qui ont affecté une espèce animale ou végétale au cours des âges.

Soit $T = (S, A)$ un arbre dont les arêtes sont valuées avec des nombres strictement positifs. On construit un graphe G à partir de T en rajoutant à A une ou plusieurs nouvelles arêtes $(x, y) \in S \times S$. La valeur d'une nouvelle arête (x, y) est la valeur minimale des chaînes d'extrémités x et y dans T.

Question 6 [1 pt]. Démontrer en une ou deux phrases que quelle que soit la nouvelle arête (x, y), toutes les chaînes d'extrémités x et y dans T ont même valeur.

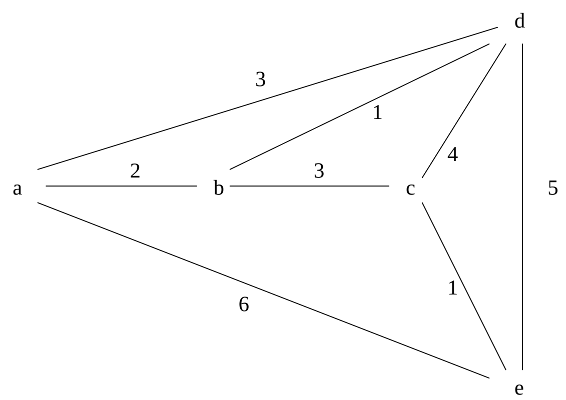
> SOLUTION. Quels que soient les sommets x et y, l'arbre T comporte une unique chaîne élémentaire d'extrémités x et y (thm du cours).

On se pose le problème : à partir de G, retrouver T.

Question 7 [2 pts]. Quel algorithme étudié en cours permet d'extraire un arbre de valeur minimale à partir d'un graphe ? Donner l'algorithme en pseudo–code à la façon du support de cours.

> SOLUTION. L'algorithme de Kruskal. Voir le support de cours.

Question 8 [1 pt]. Appliquer l'algorithme donné en réponse à la question précédente sur le graphe G suivant. À chaque itération, redessiner le graphe en ne faisant apparaître que les arêtes appartenant à T.
Note : *vous trouverez à la fin de l'énoncé un intercalaire prérempli pour vous aider à répondre à la question. Si vous l'utilisez, détachez–le de l'énoncé, indiquez bien votre numéro de place et insérez–le dans votre copie.*



> SOLUTION. Les arêtes sélectionnées par l'algorithme de Kruskal sont, dans l'ordre, (b, d), (c, e), (a, b), (b, c). Les deux premières peuvent être permutées.

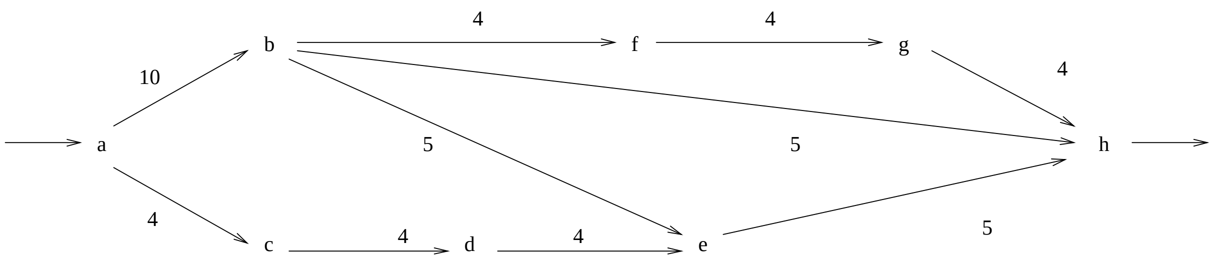
Question 9 [2 pts]. L'algorithme donné en réponse à la question précédente résout–il le problème posé dans le cas général ? Justifier ou donner un contre exemple.

SOLUTION. Oui. Voici une preuve. On n'en demandait pas tant.
L'algorithme de Kruskal calcule un arbre couvrant de valeur minimale de G. Il suffit donc de montrer la proposition suivante :
Proposition. Si U est un arbre couvrant de G qui comporte une nouvelle arête (x, y) alors U n'est pas de valeur minimale.
Preuve. Parce que U est un arbre, le graphe $U \setminus \{(x, y)\}$ n'est plus connexe. Il comporte exactement deux composantes connexes. Colorions les sommets de l'une en bleu et ceux de l'autre en rouge. L'arbre T comporte une chaîne C d'extrémités x et y. Cette chaîne comporte une arête bicolore (x', y') parce que x et y sont de couleurs différentes. Le graphe $R = (U \setminus \{(x, y)\}) \cup \{(x', y')\}$ est un arbre puisqu'il est connexe et comporte le même nombre d'arêtes que U. Il couvre G. D'après le lemme ci–dessous, sa valeur est strictement inférieure à celle de U. □
Lemme. Si (x, y) est une nouvelle arête alors T comporte une chaîne C d'extrémités x et y dont les arêtes sont toutes de valeur strictement inférieure à $v(x, y)$.
Preuve. C comporte au moins deux arêtes parce que (x, y) est nouvelle. Chaque arête de C est de valeur strictement inférieure à $v(x, y)$ parce que les valeurs des arêtes sont strictement positives. □

