Les nombres zébrés

Aussi fascinantes que le mouvement des vagues ou que la danse des flammes, les décimales des nombres zébrés émerveillent les mathématiciens expérimentateurs.

En remarquant qu'entre les positions 762 et 767 des décimales du nombre π surgit une série de six 9 consécutifs, certains se sont étonnés. Il est vrai que l'apparition, dans une suite de 1000 chiffres décimaux tirés au hasard d'une série, de six 9 côte à côte est un phénomène qui n'a environ qu'une chance sur mille de se produire. Rien ne semble expliquer cette étrangeté des décimales de π, mais comme rien n'a été trouvé ailleurs dans π qui fasse écho à cette singularité (on aurait pu par exemple trouver dix 9 consécutifs dans le premier million de décimales, ce qui ne s'est pas produit), les mathématiciens pensent qu'elle résulte du hasard. Aucune explication mathématique n'a donc à en être donnée : parmi les régularités possibles ayant une chance sur mille de se produire, six 0 consécutifs, six 1 consécutifs, présence de la séquence 123456, présence de la séquence 024680, etc., il n'y a pas à s'étonner que l'une au moins soit présente dans les mille premières décimales de π.

Cependant, d'autres phénomènes numériques concernant les suites de décimales des nombres réels sont bien plus frappants et exigent des explications, car ils ne peuvent survenir fortuitement. Nous présenterons plusieurs exemples de telles curiosités. Les nombres zébrés découverts récemment sont à la fois étonnants et subtils ; leur étude mi-sérieuse, mi-ludique intéresse de plus en plus d'amoureux des nombres. Ils sont intermédiaires entre les nombres rationnels, dont les décimales sont périodiques, et les nombres irrationnels, comme √2 et π, dont les décimales semblent en parfait désordre.

Régularités et triangle de Pascal

Commençons par un phénomène numérique facile à comprendre qui concerne le triangle de Pascal (appelé ainsi à tort puisqu'il était connu dans les pays de l'Islam dès le XIe siècle). Si vous calculez le nombre $1{,}000001^7$ vous obtiendrez 1,000007000021000035000035000021000007000001.

Entre les zéros apparaissent (en rouge) les nombres de la septième ligne du triangle de Pascal : 1,7,21,35,21,7,1.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Une façon de construire ce triangle consiste à créer les lignes les unes après les autres. La ligne numéro $n+1$ est obtenue en additionnant terme à terme la ligne numéro n avec une version d'elle-même décalée vers la droite. Calculons selon cette méthode la ligne 7 à partir de la ligne 6

