Mathématiques discrètes : Éléments de théorie des ensembles

Licence — Université Lille 1
Pour toutes remarques : Alexandre.Sedoglavic@univ-lille1.fr

Semestre 3 — 2008-09

Details pratiques

Toutes les informations (documents, horaires, etc.) sont disponibles à l'url :

`http ://www.fil.univ-lille1.fr/portail`

Suivre l'item S3H.

Quelques bases admises

Intuitivement, un *ensemble* est une collection non ordonnée d'objets tous distincts, appelés *éléments* de l'ensemble.

L'*ensemble vide* (qui n'a pas d'élément) est noté $\emptyset$.

Le nombre d'éléments d'un ensemble A est le *cardinal* de A et se note : $\mathrm{card(A)}, \#A$ ou $\mid A \mid$.

Nous n'aborderons pas les difficultés associées à ces prérequis du type : "L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas" ou encore "Epiménide le Crétois a dit : tous les Crétois sont des menteurs. Est ce vrai ?".

Pour faire simple, on suppose toujours avoir un ensemble E bien définit dans lequel on travaille.

Définition d'ensemble

Un ensemble peut être décrit :

- *explicitement* en donnant la liste de ses éléments ;
- *implicitement* en donnant les propriétés qui caractérisent ses éléments.

On note

- $\{e_1, \ldots, e_n\}$ l'ensemble dont les éléments sont $\{e_1, \ldots, e_n\}$;
- $\{x \mid p(x)\}$ l'ensemble des x qui vérifient la propriété $p(x)$.

Par exemple,

- Notons A l'ensemble implicitement définit par

$$\{x \mid x \text{ entier et } x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0\}$$

- l'ensemble A est explicitement définit par $\{1, 2, 3\}$.

Notations

La notation

- $e \in A$ signifie que e est un élément de A ;
- $e \notin A$ signifie que e n'est pas un élément de A ;
- $A \subset B$ signifie qu'un sous-ensemble A de E est inclus dans un sous-ensemble B de E. En d'autre termes,

$$\forall x \in E, x \in A \text{ implique } x \in B.$$

- on utilise aussi les diagrammes d'Euler Venn qui permettent de montrer les rapports (inclusion, etc.) entre ensembles (Leonard Euler, 1707 – 1783) et/ou toutes les partitions possibles (John Venn, 1834 – 1923).

Ensemble des parties d'un ensemble et produit cartésien

Soit A un sous-ensemble de E. On note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble de toutes les parties de A. Par exemple,

$$\mathcal{P}(\{0,1,2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$$

Definition

Le *produit cartésien* de deux ensembles A et B est l'ensemble des couples formés d'un élément de A et d'un élément de B :

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$$

Opération sur les ensembles

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On a dans $\mathcal{P}(E)$ les opérations suivantes :

- la réunion $A \cup B$ définie par

$$\{x \in E \mid x \in A \ \underline{\text{ou}} \ x \in B\}$$

- l'intersection $A \cap B$ définie par

$$\{x \in E \mid x \in A \ \underline{\text{et}} \ x \in B\}$$

- la différence d'ensemble $A \backslash B$ définie par

$$\{x \in E \mid x \in A \ \underline{\text{et}} \ x \notin B\}$$

- le complémentaire $\overline{A}$ d'un sous-ensemble A de E est $E \setminus A$.

Propriétés de ces opérations

Soient les sous-ensembles A, B et C d'un ensemble E, on a :

- commutativité de la réunion et l'intersection :

$$A \cup B = B \cup A \text{ et } A \cap B = B \cap A$$

- associativité de la réunion et l'intersection :

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ et } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- distributivité de la réunion et l'intersection :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ et } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- idempotence $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$;
- absoption : si $B \subset A$ alors $A \cap B = B$ et $A \cup B = A$;
- formules de De Morgan (dualité)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ et } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Propriétés des cardinaux

Proposition

Soient A et B deux sous-ensembles finis d'un ensemble E.

1. $\mid \overline{A} \mid = \mid E \mid - \mid A \mid$
2. *Si A et B sont quelconques alors* $\mid A \cup B \mid = \mid A \mid + \mid B \mid - \mid A \cap B \mid$.
3. $\mid A \times B \mid = \mid A \mid \cdot \mid B \mid$.
4. $\mid \mathcal{P}(A) \mid = 2^{|A|}$.