Complexité des algorithmes (1)

Nour-Eddine Oussous, Éric Wegrzynowski

Licence ST-A, USTL - API2

28 septembre 2009

Coût d'un algorithme

L'exécution d'un programme a toujours un *coût*. On distingue habituellement deux coûts :

Coût d'un algorithme

L'exécution d'un programme a toujours un *coût*. On distingue habituellement deux coûts :

- le temps d'exécution : *la complexité temporelle* (point sensible)

Coût d'un algorithme

L'exécution d'un programme a toujours un *coût*. On distingue habituellement deux coûts :

- le temps d'exécution : *la complexité temporelle* (point sensible)
- l'espace mémoire requis : *la complexité spatiale*

Coût d'un algorithme

L'exécution d'un programme a toujours un *coût*. On distingue habituellement deux coûts :

- le temps d'exécution : *la complexité temporelle* (point sensible)
- l'espace mémoire requis : *la complexité spatiale*

Historique	Vitesse μprocesseur	Mémoire
Fin 70	10 MHz	16 ko
	$\times$ 40	$\times$ 4000
Fin 90	400 MHz	64 Mo
	$\times$ 2.5	$\times$ 16
Fin 00	1 GHz	1 Go
Fin 04	3 GHz	1 Go

Influence de la taille des données

Ces coûts c dépendent de la taille n des données à traiter

$$c = f(n)$$

f étant une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

- Proposer des méthodes pour

- Proposer des méthodes pour
  - *estimer le coût* d'un algorithme

- Proposer des méthodes pour
  - *estimer le coût* d'un algorithme
  - *comparer* deux algorithmes sans avoir à les programmer

- Proposer des méthodes pour
  - *estimer le coût* d'un algorithme
  - *comparer* deux algorithmes sans avoir à les programmer
- Estimer l'influence de la *taille des données* n sur les ressources nécessaires c.

- Proposer des méthodes pour
  - *estimer le coût* d'un algorithme
  - *comparer* deux algorithmes sans avoir à les programmer
- Estimer l'influence de la *taille des données* n sur les ressources nécessaires c.

$$c = f(n)$$

Somme des éléments d’un tableau (algo)

```
// Donnee: un tableau d'entiers A indexe de 1 a n
// Sortie: $\Sigma_{i=1}^{n} A[i]$
Somme(A):
  s := 0
  {$s = \Sigma_{k=1}^{0} A[k]$}
  pour i variant de 1 a n faire
    s := s + A[i]
    {$s = \Sigma_{k=1}^{i} A[k]$}
  fin pour
  {$s = \Sigma_{k=1}^{n} A[k]$}
```

En retirant les commentaires :

```
Somme(A):
  s := 0
  pour i variant de 1 a n faire
    s := s + A[i]
  fin pour
```

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

Le temps de calcul de la somme dépend évidemment

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

Le temps de calcul de la somme dépend évidemment

1. de la taille n du tableau

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

Le temps de calcul de la somme dépend évidemment

1. de la taille *n* du tableau
2. et du nombre d'opérations élémentaires effectuées

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

Le temps de calcul de la somme dépend évidemment

1. de la taille n du tableau
2. et du nombre d'opérations élémentaires effectuées
   - affectations

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

Le temps de calcul de la somme dépend évidemment

1. de la taille n du tableau
2. et du nombre d'opérations élémentaires effectuées
    - affectations
    - additions d'entiers

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

Le temps de calcul de la somme dépend évidemment

1. de la taille n du tableau
2. et du nombre d'opérations élémentaires effectuées
   - affectations
   - additions d'entiers
   - accès à un élément du tableau

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

En notant

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

En notant

- $t_{:=}$ le temps d'une affectation d'entiers

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

En notant

- $t_{:=}$ le temps d'une affectation d'entiers
- t_{+} le temps d'une addition de deux entiers

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

En notant

- $t_{:=}$ le temps d'une affectation d'entiers
- t_{+} le temps d'une addition de deux entiers
- $t_{[]}$ le temps d'un accès à un élément du tableau

