Calcul Formel et Sciences de la Matière — Juin 2005
Durée 3 heures — Documents et calculatrices interdits

---

1 Minima locaux (11 points)

Les deux paragraphes ci–dessous sont uniquement destinés à expliquer le sens des questions de programmation qui les suivent. On peut fort bien répondre aux questions sans les avoir lus bien qu'ils fournissent quelques indications de réponse.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable d'une variable réelle. Une condition suffisante pour que f admette un minimum local en un point $a \in \mathbb{R}$ est que $f'(a) = 0$ (ce qui signifie que le graphe de f admet une tangente horizontale en $x = a$) et que $f''(a) > 0$. Cette condition se comprend facilement en considérant le développement limité de $f(x)$ au voisinage de $x = a$:

$$f(a+h) \simeq f(a) + h\, f'(a) + h^2\, \frac{f''(a)}{2}\cdot$$

En effet, comme $f'(a)$ est nul, quel que soit le petit déplacement h positif ou négatif, le terme $h^2\, f''(a)$ est forcément positif et donc $f(a+h)$ est supérieur ou égal à $f(a)$. On a bien affaire à un minimum local.

Ce raisonnement se généralise aux fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de n variables réelles $x_1, \ldots, x_n$: il existe une notion de développement limité pour ces fonctions ; les points $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ à « plan » tangent horizontal sont ceux où le vecteur des n dérivées partielles $\partial f / \partial x_i$ s'annule ; la condition de positivité sur la dérivée seconde se généralise en une condition sur la matrice H, dite « hessienne », des dérivées partielles secondes de f. Cette matrice est de dimension $n \times n$. Elle est symétrique, c'est–à–dire que $H_{ij} = H_{ji}$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$. Pour que $(a_1, \ldots, a_n)$ soit un minimum local, il suffit que H soit ce qu'on appelle « définie positive » en $(a_1, \ldots, a_n)$.

1.1 Compréhension de code

Question 1 [2 pts]. La fonction suivante attend en paramètre une matrice carrée quelconque de réels (pas forcément une matrice hessienne). Elle suppose le paquetage *linalg* chargé en mémoire. Spécifier cette fonction.

```
machin := proc (H)
    local resultat, i, j;
    resultat := true;
    for i from 1 to rowdim (H) do
        for j from 1 to i - 1 do
            if H [i, j] <> H [j, i] then
                resultat := false
            fi
        od
    od;
    resultat
end:
```

Question 2 [1 pt]. Cette fonction comporte une maladresse. Laquelle ?

Question 3 [2 pts]. Corriger la maladresse.

1.2 Matrices définies positives

La définition des matrices définies positives est un peu technique. On ne la donne pas dans ce sujet. Nous nous contentons d'un algorithme qui décide si une matrice symétrique est définie positive ou pas.

Définition 1 *Soient H une matrice carrée de dimension $n \times n$ et $1 \leq i \leq n$ un indice. On appelle i*ème mineur principal *de H la matrice H_i obtenue en supprimant, dans H, les lignes et les colonnes d'indice strictement supérieur à i.*

Voici en MAPLE une matrice 3×3 et ses trois mineurs principaux, calculés avec la fonction *submatrix* du paquetage linalg.

```
> H := matrix (3, 3, [[2, -1, 4], [-1, 7, 1], [4, 1, 3]]);
                                              [ 2    -1    4]
                                              [             ]
                                         H := [-1     7    1]
                                              [             ]
                                              [ 4     1    3]

> H1 := submatrix (H, 1..1, 1..1);
                                   H1 := [2]

> H2 := submatrix (H, 1..2, 1..2);
                                   [ 2    -1]
                             H2 := [        ]
                                   [-1     7]

> H3 := submatrix (H, 1..3, 1..3);
                                   [ 2    -1    4]
                                   [             ]
                             H3 := [-1     7    1]
                                   [             ]
                                   [ 4     1    3]
```

Proposition 1 *Soit H une matrice symétrique de réels. La matrice H est définie positive si et seulement si les déterminants des mineurs principaux de H sont tous strictement positifs.*

La matrice prise en exemple ci–dessus est symétrique. On vérifie avec MAPLE qu'elle n'est pas définie positive.

```
> det (H1);
                                       2

> det (H2);
                                      13

> det (H3);
                                      -83
```

Question 4 [3 pts]. Écrire en MAPLE une fonction paramétrée par une matrice carrée H de réels et qui retourne la liste des déterminants des mineurs principaux de H. On suppose le paquetage *linalg* chargé en mémoire.

Question 5 [3 pts]. Écrire en MAPLE une fonction paramétrée par une matrice symétrique (et donc carrée) H de réels, qui retourne *true* si H est définie positive et *false* sinon. Appliquer l'algorithme suivant :

1. Calculer la liste L des déterminants des mineurs principaux de H en utilisant la réponse à la question précédente.
2. Utiliser une variable *resultat* initialisée à *true* et un indice i initialisé à 1. Tant que i n'excède pas le nombre d'éléments de L et qu'il n'est pas déjà établi que H n'est pas définie positive faire : affecter *false* à *resultat* si le $i$ème déterminant est négatif ou nul puis incrémenter i.
3. Retourner *resultat*

2 Équations différentielles (9 points)

On s'intéresse à l'équation différentielle avec condition initiale

$$x'(t) = (t+1)\,x(t) + 1, \quad x(0) = 0.$$

Question 6 [1 pt]. Cette équation est–elle autonome ?

2.1 Connaissance du logiciel

Question 7 [1 pt]. Donner une instruction MAPLE qui affecte cette équation différentielle à une variable *edo*.

Question 8 [1 pt]. Donner une instruction MAPLE qui résolve numériquement cette équation différentielle.

Question 9 [1 pt]. Quel est le type du résultat de l'instruction précédente : un nombre ? une expression ? un booléen ? une fonction (si oui quelle est sa spécification) ... ?

2.2 Méthode d'Euler

On souhaite intégrer numériquement l'équation différentielle précédente sur l'intervalle $[a, b] = [0, 1]$ en N pas.

Question 10 [1 pt]. Quelle est la suite (t_n, x_n) définie par la méthode d'Euler sur cet exemple ?

Question 11 [1 pt]. Intégrer numériquement l'équation pour un nombre de pas $N = 1$.

Question 12 [1 pt]. Intégrer numériquement l'équation pour un nombre de pas $N = 2$.

2.3 Analyse qualitative

On considère le système différentiel linéaire $x' = A\,x$. Voici quelques informations sur la matrice A

```
> A := matrix (2,2,[[3,-1],[-1,3]]);
                                        [ 3    -1]
                                   A := [        ]
                                        [-1     3]

> eigenvects (A);
                      [4, 1, {[-1, 1]}], [2, 1, {[1, 1]}]
```

Question 13 [1 pt]. Déduire de ce qui précède une expression générale des solutions du système sous la forme d'une combinaison linéaire d'exponentielles.

Question 14 [1 pt]. Quel est le point fixe du système ? Quel est son type ? Justifier en quelques mots.