UE ELFE - Expression Logique et Fonctionnelle ... Évidemment

Notes de cours

Rappels de logique propositionnelle et des prédicats

1 Logique propositionnelle

1.1 Syntaxe

Soit $\mathcal{P} = \{p, q, r, \ldots\}$ un ensemble de **variables propositionnelles**. Le langage des **formules propositionnelles** $\mathcal{F}^0 = \{\varphi, \psi, \ldots\}$ est défini par la grammaire *Backus–Naur Form* (BNF) suivante :

$$\varphi, \psi ::= p \ \mid \top \ \mid \bot \mid \ \varphi \wedge \psi \ \mid \ \varphi \vee \psi \ \mid \ \neg\varphi \ \mid \ \varphi \Rightarrow \psi \ \mid \ (\varphi)$$

1.2 Sémantique

Une **valuation** ν est une application des variables propositionnelles dans les *booléens* $\nu : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$.
L'**interprétation** $\varphi^\nu \in \{0, 1\}$ d'une formule φ dépend de la valuation ν de ses variables propositionnelles. Elle est définie par induction sur la structure de φ :
- $p^\nu = \nu(p)$,
- $\top^\nu = 1$,
- $\bot^\nu = 0$,
- $(\varphi \wedge \psi)^\nu = \min(\varphi^\nu, \psi^\nu)$,
- $(\varphi \vee \psi)^\nu = \max(\varphi^\nu, \psi^\nu)$,
- $(\neg\varphi)^\nu = 1 - \varphi^\nu$,
- $(\varphi \Rightarrow \psi)^= \max(1 - \varphi^\nu, \psi^\nu)$.

On dit qu'une valuation ν **satisfait** une formule φ ssi $\varphi^\nu = 1$. On dit que φ est **satisfaisable** s'il existe une valuation qui la satisfait. La **table de vérité** d'une formule φ énumère toutes les interprétations possibles de φ.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Une formule φ est une **tautologie** ssi $\varphi^\nu = 1$ pour toute valuation ν.
Deux formules φ et ψ sont dites **équivalentes**, dénoté $\varphi \equiv \psi$, ssi $\varphi^\nu = \psi^\nu$ pour toute valuation ν.
Une **forme normale disjonctive** (FND) est une "disjonction de conjonctions" de la forme

$$(\varphi_{1,1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{1,n_1}) \vee \ldots \vee (\varphi_{k,1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{k,n_k})$$

où chaque formule $\varphi_{i,j}$ est un **littéral**, c'est-à-dire une variable propositionnelle ou une négation de variable propositionnelle.
Une **forme normale conjonctive** (FNC) est une "conjonction de disjonctions" de la forme

$$(\varphi_{1,1} \vee \ldots \vee \varphi_{1,n_1}) \wedge \ldots \wedge (\varphi_{k,1} \vee \ldots \vee \varphi_{k,n_k})$$

où chaque formule $\varphi_{i,j}$ est un **littéral**.

Proposition 1. *Toute formule propositionnelle est équivalente à une FND et à une FNC.*

1.3 Principales équivalences

Propriétés de complémentation :

$$\varphi \vee \neg\varphi \equiv \top \qquad \varphi \wedge \neg\varphi \equiv \bot \qquad \neg\bot \equiv \top \qquad \neg\top \equiv \bot$$

Lois d'équivalence :

réflexivité	$\varphi \equiv \varphi$	transitivité	si $\varphi \equiv \psi$ et $\psi \equiv \theta$ alors $\varphi \equiv \theta$
commutativité	$(\varphi \equiv \psi)$ ssi $(\psi \equiv \varphi)$	négations	$(\varphi \equiv \psi)$ ssi $(\neg\varphi \equiv \neg\psi)$

Propriétés de $\vee$:

commutativité	$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$	associativité	$\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$
$\top$ élément absorbant	$\varphi \vee \top \equiv \top$	$\bot$ élément neutre	$\varphi \vee \bot \equiv \varphi$
idempotence	$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$		

Propriétés de $\wedge$:

commutativité	$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$	associativité	$\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$
$\bot$ élément absorbant	$\varphi \wedge \bot \equiv \bot$	$\top$ élément neutre	$\varphi \wedge \top \equiv \varphi$
idempotence	$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$		

Distributivité :

distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$ $\quad \varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$

distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$ $\quad \varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$