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

En notant

- $t_{:=}$ le temps d'une affectation d'entiers
- t_{+} le temps d'une addition de deux entiers
- $t_{[]}$ le temps d'un accès à un élément du tableau
- $a(n)$ le nombre d'affectations pour un tableau de taille n

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

En notant

- $t_{:=}$ le temps d'une affectation d'entiers
- t_{+} le temps d'une addition de deux entiers
- $t_{[]}$ le temps d'un accès à un élément du tableau
- $a(n)$ le nombre d'affectations pour un tableau de taille n
- $b(n)$ le nombre d'additions pour un tableau de taille n

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

En notant

- $t_{:=}$ le temps d'une affectation d'entiers
- t_{+} le temps d'une addition de deux entiers
- $t_{[]}$ le temps d'un accès à un élément du tableau
- $a(n)$ le nombre d'affectations pour un tableau de taille n
- $b(n)$ le nombre d'additions pour un tableau de taille n
- $c(n)$ le nombre d'accès pour un tableau de taille n

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

En notant

- $t_{:=}$ le temps d'une affectation d'entiers
- t_{+} le temps d'une addition de deux entiers
- $t_{[]}$ le temps d'un accès à un élément du tableau
- $a(n)$ le nombre d'affectations pour un tableau de taille n
- $b(n)$ le nombre d'additions pour un tableau de taille n
- $c(n)$ le nombre d'accès pour un tableau de taille n

le temps $T(n)$ de calcul s'exprime par

$$\boxed{T(n) = a(n) \cdot t_{:=} + b(n) \cdot t_{+} + c(n) \cdot t_{[]}}$$

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

```
1 Somme(A):
2   s := 0
3   pour i variant de 1 a n faire
4     s := s + A[i]
5   fin pour
```

- La ligne 4 de l'algorithme montre que

$$b(n) = c(n)$$

Somme des éléments d'un tableau (analyse)


```
1 Somme(A):
2   s := 0
3   pour i variant de 1 a n faire
4     s := s + A[i]
5   fin pour
```

- La ligne 4 de l'algorithme montre que
$$b(n) = c(n)$$
- et en tenant compte de la ligne 2
$$a(n) = 1 + b(n)$$

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

```
1 Somme(A):
2   s := 0
3   pour i variant de 1 a n faire
4     s := s + A[i]
5   fin pour
```

- La ligne 4 de l'algorithme montre que
$$b(n) = c(n)$$
- et en tenant compte de la ligne 2
$$a(n) = 1 + b(n)$$

donc

$$\boxed{T(n) = b(n) \cdot (t_{:=} + t_{+} + t_{[]}) + t_{:=}}$$

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

```
1 Somme(A):
2   s := 0
3   pour i variant de 1 a n faire
4     s := s + A[i]
5   fin pour
```

- La ligne 4 de l'algorithme montre que
$$b(n) = c(n)$$
- et en tenant compte de la ligne 2
$$a(n) = 1 + b(n)$$

donc

$$\boxed{T(n) = b(n) \cdot (t_{:=} + t_{+} + t_{[]}) + t_{:=}}$$

Il suffit donc de déterminer $b(n)$.

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

- À chaque étape i de la boucle `pour`, il y a une addition

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

- À chaque étape i de la boucle `pour`, il y a une addition
- donc pour les n étapes il y a

$$b(n) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

additions

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

- À chaque étape i de la boucle `pour`, il y a une addition
- donc pour les n étapes il y a

  $$b(n) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

  additions

Le coût de l'algorithme `Somme` est donc

$$T(n) = n \cdot (t_{:=} + t_{+} + t_{[]}) + t_{:=}$$

Somme des éléments d'un tableau (analyse)

- À chaque étape i de la boucle `pour`, il y a une addition
- donc pour les n étapes il y a

  $$b(n) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

  additions

Le coût de l'algorithme `Somme` est donc

$$T(n) = n \cdot (t_{:=} + t_{+} + t_{[]}) + t_{:=}$$

soit de la forme

$$\boxed{T(n) = \alpha \cdot n + \beta}$$

α et β ne dépendant pas de n, mais uniquement du coût des opérations élémentaires.

