Le complexe surgit-il du simple ?

Jean-Paul Delahaye

L'itération d'une fonction simplissime fait apparaître des cycles de toutes sortes et même, le chaos.

Le complexe semble naître du simple : nous le verrons en étudiant les effets de la fonction en «chapeau de clown». Cette fonction est très simple : sa représentation graphique est composée de deux segments ! Pourtant, peut-on imaginer situation plus chaotique que celle engendrée par cette fonction où les répétitions d'une opération ne redonnent jamais le même résultat ? La complexité se terre dans les situations mathématiques les plus élémentaires.

La fonction du chapeau de clown (qui correspond à une opération d'étirement-pliage représentée sur la figure 1) associe à chaque nombre compris entre 0 et 1 un autre nombre compris entre 0 et 1. Si x est inférieur à 1/2, alors $f(x)$ est égal à $2x$; si x est supérieur à 1/2, alors $f(x)$ est égal à $2(1-x)$. La fonction est continue, car en 1/2 les valeurs de $2x$ et $2(1-x)$ coïncident. Elle est dérivable pour toutes ses valeurs, sauf 1/2 (la pointe du chapeau). Elle est croissante pour x inférieur à 1/2 et décroissante pour x supérieur à 1/2. Or cette fonction simple illustre plusieurs idées de la théorie du chaos déterministe.

Notons que cette théorie n'est pas un édifice aussi constitué que la théorie des probabilités ou que la théorie de la relativité restreinte ; c'est plutôt un ensemble, parfois hétéroclite, de résultats mathématiques et expérimentaux. Tous ces résultats s'orchestrent autour d'une idée : des situations apparemment simples et non aléatoires engendrent des structures complexes.

Nombre de phénomènes physiques ou biologiques, par exemple en météorologie ou en dynamique des populations, se décrivent par une itération. On choisit une valeur x_0 appelée le germe, puis on lui applique une transformation f, ce qui donne la valeur $f(x_0)$, notée x_1. On recommence en appliquant f à x_1, ce qui donne $f(x_1) = f(f(x_0)) = x_2$, puis $f(f(f(x_0))) = x_3$, $f(f(f(f(x_0)))) = x_4$, etc. Dans les bons cas, la suite des valeurs obtenues se stabilise ou converge, et le point de convergence est intéressant (ce sera, par exemple, l'effectif stabilisé d'une population animale). Que donnent les itérations de la fonction f en chapeau de clown ?

Essayons diverses valeurs. Le germe $x_0 = 1/2$ donne $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, etc. Il y a stabilisation. Le germe $x_0 = 1/4$ donne : 1/4, 1/2, 1, 0, 0, etc. La stabilisation est encore sur 0. Pour tout germe de la forme $x_0 = 1/2^p$, il y a stabilisation sur 0 après p étapes. Pour le germe $x_0 = 1/3$, nous obtenons 1/3, 2/3, 2/3, 2/3, etc. Nous observons encore une stabilisation ! Pour tout germe, la suite des valeurs itérées, se stabilise-t-elle ?

Non ! $x_0 = 1/5$ donne un autre comportement : 1/5, 2/5, 4/5, 2/5, 4/5, 2/5, 4/5, etc. La suite oscille entre ces deux valeurs. On dit que (2/5, 4/5) est un cycle d'ordre 2, et que le germe 1/5 est un point cyclique. Le germe $x_0 = 1/10$ donne 1/10, 1/5, 2/5, 4/5, 2/5, 4/5, ... et il conduit ainsi au même cycle que 1/5 : c'est aussi un point cyclique. Existe-t-il des cycles d'ordre 3, 4, ..., p ? Oui. Ainsi $x_0 = 2/7$ donne 2/7, 4/7, 6/7, 2/7, ... (on a là un cycle d'ordre 3) ; plus généralement, $x_0 = 2/(2^p - 1)$ donne un cycle d'ordre p. Le chapeau de clown donne naissance aux cycles de toutes les longueurs possibles, il suffit de bien choisir le germe *(voir la figure 2)*.

