

## Codage de l'information

## Examen de juin 2005 (2nde session)

durée 1h30 - documents et calculatrices non autorisés

## Exercice 1 : Code (1/2H)

On considère le langage  $L$  défini sur l'alphabet  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ ,  $n$  et  $m$  étant deux entiers naturels, par

$$L = \{0, 1^n 0, 1^m\}$$

où la notation  $1^n$  désigne le mot constitué de  $n$  fois la lettre 1.

Q 1 . À quelle condition portant sur les entiers  $n$  et  $m$  le langage  $L$  est-il un code ?

Q 2 . Dans cette question, on pose  $n = 3$  et  $m = 2$ . On note  $A$  le sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  dont l'écriture en base 2 est un mot binaire qui se décompose en mots de  $L$ .

Q 2.1. Parmi les entiers de 0 à 10, quels sont ceux qui appartiennent à  $A$  ?

Q 2.2. Y a-t-il des puissances de 2 dans  $A$  ?

Q 2.3. Y a-t-il des nombres de la forme  $2^k - 1$  dans  $A$  ? si oui pour quels entiers  $k$  ?

## Exercice 2 : Fichier à compresser (1/2H)

Un fichier sur disque est constitué de 1500 octets. On s'aperçoit qu'il contient beaucoup plus de 1 que de 0 et on souhaite le compresser. Pour cela on le décompose en 3000 mots de 4 bits et on constate qu'il y a alors :

- $x = 1200$  mots de la forme 1111,
- $y = 300$  mots pour chacun des quatre motifs ne contenant qu'un seul 0 (0111, 1011, 1101, 1110),
- $z = 100$  mots pour chacun des six motifs contenant deux 0 (0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100),
- aucun mot contenant plus de deux 0.

Q 1 . Comment coder ces 11 motifs pour obtenir une compression maximale ? Quelle est alors la taille en bits du fichier ainsi comprimé ?

Q 2 . Sans la calculer explicitement, donner un encadrement de l'entropie de ce fichier considéré comme source de symboles de quatre bits.

## Exercice 3 : Détection et correction d'erreurs (1/2H)

On considère le codage suivant des mots de 4 bits en des mots de huit bits :

$$c : \mathbb{F}_2^4 \longrightarrow \mathbb{F}_2^8$$

$$u = \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle \longmapsto c(u) = \langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_1 \oplus b_2, b_3 \oplus b_4, b_1 \oplus b_3, b_2 \oplus b_4 \rangle$$

Q 1 . Calculez  $c(\langle 0, 0, 0, 0 \rangle)$ ,  $c(\langle 0, 1, 0, 0 \rangle)$ ,  $c(\langle 1, 0, 1, 1 \rangle)$ .

Q 2 . Vérifiez que  $c$  est bien un codage, i.e. est une application injective.

Q 3 . On désigne par  $C$  le sous-ensemble de  $\mathbb{F}_2^8$  constitué des 16 mots images par  $c$  d'un mot de  $\mathbb{F}_2^4$ . Montrez que  $C$  est un code linéaire.

Q 4 . Quelle est la distance minimale de ce code ? En déduire ces capacités de détection et de correction d'erreurs.