Insertion d'un élément dans un tableau trié (algo)

Données : un tableau $A[1..MAX]$, un indice $n > 1$
CU : la tranche $A[1..n-1]$ est triée
But : placer l'élément $A[n]$ à sa place dans la tranche $A[1..n]$
Var. locales : i

```
inserer(A,n):
  i := n
  {A[1..i-1] trié, A[i] < A[i+1..n], A[i+1..n] trié}
  tant que i > 1 et A[i] < A[i-1] faire
    echanger(A[i],A[i-1])
    dec(i)
    {A[1..i-1] trié, A[i] < A[i+1..n], A[i+1..n] trié}
  fin tant que
  {A[1..i-1] trié, A[i] < A[i+1..n], A[i+1..n] trié
   et (i = 1 ou A[i] ≥ A[i-1])}
```

Insertion d'un élément dans un tableau trié (algo)

Sans les commentaires :

```
inserer(A,n):
  i := n
  tant que i > 1 et A[i] < A[i-1] faire
    echanger(A[i],A[i-1])
    dec(i)
  fin tant que
```

Insertion d'un élément dans un tableau trié (analyse)

Le coût de l'insertion dépend

Insertion d'un élément dans un tableau trié (analyse)

Le coût de l'insertion dépend

1. de la taille $n-1$ de la tranche triée du tableau

Insertion d'un élément dans un tableau trié (analyse)

Le coût de l'insertion dépend

1. de la taille $n-1$ de la tranche triée du tableau
2. de la valeur de l'élément $A[n]$

Insertion d'un élément dans un tableau trié (analyse)

Le coût de l'insertion dépend

1. de la taille $n-1$ de la tranche triée du tableau
2. de la valeur de l'élément $A[n]$
3. du coût des opérations de décrémentation et comparaison d'indices, d'accès à un élément du tableau, et enfin d'échange et de comparaison d'éléments du tableau.

Insertion d'un élément dans un tableau trié (analyse)

Le coût de l'insertion dépend

1. de la taille $n-1$ de la tranche triée du tableau
2. de la valeur de l'élément $A[n]$
3. du coût des opérations de décrémentation et comparaison d'indices, d'accès à un élément du tableau, et enfin d'échange et de comparaison d'éléments du tableau.

Nous ne nous intéressons qu'à ces deux dernières opérations

- $e(n) =$ *nombre d'échanges*
- $c(n) =$ *nombre de comparaisons d'éléments de A*

dans l'insertion de $A[n]$ dans $A[1..n-1]$

Insertion d'un élément dans un tableau trié (coût)

Pour insérer l'élément d'indice n dans la tranche $A[1..n-1]$:

```
inserer(A,n):
  i := n
  tant que i > 1 et A[i] < A[i-1] faire
    echanger(A[i],A[i-1])
    dec(i)
  fin tant que
```

Insertion d'un élément dans un tableau trié (coût)

Pour insérer l'élément d'indice n dans la tranche $A[1..n-1]$:

```
inserer(A,n):
  i := n
  tant que i > 1 et A[i] < A[i-1] faire
    echanger(A[i],A[i-1])
    dec(i)
  fin tant que
```

- Meilleur des cas : $A[n] \geq A[1..n-1]$ (le tableau est trié)

Insertion d'un élément dans un tableau trié (coût)

Pour insérer l'élément d'indice n dans la tranche $A[1..n-1]$:

```
inserer(A,n):
  i := n
  tant que i > 1 et A[i] < A[i-1] faire
    echanger(A[i],A[i-1])
    dec(i)
  fin tant que
```

- Meilleur des cas : $A[n] \geq A[1..n-1]$ (le tableau est trié)
  - nombre échanges :

$$e(n) = 0$$

Insertion d'un élément dans un tableau trié (coût)

