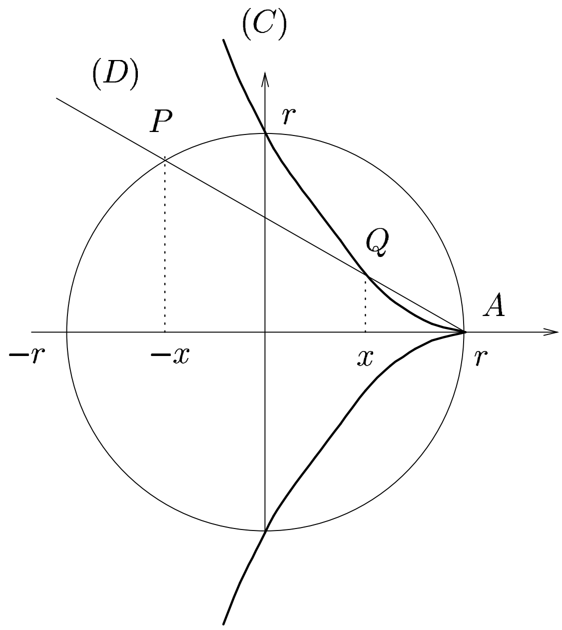
DEUG MIAS 2 — Systèmes polynomiaux : que signifie « résoudre » ?
Épreuve de Septembre 2003 — Tous documents autorisés — Calculatrices interdites —
Durée 2 heures

---

1 La cissoïde (12 points)

Vers 180 avant J.C. le mathématicien grec Dioclès s'est intéressé à une courbe, connue aujourd'hui sous le nom de « cissoïde », définie comme l'ensemble (C) de tous les points Q qu'on peut construire comme suit (r est une constante positive) :

1. tracer le cercle centré sur l'origine de rayon r ;
2. considérer un réel $-r < x < r$;
3. considérer un point P d'abscisse $-x$ appartenant au cercle (il y en a deux possibles) ;
4. tracer la droite (D) passant par $A = (r, 0)$ et P ;
5. $Q = (x, y)$ est le point de la droite d'abscisse x.



On cherche à montrer que la cissoïde satisfait l'équation

$$y^2\,(r + x) = (r - x)^3.$$

1.1 Mise en équation

Pour mettre le problème géométrique en équation, on désigne par a le coefficient directeur et par b l'ordonnée à l'origine de la droite (D).

Question 1 [1 pt]. Donner une ou plusieurs équations polynomiales qui imposent que les points $Q = (x, y)$ et $A = (r, 0)$ soient sur la droite.

Question 2 [1 pt]. Donner une ou plusieurs équations polynomiales qui imposent que le point P d'abscisse $-x$ soit sur le cercle.

Question 3 [1 pt]. Donner une ou plusieurs équations polynomiales qui imposent que $x \neq -r$.

1.2 Démonstration

Notons S le système d'équations que vous avez défini dans les trois questions précédentes et I l'idéal qu'il engendre. Ce système et cet idéal appartiennent à un anneau de polynômes en les indéterminées x, y, a, b, r (et d'autres peut–être encore).

Pour tenter de démontrer la proposition, deux étudiants proposent deux approches différentes.

1.2.1 L'étudiant A.

Il propose de tester si l'équation de la cissoïde appartient à I. Pour cela, il envisage de calculer une base de Gröbner G de I et de calculer la forme normale de l'équation de la cissoïde par G.

Question 4 [1 pt]. Préciser comment cette méthode permet de décider si l'équation de la cissoïde appartient à I.

Question 5 [1 pt]. Y a–t–il une restriction sur l'ordre admissible ? Si oui laquelle ?

Question 6 [2 pts]. Supposons que l'équation de la cissoïde n'appartienne pas à I. Cela implique–t–il que l'équation de la cissoïde n'est pas conséquence des équations de S ?

1.2.2 L'étudiant B.

Il propose de décider si l'équation de la cissoïde est conséquence des équations de S par un raisonnement par l'absurde : en démontrant qu'un certain système d'équations S_2 n'admet aucune solution.

Question 7 [1 pt]. Quelle(s) équation(s) peut–on rajouter à S pour obtenir S_2 ?

Question 8 [1 pt]. Donner une ou plusieurs instructions MAPLE permettant d'appliquer l'algorithme de Buchberger à S_2 (système qu'on suppose contenu dans la variable *S2*).

Question 9 [1 pt]. Comment exploiter le résultat produit par l'algorithme de Buchberger pour procéder à la démonstration ?

Question 10 [1 pt]. (raffinement de la question précédente). Dans un problème de géométrie, on s'intéresse à l'existence de solutions réelles et pas complexes. Discuter en quelques phrases la méthode proposée par l'étudiant B en considérant les deux cas possibles : soit l'application de l'algorithme de Buchberger au système S_2 conclut à l'absence de solutions soit elle conclut à l'existence de solutions.

Question 11 [1 pt]. Y a–t–il des restrictions sur l'ordre admissible fourni en paramètre à l'algorithme de Buchberger ? Si oui lesquelles ?

2 Résolution réelle (9 points)

On s'intéresse aux racines du polynôme $P = 3\,x^3 + 9\,x^2 - x - 2$.

2.1 Étude par la commande solve

On tente de les calculer « par radicaux » avec la primitive *solve* de MAPLE.

```
> P := 3*x^3 + 9*x^2 - x - 2:
> L := [ solve (P) ];

L := [ 1/6 %2 + 20/3 %1 - 1,
                                         1/2
- 1/12 %2 - 10/3 %1 - 1 + 1/2 I 3     (1/6 %2 - 20/3 %1),

                                         1/2
- 1/12 %2 - 10/3 %1 - 1 - 1/2 I 3     (1/6 %2 - 20/3 %1)]

                   1
%1 := ----------------------
                         1/2 1/3
      (-180 + 20 I 79    )

                         1/2 1/3
%2 := (-180 + 20 I 79    )
```

Comme les expressions précédentes sont pénibles à lire, on tente de les évaluer sous la forme de nombres à virgule flottante.

Question 12 [1 pt]. Donner une expression MAPLE qui évalue la liste L en la liste de nombres à virgule flottante ci–dessous.

```
> [voir question ci-dessus];
                         -9                          -9
  [.487603021 - .1 10    I, -3.037482799 - .1 10    I,
                          -9
   -.450120223 + .1 10    I
```

2.2 Étude par la règle des signes de Descartes

Question 13 [1 pt]. Que vaut $V(P)$ (le nombre de variations de signe mentionné dans la règle des signes de Descartes) ?

Question 14 [2 pts]. Isoler toutes les racines réelles positives de P dans des intervalles bornés (cette question demande peu de calculs). Justifier.

Question 15 [1 pt]. Donner un changement de variable qui mette en bijection l'ensemble des $x \in]1, +\infty[$ avec l'ensemble des $y \in]0, +\infty[$.

Question 16 [1 pt]. Donner un polynôme $Q(y)$ dont les racines réelles positives soient en bijection avec les racines réelles supérieures à 1 de P par le changement de variable précédent.

Question 17 [2 pts]. En déduire le nombre de racines réelles supérieures à 1 de P. Justifier.

Question 18 [1 pt]. Les réponses aux questions précédentes confirment–elles le résultat de l'étude faite avec *solve* ou pas (justifier) ?