Mathématiques discrètes : Éléments de combinatoire

Licence — Université Lille 1
Pour toutes remarques : Alexandre.Sedoglavic@univ-lille1.fr

Semestre 3 — 2008-09

Définition

L'analyse combinatoire est constituée des outils et techniques permettant de compter les ensembles finis et leurs sous-ensembles, si possible sans énumérer tout les éléments.

Permutation

Combien y a-t-il de dispositions de n objets discernables dans n cases consécutives numérotées avec un, et un seul, objet par case (des entiers dans un tableau par exemple) ?

Considérons la notion suivante :

Definition

Une *permutation* p d'un ensemble fini E est une bijection de E dans E.

Remarque : si E est l'ensemble des n premiers entiers $\{1, \ldots, n\}$, une permutation p de E dans E détermine un ordre total sur les éléments de E donnée par la suite $p(1), \ldots, p(n)$, i.e. une disposition décrite ci-dessus.

Notation

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments sera noté P_n.

Résultat sur les permutations

Commençons par un rappel :

Definition

Pour tout n entiers, on note $n!$ la *factorielle* de n, i.e. le produit des n premiers entiers strictement positifs.

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\,2\,1.$$

Par convention, on a $0! = 1$.

Proposition

Le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments est la factorielle de n i.e. $P_n = n!$.

Remarque : la factoriel *croit rapidement* en fonction de n :

$$0! = 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad \dots, \quad 10! = 3\,628\,800.$$

(voir la formule de Stirling dans le cours sur l'asymptotique).

Arrangement sans répétition

Combien y a-t-il de dispositions de n objets discernables dans $m \leq n$ cases consécutives numérotées avec un et un seul objet par case ?

Definition

Un *arrangement (sans répétition)* d'ordre $m \leq n$ d'un ensemble fini E de cardinal n est un sous-ensemble <u>totalement ordonné</u> de E ayant m éléments.

Notation

Le nombre d'arrangements d'ordre m d'un ensemble à n éléments est désigné par A_n^m.

Proposition

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Arrangement avec répétition

Definition

- Une *application* est une fonction dont tout élément de l'ensemble de départ a une image.
- Un *arrangement avec répétition* de $m \leq n$ élément d'un ensemble fini E est une application de $\{1, \ldots, m\}$ dans E.

Proposition

Il y a n^m arrangement avec répétition de m éléments d'un ensemble de cardinal n.

Combinaison sans répétition

Combien y a-t-il de dispositions de n objets discernables dans une case contenant $m \leq n$ objets ?

Definition

Une *combinaison (sans répétition)* d'ordre $m \leq n$ d'un ensemble fini de E de cardinal n est un sous-ensemble de E ayant m éléments.

Notation

Le nombre de combinaisons d'ordre m d'un ensemble à n éléments est désigné par C_n^m.

Proposition

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Combinaison avec répétition

Definition

Une *combinaison avec répétition* de $m \leq n$ éléments pris dans un ensemble $E := \{e_1, \dots, e_n\}$ de cardinal n toute application f de E dans $\{1, \dots, m\}$ qui vérifie :

$$f(e_1) + \cdots + f(e_n) = m.$$

Proposition

Il y a $C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^{m}$ combinaison avec répétition de m éléments pris parmi n éléments.

Quelques relations utiles

Proposition

- *Triangle de Pascal (al-Karaji (953 - 1029)) :*

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}.$$

- *Coefficients binomiaux :*

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^n y^{n-m}.$$

Comme conséquence, on a :

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n.$$

Pour résumer, on considère un sous-ensemble R de m éléments dans un ensemble de n éléments et suivant les propriétés (ordonnés ou pas, avec ou sans répétition, etc.) de ces ensembles, le cardinal de R est :

	sans ordre	avec ordre
sans répétition	C_n^m	A_n^m
avec répétition	C_{n+m-1}^m	n^m