Les arbres (I)

Nour-Eddine Oussous, Éric Wegrzynowski

Licence ST-A, USTL - API2

16 novembre 2009

Introduction

- Les arbres offrent une des plus importantes structures de données non linéaires en informatique.

Introduction

- Les arbres offrent une des plus importantes structures de données non linéaires en informatique.
- Ils permettent une organisation naturelle des données, par exemple
  - système de fichiers
  - base de données
  - sites web,. . .

Introduction

Nour-Eddine Oussous, Éric Wegrzynowski

- Les arbres offrent une des plus importantes structures de données non linéaires en informatique.
- Ils permettent une organisation naturelle des données, par exemple
  - système de fichiers
  - base de données
  - sites web,...
- Dans les arbres, on a une relation hiérarchique entre les objets.

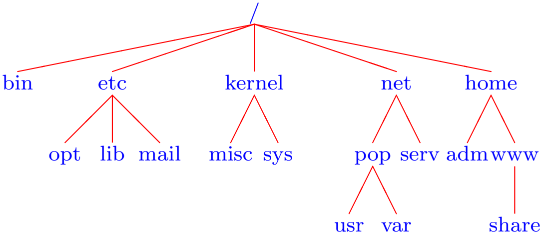
Introduction

- Les arbres offrent une des plus importantes structures de données non linéaires en informatique.
- Ils permettent une organisation naturelle des données, par exemple
  - système de fichiers
  - base de données
  - sites web,...
- Dans les arbres, on a une relation hiérarchique entre les objets.
- Ils permettent parfois d'obtenir des algorithmes plus performants que lorsqu'on utilise des structures de données linéaires (listes, tableaux,...)

Exemple

Nour-Eddine Oussous, Éric Wegrzynowski

L'arborescence des répertoires d'un système d'exploitation imaginaire.



Notion d'arbres

Un arbre est une sructure de données qui peut

Notion d'arbres

Un arbre est une sructure de données qui peut

- soit être vide

Notion d'arbres

Un arbre est une sructure de données qui peut

- soit être vide
- soit comporter un nombre fini de nœuds tels que

Notion d'arbres

Un arbre est une sructure de données qui peut

- soit être vide
- soit comporter un nombre fini de nœuds tels que
  - à chaque nœud est associée une valeur

Notion d'arbres

Un arbre est une sructure de données qui peut

- soit être vide
- soit comporter un nombre fini de nœuds tels que
  - à chaque nœud est associée une valeur
  - chaque nœud possède un nombre fini de successeurs

Notion d'arbres

Un arbre est une sructure de données qui peut

- soit être vide
- soit comporter un nombre fini de nœuds tels que
  - à chaque nœud est associée une valeur
  - chaque nœud possède un nombre fini de successeurs
  - un (et un seul) nœud n'est le successeur d'aucun autre, c'est la racine

Notion d'arbres

Un arbre est une sructure de données qui peut

- soit être vide
- soit comporter un nombre fini de nœuds tels que
  - à chaque nœud est associée une valeur
  - chaque nœud possède un nombre fini de successeurs
  - un (et un seul) nœud n'est le successeur d'aucun autre, c'est la racine
  - tout autre nœud est le successeur d'un seul nœud, son père.

Branches et profondeur des nœuds

- Un nœud qui ne possède aucun successeur est appelé nœud externe ou feuille.

Branches et profondeur des nœuds

- Un nœud qui ne possède aucun successeur est appelé nœud externe ou feuille.
- Les autres nœuds sont appelés nœuds internes.

Branches et profondeur des nœuds

- Un nœud qui ne possède aucun successeur est appelé nœud externe ou feuille.
- Les autres nœuds sont appelés nœuds internes.
- Une branche est une suite finie $x_0, x_1, \ldots, x_p$ de nœuds telle que
  - x_0 est la racine
  - x_p est une feuille
  - $\forall k \in [\![1, p]\!] \quad \text{pere}(x_k) = x_{k-1}$

Branches et profondeur des nœuds

- Un nœud qui ne possède aucun successeur est appelé nœud externe ou feuille.
- Les autres nœuds sont appelés nœuds internes.
- Une branche est une suite finie $x_0, x_1, \ldots, x_p$ de nœuds telle que
  - x_0 est la racine
  - x_p est une feuille
  - $\forall k \in [\![1, p]\!] \quad \text{pere}(x_k) = x_{k-1}$
- La longueur d'une branche est le nombre de nœuds qui la composent moins 1 : p.

