

Exercice 1. *Coefficient binomial*

Les coefficients binomiaux sont définis pour les entiers naturels $n \geq p \geq 0$ par $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.
Une relation de récurrence valable pour $n > p > 0$ est

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

Question 1.1. *Réalisez une fonction effectuant un calcul récursif des coefficients binomiaux qui n'utilise que l'addition des entiers.*

Exercice 2. *Palindromes*

Un *palindrome* est un mot dont les lettres lues de gauche à droite sont les mêmes que celles lues de droite à gauche. Les mots radar, été, ici sont des palindromes.

Question 2.1. *Réalisez un prédicat qui teste si un mot est un palindrome. Pour cela vous pourrez utiliser la fonction `copy` qui permet d'extraire une sous-chaîne.*

```
1 // copy(s,d,l) = sous-chaîne de s de longueur l débutant à l'indice d
2 function copy(s : STRING; d : INTEGER; l : INTEGER) : STRING;
```

Exercice 3. *Somme des éléments d'un tableau*

Donnez une version récursive du calcul de la somme des éléments d'un tableau d'entiers.

Exercice 4. *Inversion*

Donnez un algorithme récursif de l'inversion de l'ordre des éléments d'un tableau.

Exercice 5. *Recherche dichotomique d'un zéro*

On veut réaliser une fonction qui calcule une valeur approchée avec une précision ε de l'unique racine d'une fonction numérique f supposée continue monotone sur un intervalle $[a, b]$.

On suppose la fonction numérique f réalisée en PASCAL par une fonction

```
1 // f(x) fonction croissante
2 function f(x : REAL) : REAL;
```

Question 5.1. *On suppose la fonction f croissante sur $[a, b]$. Réalisez une fonction qui calcule par dichotomie une valeur approchée à epsilon près de l'unique racine dans $[a, b]$.*

```
1 // racineDicho(a,b,ε) = calcul valeur approchée à ε près, de l'unique racine de
  f dans [a,b]
2 // CU : f(a)<0 et f(b)>0, f continue croissante sur [a,b]
3 function racineDicho(a,b : REAL; epsilon : REAL) : REAL;
```

Comment utiliser cette fonction pour calculer la racine carrée d'un réel positif ?

Question 5.2. Réalisez une fonction de recherche dichotomique pour une fonction non nécessairement croissante, mais monotone.

Exercice 6. La fonction 91

La fonction f_{91} de McCarthy est une fonction dont voici le programme en PASCAL :

```
1  function f91 (n : CARDINAL) : CARDINAL;  
2  begin  
3      if n > 100 then  
4          begin  
5              f91 := n-10;  
6          end else begin  
7              f91 := f91 (f91 (n+11)) ;  
8          end {if};  
9  end {f91};
```

Question 6.1. Calculez la valeur de $f_{91}(91)$.

Question 6.2. En déduire que pour tout $n \in \llbracket 0, 101 \rrbracket$ $f(n) = 91$.

Exercice 7. On suppose que l'on dispose des pièces de 0, 01, 0, 02, 0, 05, 0, 10, 0, 20, 0, 50, 1 et 2 euros.

Question 7.1. De combien de façons peut-on faire l'appoint pour régler une somme de $n \in \mathbb{N}$ euros ?