Complexité des algorithmes (2)

Nour-Eddine Oussous, Éric Wegrzynowski

Licence ST-A, USTL - API2

5 octobre 2009

Coût d'une boucle pour

Dans la boucle

```
pour i variant de a à b faire
    ACTION(i)
fin pour
```

si $f(i)$ désigne le coût de l'exécution de ACTION(i), alors le coût de la boucle est

$$c = \sum_{i=a}^{b} f(i)$$

Tri par insertion (algo)

Algo

Données : un tableau $A[1..n]$ d'entiers
But : trier le tableau A par ordre croissant
Var. locales : i

```
pour i variant de 2 à n faire
  inserer(A,i)
fin pour
```

Tri par insertion (coût)

Le coût de l'algorithme dépend

Tri par insertion (coût)

Nour-Eddine Oussous, Éric Wegrzynowski

Le coût de l'algorithme dépend

1. de la taille n du tableau

Tri par insertion (coût)

Le coût de l'algorithme dépend

1. de la taille n du tableau
2. du contenu du tableau

Tri par insertion (coût)

Nour-Eddine Oussous, Éric Wegrzynowski

Le coût de l'algorithme dépend

1. de la taille n du tableau
2. du contenu du tableau
3. du coût des opérations élémentaires (échanges, comparaisons, accès)

Tri par insertion (coût)

Nour-Eddine Oussous, Éric Wegrzynowski

Le coût de l'algorithme dépend

1. de la taille n du tableau
2. du contenu du tableau
3. du coût des opérations élémentaires (échanges, comparaisons, accès)

Nous nous intéressons

Tri par insertion (coût)

Le coût de l'algorithme dépend

1. de la taille n du tableau
2. du contenu du tableau
3. du coût des opérations élémentaires (échanges, comparaisons, accès)

Nous nous intéressons

1. au nombre d'échanges d'éléments du tableau $e(A, n)$,

Tri par insertion (coût)

Le coût de l'algorithme dépend

1. de la taille n du tableau
2. du contenu du tableau
3. du coût des opérations élémentaires (échanges, comparaisons, accès)

Nous nous intéressons

1. au nombre d'échanges d'éléments du tableau $e(A, n)$,
2. et au nombre de comparaisons d'éléments du tableau $c(A, n)$

Tri par insertion (coût)

En désignant par $e'(A, i)$ et $c'(A, i)$ les nombres d'échanges et de comparaisons dans l'action inserer(A,i), on a

$$e(A, n) = \sum_{i=2}^{n} e'(A, i)$$

$$c(A, n) = \sum_{i=2}^{n} c'(A, i)$$

Tri par insertion (coût)

Comme on a vu que

$$0 \leq e'(A, i) \leq i - 1$$

et

$$1 \leq c'(A, i) \leq i - 1$$

on a

Tri par insertion (coût)

Comme on a vu que

$$0 \leq e'(A, i) \leq i - 1$$

et

$$1 \leq c'(A, i) \leq i - 1$$

on a

$$0 = \sum_{i=2}^{n} 0 \leq e(A, n) \leq \sum_{i=2}^{n} i - 1 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

et

$$n - 1 = \sum_{i=2}^{n} 1 \leq c(A, n) \leq \sum_{i=2}^{n} i - 1 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Tri par insertion (conclusion)

Nour-Eddine Oussous, Éric Wegrzynowski

Encadrements obtenus :

Tri par insertion (conclusion)

Encadrements obtenus :

$$\boxed{0 \leq e(A,n) \leq \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2)}$$

et

$$\boxed{\Theta(n) = n-1 \leq c(A,n) \leq \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2)}$$

Tri par insertion (conclusion)

Encadrements obtenus :

$$\boxed{0 \leq e(A, n) \leq \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2)}$$

et

$$\boxed{\Theta(n) = n - 1 \leq c(A, n) \leq \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2)}$$

Bornes des encadrements atteintes

Tri par insertion (conclusion)

Encadrements obtenus :

$$\boxed{0 \leq e(A, n) \leq \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2)}$$

et

$$\boxed{\Theta(n) = n - 1 \leq c(A, n) \leq \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2)}$$

Bornes des encadrements atteintes

- borne inférieure atteinte pour un tableau déjà trié

Tri par insertion (conclusion)

Encadrements obtenus :

$$\boxed{0 \leq e(A,n) \leq \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2)}$$

et

$$\boxed{\Theta(n) = n - 1 \leq c(A,n) \leq \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2)}$$

Bornes des encadrements atteintes

- borne inférieure atteinte pour un tableau déjà trié
- borne supérieure atteinte pour un tableau trié dans l'ordre inverse

Exemples de sommes

Exemples de sommes

- $$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

Exemples de sommes

- $$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$
- $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

