Calcul Formel et Sciences de la Matière — Janvier 2004
Durée 3 heures — Aucun document autorisé

---

1 La méthode de Gauss Seidel (18 points)

La méthode de Gauss Seidel est une méthode de résolution de systèmes d'équations linéaires

$$A\,x \;=\; b \tag{1}$$

où $A = (a_{ij})$ est une matrice carrée $n \times n$ de réels (i l'indice de ligne et j l'indice de colonne) et x et b sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (n entier strictement positif). C'est une méthode itérative : elle consiste à construire une suite de vecteurs (x^k)

$$x^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}$$

qui, sous certaines hypothèses, converge vers la solution exacte du système (1). Quel est l'intérêt d'une telle méthode vis–à–vis du pivot de Gauss ? Elle permet de traiter des matrices beaucoup plus volumineuses parce qu'elle est plus stable numériquement : elle donne des résultats beaucoup plus précis pour les systèmes linéaires dont les coefficients sont inexacts.

On montre sur l'exemple d'un système de trois équations à trois inconnues comment la méthode de Gauss Seidel permet de calculer x^{k+1} à partir de x^k. Supposons que x^k soit proche de la solution d'un système $A\,x = b$. Alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1^k + a_{12}\,x_2^k + a_{13}\,x_3^k & \simeq & b_1 \\ a_{21}\,x_1^k + a_{22}\,x_2^k + a_{23}\,x_3^k & \simeq & b_2 \\ a_{31}\,x_1^k + a_{32}\,x_2^k + a_{33}\,x_3^k & \simeq & b_3 \end{array}\right.$$

Méthode élémentaire. Elle consiste à prendre pour x^{k+1} le vecteur défini par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1^{k+1} & = & (b_1 - a_{12}\,x_2^k - a_{13}\,x_3^k)/a_{11} \\ x_2^{k+1} & = & (b_2 - a_{21}\,x_1^k - a_{23}\,x_3^k)/a_{22} \\ x_3^{k+1} & = & (b_3 - a_{31}\,x_1^k - a_{32}\,x_2^k)/a_{33} \end{array}\right.$$

Pour une matrice $n \times n$ la formule s'énonce (on suppose bien sûr $a_{ii} \neq 0$) :

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \displaystyle\sum_{j \neq i} a_{ij}\,x_j^k}{a_{ii}}.$$

Optimisation. Elle consiste à réutiliser les coordonnées de x^{k+1} à la place de celles (moins précises) de x^k dès qu'on les a calculées. Cela donne la formule de Gauss Seidel :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1^{k+1} & = & (b_1 - a_{12}\,x_2^k - a_{13}\,x_3^k)/a_{11} \\ x_2^{k+1} & = & (b_2 - a_{21}\,x_1^{k+1} - a_{23}\,x_3^k)/a_{22} \\ x_3^{k+1} & = & (b_3 - a_{31}\,x_1^{k+1} - a_{32}\,x_2^{k+1})/a_{33} \end{array}\right.$$

Pour une matrice $n \times n$ la formule s'énonce (on suppose bien sûr $a_{ii} \neq 0$) :

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j^k}{a_{ii}}.$$

Question 1 [1 pt]. Calculer x^{k+1} à partir des données suivantes (utiliser l'optimisation).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x^k = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On convient dans les questions qui suivent de représenter A, b et les x^k par des matrices et des vecteurs du paquetage *linalg* de MAPLE. On suppose les fonctions de ce paquetage chargées en mémoire.

La méthode élémentaire

Question 2 [2 pts]. Écrire en MAPLE une fonction paramétrée par A, b, x^k, un indice de ligne i et qui retourne x_i^{k+1}, calculée par la méthode élémentaire.

Question 3 [2 pts]. Écrire en MAPLE une fonction *Gauss_Seidel0*, paramétrée par A, b, x_0, un indice k et qui retourne x^k. Appliquer la méthode élémentaire et réutiliser la fonction de la question précédente. On autorise l'utilisation de variables indicées.

