Calcul Formel et Sciences de la Matière – Février 2007
Durée 3 heures – Documents et calculatrices interdits

Prenez le temps de lire ce sujet. Les questions sont indépendantes pour la plupart. L'énoncé est un peu long mais il est noté sur 24 points.

1 Distance de Freinage [4 points]

On a mesuré la distance nécessaire pour qu'un véhicule s'arrête, en fonction de la vitesse, avant que le conducteur ne voie l'obstacle.

Vitesse en km/h (V)	Distance d'arret en m (DA)
30	14
45	25
50	30
90	77
110	109
130	145

On souhaite trouver une équation de la forme $DA = f(V)$ où f est une fonction polynomiale du second degré, c'est-à-dire $f(V) = aV^2 + bV + c$ qui corresponde le mieux possible aux mesures.

question 1. **[1 point]** . Quelles sont les inconnues ?

Réponse à la question 1 :

---

a, b et c sont les inconnues.

Fin de la réponse à la question 1.

Dans la suite, on détermine ces inconnues par une méthode vue en cours. On suppose `LinearAlgebra` chargé en mémoire, et on suppose aussi que les variables `V` et `DA` sont initialisées de la manière suivante :

```
V:=<30,45,50,90,110,130>;
DA:=<14,25,30,77,109,145>;
```

question 2. **[1 point]** . Donner une ou plusieurs instructions `Maple` permettant de fabriquer un vecteur nommé `un` dont toutes les composantes valent 1 et dont la dimension est la même que celle de `V`. La solution que vous proposez doit contenir une instruction `seq`, et ne doit nécessiter aucun changement même si on ajoute de nouvelles mesures.

Réponse à la question 2 :

```
un:=<seq(1,i=1..Dimension(V))>;
```

Fin de la réponse à la question 2.

question 3. **[1 point]** . Donner une ou plusieurs instructions `Maple` permettant de fabriquer un vecteur nommé `V2` dont toutes les composantes sont égales au carré de la composante de `V` correspondante. La solution que vous proposez doit contenir une boucle `pour` et ne doit nécessiter aucun changement même si on ajoute de nouvelles mesures.

Réponse à la question 3 :

```
V2:=Vector(Dimension(V));
for i from 1 to Dimmension(V) do
  V2[i]:=V[i]^2;
od;
```

Fin de la réponse à la question 3.

On exécute les instructions suivantes.

```
> A:=<V2|V|un>;
                                   [  900     30    1]
                                   [                 ]
                                   [ 2025     45    1]
                                   [                 ]
                                   [ 2500     50    1]
                              A := [                 ]
                                   [ 8100     90    1]
                                   [                 ]
                                   [12100    110    1]
                                   [                 ]
                                   [16900    130    1]

> tA:=Transpose(A);
                    [900    2025    2500    8100    12100    16900]
                    [                                              ]
             tA := [ 30      45      50      90      110      130]
                    [                                              ]
                    [  1       1       1       1        1        1]
> LinearSolve(<tA.A|tA.DA>);
                                      [ 1487 ]
                                      [------]
                                      [231000]
                                      [      ]
                                      [ 1983 ]
                                      [ ---- ]
                                      [ 7000 ]
                                      [      ]
                                      [-1451 ]
                                      [----- ]
                                      [3300  ]
```

question 4. **[1 point]** . Déduire des résultats précédents la fonction f.

Réponse à la question 4 :

On en déduit que les valeurs de a, b et c obtenues par la méthode des moindres carrés sont $a = \frac{1487}{231000}$ $b = \frac{1983}{7000}$ et $c = -\frac{1451}{3300}$ donc

$$f(v) = \frac{1487}{231000}v^2 + \frac{1983}{7000}v - \frac{1451}{3300}$$

Fin de la réponse à la question 4.

2 Calculs d'intégrales [9 points]

2.1 Avec une E.D.O.

Le calcul d'une primitive F d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$, peut se ramener à la résolution d'une équation differentielle ordinaire. En effet F est la primitive de f prenant la valeur α en a si et seulement si F est solution de l'équation différentielle ordinaire avec condition initiale suivante : $x'(t) = f(t)$ et $x(a) = \alpha$.

Par exemple : Si on considère la fonction $f(t) = 2t + 1$, on constate que $F(t) = t^2 + t$ est la solution de l'équation différentielle $x'(t) = 2t + 1$ et $x(0) = 0$.

question 5. **[1 point]** . Voici une suite de commande `Maple` qui calcule une approximation du graphe de la primitive d'une fonction f définie ailleurs en appliquant l'idée énoncée ci-dessus.

```
>N:=1;
>h:=(b-a)/N;
>t0:=a;
>x0:=alpha;
>t1:=a+h;
>x1:=x0+h*f(t0);
```

Quelle est la méthode de résolution d'E.D.O. utilisée ? Quel est son ordre ?

