

1 Équations différentielles (4 points)

On considère l'équation différentielle $x' = x(x - 1)$ sur l'intervalle de temps $[a, b] = [0, 1]$.

Question 1 [2 pts]. Faire l'analyse qualitative de l'équation (points fixes, nature des points fixes, ligne de phase).

Question 2 [1 pt]. Quelle est la suite (t_n, x_n) obtenue en appliquant la méthode d'Euler à cette équation ?

Question 3 [1 pt]. Que valent t_1 et x_1 pour un nombre de pas $N = 10$ et $x(a) = 2$?

2 Modélisation (3 points)

Question 4 [3 pts]. Sur un terrain vague d'un hectare, une population de souris évolue de la façon suivante : lorsqu'elles sont peu nombreuses, le nombre de naissances par unité de temps est proportionnel (la constante de proportionnalité est 2) au nombre de souris existantes. Une vingtaine de chats joueurs et mal nourris sévissent dans les environs. Pour cette raison, on estime que la population devrait se stabiliser avec le temps autour de 500 individus. Proposer un modèle logistique décrivant l'évolution de la population de souris.

3 La méthode de Simpson (8 points)

La méthode de Simpson est une méthode numérique de calcul d'intégrale sur un intervalle $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Soit N un nombre pair. La méthode consiste à subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles définis par

$$x_i = a + i h, \quad h = \frac{b - a}{N}$$

et à approximer la courbe $y = f(x)$ par des morceaux de paraboles. Des calculs théoriques conduisent à la formule (de Simpson) suivante :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq h \left(\frac{1}{3}f(x_0) + \frac{4}{3}f(x_1) + \frac{2}{3}f(x_2) + \frac{4}{3}f(x_3) + \cdots + \frac{2}{3}f(x_{N-2}) + \frac{4}{3}f(x_{N-1}) + \frac{1}{3}f(x_N) \right).$$

Tous les coefficients valent $4/3$ ou $2/3$ alternativement sauf le premier et le dernier qui valent $1/3$. La formule n'est valable que si N est un nombre pair.

Question 5 [1 pt]. Citer une autre méthode numérique de calcul d'intégrales étudiée en TD.

Les questions qui suivent sont destinées à construire progressivement une fonction *simpson* en MAPLE qui implante la méthode de Simpson. L'entier N fera partie des paramètres de la fonction.

Question 6 [1 pt]. Quels autres paramètres donneriez-vous à la fonction *simpson* ?

Question 7 [2 pts]. Implanter en MAPLE une fonction *pair_suivant* paramétrée par un entier n et qui retourne le plus petit nombre pair supérieur ou égal à n (on peut tester en MAPLE si un nombre n est pair en testant si le reste de la division de n par 2 est nul ; ce reste s'obtient en MAPLE par l'appel de fonction *irem* (n , 2)).

Question 8 [3 pts]. Implanter en MAPLE la fonction *simpson*. Si l'entier N est un nombre impair, votre fonction peut le remplacer par le plus petit nombre pair qui lui est supérieur ou égal. Vous pouvez pour cela réutiliser le résultat de la question précédente.

Question 9 [1 pt]. Donner un appel de fonction qui calcule une approximation de l'intégrale suivante par la méthode de Simpson, pour $N = 4$:

$$\int_1^3 x^2 dx.$$

4 Algorithmique (6 points)

La fonction suivante est écrite dans un pseudolangage.

```
function machin (A)
  commentaire : A est une liste
begin
  R := A
  i := 1
  while i ≤ au nombre d'éléments de R do
    trouvé := faux
    for j variant de i + 1 au nombre d'éléments de R do
      if R[j] = R[i] then
        trouvé := vrai
      fi
    od
    if trouvé then
      supprimer le j-ème élément de R
    else
      i := i + 1
    fi
  od
end
```

```
    return  $R$   
end
```

Question 10 [1 pt]. Que retourne l'appel de fonction *machin* $([2, 3, 3, a, 3, 2, 1])$?

Question 11 [2 pts]. Coder la fonction *machin* en MAPLE.

Question 12 [1 pt]. La boucle **for** est maladroite. Pourquoi ? Proposer une amélioration.

Question 13 [1 pt]. Pourquoi l'indice i n'est-il pas systématiquement incrémenté dans la boucle **while** ?

Comme l'indice i n'est pas systématiquement incrémenté, il n'est pas évident que l'algorithme s'arrête dans tous les cas. Pour prouver l'arrêt d'une boucle **while**, une méthode classique consiste à exhiber un *variant* de boucle (ne pas confondre avec un *invariant*) : un variant de boucle est une fonction à image dans \mathbb{N} qui décroît strictement à chaque itération. En effet, une boucle qui admet un variant s'arrête dans tous les cas puisque une fonction à image dans \mathbb{N} ne peut pas décroître strictement indéfiniment.

Question 14 [1 pt]. Proposer un variant en fonction de i et de R pour la boucle **while** de la fonction *machin*.