	1	6	15	20	15	6	1	
+		1	6	15	20	15	6	1
=	1	7	21	35	35	21	7	1

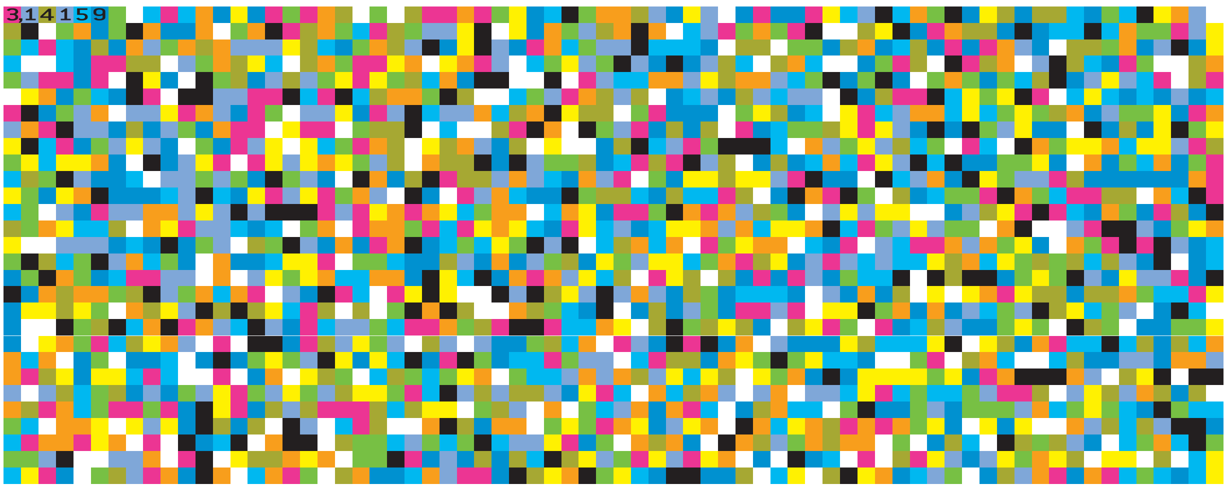
Bien sûr, l'apparition des coefficients du triangle de Pascal dans le développement de $1{,}000001^7$ n'est pas un hasard. La propriété que « le nombre $1{,}000001^n$ découpé en tranches de six chiffres donne la ligne n du triangle de Pascal » est vraie pour la ligne numéro 1 ; supposons qu'elle soit vraie pour n et montrons qu'elle l'est alors pour $n+1$ (nous faisons un raisonnement par récurrence). On opère le calcul de $1{,}000001^{n+1}$ en remarquant que c'est $1{,}000001^n \times 1{,}000001$ et en utilisant la disposition apprise à l'école pour effectuer cette multiplication. On est donc amené à additionner le développement de $1{,}000001^n$ (supposé donné par la ligne numéro n du triangle de Pascal) avec lui-même décalé de six positions (à cause du deuxième facteur de la multiplication, 1,000001). Cette addition correspond à la définition du triangle de Pascal rappelée plus haut, et donc $1{,}000001^{n+1}$ découpé en tranches de six chiffres donne bien la ligne $n+1$ du triangle de Pascal.

1. Les nombres zébrés, comme $\sqrt{(10^{60}-1)}$ *(image centrale)*, dont les premières décimales ont une pseudo-périodicité, sont intermédiaires entre les fractions rationnelles, comme 355/113 à la périodicité parfaite *(image du haut)*, et les nombres irrationnels comme π, où il n'existe pas de périodicité *(image du bas)*. Chaque couleur représente un chiffre selon le code indiqué en haut à droite.

a : 355/113

b : $\sqrt{(10^{60} - 1)}$

c : π



2. Nombres zébrés de R. Yéléhada

Les nombres zébrés de Yéléhada sont définis par la formule $(10^N - 1)^{1/K}$. Nous avons vu les zébrures obtenues pour N égal à 60 et K égal à 2, soit $\sqrt{(10^{60}-1)}$, sans en détailler les justifications mathématiques. Nous aborderons ici le cas $N = 10$, $K = 2$. Le nombre $\sqrt{(10^{10} - 1)}$ est :

99999,99999499999999998749999999999374999999996093749999726562499979492187498388671874869079589832839965…

Les zébrures de ce nombre sont composées d'une part de zones uniformes de 9 (en bleu) et d'autre part de zones où les chiffres semblent quelconques (en rouge).

Le développement $\sqrt{(10^{10} - 1)}$ en série donne, avec x égal à 10^{-10} :

$\sqrt{(10^{10} - 1)} = 10^{-5} \sqrt{(1-x)} = 10^{-5}$ [1 – (1/2)x + (1/2)(1/2–1)x^2/2 ! – (1/2)(1/2–1)(1/2–2) x^3/3 ! + (1/2)(1/2–1)(1/2–2)(1/2–3) x^4/4 ! – ...]

Les différents termes dans le crochet sont :

1
– 0,00000000005
– 0.000000000000000000000125
– 0,00000000000000000000000000000000625
– 0,000000000000000000000000000000000000000000390625
– 0,0000000000000000000000000000000000000000000000000
002734375

Les sommes partielles des termes dans le crochet sont donc :

1
0,99999999995
0,9999999999499999999999875
0,999999999949999999999874999999999375
0,99999999994999999999987499999999993749999999609375
0,999999999949999999999874999999999937499999996093749
9997265625
etc.