Réponse à la question 5 :

On reconnait la méthode d'Euler. Elle est d'ordre 1.

Fin de la réponse à la question 5.

On souhaite maintenant utiliser le solveur numérique d'équations différentielles de `Maple`.

question 6. **[2 points]** . Donner les instructions `Maple` permettant d'affecter à une variable `edo` l'ensemble formé par l'équation différentielle précédente et sa condition initiale. Donner ensuite une instruction `Maple` permettant de résoudre de manière numérique ce système.

Réponse à la question 6 :

```
edo:={diff(x(t),t)=f(t),x(a)=alpha};
dsolve(edo,numeric);
```

Fin de la réponse à la question 6.

Dans la suite de l'exercice, on considèrera qu'on dispose d'une fonction `resoudre` paramétrée par f, a, b, et α qui trouve une primitive par une méthode numérique. Le résultat fournit par `resoudre` sera une procédure `Maple` paramétrée par une valeur de $t \in [a, b]$ et dont le résultat sera la valeur approchée réelle de $F(t)$.

On peut utiliser n'importe quelle primitive F de f pour calculer une intégrale définie, en évaluant la différence de valeurs d'une primitive aux bornes de l'intervalle d'integration. C'est à dire

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \text{ où } F \text{ est une primitive de } f$$

En particulier, on peut choisir la primitive F de f qui s'annule en a.

question 7. **[1 point]** . Quel est l'intérêt de choisir cette primitive ?

Réponse à la question 7 :

Cela évite une évaluation de F et cela évite une soustraction.

Fin de la réponse à la question 7.

question 8. **[2 points]** . En utilisant la fonction `resoudre`, réaliser une fonction nommée `calcule_int` paramètrée par f, a, et b permettant de calculer de manière numérique la valeur de $\int_a^b f(t)dt$.
Toute réponse contenant plus de sept lignes sera refusée.

Réponse à la question 8 :

```
calculeint:=proc(f,a,b)
  local F;
  F:=resoudre(f,a,b,0);
  F(b);
end;
```

Fin de la réponse à la question 8.

2.2 Une méthode traditionnelle

Une méthode pour calculer des integrales, due à Newton, repose sur l'idée qu'on peut :
- découper l'intervalle d'intégration en n intervalle de même longueurs ;
- puis interpoler la fonction sur cet intervalle par un polynôme de degré 3 ;

– et enfin calculer l'integrale de la fonction interpolée.
Cela donne la formule suivante :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{8}\left(f(b) - f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} 2f(a+kh) + 3f\left(a + \frac{(3k+2)h}{3}\right) + 3f\left(a + \frac{(3k+1)h}{3}\right)\right)$$

où h designe $\frac{b-a}{n}$

question 9. **[1 point]** . On souhaite implanter cette méthode d'intégration dans une procédure nommée `integre_Newton`. Quels paramètres donner à cette procédure ?

Réponse à la question 9 :

Il faut passer la fonction `f`, les bornes de l'intervalle d'intégration `a` et `b` et le nombre de pas `n`. Cela donnera l'entête suivante :

```
Integre_newton:=proc(f,a,b,n)
```

Fin de la réponse à la question 9.

question 10. **[2 points]** . Implanter en `Maple` la procédure `integre_Newton`.

Réponse à la question 10 :

```
Integre_newton:=proc(f,a,b,n)
local h,res,k;
res:=f(b)-f(a); h:=(b-a)/n;
for k from 0 to n-1 do
  res:=res+2*f(a+k*h)+3*f(a+(3*k+2)*h/3)+3*f(a+(3*k+1)*h/3);
od;
h*res/8;
end:
```

Fin de la réponse à la question 10.

3 Suites récurrentes linéaires [6 points]

Un couple de suites récurrentes $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}})$ peut être défini de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + 5v_n \\ u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases}$$

question 11. **[1 point]** . Donner une ou plusieurs instructions `Maple` permettant de stocker dans des variables indicées nommées `u[n]` et `v[n]` les 1001 premiers termes de ces suites. (On s'arrête aux termes d'indice 1000, mais il y a les termes d'indice 0)

Réponse à la question 11 :

```
u[0]:=1:
v[0]:=2:
for n from 0 to 999 do
  u[n+1]:=2*u[n]-2*v[n]:
  v[n+1]:=u[n] + 5*v[n]:
od:
```

Fin de la réponse à la question 11.

question 12. **[2 points]** . On ne s'intéresse qu'à u_{1000} et v_{1000}. Comment modifier les instructions précédentes pour éviter de stocker tous les termes ?