3 Flot maximal (5 points)

Question 10 [5 pts]. Appliquer l'algorithme d'Edmonds–Karp[1] sur le réseau de transport suivant. Au début de chaque itération, redessiner le réseau de transport en indiquant les flux (étiquettes *flux/capacité*) et la valeur du flot. Surligner la chaîne améliorante trouvée s'il y en a une. Indiquer si elle comporte un arc indirect.

À la fin de l'algorithme, exhiber une coupe prouvant que le flot est maximal. Justifier en citant un théorème vu en cours.
Note : *vous trouverez à la fin de l'énoncé un intercalaire prérempli pour vous aider à répondre à la question. Si vous l'utilisez, détachez–le de l'énoncé, indiquez bien votre numéro de place et insérez–le dans votre copie.*



SOLUTION. Voici les itérations :

1. Valeur du flot = 0. Chaîne trouvée : a, b, h.

1. On rappelle qu'il s'agit de la variante de Ford–Fulkerson qui cherche les chaînes améliorantes les plus courtes possibles.

2. Valeur du flot = 5. Chaîne trouvée : a, b, e, h.
3. Valeur du flot = 10. Chaîne trouvée : a, c, d, e, b, f, g, h. Comporte un arc indirect.
4. Valeur du flot = 14. Pas de chaîne améliorante trouvée.

Une coupe de capacité 14 est formée par a d'une part et tous les autres sommets d'autre part.

4 Tables de hachage (3 points)

On considère une table de hachage T à $m = 11$ entrées indicées de 0 à 10. La table est gérée par la technique du double hachage (adressage ouvert). Les fonctions de hachage primaire et secondaire sont

$$h_1(o) = o \mod m, \qquad h_2(o) = 1 + (o \mod (m-1)).$$

La table T est initialement vide. On y insère successivement les nombres : 14, 3, 26 et 29.

Question 11 [2 pts]. Donner l'état de T après insertion des quatre nombres sous la forme d'un tableau

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T											

SOLUTION. Voici le tableau.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T				14	26		29	3			

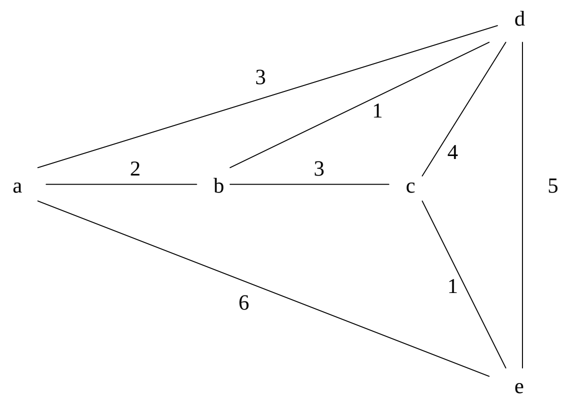
Question 12 [1 pt]. Quel est le facteur de remplissage de la table après insertion des éléments ?

SOLUTION. $\alpha = 4/11$.

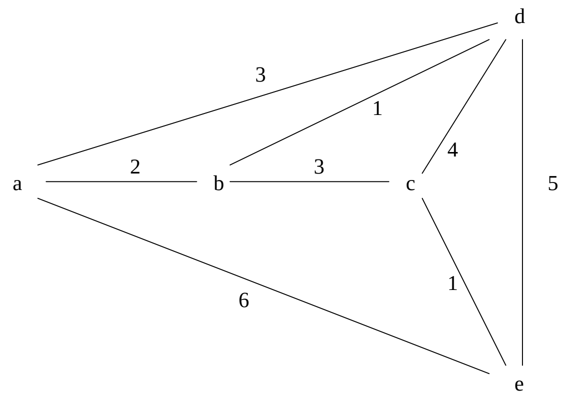
Numéro de place (seul indice de recherche en cas de perte) :

Cet intercalaire est destiné à vous aider à répondre à la question 8. Il se peut que vous n'ayez pas besoin de toutes les itérations prévues ci–dessous.