L'apparition des zébrures se comprend : chaque nouveau terme, où l'on soustrait une quantité positive à un nombre se terminant par des zéros, fait apparaître, à cause des retenues de 1, une série de 9 qui ne s'interrompt que lorsque les chiffres significatifs du terme soustrait entrent en jeu. Chaque terme fait donc apparaître une zébrure de 9 dont la taille diminue à mesure que le nombre de chiffres significatifs du terme ajouté

Ce raisonnement n'est valable que lorsque le nombre de zéros entre deux coefficients du triangle est assez grand pour que ne se produise aucune interaction entre les différentes tranches. Ici $1{,}000001^n$ donne les bons coefficients jusqu'à la ligne 24. Pour avoir une ligne plus profonde du triangle de Pascal il faut remplacer 1,000001 par 1,00…001 avec un nombre supérieur de zéros entre les deux 1. Remarquons aussi – pour les aficionados des mathématiques – que l'utilisation de la formule du binôme de Newton donne une démonstration directe de la propriété des chiffres de $1{,}000001^n$.

Une division donne les puissances

Voici un autre phénomène numérique du même type. Remarquez les régularités des décimales de 1/9999999997, qui sont : 0,00000000010000000003000000000900000000270000000081000000024300000007290000002187000000656100000196830000059049000017714700005314410001594323000478296900143489070043046721… Entre les séries de zéro apparaissent les puissances de 3 : $3^1 = 3$; $3^2 = 9$; $3^3 = 27$; $3^4 = 81$; $3^5 = 243$; $3^6 = 729$; etc. L'explication de l'apparition des puissances de 3 dans le développement décimal de 1/9999999997 est fondée sur l'égalité suivante :

$1/9999999997 = 1/(10^{10} – 3) = 1/10^{10}\ [1 / (1 – 3/10^{10})\ ]$

Le crochet peut se développer en utilisant la formule classique : $1/(1 – x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$ avec $x = 3/10^{10}$.

Les différentes puissances de x sont bien sûr :

$x = 0{,}0000000003$
$x^2 = 0{,}00000000000000000009$
$x^3 = 0{,}000000000000000000000000000027$ etc.

En prenant en compte le 1 et après décalage de 10 chiffres (dû au facteur $1/10^{10}$ placé devant le crochet) on voit apparaître la forme constatée du développement décimal de 1/9999999997. Quand vous aurez analysé cette curiosité, vous pourrez la généraliser et obtenir à l'aide d'une simple division la suite des chiffres des puissances de n'importe quel entier, ce qui, vous l'avouerez, est remarquable.

Solution : pour avoir les puissances de l'entier k séparées par des 0 dans le développement d'un nombre réel y, il suffit de choisir $y = 1/(10^{10} – k)$, en remplaçant si nécessaire 10^{10} par une plus grande puissance de 10 si on désire éviter le télescopage des séries de chiffres de k^n entre les séquences de zéros.

Irrationnels artificiels et spontanés

Les deux phénomènes numériques précédents concernent les nombres rationnels (c'est-à-dire qui sont des quotients de deux nombres entiers), dont on sait d'ailleurs que tous ont des décimales qui se répètent périodiquement à partir d'un certain chiffre. Les irrationnels (par exemple √2) sont beaucoup plus rebelles – en particulier parce que leurs décimales ne se répètent pas périodiquement –, et jusqu'à maintenant la situation était la suivante.

– Ou bien, on avait affaire à un nombre irrationnel possédant par définition des motifs réguliers dans ses décimales et alors s'en étonner aurait été stupide puisque la régularité des décimales provenait du choix fait par le mathématicien lors de la définition du nombre. Le nombre de Champernowne par exemple est défini comme étant le nombre dont les décimales sont les chiffres des entiers placés les uns derrière les autres *Ch* = 0,1234567891011121314… C'est un nombre irrationnel (et même transcendant : il n'est racine d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers) mais les motifs réguliers de ses décimales ne demandent aucune explication, c'est Champernowne qui les a choisis ! Bien sûr dans ces nombres – que nous nommerons *irrationnels artificiels* – on peut trouver tous les motifs imaginables : vous pouvez même y placer le portrait de vos enfants codé en dix niveaux de gris sur mille lignes de mille pixels.

