Mathématiques discrètes : Éléments de théorie des graphes

Licence — Université Lille 1
Pour toutes remarques : Alexandre.Sedoglavic@univ-lille1.fr

Semestre 3 — 2008-09

Un *graphe* est l'abstraction des relations binaires entre objets.

Cette notion est une structure combinatoire permettant de représenter la notion de réseau (circuits électriques, réseaux de transport, d'ordinateurs, etc).

Un graphe est constitué d'un ensemble de sommets et d'un ensemble d'arcs (orientés) et/ou d'arêtes (non orientés) reliants ces sommets.

Les graphes peuvent être valués lorsque des valeurs sont associées à leurs sommets.

Définition

Un graphe orienté $G := (S, A)$ *est la donnée d'un ensemble* S *— dont les éléments sont appelés sommets — et d'un sous-ensemble* A *du produit cartesien* $S \times S$ *— dont les éléments (couples ordonnés) sont appelés arcs.*

Exemple : Avec S l'ensemble des entiers $\{2, 3, \ldots, 12\}$, on peut construire le graphe orientés des diviseurs :

$$A := \left\{ \begin{array}{c} (2,4),(2,6),(2,8),(2,10),(2,12),(3,6), \\ (3,9),(3,12),(4,8),(4,12),(5,10),(6,12) \end{array} \right\}$$

Définition

Un graphe symétriques (alias non orienté) se distingue du cas orienté par le fait que les éléments de A *sont des paires (non ordonnés) appelés arêtes.*

Un multigraphe est un graphe dont plusieurs arêtes/arcs peuvent relier deux sommets.

Un graphe mixte possède des arcs et des arêtes.

Représentations matricielles

Outre sa représentation sagittale (dessin), un graphe peut être représenté par :

Définition (Matrice d'adjacence)

La matrice d'adjacence associée à un graphe (orienté ou pas) (S, A) *est de taille* $|S| \times |S|$ *et définie par :*

$$S := \{s_1, \dots, s_{|S|}\}, \ M_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } (s_i, s_j) \in A, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition (Matrice d'incidence)

La matrice d'adjacence associée à un graphe (orienté) (S, A) *est de taille* $|S| \times |A|$ *et définie par :*

$$\begin{array}{l} S := \{s_1, \dots, s_{|S|}\}, \\ A := \{a_1, \dots, a_{|A|}\}, \end{array} \ M_{i,j} = \begin{cases} -1, & \text{si } a_j \in A, \text{ part de } s_i \in S, \\ 1, & \text{si } a_j \in A, \text{ arrive à } s_i \in S, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Voisins, successeurs et prédécesseurs

Définition

Étant donné un graphe $G := (S, A)$, un sommet σ est un

- *voisin d'un sommet s si, et seulement si, la paire $\{s, \sigma\}$ est une arête de G ;*
- *successeur d'un sommet s si, et seulement si, le couple $[s, \sigma]$ est une arc de G ;*
- *prédécesseur d'un sommet s si, et seulement si, la paire $[\sigma, s]$ est une arc de G.*

Un graphe $G := (S, A)$ est représentable par :

- une table V associant à chaque sommet une liste de ces voisins ;
- une table Succ associant à chaque sommet une liste de ces successeurs ;
- une table Pred associant à chaque sommet une liste de ces prédécesseurs.

Étant donné un graphe orienté $G := (S, A)$, pour chaqu'un de ces arcs a_i, on note $\text{org}(a_i)$ (resp. $\text{ext}(a_i)$) le sommet d'origine (resp. d'extrémité) de cet arc.

Définition

- *Un chemin du graphe G est une suite finie d'arcs $(a_1, \dots, a_n)$ telle que pour tout indice i dans $\{2, \dots, n-1\}$, $\text{org}(a_{i+1}) = \text{ext}(a_i)$.*
- *La longueur d'un chemin est le nombre d'arcs qui le composent.*
- *Un circuit est un chemin de longueur n tel que $\text{org}(a_1) = \text{ext}(a_n)$.*
- *Étant donné un graphe G non orienté, on peut le représenter par un graphe orienté en considérant les deux arcs définis par chaque arête. La composante connexe d'un sommet s de G est l'ensemble des sommets reliés à s par un chemin.*
- *Un graphe non orienté est connexe s'il ne possède qu'une seule composante connexe.*

Quelques questions classiques

- connexité : étant donné un graphe et deux de ses sommets, existe-t-il au moins un chemin qui les relie ;
- si c'est le cas, trouver un chemin qui optimise une fonction (plus court/long chemin par exemple) ;
- recherche de circuit dans un graphe ;
- coloration : combien de couleurs différentes suffisent pour colorer entièrement un graphe de telle façon qu'aucun nœud du graphe n'ait la même couleur que les nœuds voisins. Ce nombre est le nombre chromatique du graphe.

