DEUG MIAS2 — Option informatique–mathématiques — Épreuve de Janvier 2004
Aucun document autorisé — Durée deux heures

---

1 Les suites de Sturm (12 points)

Elles fournissent une méthode pour isoler les racines réelles d'un polynôme $P \in \mathbb{Q}[x]$.

Question 1 [1 pt]. Nommer une autre méthode, vue en cours, permettant d'isoler les racines réelles d'un polynôme $P \in \mathbb{Q}[x]$.

Soit $P \in \mathbb{Q}[x]$ un polynôme sans facteurs carrés. Considérons la suite de polynômes (attention au signe moins ; P' désigne la dérivée de P, on note rem le reste de la division euclidienne) :

$$R_0 = P, \quad R_1 = P', \quad R_{i+2} = -\,\mathsf{rem}(R_i, R_{i+1}).$$

Def. *La suite de Sturm*[1] *associée à P est la suite $R_0, \ldots, R_n$ où R_n est le dernier reste non nul.*

Question 2 [1 pt]. À quel algorithme le calcul de la suite de Sturm vous fait–il penser ? Quelles différences voyez–vous entre eux ?

Question 3 [1 pt]. Le polynôme R_n est nécessairement constant et non nul. Pourquoi ?

Question 4 [2 pts]. Écrire en MAPLE une fonction *Sturm*, paramétrée par un polynôme $P \in \mathbb{Q}[x]$ sans facteurs carrés, qui retourne la suite de Sturm associée à P sous la forme d'une liste.

Déf. *Soit α un réel tel que $P(\alpha) \neq 0$. On définit $W(\alpha)$ comme le nombre de variations de signe dans la suite de réels (sans tenir compte des zéros) : $R_0(\alpha), R_1(\alpha), \ldots, R_n(\alpha)$.*

Thm. *Soient $\alpha < \beta$ deux réels tels que $P(\alpha) \neq 0$ et $P(\beta) \neq 0$. La différence $W(\alpha) - W(\beta)$ majore le nombre de racines réelles de P dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$.*

Question 5 [2 pts]. Écrire en MAPLE une fonction W paramétrée par la suite de Sturm associée à un polynôme sans facteurs carrés P, un réel α tel que $P(\alpha) \neq 0$ et qui retourne $W(\alpha)$.

On cherche maintenant à concevoir un algorithme d'isolation des racines réelles strictement positives d'un polynôme $P \in \mathbb{Q}[x]$ quelconque.

Question 6 [1 pt]. Le premier problème à résoudre réside dans le fait que P peut éventuellement admettre des facteurs carrés alors que le théorème de Sturm ne s'applique qu'à des polynômes sans facteurs carrés. Comment résoudre ce problème ?

À partir d'ici, on suppose P sans facteurs carrés.

---

1. Charles François Sturm (1803 – 1855).

Question 7 [1 pt]. Le deuxième problème consiste à déterminer un intervalle $X =]\alpha, \beta[$ tel que toutes les racines réelles strictement positives de P appartiennent à X. Quel intervalle peut–on prendre ?

Question 8 [1 pt]. Notons $X =]\alpha, \beta[$ l'intervalle trouvé à la question précédente. Pour pouvoir appliquer le théorème de Sturm, il faut que $P(\alpha) \neq 0$ et $P(\beta) \neq 0$. Cette condition est–elle nécessairement vérifiée ? Si oui pourquoi ? Si non que peut–on faire ?

On suppose résolues les questions précédentes. On souhaite concevoir une fonction récursive nommée *IRRP_Sturm*, paramétrée par un polynôme $P \in \mathbb{Q}[x]$ sans facteurs carrés, un intervalle $X =]\alpha, \beta[$ tel que $P(\alpha) \neq 0$ et $P(\beta) \neq 0$ et qui retourne un ensemble d'intervalles isolant les racines réelles strictement positives de P.

Question 9 [2 pts]. Écrire un tel algorithme dans le style des algorithmes énoncés dans le support de cours (on ne vous demande pas du code MAPLE). L'algorithme doit s'appuyer sur le théorème de Sturm. Ne pas se focaliser sur les problèmes d'efficacité.

2 Bases de Gröbner (6 points)

Question 10 [2 pts]. Calculer la base de Gröbner réduite $\mathscr{G}$ de l'idéal $\mathscr{I}$ engendré par le système $\mathscr{S}$ suivant, pour l'ordre lexicographique $x > y$. Détailler les calculs. Éviter les calculs inutiles.

$$x\,y - y - 1, \quad x^2\,y - 1.$$

Question 11 [1 pt]. Déterminer, à partir de la base $\mathscr{G}$ le nombre de solutions complexes de $\mathscr{S}$. Justifier.

Question 12 [1 pt]. Déterminer, à partir de la base $\mathscr{G}$ et des méthodes étudiées en cours le nombre de solutions réelles de $\mathscr{S}$. Justifier.

Question 13 [1 pt]. Calculer la forme normale du polynôme x^2 par $\mathscr{G}$.

Question 14 [1 pt]. Ce polynôme appartient–il à l'idéal $\mathscr{I}$? Justifier.

3 Le projet (2 points)

Question 15 [1 pt]. On considère une surface donnée par une équation (le polynôme F est donné) $z = F(x, y)$. On souhaite représenter cette surface par des courbes de niveau. Comment utiliser le travail réalisé dans le projet pour représenter la courbe de niveau où z vaut 10 ?

Question 16 [1 pt]. Comment faire pour représenter ensemble les courbes de niveau où z vaut 10, 20 et 30 ? Répondre par une phrase ou deux.