DEUG MIAS 2 — Systèmes polynomiaux : que signifie « résoudre » ?
Épreuve de Janvier 2003 — Tous documents autorisés — Calculatrices interdites — Durée 2 heures

---

1 Exercice (6 points)

On s'intéresse à l'idéal I engendré par le système $S = \{x^2 + y - 1, x\,y - x\}$ dans l'anneau $A = \mathbb{Q}[x,y]$.

Question 1. (2 points) Calculer une base de Gröbner G de I pour l'ordre lexicographique donné par $x > y$ (détailler les calculs).

Question 2. (1 point) Donner une instruction MAPLE (utilisant le paquetage `Groebner`) qui affecte à G la base définie à la question précédente.

Parmi les deux polynômes suivants, on souhaite déterminer le(s)quel(s) appartiennent à I.

$$p = x^2 + y^2 - y, \quad q = 3xy^2 - 4xy + x + 1.$$

Question 3. (1 point) Indiquer en une phrase une méthode qui permette de répondre à la question.

Question 4. (1 point) Déterminer si $p \in I$ et si $q \in I$ (détailler les calculs).

Question 5. (1 point) En supposant que les variables MAPLE G et p contiennent respectivement la base de Gröbner et le polynôme définis plus haut, donner une instruction MAPLE qui permette de répondre à la question.

2 Exercice (4 points)

On considère le polynôme $P = x^5 + x + 1$.

Une analyse rapide du polynôme montre que P n'a qu'une seule racine réelle, qui est simple et négative. On souhaite retrouver ces informations en appliquant les méthodes étudiées en cours.

Question 6. (2 points) Montrer, en appliquant une méthode vue en cours que P est sans facteurs carrés (il n'est pas nécessaire d'appliquer de méthodes modulaires). Indiquer en quelques mots la méthode appliquée avant de faire les calculs.

On s'intéresse aux racines réelles négatives de P.

Question 7. (1 point) L'algorithme d'Uspensky ne permet pas directement d'obtenir une liste d'intervalles isolant les racines réelles négatives de P. On peut circonvenir ce problème par un changement de variable. Lequel ?

Question 8. (1 point) Déterminer, en appliquant les méthodes vues en cours (règle des signes de Descartes, borne $C(P)$, ...), un intervalle isolant la racine réelle négative de P.

3 Exercice (4 points)

On suppose donnés un ensemble fini E d'entiers naturels et un entier naturel s. On cherche s'il existe un sous-ensemble F de E tel que la somme des éléments de F vaille s.

Pour fixer les idées, on s'intéresse à un exemple :

$$E = \{366, 385, 392, 401, 422, 437\} \quad \text{et} \quad s = 1215.$$

Le problème admet ici une unique solution :

$$F = \{392, 401, 422\}.$$

Ce problème peut se résoudre automatiquement en procédant à une certaine mise en équation (ce qui nous donne un certain système polynomial S) et en calculant une base de Gröbner G de l'idéal I engendré par S.

Dans la suite de l'exercice, on ne vous demande aucun calcul de base de Gröbner.

Question 9. (2 points) Expliquer comment mettre le problème en équation. Quel est le système S obtenu à partir de l'exemple ?

Question 10. (1 point) Comment déterminer à partir de G si le problème admet une solution ?

Question 11. (1 point) Est–ce que n'importe quel ordre admissible convient pour le calcul de la base de Gröbner ou y a–t–il des restrictions ?

4 Exercice (6 points)

Soit $P = a_d\, x^d + \cdots + a_1\, x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme de degré d sans facteurs multiples. On rappelle que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont deux racines de P alors

$$|\alpha - \beta| > \text{sep}(P) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{d^{\frac{d+2}{2}} \parallel P \parallel}$$

où $\parallel P \parallel$ désigne la racine carrée de la somme des carrés des coefficients de P.

Dans les questions qui suivent, les polynômes MAPLE sont supposés dépendre de l'indéterminée x.

Question 12. (1 point) Ecrire une fonction MAPLE $P \mapsto \parallel P \parallel$.

Question 13. (1 point) Ecrire une fonction MAPLE $P \mapsto \text{sep}(P)$.

On a présenté en cours le principe d'un algorithme très simple mais très inefficace qui découpe l'intervalle $I =]0, C(P)[$ en sous–intervalles I_k de longueur $\text{sep}(P)$ et qui détermine les sous–intervalles I_k qui contiennent une racine de P en considérant le signe de P aux bornes de ces intervalles.

Soient k un indice et $I_k = [a_k, b_k]$ un sous–intervalle de I.

Question 14. (1 point) Est–il vrai que si $P(a_k)\, P(b_k) < 0$ alors I_k contient une racine de P (justifier en une phrase) ?

Question 15. (1 point) Est–il vrai que si I_k contient une racine de P alors $P(a_k)\, P(b_k) < 0$ (justifier en une phrase) ?

Question 16. (2 points) Écrire une fonction MAPLE paramétrée par un polynôme P (satisfaisant les hypothèses données en début d'exercice), qui applique l'algorithme suggeré ci–dessus et qui retourne une liste d'intervalles isolant les racines de P.

Pour simplifier, on suppose que les bornes des intervalles I_k ne sont pas des racines de P. On suppose aussi que la fonction $P \mapsto C(P)$ est disponible.

On rappelle les fonctions MAPLE suivantes :

- `coeff (P, x, i)` retourne le coefficient de x^i dans P ;
- `coeffs (P, 'termes')` retourne la séquence des coefficients de P. Cette séquence n'est pas nécessairement triée. La variable `termes` reçoit la séquence correspondante des termes de P ;
- `degree (P, x)` retourne le degré de P en x ;