Exemples de sommes

- $$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

- $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

- $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \Theta(n^3)$$

Exemples de sommes

- $$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

- $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

- $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \Theta(n^3)$$

- Plus généralement pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \Theta(n^{k+1})$$

Exemples de sommes

- $$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

- $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

- $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \Theta(n^3)$$

- Plus généralement pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \Theta(n^{k+1})$$

- Si $q \neq 1$

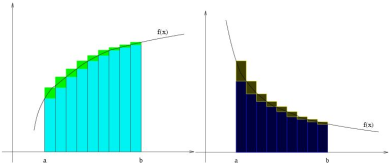
$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \Theta(q^n)$$

Lien entre sommes et intégrales

Soient $a \leq b$ deux entiers. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante (resp. décroissante) et continue sur $[a, b]$. Alors

$$\sum_{i=a}^{b-1} f(i) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \sum_{i=a+1}^{b} f(i) \qquad (1)$$

$$\left(\text{resp.} \quad \sum_{i=a+1}^{b} f(i) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \sum_{i=a}^{b-1} f(i)\right) \qquad (2)$$



Coût d'une boucle tant que

Dans la boucle

```
tant que  C(x)  faire
   ACTION(x)
fin tant que
```

en notant

- x_0 la valeur initiale de la donnée x, et $x_1, x_2, \ldots, x_k$ les valeurs qu'elle prend successivement à chaque étape, x_{k+1} la première valeur de la donnée pour laquelle $C(x_{k+1})$ n'est pas satisfaite,
- $g(x_i)$ le coût de la condition $C(x_i)$,
- et $f(x_i)$ le coût de l'action ACTION(x_i),

le coût de la boucle est

$$c = \sum_{i=0}^{k} f(x_i) + \sum_{i=0}^{k+1} g(x_i)$$

Multiplication de deux entiers

Le problème

Données : a et b deux entiers naturels

But : calculer $a \times b$

Multiplication de deux entiers

Le problème

Données : a et b deux entiers naturels

But : calculer $a \times b$

Plusieurs algorithmes variant selon les opérations élémentaires disponibles :

Multiplication de deux entiers

Le problème

Données : a et b deux entiers naturels

But : calculer $a \times b$

Plusieurs algorithmes variant selon les opérations élémentaires disponibles :

1. multiplication disponible : solution triviale

Multiplication de deux entiers

Le problème

Données : a et b deux entiers naturels

But : calculer $a \times b$

Plusieurs algorithmes variant selon les opérations élémentaires disponibles :

1. multiplication disponible : solution triviale
2. seule l'addition des entiers est disponible : solution avec boucle pour (exercice)

Multiplication de deux entiers

Le problème

Données : a et b deux entiers naturels

But : calculer $a \times b$

Plusieurs algorithmes variant selon les opérations élémentaires disponibles :

1. multiplication disponible : solution triviale
2. seule l'addition des entiers est disponible : solution avec boucle pour (exercice)
3. addition et division par deux des entiers disponibles.

Méthode égyptienne

Calcul du produit de $a = 67$ par $b = 21$.

t	u

opération en cours

Méthode égyptienne

Calcul du produit de $a = 67$ par $b = 21$.

t	u
67	21

opération en cours

Les nombres à multiplier

Méthode égyptienne

Calcul du produit de $a = 67$ par $b = 21$.

t	u
67	21
134	10

opération en cours

$u \neq 1 \Rightarrow t := t + t,\ u := u/2$

Méthode égyptienne

Calcul du produit de $a = 67$ par $b = 21$.

t	u
67	21
134	10
268	5

opération en cours

$u \neq 1 \Rightarrow t := t + t,\ u := u/2$

Méthode égyptienne

Calcul du produit de $a = 67$ par $b = 21$.

t	u
67	21
134	10
268	5
536	2

opération en cours

$u \neq 1 \Rightarrow t := t + t,\ u := u/2$

Méthode égyptienne

Calcul du produit de $a = 67$ par $b = 21$.

t	u
67	21
134	10
268	5
536	2
1072	1

opération en cours

$u \neq 1 \Rightarrow t := t + t,\ u := u/2$

Méthode égyptienne

Calcul du produit de $a = 67$ par $b = 21$.

t	u
67	21
134	10
268	5
536	2
1072	1

opération en cours

$u = 1 \Rightarrow$ terminé

Méthode égyptienne

Calcul du produit de $a = 67$ par $b = 21$.

t	u
67	21
~~134~~	~~10~~
268	5
~~536~~	~~2~~
1072	1

opération en cours

suppression des lignes où u est pair

Méthode égyptienne

Calcul du produit de $a = 67$ par $b = 21$.

t	u
67	21
~~134~~	~~10~~
268	5
~~536~~	~~2~~
1072	1
1407	

opération en cours

somme des valeurs restantes dans la colonne t

Méthode égyptienne

Calcul du produit de $a = 67$ par $b = 21$.