Très bien, mais tout point de départ conduit-il à un cycle ? La réponse est non : pour nous en convaincre, nous calculerons en base 2. Les calculs suivants sont caractéristiques de la sensibilité aux conditions initiales, qui se traduit souvent par une «montée des chiffres en surface». Notre passage par le calcul binaire nous fera pénétrer au cœur du chaos déterministe.

Les points turbulents

Nous savons que, en base dix, multiplier un nombre par dix revient à décaler la virgule d'un chiffre vers la droite. De même, en base 2, multiplier un nombre par deux décale sa virgule d'un chiffre vers la droite. La transformation de x en $1 - x$ pour un nombre compris entre 0 et 1 et écrit en base 2 consiste, pour tous les chiffres après la virgule, à changer tous les 0 en 1 et tous les 1 en 0 : par exemple, $1 - 0{,}1001001001001...$ est égal à $0{,}0110110110110...$

De ces deux remarques, nous déduisons qu'une itération par la fonction du chapeau de clown se décrit en base 2 par une règle simple : quand x est inférieur à 1/2 (c'est-à-dire si le premier chiffre après la virgule est 0), on obtient $f(x)$ en décalant tous les chiffres d'une case vers la gauche ; quand x est supérieur à 1/2 (si le premier chiffre après la virgule est 1), on obtient $f(x)$ en changeant les 0 en 1 et les 1 en 0 et en décalant tous les chiffres d'une case vers la gauche :

$f(0{,}0111011101110...) = 0{,}111011101110...$

$f(0{,}1001001001001...) = 0{,}110110110110...$

Il en découle alors un procédé pour calculer x_n, l'itéré n fois de x_0 par la fonction f (notons que les fonctions pour lesquelles un tel procédé existe sont très rares). Si le n-ième chiffre après la virgule de x_0 est un zéro, alors nous obtenons x_n en effaçant les n premiers chiffres de x_0 ; et si ce chiffre est un 1, nous effaçons les n premiers chiffres de x_0 et échangeons les 0 en 1 et les 1 en 0. Ainsi :

$x_0 = 0{,}110110110110...$,
$x_1 = 0{,}01001001001...$,
$x_2 = 0{,}1001001001...$,
$x_3 = 0{,}110110110... = x_0$ (nous avons un cycle d'ordre 3 : 6/7, 2/7, 4/7).

A chaque itération, la suite des chiffres glisse d'un chiffre vers la gauche : aussi, pour qu'un germe soit cyclique, il faut et il suffit que son écriture en base 2 le soit. Pour le chapeau de clown, les points cycliques (qui engendrent un cycle) sont les nombres rationnels : ils s'écrivent p/q, avec p et q entiers, et leur écriture en base 2 (et dans n'importe quelle base) est cyclique à partir d'un certain rang.