– Ou bien, deuxième cas, on prenait un nombre irrationnel défini sans faire référence à ses décimales, par exemple π, e, √2, sin(1), etc. – nous nommerons ces nombres les *irrationnels spontanés* –, et alors on constatait à chaque fois qu'aucune régularité convaincante ne se présentait. Même les recherches systématiques ne repéraient rien de notable. À force de ne jamais trouver de régularité dans les décimales

3. Nombres de Kevin Brown

On pose f(0) = 0 et pour tout n positif : $f(n) = 10 \times f(n-1) + n$.
f(1)=1 ; f(2)=12 ; f(3)=123 ; f(4)=1234 ; f(9)=123456789 ; f(10)=1234567900 ; f(20)= 12345679012345679010…

Les nombres de Brown sont les racines carrées des nombres f(n) lorsque n est impair.

(a) 200 chiffres du nombre de Brown pour n = 11
√12345679011 =
111111,11110505555555553905416666576734097216095565928
35198056921959732820021998204251880812806439290512177992
51900248220148197382717397655652676629178460326580748
3042577509804689155128222419995219745 36

(b) 200 chiffres du nombre de Brown pour n = 19
√1234567901234567899 =
1111111111,1111111101055555555555555551005416666666666
66254879097222222221756387534288194443854231894832031 2
49198786463901149087402226559257515118767019225374749 8
38140226871537469894674151571699807155 1

(c) 200 chiffres du nombre de Brown pour n = 25
√1234567901234567901234565 =
1111111111111,11111111109805555555555555555555555547885
41666666666666666665765425347222222222222222089852403 42
88194444444444226696092529296874999999616218529749552 40
88541659580415948113759358723944803023 4

(d) 200 chiffres du nombre de Brown pour n = 31
√1234567901234567901234567901231 =
1111111111111111,1111111111111109505555555555555555555
5555555439554166666666666666666666666666499044659722222 22
2222222222222191945497217881944444444444444383194629760
664062499999999999986724102667290602213 5

(e) 400 chiffres du nombre de Brown pour n = 49
√1234567901234567901234567901234567901234567901229 =
1111111111111111111111111,1111111111111111111111111086055
555555555555555555555555555555555555555555527305416666
66666666666666666666666666666666666666029626034722222222
22222222222222222222222222222222042656394092881944444444
4444444444444444444444438775551250401171874999999999999
9999999999999999998082496877114863053385416666666666666
666666666659871857386214406386555989583333333333333333
3333084346040762760820694027709960937499999999999999906

des nombres irrationnels spontanés, la situation en était devenue un peu ridicule. Certaines grandes vedettes du zoo des nombres sont très bien connues et pourtant, même dans la séquence des 1240 milliards de décimales de π (calculée en 2003), on n'a rien trouvé d'étonnant (pour une séquence de cette longueur). Les décimales connues de π possèdent les propriétés statistiques qu'on est en droit d'attendre d'une séquence tirée au hasard (par exemple tous les chiffres apparaissent avec la même fréquence), même si on ne sait pas prouver que les décimales posséderont jusqu'à l'infini les propriétés statistiques constatées pour le début.

Premiers zèbres

Récemment les choses ont changé car l'utilisation des ordinateurs et des logiciels de calcul formel permettent de nombreuses expérimentations. Grâce à elles ont été découverts certains nombres irrationnels spontanés possédant des motifs réguliers remarquables dans leurs décimales.

Le premier exemple sera un peu monotone, mais il explique pourquoi on a dénommé *nombre zébré* ces étranges irrationnels, qu'on appelle aussi *nombres schizophrènes*. Le calcul par la machine de $\sqrt{(10^{60} - 1)}$ donne le nombre zébré de la figure 1*b*. La suite des décimales de ce nombre irrationnel est constituée de séquences uniformes de 9 entrecoupées de séquences désordonnées de chiffres se terminant par 24 ou 74. Les séquences de 9 diminuent de longueur et finissent par disparaître vers le deux millième chiffre. On peut expliquer cette remarquable zébrure en étudiant soigneusement comme dans le cas de 1/9999999997 le développement en série associé à ce nombre. On s'aide cette fois de la formule :
$\sqrt{(1-x)} = 1 - 1/2\, x + 1/2(1/2-1)\, x^2/2\,! - 1/2(1/2-1)(1/2-2)\, x^3/3\,! + \ldots$

La même étude rend compte aussi de la présence du 24 et du 74 (qui proviennent du fait que les deux derniers chiffres décimaux du quotient d'un entier impair par une grande puissance de 2 se termine toujours par 25 ou 75).