Profondeur d'un nœud

- Un nœud y est un descendant d'un nœud x s'il existe une branche qui va de x à y. Autrement dit, $\exists x_0, \dots, x_p$ tels que
  - $x_0 = x$
  - $x_p = y$
  - $\forall\, k \in [\![1, p]\!],\ \mathrm{pere}(x_k) = x_{k-1}$

Profondeur d'un nœud

- Un nœud y est un descendant d'un nœud x s'il existe une branche qui va de x à y. Autrement dit, $\exists x_0, \ldots, x_p$ tels que
  - $x_0 = x$
  - $x_p = y$
  - $\forall\, k \in [\![1, p]\!],\ \mathrm{pere}(x_k) = x_{k-1}$
- Le nombre p est appelé profondeur du nœud y par rapport à x.

Profondeur d'un nœud

- Un nœud y est un descendant d'un nœud x s'il existe une branche qui va de x à y. Autrement dit, $\exists x_0, \ldots, x_p$ tels que
  - $x_0 = x$
  - $x_p = y$
  - $\forall\, k \in [\![1, p]\!],\ \text{pere}(x_k) = x_{k-1}$
- Le nombre p est appelé profondeur du nœud y par rapport à x.
- La profondeur d'un nœud dans un arbre est la profondeur de ce nœud par rapport à la racine.

Hauteur d'un arbre

- La hauteur d'un arbre non vide A, notée $h(A)$, est la longueur maximale d'une branche de cet arbre.

Hauteur d'un arbre

- La hauteur d'un arbre non vide A, notée $h(A)$, est la longueur maximale d'une branche de cet arbre.
- La hauteur d'un arbre est aussi la profondeur maximale d'un nœud.

Hauteur d'un arbre

- La hauteur d'un arbre non vide A, notée $h(A)$, est la longueur maximale d'une branche de cet arbre.
- La hauteur d'un arbre est aussi la profondeur maximale d'un nœud.
- La hauteur n'est pas définie pour un arbre vide.lorsque nous programmerons la hauteur, nous définirons par convention la hauteur de l'arbre vide.

Exemple

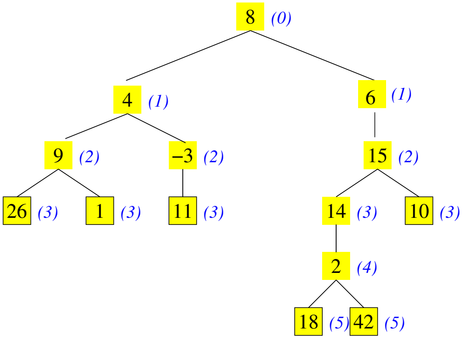


Fig.: Un arbre de hauteur 5 et de taille 14

nœuds internes : feuilles : *(profondeurs)*

Arité et taille d'un arbre

- Un arbre est dit d'arité a si chacun de ses nœuds possède au maximum a successeurs. L'arbre vide est de toute arité.

Arité et taille d'un arbre

- Un arbre est dit d'arité a si chacun de ses nœuds possède au maximum a successeurs. L'arbre vide est de toute arité.
- La taille d'un arbre A est son nombre de nœuds.

Relation entre hauteur, arité et taille

Théorème

Soit A un arbre d'arité a, de taille n et de hauteur h.

Relation entre hauteur, arité et taille

Théorème

Soit A un arbre d'arité a, de taille n et de hauteur h.

- Le nombre n_p de nœuds de A à profondeur $0 \leq p \leq h$ vérifie

$$1 \leq n_p \leq a^p$$

Relation entre hauteur, arité et taille

Théorème

Soit A un arbre d'arité a, de taille n et de hauteur h.

- Le nombre n_p de nœuds de A à profondeur $0 \leq p \leq h$ vérifie

$$1 \leq n_p \leq a^p$$

- La taille n vérifie l'encadrement

$$h + 1 \leq n \leq \frac{a^{h+1} - 1}{a - 1}$$

Relation entre hauteur, arité et taille

Théorème

Soit A un arbre d'arité a, de taille n et de hauteur h.

