Université Lille1 Sciences et Technologies

6 septembre 2010
Licence ST-A
François Lemaire
Marie-Émilie Voge
Léopold Weinberg

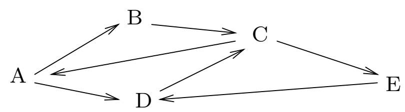
ALGO

TD 6

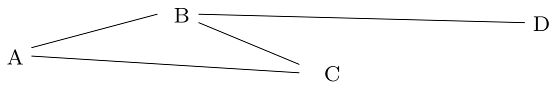
1 Graphes

Q 1. Donner une majoration du nombre de chemins élémentaires d'un graphe comportant n sommets.

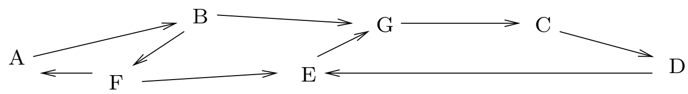
Q 2. Donner les chemins élémentaires de longueur maximale du graphe



Q 3. Donner la matrice d'adjacence et la matrice d'incidence du graphe suivant.



Q 4. Donner les composantes fortement connexes du graphe suivant. Quels sont les sommets accessibles à partir de B ? de E ?



Définition 1 *Soit E un ensemble. Une relation $\mathscr{R}$ de E dans E est une* relation d'équivalence *si elle vérifie pour tous x, $y \in E$ les trois conditions suivantes :*

1. *$x \mathscr{R} x$ (réflexivité) ;*
2. *$x \mathscr{R} y \Rightarrow y \mathscr{R} x$ (symétrie) ;*
3. *$(x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z) \Rightarrow x \mathscr{R} z$ (transitivité).*

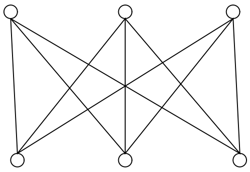
Q 5. La relation $\mathscr{R}$ de S dans S définie par : « $x \mathscr{R} y$ si x est accessible à partir de y » est–elle une relation d'équivalence dans le cas des graphes non orientés ? dans le cas des graphes orientés ?

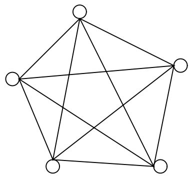
Q 6. À tout sommet s d'un graphe $G = (S, A)$ on associe le nombre $d^+(s)$ égal au nombre d'arcs de A de but s, le nombre $d^-(s)$ égal au nombre d'arcs de A de source s et le nombre $d(s) = d^+(s) + d^-(s)$, appelé *degré* de s. Quel rapport y a–t–il entre la somme des degrés des sommets d'un graphe et le nombre d'arcs m ? En déduire que dans un graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair. Soit δ le minimum des degrés des sommets d'un graphe ayant m arcs et n sommets. Montrer que $n\,\delta \leq 2\,m$.

Q 7. Une soirée est organisée entre membres d'un laboratoire. Les participants se serrent la main pour se souhaiter la bienvenue et chaque participant se rappelle exactement le nombre de fois où il a serré la main de quelqu'un. À la fin de la soirée, le directeur du laboratoire fait la somme du nombre de fois où chaque participant a serré la main. Montrer que le résultat est un nombre pair.

Théorème 1 *(Euler)*
Soit G un graphe planaire, connexe à n sommets m arêtes et f faces. Alors $n - m + f = 2$.

Q 8. Utiliser le théorème pour montrer que les graphes suivants ne sont pas planaires. Le premier est le graphe $K_{3,3}$ obtenu à partir de deux ensembles de trois sommets, en reliant chaque sommet du premier ensemble à chaque sommet du second. Le second graphe, K_5, est formé de cinq sommets reliés deux–à–deux. En voici des représentations non planaires.





2 Modélisation

Trois aciéries produisent 6900 tonnes d'acier qui couvrent exactement les besoins de sept usines automobiles. Les frais de transport d'une tonne d'acier d'une aciérie à une usine varient en fonction de l'aciérie et de l'usine. On cherche à minimiser les frais de transport globaux.

aciérie		Gary	Cleveland	Pittsburgh
	production	1400	2600	2900
usine	besoin	frais de transport par tonne		
Framingham (Massachusetts)	900	39	27	24
Detroit (Michigan)	1200	14	9	14
Lansing (Michigan)	600	11	12	17
Windsor (Ontario)	400	14	9	13
Saint Louis (Missouri)	1700	16	26	28
Fremont (Californie)	1100	82	95	99
Lafayette (Indiana)	1000	8	17	20

Q 9. Modéliser ce problème en AMPL.

Q 10. À ce problème correspond un graphe. Lequel ? Les variables sont–elles associées aux sommets ou aux arcs ?