Même si l'explication mathématique n'est pas mystérieuse, on est surpris qu'une régularité présente dans la définition sur 60 chiffres (le nombre $10^{60} - 1$ est une suite de soixante 9 consécutifs) engendre une structure zébrée dans la racine carrée sur près de 2000 chiffres !

En utilisant votre logiciel de calcul préféré, vous constaterez qu'en remplaçant 10^{60} par une puissance de 10 plus grande vous prolongerez les zébrures : par exemple, pour $\sqrt{(10^{200} - 1)}$, les zébrures ne s'évanouissent qu'après 20 000 décimales. Pourtant jamais vous ne réussirez à empêcher les séquences désordonnées de gagner du terrain et de noyer les séquences de 9 qui semblent s'épuiser petit à petit : le désordre grignote progressivement l'ordre !

Si, en gardant l'exposant 60, vous remplacez la racine carrée par une racine quatrième ou une racine cinquième un phénomène analogue de zébrure persiste : des séries de 9 séparées par des zones de plus en plus longues de chiffres quelconques. En revanche, pour la racine troisième et la racine sixième, le phénomène est différent : une première séquence de 9 est suivie d'une séquence de 6, puis d'une séquence de 5, puis alors des décimales sans régularité apparente. Avec la racine septième aucune zébrure n'est apparente. La famille de tous les nombres zébrés de la forme $(10^n - 1)^{1/k}$ est nommée famille de Roland Yéléhada en l'honneur de son découvreur, mais aucune étude générale, à ma connaissance, ne permet de prédire, sans faire le calcul explicite, comment se présenteront les décimales en fonction des valeurs des paramètres n et k.