Réponse à la question 12 :

On va juste conserver dans les variables `u` et `v` la valeur du terme courant de la suite, toutefois, on a besoin d'une variable auxiliaire supplémentaire, pour conserver la la valeur courante de u_n. Cela donne :

```
u:=1:
v:=2:
for n from 0 to 999 do
  aux:=u:
  u:=2*u-2*v:
  v:=aux + 5*v:
od:
```

Fin de la réponse à la question 12.

On remarque que $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ s'écrit $X_{n+1} = A.X_n$ où A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

question 13. **[1 point]** . Donner les instructions `Maple` permettant d'initialiser la variable A avec la matrice A donnée dans l'énoncé.

Réponse à la question 13 :

```
A:=<<2|-2>,<1|5>>;
```

Fin de la réponse à la question 13.

question 14. **[1 point]** . En utilisant les fonctions définies dans le paquetage `LinearAlgebra` de `Maple`, donner une instruction permettant de calculer les vecteurs propres de la matrice A.

Réponse à la question 14 :

```
Eigenvalue(A);
```

Fin de la réponse à la question 14.

question 15. **[1 point]** . Sachant que la matrice A est diagonalisable, que les valeurs propres sont 3 et 4 et que les vecteurs propres associés sont $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donner une matrice D et une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$

Réponse à la question 15 :

$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Fin de la réponse à la question 15.

4 Algorithme pour logarithme [2 points]

Dans cet exercice, on se propose de programmer la fonction logarithme, en supposant qu'on dispose de la fonction exponentielle de `Maple` notée `exp`. Calculer $ln(a)$ revient à résoudre une équation $f(x) = 0$, en choisissant $f(x) = e^x - a$.

question 16. **[1 point]** . On va utiliser la méthode de Newton pour résoudre numériquement cette équation. Donner la relation de récurrence permettant de définir la suite.

Réponse à la question 16 :

Comme f est dérivable, et $f(x) = e^x - a$, on peut calculer f', on trouve $f'(x) = e^x$. la relation de récurrence qui permet de définir la suite, vue en cours est :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

En remplaçant f et f', on obtient ici :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - a}{e^{x_n}}$$

Fin de la réponse à la question 16.

On admet que pour tout $a > 0$, et pour $x_0 = 0$ la suite définie précédemment converge.

Lorsque f est une fonction dérivable, x est une racine simple de f si et seulement si $f(x) = 0$ et $f'(x) \neq 0$

On rappelle que pour tout réel x on a $e^x > 0$. Cela implique que $\ln(a)$ est une racine simple de f

question 17. **[1 point]** . Quelle conséquence cette propriété a sur la vitesse de convergence de la suite ?

Réponse à la question 17 :

Il a été vu en cours que lorsque la racine est simple, l'ordre de la méthode est 2 (au moins). Cela signifie —*en gros*— que le nombre de chiffres exacts double à chaque itération.

Fin de la réponse à la question 17.

5 Analyse qualitative [3 points]

on considère la fonction suivante :

$$f(t,x) = (2 - e^{-t^2})(x-1)(x-2)^2(x-3)$$

question 18. **[1 point]** . L'équation différentielle $x'(t) = f(t,(x(t))$ est elle autonome ?

Réponse à la question 18 :

Il ne s'agit pas d'une équation différentielle autonome, car f dépend explicitement de t.

Fin de la réponse à la question 18.

question 19. **[2 points]** . Procéder à l'analyse qualitative de l'équation différentielle suivante :

$$x'(t) = 2(x(t)-1)(x(t)-2)^2(x(t)-3)$$

On cherchera les points fixes, on précisera leur nature, et on réalisera la ligne de phase.

Réponse à la question 19 :

C'est une équation différentielle autonome.

Cherchons les solutions constantes (points fixes). Elles sont solutions de l'équation :

$$0 = 2(x-1)(x-2)^2(x-3)$$

Un produit de nombre réels est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs de est nul. On a donc trois solutions $x = 1$, $x = 2$ ou $x = 3$. (Remarque : 2 est une solution double.)

Ensuite, on étudie le signe de f, car comme f est continue, le signe ne changera pas entre les racines. On fait un tableau de signe :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
signe de $(x-1)$		-	0	+	|	+	|	+	
signe de $(x-2)^2$		+	|	+	0	+	|	+	
signe de $(x-3)$		-	|	-	|	-	0	+	
signe de f		+	0	-	0	-	0	+	

On en déduit que
- 1 est un point fixe attractif ;
- 2 est un point fixe noeud ;
- 3 est un point fixe répulsif.

3 point fixe répulsif
2 point fixe noeud
1 point fixe attractif
0

Fin de la réponse à la question 19.