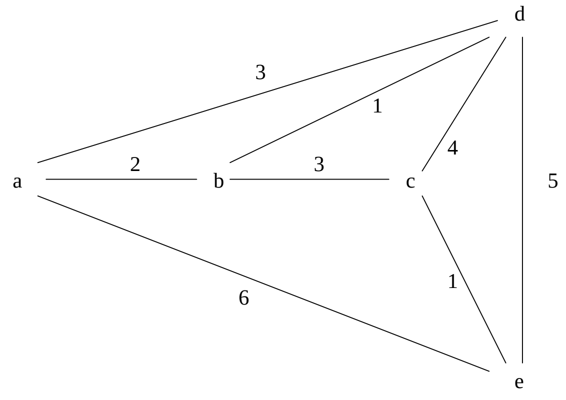
Surligner les arêtes de T après l'itération numéro 1 :



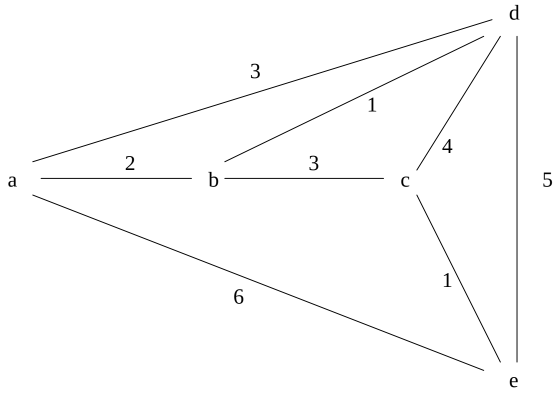
Surligner les arêtes de T après l'itération numéro 2 :



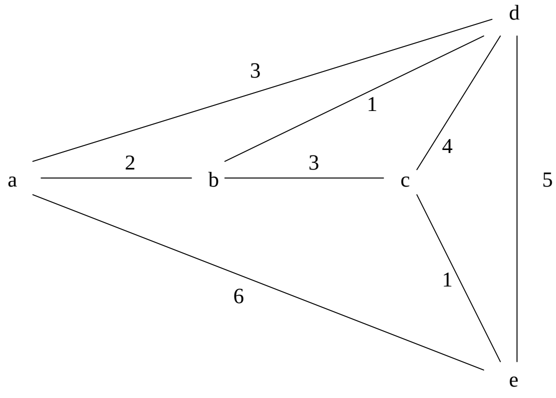
Surligner les arêtes de T après l'itération numéro 3 :



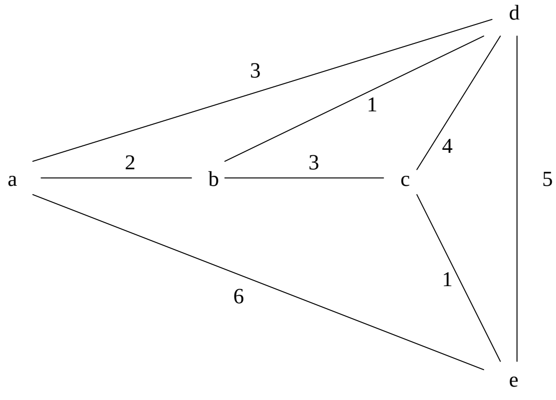
Surligner les arêtes de T après l'itération numéro 4 :



Surligner les arêtes de T après l'itération numéro 5 :



Surligner les arêtes de T après l'itération numéro 6 :

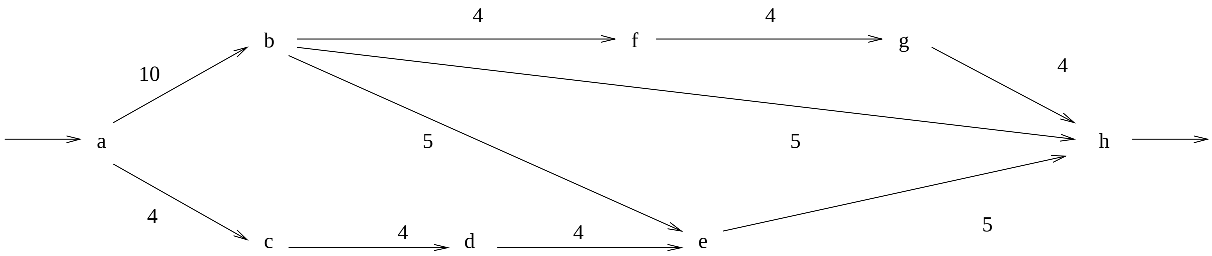


Numéro de place (seul indice de recherche en cas de perte) :

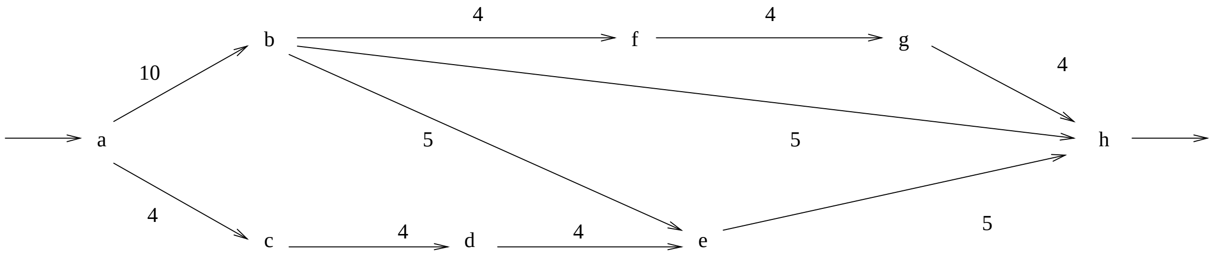
Cet intercalaire est destiné à vous aider à répondre à la question 10. Il se peut que vous n'ayez pas besoin de toutes les itérations prévues ci–dessous.

