STL1CI2005

S2 mathém

USTL - Licence ST-A 1ère année 2004-2005

Codage de l'information

Examen de mai 2005

durée 1h30 - documents non autorisés

Exercice 1 : *Codage* (1/2H)

Soit L le langage contenant les six mots binaires

$$L = \{00, 010, 0100, 110, 111, 1110\}$$

Q 1 . L est–il un code?
Q 2 . Existe–t–il un code préfixe contenant six mots binaires de même longueur?
Q 3 . Convertissez l'entier $N = 912$ en base 2. Le mot binaire obtenu peut–il se décomposer en mots de L?

Exercice 2 : *Codage optimal* (20MN)

Le tableau qui suit donne la répartition des 1024 premières "hexadécimales" du nombre π.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
62	70	63	71	61	65	71	56	82	70	65	62	58	50	59	59

TAB. 1 – Répartition des 1024 premières hexadécimales de π

Q 1 . Proposez un codage binaire optimal pour les 1024 premières hexadécimales de π.
Q 2 . Quelle est la taille (en octets) d'un fichier contenant les 1024 premières hexadécimales de π codées avec un codage binaire optimal?
Q 3 . Sans la calculer explicitement, donnez un encadrement de l'entropie des 1024 premières hexadécimales.

Exercice 3 : *Codes de Reed-Muller* (40MN)

On étudie quelques caractéristiques des codes appelés codes de Reed-Muller d'ordre 1. Ces codes dépendent d'un paramètre entier $m \geq 1$, et sont notés $\mathcal{R}(m)$. Ils sont définis par récurrence sur m par

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(1) &= \{00, 01, 10, 11\} \\ \text{et pour } m \geq 1 \quad \mathcal{R}(m+1) &= \{\mathbf{uu} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{R}(m)\} \cup \{\mathbf{u\overline{u}} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{R}(m)\} \end{aligned}$$

les mots de $\mathcal{R}(m+1)$ sont donc les mots ($\mathbf{u}$) de $\mathcal{R}(m)$ concaténés à eux-mêmes ($\mathbf{uu}$) ou à leur complémentaire ($\mathbf{u\overline{u}}$), le complémentaire d'un mot étant le mot obtenu en inversant chaque bit du mot initial.

Par exemple, le code $\mathcal{R}(2)$ est

$$\mathcal{R}(2) = \{0000, 0101, 1010, 1111\} \cup \{0011, 0110, 1001, 1100\}$$

Q 1 . Déterminez les capacités détectrices et correctrices d'erreurs de $\mathcal{R}(1)$ et $\mathcal{R}(2)$.
Q 2 . Donnez la liste des mots de $\mathcal{R}(3)$. Quels sont les poids de ces mots?
Q 3 . Soit $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ un code de longueur n et de distance minimale d.

Q 3.1. Quelle est la distance minimale du code C_1 de longueur $2n$ dont les mots sont les mots de C doublés?

$$C_1 = \{\mathbf{uu} \mid \mathbf{u} \in C\}$$

Q 3.2. Quelle est la distance minimale du code C_2 de longueur $2n$ dont les mots sont les mots $\mathbf{u}$ de C concaténés à leur complémentaire $\overline{\mathbf{u}}$?

$$C_2 = \{\mathbf{u\overline{u}} \mid \mathbf{u} \in C\}$$

Q 4 . Déterminez en fonction de m les caractéristiques suivantes du code $\mathcal{R}(m)$

1. la longueur de ses mots,
2. le nombre de mots,
3. le poids de ses mots,
4. sa distance minimale,
5. ses capacités détectrices et correctrices d'erreurs.