USTL - Licence ST-A 1ère année 2005-2006

Codage de l'information

Examen du 24 juin 2006

durée 1h30 - documents et calculatrices non autorisées.

Exercice 1 : *Bug du GPS*

Le décompte des semaines GPS a commencé approximativement à minuit la nuit du 05 au 06 Janvier 1980 (la semaine zéro). Depuis ce temps, le compte a été augmenté d'une unité chaque semaine, et diffusé au sein des messages GPS. Sachant que le décompte des semaines écoulées est codé en binaire sur 10 bits, indiquez le mois et l'année du retour à la semaine zéro. (On pourra considérer qu'une année fait exactement 52 semaines.)

Exercice 2 : *Code*

On considère le langage binaire L à 6 mots :

$$L = \{\texttt{00}, \texttt{10}, \texttt{11}, \texttt{000}, \texttt{100}, \texttt{101}\}.$$

Q 1 . Vérifiez que L n'est pas un code.
Q 2 . Montrez qu'il existe un mot u de L tel que le langage L' obtenu en retirant le mot u,

$$L' = L \setminus \{u\},$$

est un code.
Q 3 . Peut-on rajouter un mot de longueur inférieure ou égale à 2 dans L' tout en gardant la propriété d'être un code ? et un mot de longueur 3 ?

Exercice 3 : *Codage*

On considère l'alphabet source $\mathcal{S} = \{a, b, c, d, e\}$ et le codage décrit par l'arbre de la figure 1.

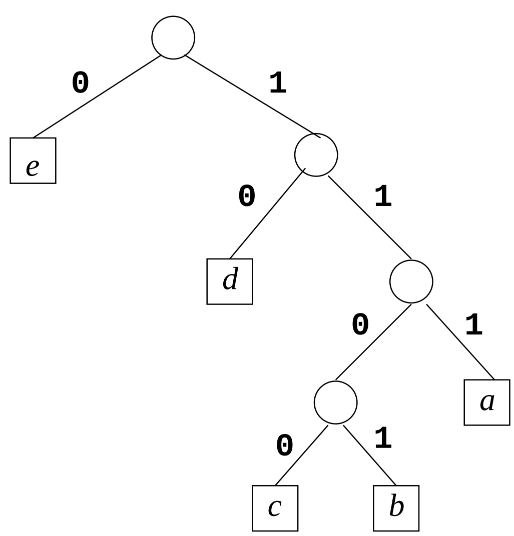

FIG. 1 – Arbre de codage

Q 1 . Donnez la table de codage et justifiez qu'il s'agit bien d'un codage.
Q 2 . Décodez le message $\texttt{10111100110001101}$.
Q 3 . Dans un message de 1000 symboles produit par la source, on a trouvé 350 fois le symbole a, 210 fois le symbole b, 190 fois le symbole c, 150 fois le symbole d et 100 fois le symbole e.

Q 3.1. Dîtes pourquoi le codage précédent n'est pas optimal pour ce message.
Q 3.2. Proposez un codage optimal.
Q 3.3. Quelle est la longueur en bits de ce message codé avec un codage optimal ?

Exercice 4 : *Codes détecteurs/correcteurs*

On considère le codage des mots binaires de longueur 3 en des mots binaires de longueur 15 obtenus en répétant 5 fois le mot à coder.

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{c} : & \mathbb{F}_2^3 & \longrightarrow & \mathbb{F}_2^{15} \\ & u & \longmapsto & \mathbf{c}(u) = uuuuu \end{array}$$

On désigne par $C = \mathbf{c}\left(\mathbb{F}_2^3\right)$ le code associé.

On note p la probabilité d'erreur sur un bit dans le canal de transmission supposé symétrique et sans mémoire.

Q 1 . Quelle est la distance minimale de C ? Quelles sont les capacités de détection et de correction d'erreurs du codage ?

Q 2 . On rappelle que, pour tout $v \in \mathbb{F}_2^n$ et tout $r \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(v, r)$ désigne la boule fermée de centre v et de rayon r, i.e. l'ensemble des mots de longueur n à distance inférieure ou égale à r.

$$\mathcal{B}(v, r) = \{v' \in \mathbb{F}_2^n \mid \mathrm{d}_H(v, v') \leq r\}.$$

Soit $u \in \mathbb{F}_2^3$. Combien y a-t-il de mots de longueur 15 dans $\mathcal{B}(\mathbf{c}(u), 2)$? Parmi ces mots combien y en a-t-il dans C ?

Q 3 . Soit $u \in \mathbb{F}_2^3$, et $v = uuuuu$ le mot de code associé transmis via le canal. Soit $v' = v \oplus e$ le mot reçu, $e \in \mathbb{F}_2^{15}$ désignant le mot décrivant les éventuelles erreurs.

Déterminez en fonction de p la probababilité que $v' \in \mathcal{B}(v, 2)$.

Q 4 . Pour décoder en cas d'erreur, on décode avec la règle de majorité :

> On découpe les 15 bits du mot à décoder en trois listes :
> – la liste L_1 des bits de position 1, 4, 7, 10 et 13 ;
> – la liste L_2 des bits de position 2, 5, 8, 11 et 14 ;
> – et la liste L_3 des bits de position 3, 6, 9, 12 et 15.
> Dans chacune de ces listes on choisit le bit majoritaire. Le mot décodé est obtenu en concaténant les trois bits ainsi obtenus.

Q 4.1. Décodez selon cette règle les mots qui suivent :

1. $v_1 =$ `011010011011010`,
2. $v_1 =$ `101101101101101`,
3. $v_1 =$ `101101011011110`.

Q 4.2. Cette règle de décodage permet-elle de décoder correctement des mots contenant plus d'erreurs que la capacité de correction ?