À la fin de la dernière itération, donner une coupe prouvant que le flot est maximal. Justifier en citant un théorème vu en cours.

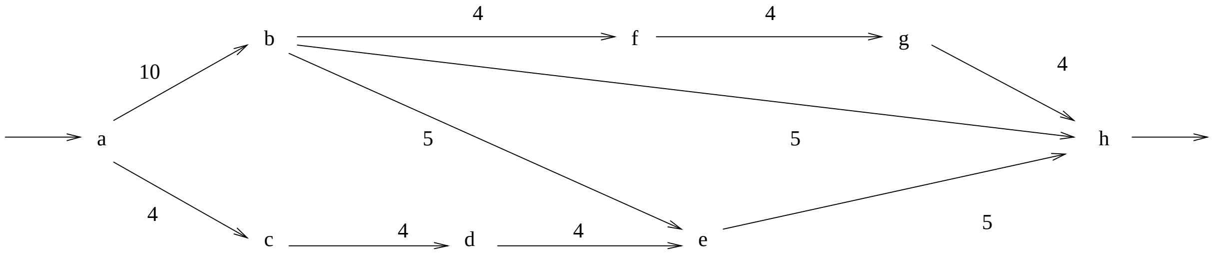
Valeur du flot au début de l'itération 1 :
Reporter les flux et surligner la chaîne améliorante trouvée :



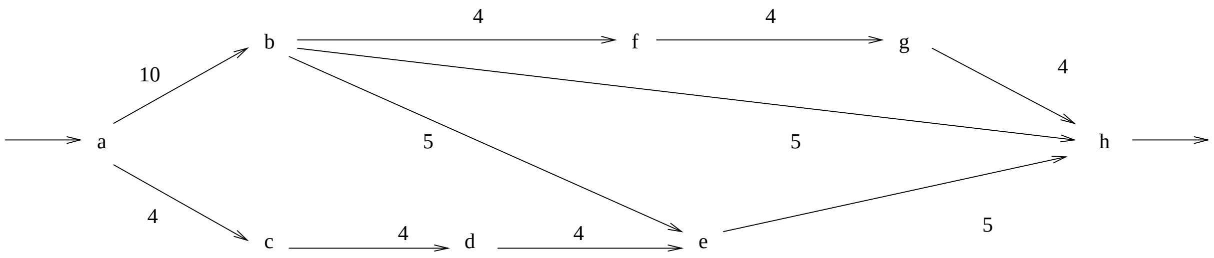
Valeur du flot au début de l'itération 2 :
Reporter les flux et surligner la chaîne améliorante trouvée :



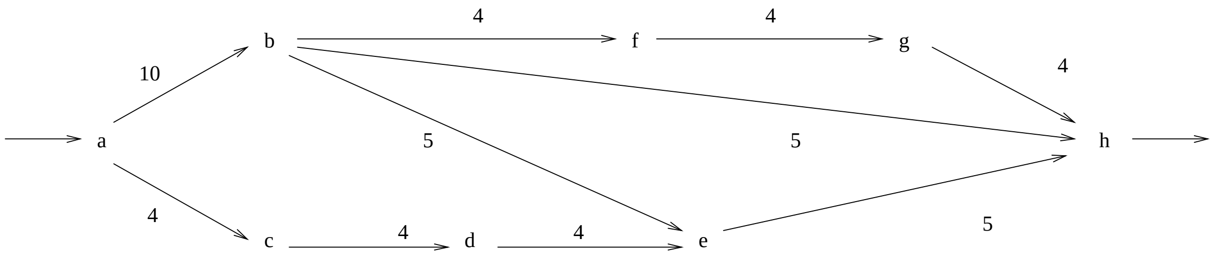
Valeur du flot au début de l'itération 3 :
Reporter les flux et surligner la chaîne améliorante trouvée :



Valeur du flot au début de l'itération 4 :
Reporter les flux et surligner la chaîne améliorante trouvée :



Valeur du flot au début de l'itération 5 :
Reporter les flux et surligner la chaîne améliorante trouvée :



Valeur du flot au début de l'itération 6 :
Reporter les flux et surligner la chaîne améliorante trouvée :