Lois d'absorption :

$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi \qquad \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$

Lois de De Morgan :

$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi \qquad \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$

Propriétés de $\Rightarrow$:

$(\varphi \Rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$	$((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)) \equiv (\varphi \equiv \psi)$
$((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow h)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow h)$	$(\varphi \Rightarrow \psi) \equiv (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

2 Logique des prédicats (ou du 1er ordre)

2.1 Syntaxe

2.1.1 Les termes

On se dote d'un ensemble $Var = \{x, y, z, \ldots\}$ de **variables** et d'une **signature** Σ, c'est-à-dire la donnée
- d'un ensemble de **symboles de constantes** $\{a, b, c, \ldots\}$,
- d'un ensemble de **symboles de fonctions** $\{f, g, \ldots\}$,
- d'un ensemble de **symboles de relations** (ou **prédicats**) $\{P, Q, R, \ldots\}$ et,
- pour chaque symbole de fonction f (resp. de relation R) d'une **arité** $ar(f) > 0$ (resp. $ar(R) \geq 0$).

Le langage des **termes** $\mathcal{T}_\Sigma = \{u, t, \ldots\}$ est donné par la grammaire BNF suivante :

$$t ::= x \mid a \mid f(t_1, \ldots t_n)$$

où $ar(f) = n$.
Un terme est dit **clos** s'il ne contient pas de variable.

2.1.2 Les formules

Le langage $\mathcal{F}^1_\Sigma = \{\varphi, \psi, \ldots\}$ des formules du premier ordre est donné par la grammaire BNF suivante :

$$\begin{array}{rcll} \varphi, \psi & ::= & \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \Rightarrow \psi & \text{connecteurs propositionnels} \\ & \mid & R(t_1, \ldots, t_n) & \text{formules atomique} \\ & \mid & \exists x \varphi \mid \forall x \varphi & \text{quantifications} \end{array}$$

où $ar(R) = n$.

Une *occurrence* de variable x dans une formule φ est dite **libre** si elle n'apparaît pas dans une sous-formule de φ commençant par $\forall x$ ou $\exists x$. Sinon, elle est dite **liée**. Une variable est dite libre dans φ si elle a au moins un occurrence libre dans φ.
Une formule est dite **close** si c'est une formule sans variable libre.

2.2 Sémantique

Une Σ-**structure** (ou Σ-algèbre) $\mathcal{M}$ est la donnée d'un ensemble non vide M appelé *domaine*, muni, pour chaque symbole de
– constante $a \in \Sigma$, d'un élément $a^{\mathcal{M}} \in M$,
– fonction n-aire $f \in \Sigma$, d'une application $f^{\mathcal{M}} \in M^n \to M$,
– relation n-aire $R \in \Sigma$, d'une relation $R^{\mathcal{M}} : M^n \to \{0,1\}$.
Une **assignation** $\alpha : \mathit{Var} \to M$ est une application des variables dans le domaine M.

L'**interprétation** $t^{\mathcal{M},\alpha} \in M$ **d'un terme** $t \in \mathcal{T}_\Sigma$ dépend de l'assignation de ses variables et de la structure qui interprète ses symboles de constante et de fonction. Elle est définie par induction sur la structure des termes :
– $x^{\mathcal{M},\alpha} = \alpha(x)$,
– $a^{\mathcal{M},\alpha} = a^{\mathcal{M}}$,
– $f(t_1,\ldots,t_n)^{\mathcal{M},\alpha} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M},\alpha},\ldots,t_n^{\mathcal{M},\alpha})$ si f est un symbole de fonction n-aire.
L'**interprétation** $\varphi^{\mathcal{M},\alpha} \in \{0,1\}$ **d'une formule** $\varphi \in \mathcal{F}^1_\Sigma$ est définie par induction sur la structure des formules :
– $R(t_1,\ldots,t_n)^{\mathcal{M},\alpha} = R^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M},\alpha},\ldots,t_n^{\mathcal{M},\alpha})$
– $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{M},\alpha} = \max(\varphi^{\mathcal{M},\alpha}, \psi^{\mathcal{M},\alpha})$
– $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{M},\alpha} = \min(\varphi^{\mathcal{M},\alpha}, \psi^{\mathcal{M},\alpha})$
– $(\neg\varphi)^{\mathcal{M},\alpha} = 1 - \varphi^{\mathcal{M},\alpha}$
– $(\exists x\varphi)^{\mathcal{M},\alpha} = \sup\{\varphi^{\mathcal{M},\alpha'} \mid \alpha'$ assignation avec $\alpha'(y) = \alpha(y)$ pour tout $y \neq x\}$
– $(\forall x\varphi)^{\mathcal{M},\alpha} = \inf\{\varphi^{\mathcal{M},\alpha'} \mid \alpha'$ assignation avec $\alpha'(y) = \alpha(y)$ pour tout $y \neq x\}$