- Le nombre n_p de nœuds de A à profondeur $0 \leq p \leq h$ vérifie

$$1 \leq n_p \leq a^p$$

- La taille n vérifie l'encadrement

$$h + 1 \leq n \leq \frac{a^{h+1} - 1}{a - 1}$$

- La hauteur h vérifie l'encadrement

$$\log_a (n(a-1)+1) - 1 \leq h \leq n - 1$$

Définition récursive des arbres binaires

Nour-Eddine Oussous, Éric Wegrzynowski

Définition

Un arbre binaire composés d'éléments d'un ensemble E est

- soit l'arbre vide Δ ;
- soit un triplet $< e; g; d >$ composé d'un élément $e \in E$, et de deux arbres binaires g et d

Définition récursive des arbres binaires

Définition

Un arbre binaire composés d'éléments d'un ensemble E est

- soit l'arbre vide Δ ;
- soit un triplet $< e; g; d >$ composé d'un élément $e \in E$, et de deux arbres binaires g et d

En notant $AB(E)$ l'ensemble des arbres binaires composés d'éléments de E, on a donc

$$AB(E) = \{\Delta\} \cup (E \times AB(E) \times AB(E))$$

Représentations abstraites d’un arbre binaire

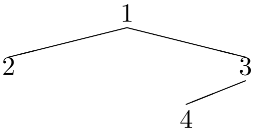


Fig.: Représentation graphique

<1 ; <2 ; Δ ; Δ> ;
<3 ; <4 ; Δ ; Δ> ; Δ>>

Fig.: Représentation triplet

Opérations primitives sur les arbres binaires

Nour-Eddine Oussous, Éric Wegrzynowski

1. Constructeur
2. Sélecteurs
3. Prédicat
4. Opérations modificatrices

Création d'un arbre binaire

Les arbres (I)

Nour-Eddine Oussous, Éric Wegrzynowski

Spécification

$$\begin{array}{rcccc} \texttt{creerArbre} & : & E \times AB(E) \times AB(E) & \longrightarrow & AB(E) \\ & & e, g, d & \longmapsto & < e; g; d > \end{array}$$

Création d'un arbre binaire

Spécification

$$\begin{array}{llcl} \texttt{creerArbre} : & E \times AB(E) \times AB(E) & \longrightarrow & AB(E) \\ & e, g, d & \longmapsto & < e; g; d > \end{array}$$

Exemples

$$\begin{array}{rcl} \texttt{creerArbre}(3, \Delta, \Delta) & = & <3; \Delta; \Delta> \\ \texttt{creerArbre}(1, <3; \Delta; \Delta>, \Delta) & = & <1; <3; \Delta; \Delta>; \Delta> \end{array}$$

Création d'un arbre binaire

Spécification

$$\begin{array}{lcccc} \texttt{creerArbre} & : & E \times AB(E) \times AB(E) & \longrightarrow & AB(E) \\ & & e, g, d & \longmapsto & < e; g; d > \end{array}$$

Exemples

$$\begin{array}{rcl} \texttt{creerArbre}(3, \Delta, \Delta) & = & < 3; \Delta; \Delta > \\ \texttt{creerArbre}(1, < 3; \Delta; \Delta >, \Delta) & = & < 1; < 3; \Delta; \Delta >; \Delta > \end{array}$$

C'est une opération de <u>construction</u> d'arbres.

Accès à la racine

Spécification

$$\begin{array}{lccc} \texttt{racine} : & AB(E) & \longrightarrow & E \\ & < e; g; d > & \longmapsto & e \end{array}$$

CU : l'arbre passé en paramètre ne peut pas être vide

Accès à la racine

Spécification

$$\begin{array}{llll} \texttt{racine} : & AB(E) & \longrightarrow & E \\ & < e; g; d > & \longmapsto & e \end{array}$$

CU : l'arbre passé en paramètre ne peut pas être vide

Exemple

$$\texttt{racine}(<1; <3; \Delta; \Delta >; \Delta >) = 1$$

Accès à la racine

Spécification

$$\begin{array}{llcl} \texttt{racine} : & AB(E) & \longrightarrow & E \\ & <e;g;d> & \longmapsto & e \end{array}$$

CU : l'arbre passé en paramètre ne peut pas être vide

Exemple

$$\texttt{racine}(<1;<3;\Delta;\Delta>;\Delta>) = 1$$

C'est un sélecteur.