Définition

- *Un graphe biparti est un graphe pour lequel il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles U et V telle que chaque arête ait une extrémité dans U et l'autre dans V. En d'autres termes, les graphes bipartis sont précisément ceux dont le nombre chromatique est inférieur ou égal à 2.*
- *Un graphe planaire est un graphe que l'on peut dessiner sur un plan sans que deux arêtes/arcs se coupent.*

  Le théorème des 4 couleurs énnonce que tout graphe planaire est 4 chromatique.

La représentation par matrice d'adjacence permet de déterminer l'existence des chemins dans un graphe par le biais du théorème suivant :

Théorème

Notons $M(\nu)$ la puissance νième de la matrice M d'adjacence d'un graphe (S, A). Le coefficient $M(\nu)_{i,j}$ est le nombre de chemins de longueur ν dans (S, A) dont le sommet s_i est l'origine et le sommet s_j est l'extrémité.

Montrons ce résultat par récurrence : pour $\nu = 1$, il découle de la définition de la matrice d'adjacence. Pour $\nu > 1$, on a

$$M(\nu)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} M(\nu - 1)_{i,k} M_{k,j}.$$

par définition du produit matriciel. Chaque terme de cette somme est constitué du nombre de chemin de longueur $\nu - 1$ entre s_i et s_k fois le nombre de chemin entre s_k et s_j. CQFD.

- Pour un graphe non orienté, le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes dans la définition desquelles intervient ce sommet (un sommet ayant une boucle est donc de degré 2).
- Pour un graphe orienté, le *degré entrant* (resp. *sortant*) d'un sommet est le nombre d'arcs arrivant à (resp. partant de) ce sommet. Le degé d'un sommet est la somme de ses degrés entrant et sortant.
- Un chemin est *simple* s'il ne contient pas deux fois le même arc.
- Un chemin est *élémentaire* s'il ne contient pas deux arcs de même origine ou de même but.
- Un circuit est *eulérien* s'il est simple et contient tous les arcs d'un graphe.
- Un circuit est *hamiltonien* s'il est élémentaire et contient tous les sommets d'un graphe.

Cycle eulérien et graphe hamiltonien

Dans le cas des graphe non orienté, la notion équivalente au chemin (resp. circuit) est la notion de chaîne (resp. cycle). Un cycle eulérien peut être parcouru en empruntant chaque arête exactement une seule fois.

Théorème

Un graphe non orienté sans sommets isolés possède un cycle eulérien si, et seulement si,

1. *il est connexe.*
2. *il a* 0 *ou* 2 *sommets de degré impair.*

Dans le cas où il n'y a aucun sommet de degré impair, cette chaîne eulérienne est un cycle. Dans le cas où il y en a deux, ce sont les extrémités de la chaîne.

Un graphe hamiltonien est un graphe possèdant au moins un cycle passant par tous les sommets une et une seule fois. Trouver un tel cycle est un problème difficile.

Théorème

Un graphe orienté connexe possède un cycle orienté eulérien si, et seulement si, de chaque sommet il part autant d'arêtes qu'il en arrive.

Le théorème de Dirac donne une condition suffisante simple pour qu'un graphe non orienté soit hamiltonien :

Théorème

Si chaque sommet d'un graphe de n sommet est de degré supérieur ou égal à $n/2$ alors le graphe admet un cycle hamiltonien.

Théorème

Pour un graphe planaire connexe, on a $s - a + f = 2$ avec s le nombre de sommets, a le nombre d'arête et f le nombre de face.
Pour un graphe simple, planaire et connexe, on a $3s - 6 \geq a$.

Definition

Un graphe *probabiliste* est un graphe orienté tel que pour tout couple de sommet (i, j) distincts ou confondus il existe au plus une arête de i vers j, où chaque arête est étiquetée par un réel $p_{(i,j)}$ compris entre 0 et 1 et dont la somme des poids des arêtes issues d'un même sommet étant égale à 1.

Definition

Étant donné un graphe probabiliste à n sommets, la *matrice de transition* associé est la matrice $n \times n$ dont les coefficients sont $p_{(i,j)}$ si l'arête (i, j) existe et 0 sinon.

Cette matrice permet de calculer l'évolution des états cours du temps discret t. En notant V_t le vecteur ligne à n éléments dont le $i$ième coefficient est la probabilité que le système se trouve à l'instant t dans l'état i, on a les suites récurrentes :

$$V_{t+1} = V_t M = V_0 M^{t+1}.$$