Pour insérer l'élément d'indice n dans la tranche $A[1..n-1]$:

```
inserer(A,n):
  i := n
  tant que i > 1 et A[i] < A[i-1] faire
    echanger(A[i],A[i-1])
    dec(i)
  fin tant que
```

- Meilleur des cas : $A[n] \geq A[1..n-1]$ (le tableau est trié)
  - nombre échanges :
    $$e(n) = 0$$
  - nombre comparaisons :
    $$c(n) = 1$$

Insertion d'un élément dans un tableau trié (coût)

Pour insérer l'élément d'indice n dans la tranche $A[1..n-1]$:

```
inserer(A,n):
  i := n
  tant que i > 1 et A[i] < A[i-1] faire
    echanger(A[i],A[i-1])
    dec(i)
  fin tant que
```

Insertion d'un élément dans un tableau trié (coût)

Pour insérer l'élément d'indice n dans la tranche $A[1..n-1]$:

```
inserer(A,n):
  i := n
  tant que i > 1 et A[i] < A[i-1] faire
    echanger(A[i],A[i-1])
    dec(i)
  fin tant que
```

- Pire des cas : $A[n] < A[1..n-1]$

Insertion d'un élément dans un tableau trié (coût)

Pour insérer l'élément d'indice n dans la tranche $A[1..n-1]$:

```
inserer(A,n):
  i := n
  tant que i > 1 et A[i] < A[i-1] faire
    echanger(A[i],A[i-1])
    dec(i)
  fin tant que
```

- Pire des cas : $A[n] < A[1..n-1]$
  - nombre échanges :

$$e(n) = n - 1$$

Insertion d'un élément dans un tableau trié (coût)

Pour insérer l'élément d'indice n dans la tranche $A[1..n-1]$:

```
inserer(A,n):
  i := n
  tant que i > 1 et A[i] < A[i-1] faire
    echanger(A[i],A[i-1])
    dec(i)
  fin tant que
```

- Pire des cas : $A[n] < A[1..n-1]$
  - nombre échanges :
    $$e(n) = n - 1$$
  - nombre comparaisons :
    $$c(n) = n - 1$$

Trois sortes de complexité

Pour une taille donnée n, le coût d'un algorithme peut dépendre de la donnée. On distingue alors trois cas :

- le *pire des cas* : c'est celui qui donne un coût maximal

Trois sortes de complexité

Nour-Eddine Oussous, Éric Wegrzynowski

Pour une taille donnée n, le coût d'un algorithme peut dépendre de la donnée. On distingue alors trois cas :

- le *pire des cas* : c'est celui qui donne un coût maximal
- le *meilleur des cas* : c'est celui qui donne un coût minimal

Trois sortes de complexité

Pour une taille donnée n, le coût d'un algorithme peut dépendre de la donnée. On distingue alors trois cas :

- le *pire des cas* : c'est celui qui donne un coût maximal
- le *meilleur des cas* : c'est celui qui donne un coût minimal
- le *coût moyen* : c'est la moyenne des coûts sur l'ensemble de toutes les données de taille n

Trois sortes de complexité

Pour une taille donnée n, le coût d'un algorithme peut dépendre de la donnée. On distingue alors trois cas :

- le *pire des cas* : c'est celui qui donne un coût maximal
- le *meilleur des cas* : c'est celui qui donne un coût minimal
- le *coût moyen* : c'est la moyenne des coûts sur l'ensemble de toutes les données de taille n

En analyse de complexité, on étudie souvent le pire cas ce qui donne une *majoration de la complexité* de l'algorithme.

Remarques

- Lorsqu'on étudie la complexité d'un algorithme, on ne s'intéresse pas au temps de calcul exact mais à un *ordre de grandeur*.

Remarques

- Lorsqu'on étudie la complexité d'un algorithme, on ne s'intéresse pas au temps de calcul exact mais à un *ordre de grandeur*.
- Pour une complexité polynomiale, par exemple, on ne s'intéresse qu'au terme de *plus haut degré*.