Accès au sous-arbre gauche

Spécification

$$\begin{array}{lcccc} \texttt{gauche} & : & AB(E) & \longrightarrow & AB(E) \\ & & < e; g; d > & \longmapsto & g \end{array}$$

CU : l'arbre passé en paramètre ne peut pas être vide

Accès au sous-arbre gauche

Spécification

$$\begin{array}{rccc} \texttt{gauche} : & AB(E) & \longrightarrow & AB(E) \\ & < e; g; d > & \longmapsto & g \end{array}$$

CU : l'arbre passé en paramètre ne peut pas être vide

Exemple

$$\texttt{gauche}(<1; <3; \Delta; \Delta>; \Delta>) = <3; \Delta; \Delta>$$

Accès au sous-arbre gauche

Spécification

$$\begin{array}{lrcl} \texttt{gauche} : & AB(E) & \longrightarrow & AB(E) \\ & < e; g; d > & \longmapsto & g \end{array}$$

CU : l'arbre passé en paramètre ne peut pas être vide

Exemple

$$\texttt{gauche}(<1; <3; \Delta; \Delta>; \Delta>) = <3; \Delta; \Delta>$$

C'est un sélecteur.

Accès au sous-arbre droit

Spécification

$$\begin{array}{rcccl} \texttt{droit} & : & AB(E) & \longrightarrow & AB(E) \\ & & < e; g; d > & \longmapsto & d \end{array}$$

CU : l'arbre passé en paramètre ne peut pas être vide

Accès au sous-arbre droit

Spécification

$$\begin{array}{rcccl} \texttt{droit} & : & AB(E) & \longrightarrow & AB(E) \\ & & < e; g; d > & \longmapsto & d \end{array}$$

CU : l'arbre passé en paramètre ne peut pas être vide

Exemple

$$\texttt{droit}(<1; <3; \Delta; \Delta>; \Delta>) = \Delta$$

Accès au sous-arbre droit

Nour-Eddine Oussous, Éric Wegrzynowski

Spécification

$$\begin{array}{rccc} \mathtt{droit} : & AB(E) & \longrightarrow & AB(E) \\ & < e; g; d > & \longmapsto & d \end{array}$$

CU : l'arbre passé en paramètre ne peut pas être vide

Exemple

$$\mathtt{droit}(< 1; < 3; \Delta; \Delta >; \Delta >) = \Delta$$

C'est un <u>sélecteur</u>.

Test de vacuité d'un arbre

Spécification

$$
\begin{array}{rcccl}
\texttt{estArbreVide} & : & AB(E) & \longrightarrow & Booleen \\
 & & a & \longmapsto & \begin{cases} \text{Vrai} & \textsf{si } a \textsf{ est vide} \\ \text{Faux} & \textsf{sinon} \end{cases}
\end{array}
$$

Test de vacuité d'un arbre

Nour-Eddine Oussous, Éric Wegrzynowski

Spécification

$$\begin{array}{rcl} \texttt{estArbreVide} : AB(E) & \longrightarrow & Booleen \\ a & \longmapsto & \begin{cases} \text{Vrai} & \text{si } a \text{ est vide} \\ \text{Faux} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Exemples

$$\begin{array}{rcl} \texttt{estArbreVide}(\Delta) & = & \text{Vrai} \\ \texttt{estArbreVide}(<1; \Delta; \Delta>) & = & \text{Faux} \end{array}$$

Test de vacuité d'un arbre

Spécification

$$\begin{array}{lcccl} \texttt{estArbreVide} & : & AB(E) & \longrightarrow & Booleen \\ & & a & \longmapsto & \begin{cases} \mathrm{Vrai} & \text{si } a \text{ est vide} \\ \mathrm{Faux} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Exemples

$$\begin{array}{rcl} \texttt{estArbreVide}(\Delta) & = & \mathrm{Vrai} \\ \texttt{estArbreVide}(<1;\Delta;\Delta>) & = & \mathrm{Faux} \end{array}$$

C'est un <u>prédicat</u>.