Les nombres zébrés de Brown

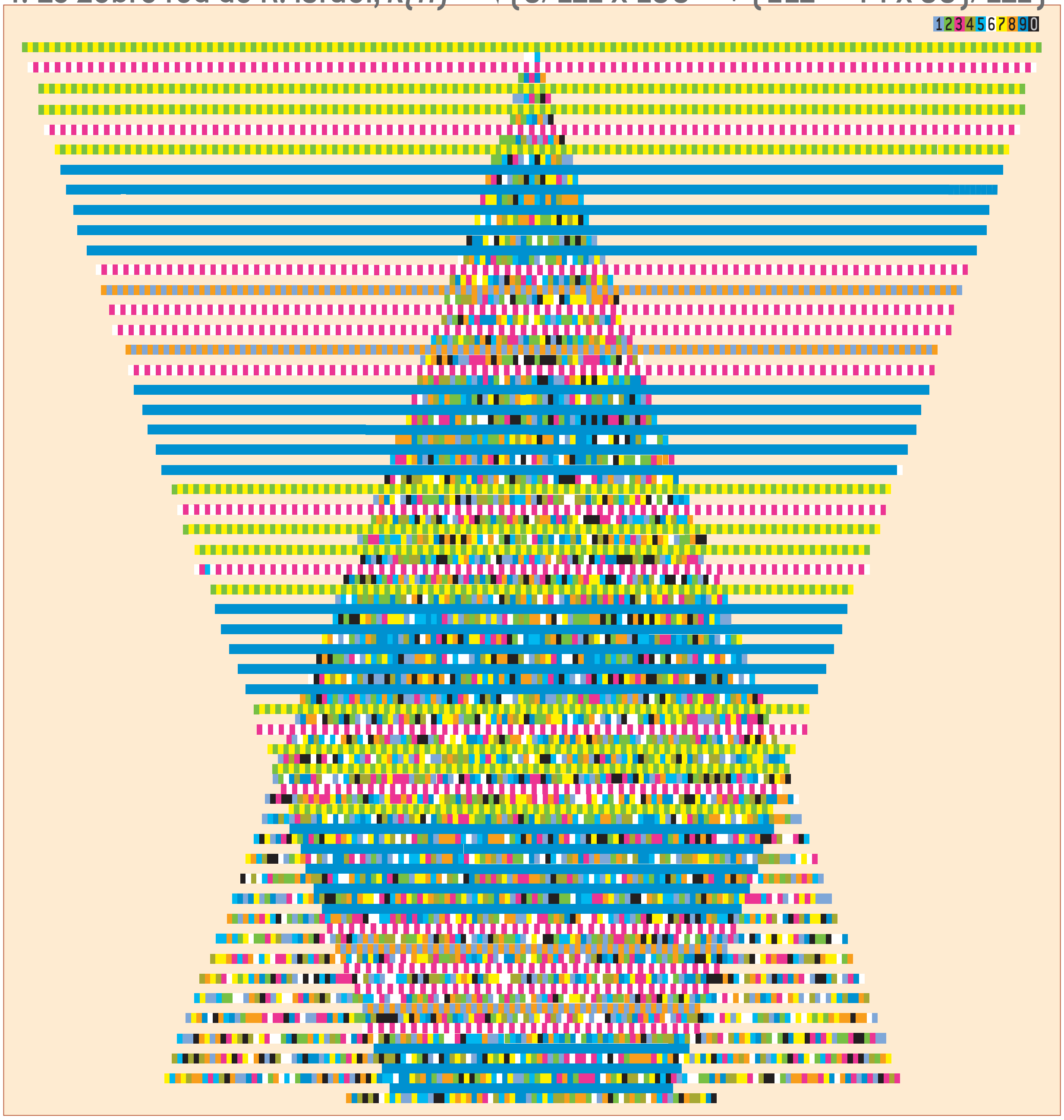
Passons à une famille de nombres zébrés plus étrange encore découverte et étudiée par Kevin Brown. On définit d'abord une suite numérique par récurrence par les formules :

$f(0) = 0$; pour tout $n > 0$: $f(n) = 10 \times f(n - 1) + n$.

On a ainsi : f(1) = 1; f(2) = 12 ; f(3) = 123 ; f(4) = 1234 ;
f(9) = 123456789 ; f(10) = 1234567900 ;
f(20) = 12345679012345679010 ;
f(30) = 123456790123456790123456790120

Les nombres de Brown sont les racines carrées des nombres f(n) pour n impair ; quelques-uns sont donnés dans la figure 3. Tous présentent les mêmes caractéristiques, qui sont de plus en plus accentuées quand on augmente la valeur de n.

4. Le zèbre fou de R. Israël, $k(n) = \sqrt{(9/121 \times 100^{95} + (112 - 44 \times 95)/121)}$



– Il s'agit de nombres zébrés, les zones stables des zébrures (un même chiffre répété consécutivement) étant cette fois composées de chiffres autres que le chiffre 9. Entre les zones stables, on trouve, comme dans les décimales des nombres de Yéléhada, des suites de chiffres sans structure apparente.

– Plus on s'avance dans la suite des décimales, plus petite est la place occupée par les zones stables, et à partir d'un certain endroit, plus aucune régularité n'est visible.

– Dans tous les nombres de Brown, les zones stables sont constituées d'abord de 1, puis de 5, puis de 6, puis de 2 et l'ordre 1-5-6-2-... semble résulter d'une loi commune à tous les nombres.

Kevin Brown, qui a mené l'étude de ces nombres (en utilisant encore une technique de développement en série accompagnée de considérations arithmétiques), a réussi à découvrir la loi qui régit l'ordre des chiffres dans les tranches uniformes de ses nombres et l'a exprimée sous la forme d'un algorithme qui lui a donné le tableau suivant :
15624963921375999963936999921348936978624999999999
99996393699993696399999999999999213489369426519999 3
69639999786519639213759999999999999999999999999999
99999999999963936999936963999999999999999369639999 63
93699999999999999999999999999999999999999992134893
69426519999369639999426879639573489999999999999369
63999963936999999999999997865196395734899996393699 9
92134893697862499999999999999999999999999999999999
99999999999999999999999999999999999999999999999999
99999999999999999999999999999999999963936999936963
99…(voir http://www.mathpages.com/home/kmath404.htm).