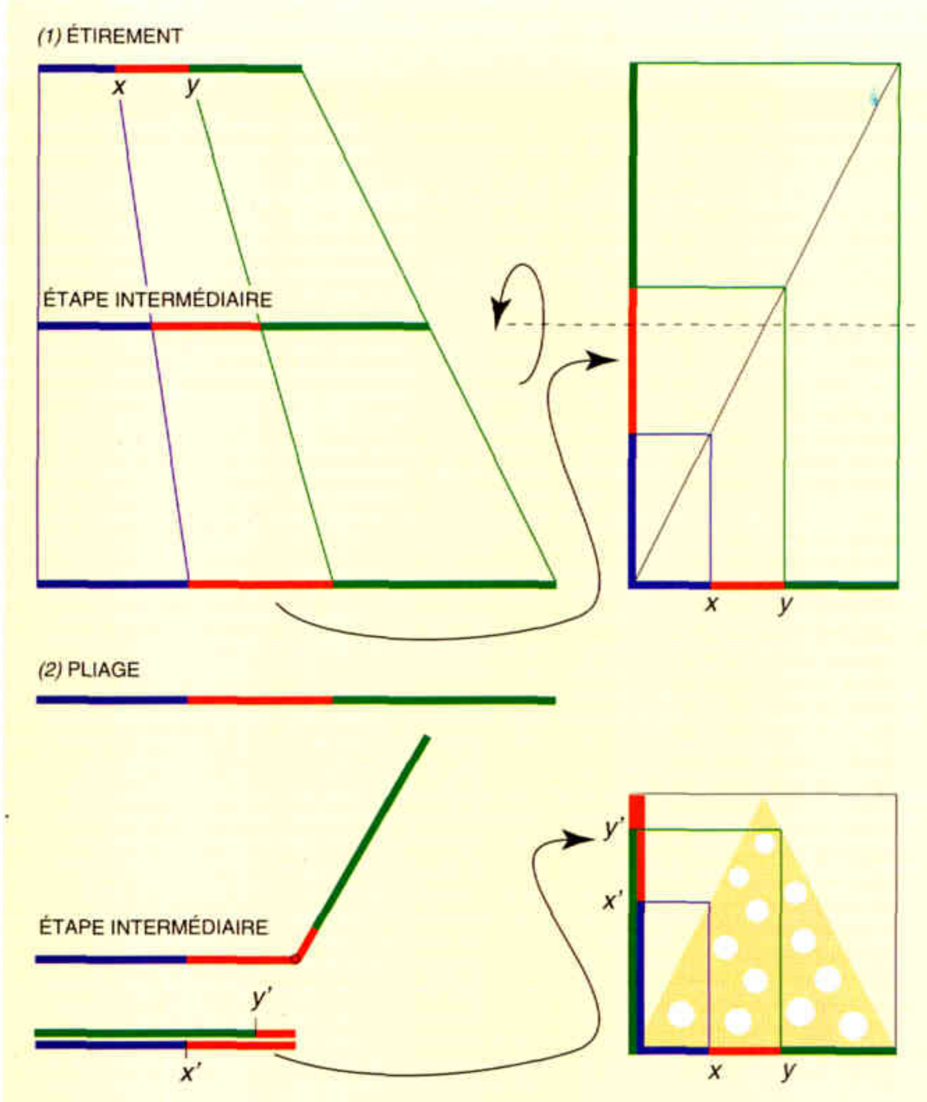
Il apparaît alors que tout germe x_0 ne conduit pas à un cycle : il suffit de choisir un germe dont le développement binaire n'est pas celui d'un rationnel.

Ainsi la suite des itérés du germe irrationnel x_0 = 0,0100100010000100000l... (formé de 1 séparés d'un nombre croissant de 0) ne donnera jamais un cycle : la suite des itérés passe infiniment souvent près de 0, et l'on dit que 0 est un point d'accumulation de la suite. L'ensemble de ces points d'accumulation est nommé l'attracteur étrange de la suite. Un peu d'attention nous montre que la suite s'approche infiniment souvent des nombres 1, 1/2, 1/4, etc. Finalement *(voir la figure 3)*, l'attracteur étrange de la suite résultant de ce germe irrationnel est l'ensemble infini {0, 1, 1/2, 1/4,...}.

