TP : Nombres de Catalan

Objectifs du TP Ce TP a pour but de vous faire programmer le calcul du nombre d'arbres binaires d'une taille donnée.

Dans tout le TP le nombre d'arbres binaires de taille n sera désigné par c_n. Ces nombres sont connus sous le nom de *nombres de Catalan*[1].

1 Dénombrement des arbres binaires

Question 1. Comptez « à la main » les nombres d'arbres binaires de taille comprise entre 0 et 4 en les dessinant tous.

Question 2. Considérons un arbre binaire A de taille $n = 5$.

Q 2–1. Quelle taille peut avoir son sous-arbre gauche ? et son sous-arbre droit ?

Q 2–2. Si k désigne la taille du sous-arbre gauche de A, quelle est la taille de sous-arbre droit ?

Q 2–3. Combien y a-t-il d'arbres de taille 5 dont le sous-arbre gauche

1. est vide ?
2. est de taille 1 ?
3. est de taille 2 ?
4. est de taille 3 ?
5. est de taille 4 ?

Q 2–4. Déduisez-en le nombre c_5.

Question 3. En vous inspirant de la procédure suivie pour calculer c_5, établissez uen relation de récurrence exprimant le nombre c_n en fonction des nombres c_k avec $0 \leq k < n$.

Question 4. Vérifiez la formule de récurrence obtenue pour n compris entre 1 et 4.

2 Programmation récursive

Question 5. Programmez la fonction spécifiée ci-dessous de manière récursive en suivant la relation de récurrence trouvée dans la partie précédente.

```
// catalan(n) = nombre d'arbres binaires de taille n
// programmation récusrsive suivant la définition récurrente
function catalan(n : CARDINAL) : CARDINAL;
```

Question 6. Vérifiez votre fonction avec n compris entre 0 et 5.

Question 7. Utilisez votre fonction pour calculer c_{19}.

3 Utilisation d'un tableau

La programmation récursive du calcul des nombres c_n est très inefficace parce qu'elle répète inutilement des calculs.

Question 8. Tracez tous les appels récursifs pour le calcul de c_4. Combien de fois le calcul de c_3 est-il effectué ? et celui de c_2 ? et celui de c_1 ?

Afin de remédier à ce défaut, et accélérer les calculs vous allez utiliser un tableau indexé par les entiers pour mémoriser les nombres c_n calculés.

```
const
  MAX = 20; // indice du dernier nombre de catalan à calculer

type
  TABLE = array[0..MAX] of CARDINAL;
```

Question 9. Réalisez une fonction

[1] du nom du mathématicien belge Eugène Catalan (1814-1894)

```
// catalan2(n) = nombre d'arbres binaires de taille n
// programmation itérative en utilisant un tableau
function catalan2(n : CARDINAL) : CARDINAL;
```

Question 10. Vérifiez votre fonction pour n compris entre 0 et 10.
Question 11. Vérifiez la rapidité du calcul de c_{19}.
Question 12. Si on veut calculer **tous** les nombres c_n pour n compris entre deux bornes, l'utilisation de la fonction `catalan2` présente encore un défaut du point de vue de la complexité. Lequel ?
Question 13. Remédiez au défaut constaté en proposant une fonction qui calcule tous les nombres de Catalan d'indice n compris entre 0 et une constante $MAX = 19$. Cette fonction retourne ces nombres sous forme d'un tableau (cf type `TABLE` ci-dessus).

```
// tabuleCatalan() = table des nombres de
// Catalan pour les indices compris entre 0 et MAX
function tabuleCatalan() : TABLE;
```

4 Programmation en réels

On veut maintenant calculer des nombres de Catalan d'indice plus grands que 19.
Question 14. Changez la valeur de la constante `MAX` en la posant égale à 50, puis effectuez les calculs des nombres de Catalan jusqu'à cet indice.

Les valeurs obtenues sont-elles fiables ? Pourquoi ?
Question 15. Réalisez une fonction

```
// catalan3(n) = nombre d'arbres binaires de taille n
// programmation itérative en utilisant un tableau
function catalan3(n : CARDINAL) : REAL;
```

qui calcule les nombres de Catalan représentés par des flottants.
Question 16. Vérifiez et comparez avec les nombres calculés en entiers.

5 Une formule de calcul non récursive

On peut montrer (par la technique des séries génératrices) que les nombres de Catalan s'expriment en fonction des coefficients binomiaux. En effet, pour tout entier n,

$$c_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2(n+1)}.$$

Question 17. Vérifiez l'exactitude de cette formule en écrivant un programme qui compare les nombres c_n calculés à partir de cette formule et ceux calculés d'après la formule de récurrence.

6 Comportement asymptotique des nombres de Catalan

Question 18. Sortir dans un fichier texte les nombres de catalan avec un couple n c_n par ligne. Visualiser avec GNUPLOT.
Question 19. Recommencer avec des couples n $\ln c_n$. Visualiser.
Question 20. Conclure sur la nature du comportement asymptotique.
Question 21. Listez les valeurs de $\frac{c_{n+1}}{c_n}$. Que constatez-vous lorsque n devient grand ?
Question 22. Utilisez la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

où e désigne le nombre réel tel que $\ln e = 1$, pour en déduire un équivalent de c_{n+1}/c_n lorsque $n \to \infty$.