

Expression Logique et Fonctionnelle ... Évidemment

TD n° 4 : λ -calcul

Exercice 1 *Syntaxe des λ -termes*

Pour chacun des λ -termes M qui suivent, indiquez

- s'il est conforme à la syntaxe décrite en cours ou s'il est simplifié ;
- les ensembles $FV(M)$ et $BV(M)$;
- l'ensemble $Sub(M)$.

1. $M \equiv (\lambda xyz.z \ y \ x) \ a \ a \ (\lambda pq.q)$.
2. $M \equiv y \ (\lambda x.x \ y \ (\lambda zw.y \ z))$.
3. $M \equiv (\lambda x.(\lambda y.(((\lambda t.t) \ x)y) \ ((y \ (\lambda z.(x \ z))) \ y))))$.

Exercice 2 *Preuves d'égalité*

Montrez que

1. $\lambda \vdash \mathbf{K} \ \mathbf{I} = \mathbf{K}_*$
2. $\lambda \vdash \mathbf{S} \ \mathbf{K} \ \mathbf{K} = \mathbf{I}$.

Exercice 3 *Simplifications*

Question 1 Soit $\mathbf{B} \equiv \lambda xyz.x \ (y \ z)$. Trouvez un terme M « simple » tel que $\lambda \vdash \mathbf{B} \ X \ Y \ Z = M$.

Question 2 Idem avec $\mathbf{S} \ \mathbf{K} \ \mathbf{S} \ \mathbf{K} \ \mathbf{S} \ \mathbf{K} = M$.

Question 3 Idem avec $(\mathbf{K} \ \mathbf{I} \ \mathbf{S} \ \mathbf{S}) \ (\mathbf{K} \ \mathbf{I} \ \mathbf{S} \ \mathbf{S})$.

Exercice 4

Trouvez des termes clos F tel que

1. $F \ x = x \ \mathbf{I}$.
2. $F \ x \ y = x \ \mathbf{I} \ y$.
3. $F \ x = F$.
4. $F \ x = x \ F$.
5. $F \ \mathbf{I} \ \mathbf{K} \ \mathbf{K} = F \ \mathbf{K}$.

Exercice 5 *Une théorie inconsistente*

Montrez que si dans la théorie λ on ajoute l'axiome

$$\overline{\mathbf{S} = \mathbf{K}}$$

alors tous les termes sont équivalents pour la relation $=$.

Pour cela comparez les termes $\mathbf{S} \ M \ N \ P$ et $\mathbf{K} \ M \ N \ P$, en prenant $M \equiv P \equiv \mathbf{I}$ et $N \equiv \mathbf{K} \ Q$.