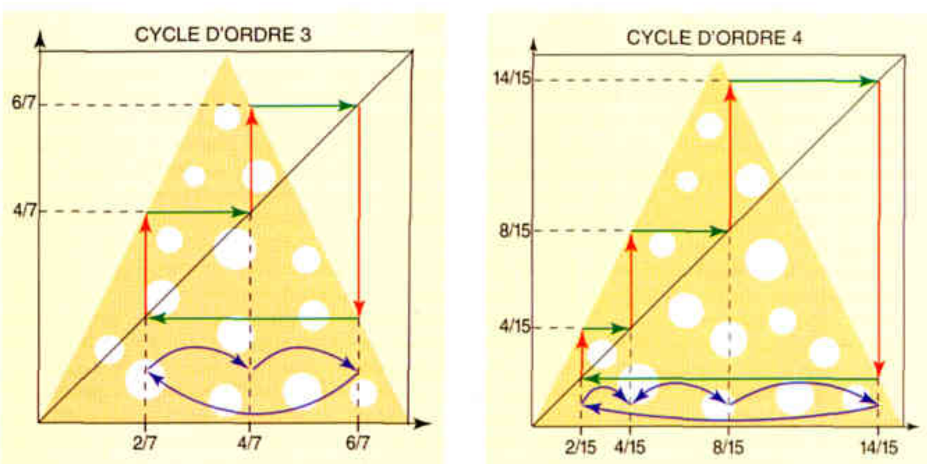
Une telle suite, qui a un attracteur étrange infini, est qualifiée de turbulente ou de chaotique : ses valeurs «s'agitent» sans jamais converger ou décrire un cycle. Même si la fonction du chapeau de clown est très simple, quand nous partons de ce germe et que nous calculons les itérés, nous obtenons un comportement complexe et irrégulier : du chaos déterministe.

Notre fonction chapeau de clown peut-elle donner d'autres attracteurs étranges ? Grâce à la définition de la fonction f en notation binaire, nous pouvons mener l'étude aisément et montrer, par exemple, que si nous partons du celèbre nombre de Champernowne 0,0110111001001... (ses chiffres sont ceux des nombres entiers successifs écrits en base 2 les uns derrière les autres, soit 0 1 10 11 100 100, etc.) alors l'attracteur étrange est l'ensemble de tous les points compris entre 0 et 1 : la suite des itérés de x_0 apparaît une infinité de fois près de chacun des nombres compris entre 0 et 1. Les mathématiciens ont dépisté d'autres attracteurs étranges : certains sont même fractals, comme celui donné par le germe 0,01010010101000 101010101000010101010...

Les germes qui induisent des comportements réguliers (stabilisation ou cycles) – nommons-les points calmes – sont entremêlés avec les germes amenant un comportement chaotique – points turbulents. Pour le chapeau de clown, nous savons que



1. La fonction «étirement-pliage». ***Le chapeau de clown décrit ce que devient le point x d'un élastique qu'on étire et qu'on replie sur lui-même. On représente ici deux points x et y pour indiquer les comportements des points dont l'abscisse est inférieure et supérieure à 1/2.***



2. La fonction en chapeau de clown ***vaut $2x$ pour x compris entre 0 et 1/2 et vaut $2(1-x)$ pour x entre 1/2 et 1. Elle possède un cycle d'ordre 3 : $f(2/7) = 4/7$, $f(4/7) = 6/7$, $f(6/7) = 2/7$ dessiné sur la figure (après trois «étirement-pliage», on revient sur le point de départ). Il y a aussi un cycle d'ordre 4. En fait, pour tout entier n, il y a un cycle d'ordre n qui commence par $2/(2^n-1)$. Cette grande variété de comportements cycliques est l'indice de la turbulence. Le procédé graphique utilisé consiste, après chaque itération, à repartir de la nouvelle valeur de x en traçant une horizontale (flèches vertes) jusqu'à la première bissectrice.***

les points calmes sont les nombres rationnels : ainsi, entre deux points calmes, aussi proches soient-ils l'un de l'autre, il existe un point turbulent ; inversement, entre deux points turbulents, aussi proches soient-ils l'un de l'autre, il existe un point calme.

Si l'on choisit au hasard un germe, il est impossible de savoir quelle suite d'itérés il donnera. La plus infime variation change tout, car elle modifie les chiffres du germe situé loin, et ce sont eux qui déterminent le futur éloigné de la suite des itérés. Si un phénomène est régi par une loi analogue à celle du chapeau de clown, il est imprévisible en pratique : pour en prédire le déroulement, il faudrait une connaissance parfaite des conditions initiales, ce qui est impossible.