t	u
67	21
~~134~~	~~10~~
268	5
~~536~~	~~2~~
1072	1
1407	

opération en cours

somme des valeurs restantes dans la colonne t

Conclusion

$$\boxed{67 \times 21 = 1407}$$

Seules opérations utilisées :$+$ et $\div 2$

Méthode égyptienne

Calcul du produit de $a = 67$ par $b = 21$.

t	u	v
67	21	0
~~134~~	~~10~~	67
268	5	67
~~536~~	~~2~~	335
1072	1	335
1407		1407

opération en cours

utilisation d'une variable v pour le calcul de la somme

u impair $\Rightarrow$ $v := v + t$

Conclusion

$$\boxed{67 \times 21 = 1407}$$

Seules opérations utilisées :$+$ et $\div 2$

Multiplication égyptienne : algo

Algo

Données : a et b deux entiers naturels, $b > 0$
But : calculer $a \times b$
Variables locales : t, u, v

```
mult(a,b):
  t := a; u := b; v := 0;
  {t × u + v = a × b}
  tant que u > 1 faire
    si u impair alors
      v := v + t;
    fin si;
    t := t + t;
    u := u ÷ 2;
    {t × u + v = a × b}
  fin tant que
  {t × u + v = a × b, u = 1}
  retouner t + v;
```

Multiplication égyptienne : analyse

Multiplication égyptienne : analyse

- on s'intéresse au nombre d'additions effectuées

Multiplication égyptienne : analyse

- on s'intéresse au nombre d'additions effectuées
- ce coût ne dépend que de b

Multiplication égyptienne : analyse

- on s'intéresse au nombre d'additions effectuées
- ce coût ne dépend que de b

$$c(b) = \text{nombre d'additions pour multiplier par } b$$

Multiplication égyptienne : analyse

Multiplication égyptienne : analyse

- À chaque étape du tant que une ou deux additions selon la parité de u

Multiplication égyptienne : analyse

- À chaque étape du tant que une ou deux additions selon la parité de u
- meilleur des cas : 1 addition à chaque étape. C'est le cas si b est une puissance de 2 : $b = 2^p$. Dans ce cas

$$c(b) = p + 1$$

Multiplication égyptienne : analyse

- À chaque étape du tant que une ou deux additions selon la parité de u
- meilleur des cas : 1 addition à chaque étape. C'est le cas si b est une puissance de 2 : $b = 2^p$. Dans ce cas

$$c(b) = p + 1$$

- pire des cas : 2 additions à chaque étape. C'est le cas si b est une puissance de 2 moins un : $b = 2^p - 1$. Dans ce cas

$$c(b) = 2(p-1) + 1 = 2p - 1$$

Multiplication égyptienne : analyse

Dans tous les cas, si $2^{p-1} \leq b \leq 2^p - 1$ on a

$$\boxed{p \leq c(b) \leq 2p - 1}$$

Multiplication égyptienne : analyse

Dans tous les cas, si $2^{p-1} \leq b \leq 2^p - 1$ on a

$$\boxed{p \leq c(b) \leq 2p - 1}$$

En tenant compte du fait que $p = \Theta(\log_2(b))$, on a

$$\boxed{c(b) = \Theta(p) = \Theta(\log_2(b))}$$

Multiplication égyptienne : analyse

Dans tous les cas, si $2^{p-1} \leq b \leq 2^p - 1$ on a

$$\boxed{p \leq c(b) \leq 2p - 1}$$

En tenant compte du fait que $p = \Theta(\log_2(b))$, on a

$$\boxed{c(b) = \Theta(p) = \Theta(\log_2(b))}$$

Conclusion

- cet algorithme est logarithmique en fonction de la <u>valeur</u> de b

Multiplication égyptienne : analyse

Dans tous les cas, si $2^{p-1} \leq b \leq 2^p - 1$ on a

$$\boxed{p \leq c(b) \leq 2p - 1}$$

En tenant compte du fait que $p = \Theta(\log_2(b))$, on a

$$\boxed{c(b) = \Theta(p) = \Theta(\log_2(b))}$$

Conclusion

- cet algorithme est logarithmique en fonction de la <u>valeur</u> de b
- ou bien linéaire en fonction de la <u>taille</u> p de b

Algo

```
fact(n) :
  si n = 0 alors
    fact := 1
  sinon
    fact := n×fact(n−1)
  fin si
```

Algo

```
fact(n) :
  si n = 0 alors
    fact := 1
  sinon
    fact := n×fact(n−1)
  fin si
```

- coût recherché = nbre de multiplications
- dépend de n

$c(n) =$ nbre de mult pour calculer $n!$

Algo

```
fact(n) :
  si n = 0 alors
    fact := 1
  sinon
    fact := n×fact(n−1)
  fin si
```

