**UE ELFE - Expression Logique et Fonctionnelle ... Évidemment**

---

# TD n$^o$3

## 1 Disgression syntaxique

En Prolog, on appelle **termes** sont aussi bien les termes que les formules atomiques de la logique du premier ordre. Plus précisémment, Prolog ne fait pas de distinction syntaxique entre prédicat, fonction et constante. Il y a cependant quatre types de termes :

- un **atome** est
  - soit une chaîne de majuscules, minuscules, tirets bas et chiffres commencant par une minuscule (expl : `grand_pere`) ;
  - soit une séquence arbitraire de caractères délimitée par des guillemets simples (expl : `'Jean'`) ;
  - soit une chaîne de caractères spéciaux comme `@=` et `:-` certains ayant un sens prédéfini ;
- un **nombre** est une suite de chiffres éventuellement signée (expl : `0`, `23`, `-5`) ou un nombre réel (expl : `16.153`) ;
- une variable est une suite de lettres majuscules, minuscules, chiffres et tirets bas commençant soit par une majuscule soit par un tiret bas (expl : `X`, `Variable`, `_fils`) ;
- un **terme complexe** est de la forme

  $$\langle \textit{foncteur} \rangle(\langle \textit{arg}_1 \rangle, \ldots, \langle \textit{arg}_n \rangle)$$

  où $\langle \textit{foncteur} \rangle$ est un atome (attention : ce ne peut être une variable) et $\langle \textit{arg}_i \rangle$ n'importe quel type de terme (expl : `cache(X, pere(pere(jean)))` est un terme complexe).

Il est permis de définir des prédicats avec différentes arités comme, par exemple, `pere(jean,paul)` et `pere(jean)`. Dans ce cas, Prolog les considère comme des prédicats différents.

## 2 Exercices

**Exercice 1 :** ***(Adapté de "Prolog tout de suite !")***
Pour les équations suivantes, dites si elles sont unifiables et, quand c'est le cas, donnez-en un unificateur.
**Q 1 .** `pain = pain`
**Q 2 .** `'pain' = pain`
**Q 3 .** `Pain = pain`
**Q 4 .** `pain = saucisse`
**Q 5 .** `nourriture(pain)=pain`
**Q 6 .** `nourriture(pain)= X`
**Q 7 .** `nourriture(pain,X) = nourriture(Y,saucisse)`
**Q 8 .** `nourriture(pain,X,biere) = nourriture(Y,saucisse,X)`
**Q 9 .** `nourriture(pain,X,biere) = nourriture(Y,burger)`
**Q 10 .** `nourriture(X) = X`
**Q 11 .** `repas(nourriture(pain), boisson(biere)) = repas(X,Y)`
**Q 12 .** `repas(nourriture(pain),X) = repas(X,boisson(biere))`

**Exercice 2 :** ***Formes résolues***
Dire, pour chaque système d'équation suivant, s'il est sous forme résolue, s'il est unifiable et, dans ce dernier cas, donnez-en un *upg*.
**Q 1 .** $E_1 = \{f(a) = g(f(z)), x = y\}$
**Q 2 .** $E_2 = \{x = f(a, b), f(y, b) = z\}$
**Q 3 .** $E_3 = \{x = y, y = z\}$
**Q 4 .** $E_4 = \{x_1 = g(a), x_2 = f(x_3), x_4 = a\}$

**Exercice 3 :** ***Complexité***

Soient $n \geq 0$ et l'équation

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(g(x_0, x_0), g(x_1, x_1), \ldots, g(x_{n-1}, x_{n-1}))$$

**Q 1 .** Donner un unificateur de cette équation.
**Q 2 .** En déduire la complexité de l'algorithme d'unification donné en cours.

**Exercice 4 :** ***Unification***

On définit la taille d'un terme $\textit{taille}(t)$ par induction sur $t$ :
- $\textit{taille}(x) = \textit{taille}(a) = 1$ ;
- $\textit{taille}(f(t_1, \ldots, t_n)) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \textit{taille}(t_i)$

Par extension, la taille d'un système d'équation est la somme des tailles de ses termes. On associe à chaque système d'équations $E$ un triplet $(n, t, i)$ où
- $n$ est le nombre de variables non résolues dans $E$ ;
- $t$ est la taille de $E$ ;
- $i$ est le nombre d'équations inversées de $E$, i.e. du type $t = x$ où $t \notin \mathit{Var}$.

Pour chaque système d'équation suivant, déterminer un *upg*, ou sa non unification, en appliquant l'algorithme vu en cours. Pour chaque système d'équation intermédiaire obtenu déterminer la valeur de $(n, t, i)$. Constater que ce triplet décroit strictement pour l'ordre lexicographique avec la relation $\rightarrow$.
**Q 1 .** $E_1 = \{f(a, a) = f(x, x)\}$
**Q 2 .** $E_2 = \{f(g(a)) = x, x = f(h(y))\}$
**Q 3 .** $E_3 = \{f(x, a) = f(b, y), g(a, x) = g(a, z)\}$
**Q 4 .** $E_4 = \{x = f(y), y = g(x)\}$
**Q 5 .** $E_5 = \{f(x, g(x), k(y)) = f(h(z), z', k(z)), x = h(y)\}$
**Q 6 .** Montrer que si $E_1 \rightarrow E_2$ et $(n_1, t_1, i_1)$ et $(n_2, t_2, i_2)$ sont les triplets associés à $E_1$ et $E_2$ respectivement, alors $(n_1, t_1, i_1) > (n_2, t_2, i_2)$.