Quelques questions se posent. Le phénomène identifié pour le chapeau de clown est-il typique ? Pour d'autres fonctions, tout point est-il, soit calme, soit turbulent ? Existe-t-il des fonctions dont tous les points sont calmes ? En existe-t-il dont tous les points sont turbulents ?

Des régularités dans le chaos

Les réponses à ces questions sont aujourd'hui connues : elles décrivent un ordre insoupçonné dans le chaos. Comme en probabilités, ce qui au départ apparaît comme le désordre même manifeste de l'ordre aux yeux du mathématicien.

Réglons d'abord une question : une suite d'itérations peut-elle être autre chose que calme (cyclique) ou turbulente (posséder un attracteur infini) ? Si nous étendons un peu la notion de suite calme que nous avons adoptée, la réponse est que seuls existent ces deux comportements.

Une suite comme la suite 1/2, 1 – 1/3, 1/4, 1 – 1/5, 1/6... contient deux morceaux bien identifiables, celui des termes pairs qui convergent vers 0, celui des termes impairs qui convergent vers 1. Il est naturel de considérer qu'une telle suite est calme (on dit qu'elle admet un cycle limite d'ordre 2). Nous nommerons désormais suite calme une suite qui, lorsque nous en distribuons régulièrement les termes en p paquets (comme quand nous jouons aux cartes), donne p suites convergentes (dont les points limites forment alors un cycle limite d'ordre p).

Toute suite provenant de l'itération d'une fonction continue donne soit une suite calme avec un cycle limite, soit une suite turbulente. Ce résultat de topologie n'est pas très spectaculaire, mais le résultat suivant l'est plus : si une fonction possède un cycle d'ordre trois alors, *(a)* elle possède des cycles de tous les ordres possibles et, *(b)* il existe des germes turbulents.

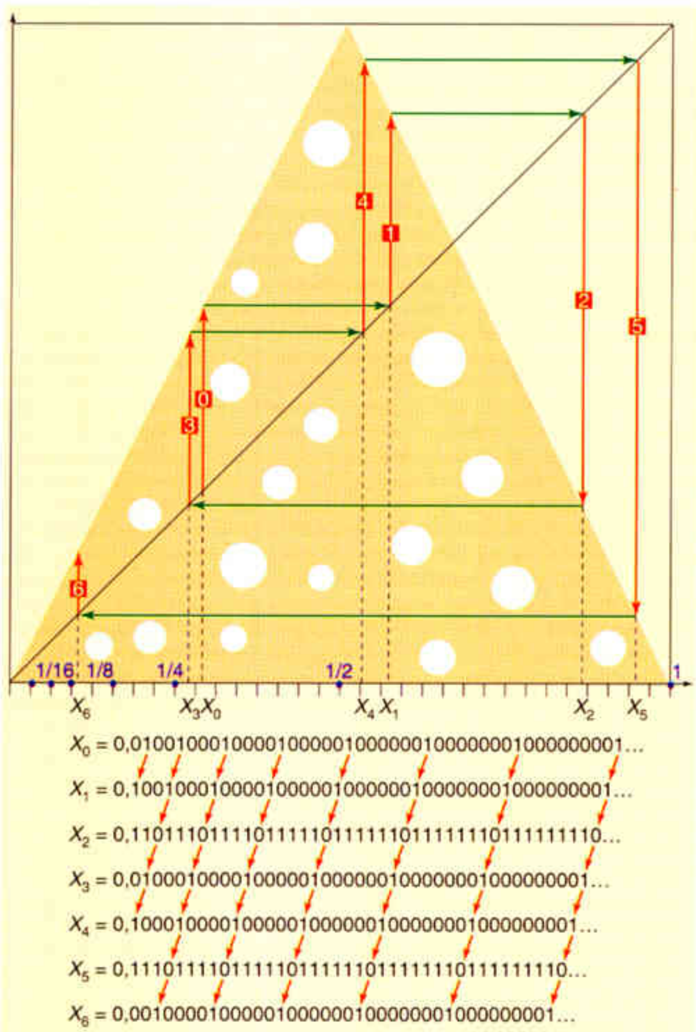
Ce résultat étonnant, qui interdit, par exemple, qu'on ait un cycle d'ordre 3 et pas de cycle d'ordre 367, a été proposé par les mathématiciens américains T. Li et J. Yorke en 1975, dans un article au titre provocateur : *La période trois implique le chaos*. Ils ignoraient qu'un théorème établi en 1964, par le mathématicien A. Sharkovski, entraînait la partie *(a)* de leur énoncé... et bien d'autres précisions sur les cycles. Ce théorème ignoré de la science occidentale pendant de longues années (des chercheurs français le redécouvrirent à la fin des années 1970) a conduit depuis à des généralisations de la partie *(b)* que nous allons détailler.