La méthode optimisée. Bien que la formule de Gauss Seidel soit plus compliquée à lire que la formule de la méthode élémentaire, elle conduit à des calculs plus simples. En particulier, on peut programmer la méthode en une seule fonction et au moyen d'un seul vecteur x.

Question 4 [4 pts]. Écrire en MAPLE une fonction *Gauss_Seidel1*, paramétrée par A, b, x_0 et k, qui retourne x^k. Appliquer l'optimisation.

En pratique, on arrête les calculs dès que x^k et x^{k+1} sont *proches* c'est–à–dire dès que

$$\max_{i=1}^{n} |x_i^k - x_i^{k-1}| < \varepsilon$$

où $\varepsilon > 0$ est un réel fixé à l'avance.

Question 5 [3 pts]. Écrire une fonction *proches*, paramétrée par deux vecteurs x et y et un réel $\varepsilon > 0$, qui retourne *true* si x et y sont proches au sens défini ci–dessus et *false* sinon. Quelle structure de contrôle vaut–il mieux utiliser ? Un *for* ou un *while* ? Justifier. Utiliser la structure la mieux adaptée.

Convergence. Une matrice A est dite à *diagonale strictement dominante* si pour tout i on a :

$$|a_{ii}| \;>\; \sum_{j \neq i} |a_{ij}|. \tag{2}$$

On peut démontrer que si A est à diagonale strictement dominante alors le système (1) admet une unique solution $\bar{x}$ et que, quelle que soit la solution approchée x^0, l'itération de Gauss Seidel converge vers $\bar{x}$.

Question 6 [1 pt]. La matrice A donnée à la question 1 est–elle à diagonale strictement dominante ?

Question 7 [1 pt]. Donner une spécification de la fonction ci–dessous.

```
machin := proc (A)
    local resultat, l, c, somme;
    resultat := true;
    for l from 1 to rowdim (A) do
        somme := 0;
        for c from 1 to coldim (A) do
            if l <> c then
                somme := somme + abs (A[l,c])
            fi
        od;
        if abs (A[l,l]) <= somme then
            resultat := false
        fi
    od;
    resultat
end:
```

Question 8 [2 pts]. Cette fonction comporte une maladresse. Laquelle ? Proposer une correction.

Comparaison avec le pivot de Gauss

Question 9 [1 pt]. En supposant que les deux méthodes (pivot de Gauss et Gauss Seidel) puissent s'appliquer sur un certain système, comparer la nature des solutions obtenues.

Question 10 [1 pt]. Peut–on appliquer la méthode de Gauss Seidel à tout système auquel le pivot de Gauss est applicable ? Réciproquement, peut–on appliquer le pivot de Gauss à tout système auquel la méthode de Gauss Seidel est applicable ?

2 Équations différentielles (5 points)

On souhaite intégrer numériquement l'équation différentielle suivante sur $[a, b] = [0, 1]$.

$$x' = 2\,x + t, \quad x(a) = 1.$$

Question 11 [1 pt]. Cette équation est–elle autonome ?

Question 12 [1 pt]. Quelle est la suite (t_n, x_n) définie par la méthode d'Euler sur cet exemple ?

Question 13 [1 pt]. Intégrer numériquement l'équation pour un nombre de pas $N = 1$.

Question 14 [1 pt]. Intégrer numériquement l'équation pour un nombre de pas $N = 2$.

Question 15 [1 pt]. Notons $x(t)$ la solution de l'équation différentielle et (t_n, x_n) la suite définie par la méthode d'Euler. Supposons que pour un certaine valeur de N on ait $|x(t_N) - x_N| = 10^{-3}$. Exprimer en fonction de N le nombre de pas N' nécessaire pour obtenir $|x(t_{N'}) - x_{N'}| = 10^{-6}$.