

## 1 Isolation de racines (6 points)

On s'intéresse au polynôme

$$P = 2x^5 + x^3 - x^2 + x - 1.$$

**Question 1** [1 pt]. Que valent  $C(P)$  et  $V(P)$  ?

**Question 2** [2 pts]. Quelles informations peut-on déduire de la réponse à la question précédente au sujet des racines réelles de  $P$  ? Justifier en citant un ou deux théorèmes vus en cours.

**Question 3** [2 pts]. Calculer par un ou deux changements de variable un polynôme  $Q$  dont les racines réelles strictement positives sont en bijection avec les racines de  $P$  contenues dans l'intervalle  $]0, 1[$ .

**Question 4** [1 pt]. Déduire de  $Q$  une information au sujet des racines de  $P$  contenues dans l'intervalle  $]0, 1[$ . Justifier.

Aide : on rappelle les formules suivantes

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

## 2 Factorisation sans carrés (4 points)

On considère le polynôme

$$P = x^3 - x^2 - x + 1.$$

**Question 5** [2 pts]. Déterminer par une méthode vue en cours si  $P$  admet des facteurs carrés.

**Question 6** [2 pts]. Déterminer une factorisation sans carrés de  $P$ .

## 3 Bases de Gröbner (6 points)

On considère le système suivant de l'anneau  $\mathbb{Q}[x, y]$ .

$$2x^2 + y^2 - 3 = 0, \quad xy - 1 = 0.$$

**Question 7** [4 pts]. Calculer une base de Gröbner réduite de l'idéal engendré par le système pour l'ordre lexicographique  $y > x$ . Détailler les calculs. Indiquer en justifiant les paires critiques qu'il est inutile de traiter.

**Question 8** [1 pt]. Dédire de la base de Gröbner une information sur le nombre de solutions complexes du système. Justifier.

**Question 9** [1 pt]. Dédire de la base de Gröbner une information sur le nombre de solutions réelles strictement positives du système.

## 4 Démonstration automatique (4 points)

On considère l'implication logique suivante.

$$(x - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 1)(x + 1) = 0.$$

Pour démontrer cette implication, on peut poser le raisonnement comme suit :

1. Hypothèse :  $(x - 1)^2 = 0$
2. À conclure :  $(x - 1)(x + 1) = 0$
3. Preuve :  $(x - 1)^2 = 0$  n'a qu'une seule racine  $x = 1$  ; cette racine est aussi racine de  $(x - 1)(x + 1) = 0$ .

**Question 10** [1 pt]. Démontrer cette implication en posant un raisonnement par l'absurde (insister surtout sur les parties « hypothèses » et « à conclure »).

**Question 11** [1 pt]. Quel calcul de base de Gröbner permet de démontrer automatiquement cette implication (justifier) ? Comment interprète-t-on le résultat ?

**Question 12** [1 pt]. Donner une commande MAPLE réalisant la démonstration de la question précédente.

**Question 13** [1 pt]. Le polynôme  $(x - 1)(x + 1)$  appartient-il à l'idéal engendré par  $(x - 1)^2$  ?