Chose amusante et bizarre – pour l'instant inexpliquée – cette suite présente aussi des zébrures dues à des séquences de 9 consécutifs : des zébrures dans la structure des zébrures !

Les nombres zébrés peuvent présenter des régularités plus complexes et qui fascinent ceux qui les étudient. Le plus étrange des zèbres numériques irrationnel appartient à une famille trouvée par Robert Israël du Département de mathématiques de l'Université de Colombie-Britannique à Vancouver au Canada. Il est défini par la formule :

$k(n) = \sqrt{(9/121 \times 100^n + (112 - 44n)/121)}$

Pour $n = 95$ on découvre une étonnante suite des décimales zébrées dont l'étude est en cours *(voir la figure 3)*. Les motifs ordonnés complexes se prolongent sur plus de 14 000 chiffres alors que le nombre dont on prend la racine carrée n'a aucune régularité évidente. Nous avons disposé les décimales pour en faire apparaître le mieux possible la structure complexe et étrange dont l'explication détaillée, à n'en pas douter, sera encore plus subtile et délicate que celle proposée pour les nombres zébrés précédents.

Zébrures infinies ?

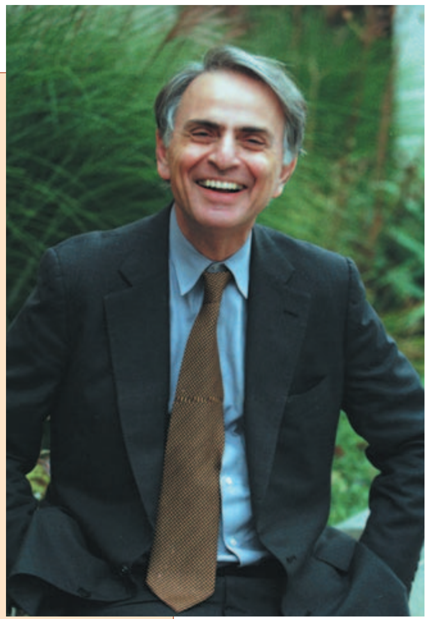
D'autres nombres zébrés sont encore à découvrir, qui conduiront peut-être à un nombre irrationnel spontané infiniment zébré, car jusqu'à présent tous les nombres zébrés découverts, aussi merveilleux soient-ils, ne le sont que sur une partie finie de leurs décimales. On sait qu'un nombre irrationnel n'est jamais périodique, mais rien en théorie n'interdit qu'une racine carrée irrationnelle possède des zébrures jusqu'à l'infini. Pourquoi n'en trouverions nous jamais ?

Bien que personne aujourd'hui n'en sache la raison, les nombres de la forme $\sqrt{n}$, lorsque n n'est pas un carré parfait, ont des décimales qui, à partir d'un certain point, satisfont à tous les tests statistiques usuels. En particulier la fréquence d'apparition de chacun des dix chiffres vaut 1/10, comme si les chiffres étaient tirés au hasard par une loterie équitable. Ce n'est évidemment pas le cas puisque le calcul des chiffres de $\sqrt{2}$, par exemple, ne laisse rien au hasard et est fixé à l'avance par la définition de $\sqrt{2}$. On les obtient en mettant en œuvre un algorithme parfaitement déterministe !