On dit que la Σ-structure $\mathcal{M}$ **satisfait** φ, dénoté $\mathcal{M} \models \varphi$, ssi $\varphi^{\mathcal{M},\alpha} = 1$ pour toute assignation α. On dit que φ est **valide**, dénoté $\models \varphi$, ssi elle est satisfaite par toute Σ-structure. Soit Γ un ensemble de formules de $\mathcal{F}^1_\Sigma$, on dit que $\mathcal{M}$ est un **modèle** de Γ, dénoté $\mathcal{M} \models \Gamma$, ssi $\mathcal{M} \models \varphi$ pour tout $\varphi \in \Gamma$.

Deux formules φ et ψ sont **équivalentes**, dénoté $\varphi \equiv \psi$, ssi $\varphi^{\mathcal{M},\alpha} = \psi^{\mathcal{M},\alpha}$ pour toute Σ-structure $\mathcal{M}$ et assignation α.

2.3 Principales équivalences

Les équivalences propositionnelles demeurent valides. À celles-ci s'ajoutent les équivalences suivantes concernant les quantificateurs.
– $\forall x(\varphi \wedge \psi) \;\equiv\; \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$
– $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \;\Rightarrow\; \exists x\varphi \wedge \exists x\psi$
– $\exists x(\varphi \vee \psi) \;\equiv\; \exists x\varphi \vee \exists x\psi$
– $\models \forall x\varphi \vee \forall x\psi \;\Rightarrow\; \forall x(\varphi \vee \psi)$
– $\neg\forall x\varphi \;\equiv\; \exists x\neg\varphi$
– $\neg\exists x\varphi \;\equiv\; \forall x\neg\varphi$
Si x n'est pas une variable libre de ψ, alors :
– $(\forall x\varphi) \wedge \psi \;\equiv\; \forall x(\varphi \wedge \psi)$
– $(\exists x\varphi) \wedge \psi \;\equiv\; \exists x(\varphi \wedge \psi)$
– $\psi \wedge (\forall x\varphi) \;\equiv\; \forall x(\psi \wedge \varphi)$
– $\psi \wedge (\exists x\varphi) \;\equiv\; \exists x(\psi \wedge \varphi)$
– $(\forall x\varphi) \vee \psi \;\equiv\; \forall x(\varphi \vee \psi)$
– $(\exists x\varphi) \vee \psi \;\equiv\; \exists x(\varphi \vee \psi)$
– $\psi \vee (\forall x\varphi) \;\equiv\; \forall x(\psi \vee \varphi)$
– $\psi \vee (\exists x\varphi) \;\equiv\; \exists x(\psi \vee \varphi)$
– $(\forall x\varphi) \Rightarrow \psi \;\equiv\; \exists x(\varphi \Rightarrow \psi)$
– $(\exists x\varphi) \Rightarrow \psi \;\equiv\; \forall x(\varphi \Rightarrow \psi)$

- $\psi \Rightarrow (\forall x \varphi) \equiv \forall x(\psi \Rightarrow \varphi)$
- $\psi \Rightarrow (\exists x \varphi) \equiv \exists x(\psi \Rightarrow \varphi)$

2.4 Formes normales et formes prénexes

φ est dite **prénexe** si elle est de la forme $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \psi$ où les Q_i sont des quantificateurs et ψ est une formule sans quantificateur.

Proposition 2. *Toute formule est équivalente à une formule prénexe.*

Une **clause** est une disjonctions de littéraux. Une formule prénexe $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \psi$ est sous **forme normale conjonctive** (FNC) si la formule sans quantificateurs ψ est une clause ou une conjonction de clauses.

Proposition 3. *Toute formule est équivalente à une FNC.*