Les principaux ordres de grandeur

Lors de l'analyse de complexité, on essaie de situer un coût $c = f(n)$ par rapport aux ordres de grandeur suivants (donnés dans l'ordre croissant) :

Les principaux ordres de grandeur

Lors de l'analyse de complexité, on essaie de situer un coût $c = f(n)$ par rapport aux ordres de grandeur suivants (donnés dans l'ordre croissant) :

1. *logarithmique*

Les principaux ordres de grandeur

Lors de l'analyse de complexité, on essaie de situer un coût $c = f(n)$ par rapport aux ordres de grandeur suivants (donnés dans l'ordre croissant) :

1. *logarithmique*
2. *linéaire*

Les principaux ordres de grandeur

Lors de l'analyse de complexité, on essaie de situer un coût $c = f(n)$ par rapport aux ordres de grandeur suivants (donnés dans l'ordre croissant) :

1. *logarithmique*
2. *linéaire*
3. *quasi-linéaire*

Les principaux ordres de grandeur

Lors de l'analyse de complexité, on essaie de situer un coût $c = f(n)$ par rapport aux ordres de grandeur suivants (donnés dans l'ordre croissant) :

1. *logarithmique*
2. *linéaire*
3. *quasi-linéaire*
4. *polynomial* (*quadratique*, *cubique*, ...)

Les principaux ordres de grandeur

Lors de l'analyse de complexité, on essaie de situer un coût $c = f(n)$ par rapport aux ordres de grandeur suivants (donnés dans l'ordre croissant) :

1. *logarithmique*
2. *linéaire*
3. *quasi-linéaire*
4. *polynomial (quadratique, cubique, ...)*
5. *exponentiel*

Logarithmique

$f(n)$ est logarithmique en n (en $\log n$)

Logarithmique

$f(n)$ est logarithmique en n (en $\log n$)

- Exemple : *recherche dichotomique dans un tableau trié* $A[1..n]$

Linéaire

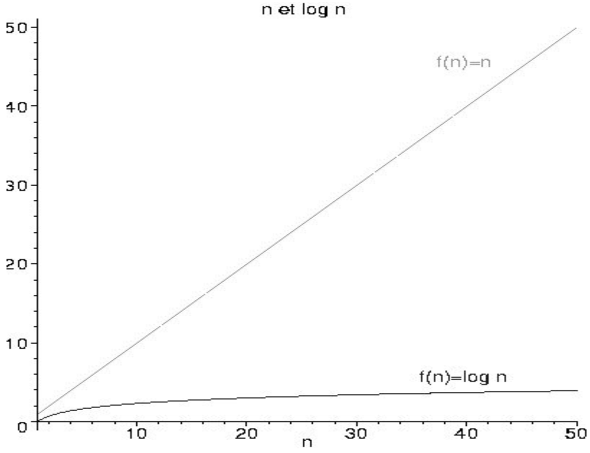
$f(n)$ est linéaire par rapport à n (de type αn)

Linéaire

$f(n)$ est linéaire par rapport à n (de type αn)

- Exemple : *calcul du produit scalaire de deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$

Comparaison linéaire/logarithmique



Complexité quasi-linéaire

Nour-Eddine Oussous, Éric Wegrzynowski

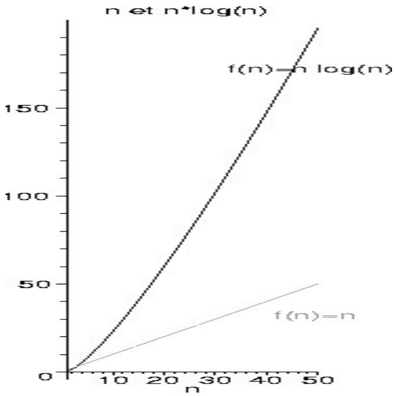
$f(n)$ est de la forme $\alpha(n \log n)$

