

# Théorie des ensembles

Licence — Université Lille 1

Pour toutes remarques : Alexandre.Sedoglavic@univ-lille1.fr

Semestre 3 — 2008-09

## 1 Familiarisation

### Exercice 1 — Un amusement pour commencer.

Montrer que l'ensemble  $E$  de tous les ensembles n'existe pas. Pour ce faire, supposer que cet ensemble existe et considérer l'ensemble  $A$  défini par  $\{x \in E \mid x \notin x\}$ . Comme  $E$  contient tous les ensembles, il contient  $A$ . Est ce que  $A$  appartient à  $A$  ?

### Exercice 2 — Familiarisation avec les notations.

1. Combien d'éléments possède l'ensemble  $\{\{\{3, 6\}\}\}$  ?
2. Combien d'éléments possède l'ensemble

$$\left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} \quad (1)$$

des racines de l'équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$  ?

3. Les définitions  $\{a, b, c\}$  et  $\{c, a, b\}$  définissent-elles le même ensemble ?
4. Les définitions  $\emptyset$ ,  $\{\emptyset\}$  et  $\{\{\emptyset\}\}$  définissent-elles le même ensemble ?

### Exercice 3 — .

On donne les ensembles :  $A = \{1, 3, 4\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $C = \emptyset$ ,  $D = \{3, 4, 5, 7\}$  et  $E = \{4, 6, 8\}$ .

1. Quels sont les inclusions parmi les ensembles  $A, B, C, D$  et  $E$  ?
2. Donner les éléments des ensembles :  $A \cup B$ ,  $A \cap C$ ,  $B \cup D$ ,  $B \cap A$ ,  $E \cap (B \cup D)$ ,  $(E \cap B) \cup D$ ,  $(E \cup B) \cap D$ ,  $E \cup (B \cap D)$ .

## 2 Manipulation de formules

### Exercice 4 — .

Considérons  $A, B, C$  des sous-ensembles d'un ensemble  $E$ .

1. À l'aide de la formule sur les cardinaux :  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ , déduire une formule analogue pour  $|A \cup B \cup C|$ .
2. De quelle propriété découle la relation  $|A \cap \overline{B}| = |A| - |A \cap B|$  ?
3. En notant  $D$  l'ensemble  $(\overline{A} \cup B) \cap C$  et en utilisant les 2 relations ci-dessus, exprimer  $|D|$  en fonction de  $|C|$ ,  $|A \cap C|$  et  $|A \cap B \cap C|$ .

## 3 Applications

Les exercices suivants illustrent comment les manipulations de formules précédentes permettent de déduire de l'information à partir d'une description donnée.

### Exercice 5 — .

On étudie une population de 100 étudiants. Parmi eux : 32 étudient la Médecine, 20 la Physique, 45 la Biologie ; 15 étudient la Médecine et la Biologie, 7 la Médecine et la Physique, 10 la Physique et la Biologie ; 30 n'étudient aucune de ces trois matières.

1. Combien étudient les trois matières en même temps ?
2. Combien étudient la Médecine et la Biologie, mais pas la Physique ?
3. Combien étudient une seule matière ?

### Exercice 6 — .

On interroge 100 enfants sur leur goûts alimentaires : 50 aiment les frites, 30 aiment le riz, 10 aiment le riz et les pâtes, 17 aiment les frites et le riz, 13 aiment les pâtes et les frites, 3 n'aiment ni les pâtes ni le riz ni les frites, 7 aiment le riz et les frites et les pâtes.

1. Exprimer ces assertions en termes de formules ensemblistes.
2. Parmi les enfants qui aiment les frites, combien sont-ils à aimer le riz ou à ne pas aimer les pâtes ?
3. En déduire le nombre d'enfants qui aiment les pâtes.

### Exercice 7 — .

Un ethnologue publie un article sur une tribu où l'on apprend que :

- Tout membre de la tribu porte un collier ou une boucle d'oreille.
- Tous les guerriers portent un collier.
- Ceux qui ne sont pas des guerriers n'ont pas de boucle d'oreille.
- Ceux qui portent un collier sont des guerriers mâles.
- Les hommes ne préparent jamais les repas.

- Les repas sont préparés à tour de rôle par tous les guerriers.

1. En utilisant les ensembles suivants :

- $T$  : ensemble des membres de la tribu
- $C$  : ensemble des membres de la tribu portant un collier
- $B$  : ensemble des membres de la tribu portant des boucles d'oreilles
- $G$  : ensemble des guerriers de la tribu
- $H$  : ensemble des hommes de la tribu
- $R$  : ensemble des membres de la tribu qui préparent les repas

traduire chacune des phrases de l'article

2. Démontrer qu'il n'y a pas de guerriers dans cette tribu. En déduire que cette tribu n'existe pas (on pourra utiliser le fait que pour tout ensemble  $A$  et  $B$  :  $(A \subset B) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})$ ).

### Exercice 8 — .

Au musée, un visiteur fait les remarques suivantes :

1. Parmi les tableaux exposés, les toiles qui ont plus de 50 ans représentent des bateaux.
2. Les deux tiers des tableaux non encadrés sont peints par des femmes.
3. Les bateaux peints par des femmes ont plus de 50 ans.
4. Un tableau sur trois a un cadre.
5. Les tableaux de plus de 50 ans ne sont pas encadrés.
6. La moitié des tableaux peints par des femmes ont plus de 50 ans.
7. Parmi les tableaux de moins de 50 ans, ceux qui sont peints par des hommes ont un cadre, et ceux qui sont peints par les femmes n'en ont pas.