La taille des cycles des fonctions continues d'une variable réelle (nous resterons toujours dans ce cadre) possède un ordre secret qui s'exprime par un tableau infini (en largeur et en hauteur). Sur la première ligne, on place tous les nombres impairs : 3 5 7 9 11... Sur la deuxième ligne, on place tous les nombres doubles d'un nombre impair : 6 10 14 18 22... Puis tous les quadruples d'un nombre impair, tous les octuples d'un nombre impair, etc. 12 20 28 36 44... 24 40 56 72 88... etc. Ce n'est pas tout à fait fini, car il manque les puissances de 2. Elles constituent, écrites par ordre décroissant, la dernière ligne du tableau : ... 16 8 4 2 1.

Ce tableau est l'ordre secret du chaos. Le théorème de Sharkovski énonce que, si une fonction possède un cycle d'ordre x, alors elle possède nécessairement des cycles d'ordre y pour toutes les valeurs de y situées après x dans le tableau.

Nous retrouvons en particulier la partie *(a)* du résultat de T. Li et J. Yorke, puisque la présence d'un cycle d'ordre trois implique celle de tous les autres cycles (3 est le premier élément du tableau). Nous avons cependant bien plus : le théorème de A. Sharkovski indique que, si une fonction possède un cycle d'ordre 10 (deuxième élément de la deuxième ligne), elle possède aussi des cycles d'ordre 14, 18, 22..., 12, 20, 28... 16, 8, 4, 2, 1 (car ce sont des entiers situés derrière 10 dans le tableau), mais peut-être pas des cycles d'ordre 6, 7, 5, 3 (car ces nombres sont placés devant 10).

Chaque fonction a un ensemble de cycles qui n'est pas quelconque, mais qui est fixé par l'ordre secret du chaos. La fonction du chapeau de clown a un cycle



3. Lorsqu'on écrit ***les nombres en base 2, on constate (et l'on démontre) que, pour connaître le n-ième itéré du germe x_0, il suffit de décaler ses chiffres de n rangs vers la gauche, en changeant la parité (0 devient 1 et 1 devient 0) quand le n-ième chiffre de x_0 est un 1. Cette règle démontre que le nombre irrationnel 0,01001000100001... ne revient jamais exactement au même endroit. La suite obtenue par le chapeau de clown à partir de ce germe possède une attracteur étrange qui est l'ensemble infini 0, 1/2, 1/4, 1/8... (en bleu). Ce germe est un point turbulent.***

