

## Expression Logique et Fonctionnelle ... Évidemment

### TD n° 5 : $\lambda$ -calcul (2)

#### Exercice 1 *Opérateurs logiques*

Définir des combinateurs pour les opérateurs logiques de négation (**Not**) et de disjonction (**Or**).

#### Exercice 2 *Formes normales*

Parmi les termes suivants quels sont ceux en forme normale ? Pour ceux qui ne sont pas en forme normale, indiquez s'ils en ont une.

1.  $(\lambda x.x)y$
2.  $y (\lambda x.x)$
3.  $\lambda xy((\lambda xy.y) z)$ .
4.  $\lambda x.(x x)$ .

#### Exercice 3

Montrez que si  $M$ ,  $N$  et  $P$  sont des termes ayant une forme normale, alors les termes suivants possèdent une forme normale.

1. **K**  $M$   $N$ .
2. **If**  $M$   $N$   $P$ .
3. **S**<sup>+</sup>  $M$ .

#### Exercice 4 *Réductions avec Y*

**Question 1** Vérifiez que pour tout terme  $F \in \Lambda$ , le terme **Y**  $F$  ne possède pas de forme normale.

**Question 2** En posant

$$\Phi_{fact} \equiv \lambda f n. (\mathbf{If} (\mathbf{Zero} \ n) \ \mathbf{c}_1 \ (\mathbf{Mult} \ n \ (f \ (\mathbf{P}^- \ n)))),$$

et

$$\mathbf{Fact} \equiv \mathbf{Y} \ \Phi_{fact},$$

vérifiez que pour tout entier  $n$ ,

$$\mathbf{Fact} \ \mathbf{c}_n \rightarrow_{\beta} \mathbf{c}_{n!}.$$

#### Exercice 5

Définissez un  $\lambda$ -terme **Div** pour lequel, pour tout entier  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $p \neq 0$ , on a

$$\lambda \vdash \mathbf{Div} \ \mathbf{c}_n \ \mathbf{c}_p = [\mathbf{c}_q, \mathbf{c}_r],$$

où  $q = n \div p$  est le quotient et  $r = n \bmod p$  est le reste dans la division euclidienne de  $n$  par  $p$ .