Éléments d'asymptotique

Licence — Université Lille 1
Pour toutes remarques : Alexandre.Sedoglavic@univ-lille1.fr

Semestre 3 — 2008-09

1 Familiarisation avec la stratégie *Divide ut imperes*

Exercice 1 — .

Soient a et b deux entiers, on veut calculer rapidement a^b. Pour ce faire, on peut faire comme suit pour l'exemple $b := 11$:

$$a^{11} = a \times a^{10} = a \times (a^5)^2 = a \times (a \times a^4)^2 = a \times (a \times (a^2)^4)^2$$

La fonction récursive suivante implante cet algorithme :

```
int
ExponentiationRapide
(const int a, const int b)
{
 int m ;
 if (b==0)
 {
  return 1;
 }
  else
  {
    m = ExponentiationRapide(a, b/2);
    m *= m ;
    if (b % 2 == 1)
       m = (m*a) ;
    return m;
  }
}
```

Donner la complexité de votre algorithme en termes du nombre de multiplications effectuées.

Exercice 2 — .

Multiplication classique des polynômes. Considérons 2 polynômes $ax + b$ et $\alpha x + \beta$. Il est possible de les multipliers en utilisant 4 multiplications et 1 addition. Les produits

$$m_1 = a \cdot \alpha,\ m_2 = a \cdot \beta,\ m_3 = b \cdot \alpha,\ m_4 = b \cdot \beta,$$

sont utilisés pour construire le polynôme :

$$m_1x^2 + (m_2 + m_3)x + m_4.$$

Cette formule nous permet donc de calculer les produits des polynômes de degrés 0 et 1.

Questions.

1. Montrer comment les produits des polynômes de degrés 2 à 3 (resp. 4 à 7) se ramènent aux produits des polynômes de degrés 0 à 1 (resp. 2 à 3).
2. Généraliser.
3. En notant $M_{2^{n+1}}$ le nombre de multiplications de constantes nécessaires pour multiplier deux polynômes de degrés 2^n à $2^{n+1} - 1$, donner une relation récurrence que vérifie cette suite.
4. Résoudre cette récurrence.

Exercice 3 — .

Multiplication des polynômes à la Karasuba. Considérons 2 polynômes $ax + b$ et $\alpha x + \beta$. Il est possible de les multipliers en utilisant 3 multiplications et 4 additions. Les produits

$$m_1 = a \cdot \alpha,\ m_2 = (a + b) \cdot (\alpha + \beta),\ m_3 = b \cdot \beta,$$

sont utilisés pour construire le polynôme :

$$m_1x^2 + (m_2 - m_1 - m_3)x + m_3.$$

Refaire le même travail que dans l'exercice (1).

2 Développements asympotiques

Exercice 4 — .

Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant : Il est vrai que $n \in O(n)$ et que $2n \in O(n)$. Donc on a les inclusions :

$$\sum_{k=1}^{n} kn = \sum_{k=1}^{n} O(n) = nO(n) = O(n^2).$$

Exercice 5 — .

Donnez les développements des fonctions suivantes dans l'échelle de comparaison $\{x^k\}$:

$$\frac{1}{1-x},\ (1+x)^{\alpha},\ \exp(x),\ \log(1+x).$$

Exercice 6 — .

Vérifier que

$$(1+n)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{\log n}{n} + \frac{1}{2}\frac{\log^2 n}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{6}\frac{\log^3 n}{n^3} + o\left(\frac{\log^3 n}{n^3}\right)$$

Exercice 7 — .

On admet que l'équation $x + \ln x = k$ admet une unique solution x_k pour tout k réel.

Montrer que lorsque k tend vers l'infini, on a :

$$x_k = ak + b\ln k + c\frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right),$$

avec a, b, c des constantes à déterminer.

Exercice 8 — .

Donner les 3 premiers termes d'un développement asymptotique de $x^{x^{1/x}}$ au voisinage de l'infini.