Éléments de théorie des graphes

Licence — Université Lille 1
Pour toutes remarques : Alexandre.Sedoglavic@univ-lille1.fr

Semestre 3 — 2008-09

1 Exemple de problème

Exercice 1 — .

Les étudiants a, b, c, d, e et f doivent passer des examens — occupant une demi-journée — dans différentes disciplines :

matière	étudiants
algorithmique	a,b
compilation	c,d
bases de données	c, e, f, g
Java	a, e, f, h
Architecture	b,f,g,h

Organiser la session d'examen la plus courte possible.

Exercice 2 — .

On souhaite prélever 4 litres de liquide d'un tonneau. Pour ce faire, on dispose de 2 sceaux (non gradués) d'une contenance de 5 et 3 litres. Comment procéder ?

Exercice 3 — .

On cherche à concevoir des jeux de donnée afin de tester le programme suivant :

```
int
pgcd
(int x, int y)
{
  while( x!=y )
    if (x>y)
       x -= y ;
    else
       y -= x ;
  return x ;
}
```

Questions.

1. Donnez le graphe de contrôle de ce programme.
2. Donnez un jeux de données de départ afin parcourir tous les :
   - sommets du graphe de contrôle ;
   - arcs du graphe de contrôle ;
   - chemins du graphe de contrôle.

Exercice 4 — .

À tout sommet s d'un graphe $G = (S, A)$, on associe le nombre $d^{+}(s)$ d'arcs de A de but s, le nombre $d^{-}(s)$ d'arcs de A de source s et le nombre $d(s) = d^{+}(s) + d^{-}(s)$, appelé *degré* de s. Quel rapport y a-t-il entre la somme des degrés des sommets d'un graphe et le nombre d'arcs m ? En déduire que dans un graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair. Soit δ le minimum des degrés des sommets d'un graphe ayant m arcs et n sommets. Montrer que $n\,\delta \leq 2\,m$.

Exercice 5 — .

Est-il possible de tracer 5 segments sur une feuille de papier de manière à ce que chaque segment en coupe exactement 3 autres ?

Exercice 6 — .

La syldavie est un pays avec 15 villes. On peut aller de chaque ville à au moins 7 autres villes du pays par une autoroute. Peut-on se rendre, par autoroute de la capitale du pays à chacune des autres villes.

Exercice 7 — Graphe de de Bruijn.

Un code d'entrée d'un d'immeuble est composé de 3 lettres binaires. Trouver un mot de longueur aussi petite que possible qui contient toutes mots de 3 lettres binaires. (Un tel mot contiendra alors le code d'entrée).

Pour ce faire construire un graphe orienté composé de 4 sommets représentant des mots binaires de longueur 2 : $\{00, 01, 11, 10\}$. Une arête orientée relie tout sommet ab aux deux sommets $b0$ et $b1$.

Exercice 8 — .

Montrer que le graphe complet à 5 sommet (noté K_5) n'est pas planaire.

Exercice 9 — .

Trois consommateurs doivent être reliés à 3 producteurs leur fournissant 3 produits par des tubes différents. Tracer le plan du réseau ainsi constitué en respectant une contrainte de non croisement.

Exercice 10 — .

Un voyageur veut aller de la ville 1 à la ville 9 dans un réseau donné par le graphe suivant :

$$\{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4), (5,7), (6,7), (6,9), (7,9), (8,9)\}$$

De combien de façons peut on faire le trajet en 5 étapes.

Exercice 11 — .

Un individu peut être dans 3 états différents : immunisé I, malade M ou sain S. D'un momment de mesure à un autre, l'état peut évoluer selon les règles :

- étant I, il peut le rester avec une probabilité 0.9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0.1 ;
- étant S, il peut le rester avec une probabilité 0.5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0.5 ;
- étant M, il peut le rester avec une probabilité 0.2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0.8.

Questions.

1. Déssinez le graphe probabiliste décrivant cette situation.
2. Calculer la probabilité qu'un individu soit dans l'etat M ou I au bout de 3 mesures dans chacune des situations de départ suivantes : I, M et S.
3. Que peut on dire de la proportion d'individu dans l'état M au bout d'un an ?

Exercice 12 — .

Proposez un automate déterministe permettant de reconnaître les multiples de 3.