Changer la valeur de la racine

Nour-Eddine Oussous, Éric Wegrzynowski

Spécification

$$\begin{array}{rcccl} \texttt{modifierRacine} & : & AB(E) \times E & \longrightarrow & AB(E) \\ & & < e; g; d >, e' & \longmapsto & < e'; g; d > \end{array}$$

CU : l'arbre passé en paramètre ne doit pas être vide

Changer la valeur de la racine

Nour-Eddine Oussous, Éric Wegrzynowski

Spécification

$$\begin{array}{llcl} \texttt{modifierRacine} : & AB(E) \times E & \longrightarrow & AB(E) \\ & < e; g; d >, e' & \longmapsto & < e'; g; d > \end{array}$$

CU : l'arbre passé en paramètre ne doit pas être vide

Exemple

$$\texttt{modifierRacine}(<1; <3; \Delta; \Delta >; \Delta >, 4) = <4; <3; \Delta; \Delta >; \Delta >$$

Changer la valeur de la racine

Spécification

$$\begin{array}{llcl} \texttt{modifierRacine} : & AB(E) \times E & \longrightarrow & AB(E) \\ & < e; g; d >, e' & \longmapsto & < e'; g; d > \end{array}$$

CU : l'arbre passé en paramètre ne doit pas être vide

Exemple

$\texttt{modifierRacine}(<1; <3; \Delta; \Delta >; \Delta >, 4) = <4; <3; \Delta; \Delta >; \Delta >$

C'est une opération de modification d'arbre.

Changer le sous-arbre gauche

Spécification

$$\begin{array}{lcrcl} \texttt{modifierGauche} & : & AB(E) \times AB(E) & \longrightarrow & AB(E) \\ & & < e; g; d >, g' & \longmapsto & < e; g'; d > \end{array}$$

CU : le premier arbre passé en paramètre ne doit pas être vide

Changer le sous-arbre gauche

Spécification

$$\begin{array}{lcccc} \texttt{modifierGauche} & : & AB(E) \times AB(E) & \longrightarrow & AB(E) \\ & & < e; g; d >, g' & \longmapsto & < e; g'; d > \end{array}$$

CU : le premier arbre passé en paramètre ne doit pas être vide

Exemple

$$\texttt{modifierGauche}(<1; <3; \Delta; \Delta>; \Delta>, \Delta) = <1; \Delta; \Delta>$$

Changer le sous-arbre gauche

Spécification

$$\begin{array}{rcl} \texttt{modifierGauche} : & AB(E) \times AB(E) & \longrightarrow & AB(E) \\ & < e; g; d >, g' & \longmapsto & < e; g'; d > \end{array}$$

CU : le premier arbre passé en paramètre ne doit pas être vide

Exemple

$$\texttt{modifierGauche}(<1; <3; \Delta; \Delta>; \Delta>, \Delta) = <1; \Delta; \Delta>$$

C'est une opération de modification d'arbre.

Changer le sous-arbre droit

Spécification

$$\begin{array}{lcccc} \texttt{modifierDroit} & : & AB(E) \times AB(E) & \longrightarrow & AB(E) \\ & & < e; g; d >, d' & \longmapsto & < e; g; d' > \end{array}$$

CU : le premier arbre passé en paramètre ne doit pas être vide

Changer le sous-arbre droit

Spécification

$$\texttt{modifierDroit} : \begin{array}{rcl} AB(E) \times AB(E) & \longrightarrow & AB(E) \\ < e; g; d >, d' & \longmapsto & < e; g; d' > \end{array}$$

CU : le premier arbre passé en paramètre ne doit pas être vide

Exemple

$$\texttt{modifierDroit}(<1; \Delta; \Delta >, <2; \Delta; \Delta >) = <1; \Delta; <2; \Delta; \Delta > >$$

Changer le sous-arbre droit

Spécification

$$\begin{array}{lcccc} \texttt{modifierDroit} & : & AB(E) \times AB(E) & \longrightarrow & AB(E) \\ & & < e; g; d >, d' & \longmapsto & < e; g; d' > \end{array}$$

CU : le premier arbre passé en paramètre ne doit pas être vide

Exemple

$$\texttt{modifierDroit}(<1; \Delta; \Delta >, <2; \Delta; \Delta >) = <1; \Delta; <2; \Delta; \Delta > >$$

C'est une opération de modification d'arbre.