

Arbre

Licence — Université Lille 1

Pour toutes remarques : Alexandre.Sedoglavic@univ-lille1.fr

Semestre 3 — 2008-09

Exercice 1 — .

Donnez tous les arbres à 6 nœuds.

Exercice 2 — .

Combien y a-t-il d'arbre binaire à n nœuds.

Exercice 3 — .

Considérons l'expression arithmétique suivante :

$$(x - y) \times z + (y - w) \times x$$

1. Construisez l'arbre syntaxique correspondant.
2. Donnez l'expression préfixée correspondante.
3. Donnez l'expression postfixée correspondante.

Exercice 4 — .

On considère la famille des expressions arithmétiques codées par des arbres binaires et on définit la *hauteur* d'un chemin dans un arbre comme étant le nombre de noeud entre la racine et les feuilles.

1. Donner la hauteur maximale et la hauteur minimale d'un arbre binaire en fonction du nombre de feuilles.
2. Donner un encadrement des hauteurs d'un arbre ayant n feuilles et un encadrement du nombre des feuilles d'un arbre de hauteur maximale p .

Exercice 5 — .

Une expression booléenne s'écrit sur l'alphabet $\{^-, \times, +, 1, 0, a_i\}$ où les a_i représente des variables à valeur dans $\{1, 0\}$ et où $-$ représente l'opérateur de négation, \times représente

l'opérateur AND et $+$ représente l'opérateur OR.

a	b	\bar{a}	$a \times b$	$a + b$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Donnez l'expression arithmétique dépendant des variables a_1, \dots, a_4 et b_1, \dots, b_4 dont l'évaluation est nulle si, et seulement si,

1. on a $a_i = b_i$ pour $i = 1, \dots, 4$ (les entiers codés sont positifs).
2. l'entier codé par les a_i et l'entier codé par les b_i sont des entiers égaux codés dans le système module et signe.

Exercice 6 — .

On considère l'alphabet $\{+, *, -, 0, 1, \dots, 9\}$ et l'expression arithmétique codée par le tableau :

—	+	+	*	1	+	*	+	*	0	0	+	*	+	4	1	1	+	+	0	0	0	0
*	5	2	+	2	9	0	0	0	0	0	0	3	4	5	2	0	0	0	0	0	0	0
0	2	9	0	0	0	0	5	6														

Ce tableau représente un arbre binaire : chaque cellule représente un noeud (ou une feuille) numérotée en largeur.

1. Donner le codage infixe de cette expression.
2. Donner le codage postfixe de cette expression.
3. Donner le codage préfixe de cette expression.
4. Reconstruire l'arbre binaire et en faire l'évaluation.
5. Critiquez le codage proposé ici d'un arbre binaire par un tableau.
6. Est ce que ce tableau peut représenter un arbre ternaire.

Exercice 7 — .

On considère l'alphabet source $\mathcal{S} = \{a, b, c, d, e, f\}$ et la fonction de distribution de fréquence :

$\phi : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$	$\phi : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$
$a \rightarrow 0.20$	$d \rightarrow 0.25$
$b \rightarrow 0.15$	$f \rightarrow 0.10$
$c \rightarrow 0.25$	$e \rightarrow 0.05$

1. Expliciter à partir de cet exemple la construction d'un arbre de Huffman et le code associé à chacun des caractères.
2. Calculer la longueur moyenne de ce code.

3. On suppose que le fichier considéré comprend 100000 caractères.
- (a) Quelle serait la taille de ce fichier en codant les caractères sources sans tenir compte de leur probabilité d'apparition par un code de longueur fixe (en code ASCII par exemple) ?
 - (b) Quelle est la taille moyenne d'un tel fichier en utilisant le code de Huffman ?

Exercice 8 — .

Considérons une liste aléatoire de 15 entiers.

[49, 46, 7, 45, 43, 8, 76, 58, 15, 0, 69, 76, 38, 91, 70]

Questions.

1. Construire un arbre binaire de recherche en ajoutant les éléments à la racine dans l'ordre de la liste.
2. Donner la liste préfixé de l'ABR obtenu.
3. Donner la liste infixé de l'ABR obtenu.
4. Équilibrer l'ABR obtenu.