- coût recherché = nbre de multiplications
- dépend de n

$c(n)$ = nbre de mult pour calculer $n!$

- Cas de base

$$c(0) = 0$$

Algo

```
fact(n) :
  si n = 0 alors
    fact := 1
  sinon
    fact := n×fact(n−1)
  fin si
```

- coût recherché = nbre de multiplications
- dépend de n

$c(n)$ = nbre de mult pour calculer $n!$

- Cas de base

$$c(0) = 0$$

- Cas récursif

$$\forall n \geq 1 \quad c(n) = 1 + c(n-1)$$

Algo

```
fact(n) :
  si n=0 alors
    fact := 1
  sinon
    fact := n×fact(n−1)
  fin si
```

- coût recherché = nbre de multiplications
- dépend de n

$c(n)$ = nbre de mult pour calculer $n!$

- Cas de base

$$c(0) = 0$$

- Cas récursif

$$\forall n \geq 1 \quad c(n) = 1 + c(n-1)$$

- $\Rightarrow$

$$\boxed{c(n) = n}$$

Algo

```
fact(n) :
  si n=0 alors
    fact := 1
  sinon
    fact := n×fact(n−1)
  fin si
```

- coût recherché = nbre de multiplications
- dépend de n

$c(n)$ = nbre de mult pour calculer $n!$

- Cas de base

$$c(0) = 0$$

- Cas récursif

$$\forall n \geq 1 \quad c(n) = 1 + c(n-1)$$

- $\Rightarrow$

$$\boxed{c(n) = n}$$

Conclusion

- Algorithme linéaire en la valeur de n
- Algorithme exponentiel en la taille de n

Algo

```
H(n,D,A,I):
  si n=1 alors
    deplacer de D vers A
  sinon
    H(n−1,D,I,A);
    deplacer de D vers A;
    H(n−1,I,A,D);
  fin si
```

Algo

```
H(n,D,A,I):
  si n=1 alors
    deplacer de D vers A
  sinon
    H(n-1,D,I,A);
    deplacer de D vers A;
    H(n-1,I,A,D);
  fin si
```

- coût recherché = nbre de déplacements
- dépend de n

$c(n)$ = nbre de déplacements

Algo

```
H(n,D,A,I):
  si  n=1  alors
    deplacer de D vers A
  sinon
    H(n-1,D,I,A);
    deplacer de D vers A;
    H(n-1,I,A,D);
  fin si
```

- coût recherché = nbre de déplacements
- dépend de n

$c(n)$ = nbre de déplacements

- Cas de base

$$c(1) = 1$$

Algo

```
H(n,D,A,I):
  si n=1 alors
    deplacer de D vers A
  sinon
    H(n-1,D,I,A);
    deplacer de D vers A;
    H(n-1,I,A,D);
  fin si
```

- coût recherché = nbre de déplacements
- dépend de n

$c(n)$ = nbre de déplacements

- Cas de base

$$c(1) = 1$$

- Cas récursif

$$\forall n \geq 1 \quad c(n) = 1 + 2c(n-1)$$

Algo

```
H(n,D,A,I):
  si n=1 alors
    deplacer de D vers A
  sinon
    H(n-1,D,I,A);
    deplacer de D vers A;
    H(n-1,I,A,D);
  fin si
```

- coût recherché = nbre de déplacements
- dépend de n

$c(n) =$ nbre de déplacements

- Cas de base

$$c(1) = 1$$

- Cas récursif

$$\forall n \geq 1 \quad c(n) = 1 + 2c(n-1)$$

- $\Rightarrow$

$$\boxed{c(n) = 2^n - 1}$$

Algo

```
H(n,D,A,I):
  si n=1 alors
    deplacer de D vers A
  sinon
    H(n-1,D,I,A);
    deplacer de D vers A;
    H(n-1,I,A,D);
  fin si
```

- coût recherché = nbre de déplacements
- dépend de n

$c(n)$ = nbre de déplacements

- Cas de base

$$c(1) = 1$$

- Cas récursif

$$\forall n \geq 1 \quad c(n) = 1 + 2c(n-1)$$

- $\Rightarrow$

$$\boxed{c(n) = 2^n - 1}$$

Conclusion

- Algorithme exponentiel en la valeur de n

Schéma d'analyse récursive

Le coût d'un algorithme récursif peut toujours s'exprimer sous forme d'une équation de récurrence.

Schéma d'analyse récursive

Le coût d'un algorithme récursif peut toujours s'exprimer sous forme d'une équation de récurrence.

- la résolution des équations de récurrence peut s'avérer parfois délicate

Schéma d'analyse récursive

Le coût d'un algorithme récursif peut toujours s'exprimer sous forme d'une équation de récurrence.

- la résolution des équations de récurrence peut s'avérer parfois délicate
- mais peut toujours être programmée