Dans son roman *Contact,* publié en 1985, l'astronome et collaborateur de la NASA Carl Sagan (1934-1996) imaginait qu'un jour, explorant les décimales du nombre π, des chercheurs découvraient une structure bien trop régulière pour qu'elle puisse être attribuée au hasard (il s'agissait du dessin codé d'un cercle), et il proposait d'en interpréter la présence comme une preuve de l'existence de Dieu. On peut penser qu'il avait tort : pour les zébrures découvertes récemment dans des irrationnels simples, la recherche d'explications mathématiques, menée avec insistance, conduit à des explications parfois complexes, mais en tout point rationnelles. On peut donc croire que la découverte d'une structure dans les décimales de π, si elle se produisait, serait, elle aussi, expliquée mathématiquement. Le mystère aujourd'hui est plutôt qu'on ne comprend pas pourquoi aucune zébrure n'est infinie, ni pourquoi aucune régularité indéfiniment étendue n'apparaît jamais dans les décimales des irrationnels spontanés.

Chaque nombre irrationnel spontané est un océan de chiffres liant d'une façon mystérieuse l'ordre d'une définition précise et déterministe et l'apparent aléa parfait d'un tirage au sort illimité. Les zébrures découvertes récemment ne viennent troubler ce mystère inouï que sur le rivage.

5. Contact



Dans son roman *Contact* (Éditions Mazarine, Paris, 1986, traduit de l'ouvrage *Contact,* Simon and Schuster, New York, 1985) Carl Sagan *(ci-contre)* oppose deux personnages, Eleanor Arroway et Joss Palmer. Eleanor explore les décimales du nombre π à la recherche d'un motif régulier qui sera découvert dans les dernières pages du livre. Cette partie du roman n'a pas été retenue pour le film qui en a été tiré. Elle illustre une étrange conception de ce que pourrait être une réconciliation de toutes les religions grâce aux mathématiques.

« Vous voyez que Dieu est mathématicien.

– Dans une certaine mesure, oui [...].

– Vous cherchez la révélation par l'arithmétique [...]

– Ceci est le seul moyen, l'unique moyen, Palmer. Il n'y a que cela qui puisse convaincre un sceptique. Imaginez que nous trouvions quelque chose. Quelque chose qui n'a d'ailleurs pas besoin d'être d'une effroyable complexité. Simplement significatif d'un ordre qui ne puisse rien devoir au hasard dans les chiffres de π. C'est tout ce dont nous avons besoin. Tous les mathématiciens pourront retrouver le même motif, ou quoi que ce soit que cet ordre s'avère être. C'est la fin du sectarisme ; tout le monde commencera à lire dans les mêmes *Écritures.* Plus personne ne pourra objecter que tel miracle essentiel, pour telle religion, n'était en fait qu'un tour de prestidigitation, ou que les historiens ont falsifié les documents, ou qu'il s'agit d'hystérie collective, d'illusion, d'un substitut aux parents une fois que nous sommes grands. Tout le monde pourra être croyant.»

Malheureusement pour ceux qui recherchent une preuve de l'existence de Dieu dans les mathématiques, même si l'on découvrait une régularité significative dans les décimales du nombre π, on ne pourrait rien en déduire. Comme dans le cas des irrationnels zébrés dont les structures peuvent être élucidées, une explication de nature purement mathématique pourrait finalement être donnée de la régularité ; en tout cas, elle n'aurait aucune raison d'être exclue comme a l'air de le penser Sagan. Ainsi, l'unification de l'humanité autour d'une même croyance ne se fera sans doute pas grâce au nombre π, contrairement au rêve mathématique de Sagan.

Auteur & Bibliographie

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université de Lille.

Kevin BROWN, *Schizophrenic Numbers*, sur le site internet : http://www.mathpages.com/home/kmath404.htm

Richard HOMES. *Schizophrenic Numbers*, Zebra Irrationals, 2004.

Roland YÉLÉHADA, Communication personnelle, mai 2004.

David BAILEY, and Richard CRANDALL, *Random Generators and Normal Numbers*, 2003 (voir le site internet de David Bailey). Cet article examine l'aspect aléatoire des irrationnels spontanés.

Clifford PICKOVER. *Magiques mathématiques*, Dunod, 2003 (voir pages 74-76 et 277-28).

Jean-Paul DELAHAYE. *Le fascinant nombre π*, Belin-Pour la Science, 1997 (Le chapitre 10 traite du problème de l'aspect aléatoire des décimales du nombre π).

Carl SAGAN. *Contact,* Éditions Mazarine, Paris, 1986.