### Questions :

1. Montrer que les tableaux peints par des femmes ne sont pas encadrés.
2. En déduire le nombre de tableaux peints par des femmes en fonction du nombre de tableaux total, et qu'il y a au moins  $2/9$  de tableaux de plus de 50 ans.

### Exercice 9 — .

Monsieur Perrichon va chez son libraire "*Monsieur, je voudrais un livre pour ma fille, un livre qui ne parle, ni de galanterie, ni d'argent, ni de politique, ni de mariage, ni de mort.*"

Parmi les livres qui composent le stock de la marchande :

1. 56% ne parlent pas de galanterie.
2. La moitié des livres qui traitent de galanterie ne parlent pas d'argent.
3. 32% des livres traitent de la mort.
4. Tous les livres de politique traitent aussi de problèmes d'argent.
5. Parmi les livres où on aborde la mort, il n'y a ni argent, ni galanterie.

6. Parmi les livres où on parle de mariage, il y a toujours de la galanterie ; tout comme dans la moitié des livres abordant les sujets d'argent.

On adoptera dans la suite les notations suivantes :

- $S$  : Ensemble des livres en stock
- $G$  : Ensemble des livres traitant de galanterie
- $A$  : Ensemble des livres traitant d'argent
- $P$  : Ensemble des livres traitant de politique
- $M$  : Ensemble des livres traitant de mariage
- $D$  : Ensemble des livres traitant de la mort
- $L$  : ensemble des livres en stock correspondant à l'attente de M. Perrichon.

1. Donner une écriture ensembliste des constatations 1 à 6.
2. Montrer que  $\bar{L} = G \cup A \cup D$ .
3. Utiliser la notion de cardinal d'un ensemble pour déterminer dans quelle proportion de son stock, le marchand trouvera le livre recherché par M. Perrichon.

### Exercice 10 — .

Le ministère de l'industrie des îles Tonga a effectué une étude sur l'équipement informatique des entreprises de l'archipel. Ces entreprises peuvent posséder des Macs ou des PCs et elles peuvent utiliser un ou plusieurs des OS suivants : Mac OS, Windows ou Linux. On note

- $E$  l'ensemble des entreprises
- $W$  l'ensemble des entreprises utilisant Windows.
- $O$  l'ensemble des entreprises utilisant Mac OS.
- $L$  l'ensemble des entreprises utilisant Linux.
- $M$  l'ensemble des entreprises possédant des Macs.
- $P$  l'ensemble des entreprises possédant des PC.

Hélas, le cyclone Lola a détruit le ministère de l'industrie, et les données de l'étude ont été perdues. Votre mission, si vous l'acceptez, est de retrouver ces données.

1. Interprétez la formule  $W \cup L \cup O = M \cup P$ . En quoi est-elle logique ?
2. Par ailleurs, un Mac nécessite Mac OS et un PC nécessite Windows ou Linux. Bien évidemment, une entreprise n'utilise que les OS pour lesquels elle a l'ordinateur, et à toujours un (ou plusieurs) OS adaptés aux ordinateurs qu'elles possèdent. Donnez une interprétation ensembliste de cette remarque.
3. Grâce aux pages qui ont survécu au cyclone, on sait que :
  - Les îles Tonga ne comptent que 10 entreprises.
  - Trente pour cent des entreprises n'utilisent qu'un OS.
  - Trente pour cent des entreprises n'utilisent que deux OS exactement.
  - Trente pour cent des entreprises utilisent exactement trois OS.
  - Il y a autant d'entreprise qui utilisent Linux que d'entreprises qui utilisent Windows.
  - Il y a deux fois plus d'entreprises équipées de PC que d'entreprises équipées de Mac.

4. Construire un diagramme de Euler-Venn montrant la répartition des ensembles  $E$ ,  $W$ ,  $O$ ,  $L$ ,  $M$  et  $P$ . Chaque zone de ce diagramme devra contenir le nombre d'entreprises correspondantes.

**Exercice 11 — .**

A la bibliothèque, Marie a le choix entre des livres d'aventure, des livres parlant des extra-terrestres, des livres scientifiques et des bandes dessinées. Elle cherche un livre qui parle d'aventure ou des extra-terrestres, et qui ne soit pas une bande dessinée. Pour l'aider à faire son choix, elle apprend que parmi les livres disponibles :

- Tous les livres parlant des extra-terrestres parlent d'aventure.
- Aucune bande dessinée ne parle des extra-terrestres.
- Tous les livres parlant d'aventure et de science sont des bandes dessinées.
- Tous les livres scientifiques parlent d'aventure, mais aucun d'entre eux ne parle des extra-terrestres.
- La moitié des livres parlent d'aventure, et le tiers des livres d'aventure sont des bandes dessinées.

Dans la suite de l'exercice on notera :

$L$  : ensemble des livres disponibles  
 $A$  : ensemble des livres d'aventure  
 $E$  : ensemble des livres parlant d'extra-terrestres  
 $S$  : ensemble des livres scientifiques  
 $B$  : ensemble des bandes dessinées

1. Écrire  $L$  en fonction des ensembles  $A$ ,  $E$ ,  $S$  et  $B$ .
2. Traduire les phrases par des relations entre les ensembles  $A$ ,  $E$ ,  $S$  et  $B$ .
3. Réaliser un diagramme de Venn représentant les ensembles  $L$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $S$  et  $B$  en tenant compte des relations de la question précédente.
4. Écrire l'ensemble des livres correspondant au choix de Marie (on notera cet ensemble  $M$ ). Montrer qu'on peut simplifier cette écriture et écrire  $M$  en fonction des ensembles  $A$  et  $B$ .
5. Dédire des questions 2) et 4) la proportion de livres disponibles qui peuvent convenir à Marie.