Complexité quasi-linéaire

$f(n)$ est de la forme $\alpha(n \log n)$

- Exemple : *Tri par fusion*

Comparaison quasi-linéaire/linéaire



Complexité polynomiale

$f(n)$ est un polynôme dont le monôme dominant est de la forme αn^k

Complexité polynomiale

$f(n)$ est un polynôme dont le monôme dominant est de la forme αn^k

- Exemple : *Multiplication de deux matrices carrées d'ordre n par la méthode usuelle* : αn^3

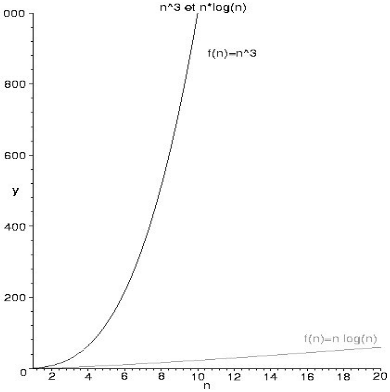
Complexité polynomiale

$f(n)$ est un polynôme dont le monôme dominant est de la forme αn^k

- Exemple : *Multiplication de deux matrices carrées d'ordre n par la méthode usuelle :* αn^3

Lorsque $k = 2$ ou 3, on parle d'ordre de grandeur *quadratique* ou *cubique*

Comparaison polynomial/quasi-linéaire



Complexité exponentielle

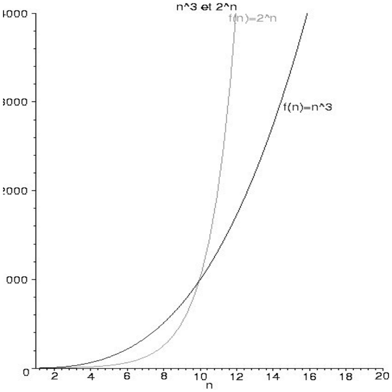
$f(n)$ est de la forme αa^n avec $a > 1$

Complexité exponentielle

$f(n)$ est de la forme αa^n avec $a > 1$

- Exemple : *Tours de Hanoï* : $\Theta(2^n)$

Comparaison exponentiel/polynomial



Comparaison

$T(n)$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 60$
$\log\ n$	$1\ \mu s$	$1,3\ \mu s$	$1,5\ \mu s$	$1,6\ \mu s$	$1,7\ \mu s$	$1,8\ \mu s$
n	$10\ \mu s$	$20\ \mu s$	$30\ \mu s$	$40\ \mu s$	$50\ \mu s$	$60\ \mu s$
$n\ \log\ n$	$10\ \mu s$	$26\ \mu s$	$44\ \mu s$	$64\ \mu s$	$85\ \mu s$	$107\ \mu s$
n^2	$100\ \mu s$	$400\ \mu s$	$900\ \mu s$	$1,6\ ms$	$2,5\ ms$	$3,6$ ms
n^3	$1\ ms$	$8\ ms$	$27\ ms$	$64\ ms$	$125\ ms$	216 ms
n^5	$0,1\ s$	$3\ s$	$24\ s$	$1,7\ mn$	$5\ mn$	13 mn
2^n	$1\ ms$	$1\ s$	$18\ mn$	13 jours	36 ans	366 siècles
3^n	$60\ ms$	1 heure	6 ans	3900 siècles	2×10^8 siècles	$1,3 \times 10^{13}$ siècles

Effet d'une amélioration technologique

Taille des données traitées à *temps constant*

$T(n)$	Aujourd'hui	100 fois + rapide	1000 fois + rapide
$\log n$	N	N^{100}	N^{1000}
n	N	$100\,N$	$1000\,N$
n^2	N	$10\,N$	$32\,N$
n^3	N	$4,6\,N$	$10\,N$
n^5	N	$2,5\,N$	$4\,N$
2^n	N	$N+7$	$N+10$
3^n	N	$N+4$	$N+6$