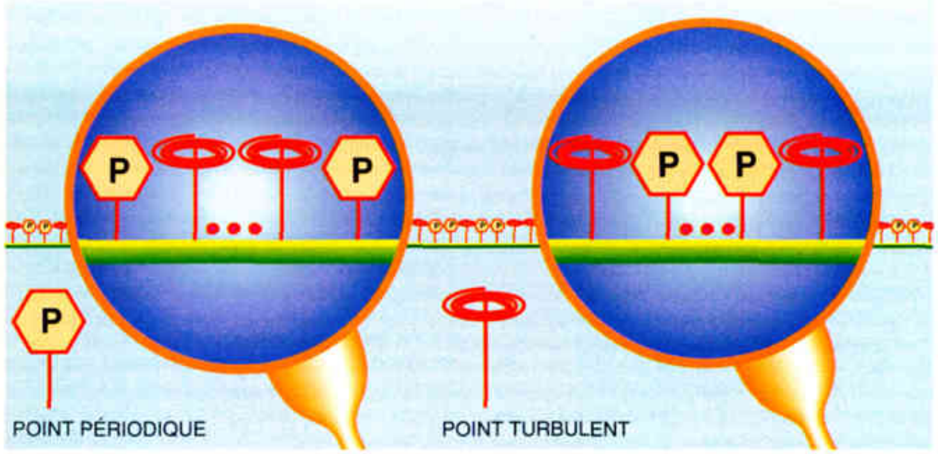
d'ordre 3, donc elle a aussi des cycles de tous les ordres possibles (nous l'avions constaté) : nous dirons qu'elle est de type 3 (le plus haut possible). On connaît des fonctions de type 5 (elles possèdent des cycles de tout ordre possible, sauf 3), de type 7 (elles possèdent des cycles de tout ordre possible, sauf 3 et 5), etc.

D'autres précisions complètent la partie *(b)* des résultats de T. Li et J. Yorke et le théorème de A. Sharkovski, notamment que le type d'une fonction détermine l'existence des germes turbulents. Précisément : *(A)* si une fonction est de type 2^i (elle possède des cycles d'ordre 2^i, 2^{i-1}, ..., 4, 2, 1), alors elle ne possède pas de germe turbulent ; *(B)* si une fonction est d'un type impair ou double d'un impair et plus généralement dont le type est 2^i multiplié par un nombre impair, alors elle possède des germes turbulents. Les fonctions sans germe turbulent sont dénommées calmes, et les autres turbulentes. La deuxième partie du résultat de T. Li et J. Yorke est retrouvée et généralisée : une période impaire supérieure à 1 implique la turbulence et aussi une période 2^i multipliée par un nombre impair supérieur à 1.

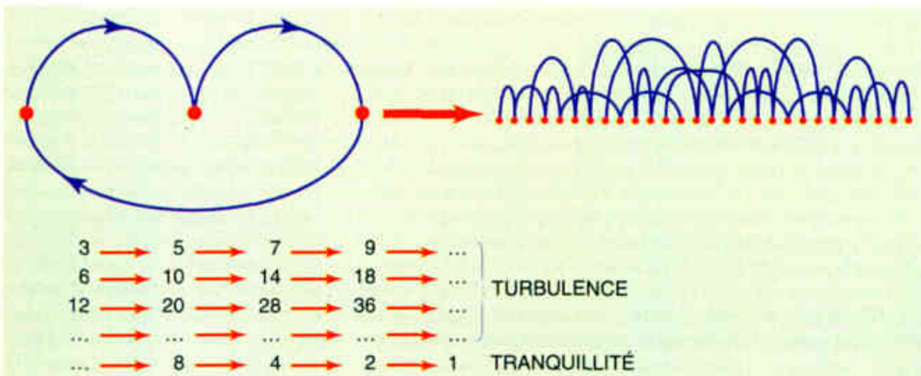
Le théorème de Sharkovski laisse une place pour un type très spécial de fonctions que nous n'avons pas encore mentionné : celui des fonctions qui ont des cycles de toutes les puissances de 2 possibles, et pas d'autres cycles. On les appelle les fonctions singulières. On montre qu'il en existe, et contrairement aux autres types de fonctions, les fonctions singulières peuvent être calmes ou turbulentes : elles sont à la limite entre l'ordre et le chaos, et ce sont les seules dont la connaissance des cycles ne dévoile pas la nature calme ou turbulente.

D'autres résultats ont éclairé les phénomènes du chaos : les mathématiciens ont montré que si la turbulence est stable, alors la tranquillité (le fait d'être calme) ne l'est pas. Si une fonction est de type 2^i (elle est calme), alors certaines fonctions qui ne diffèrent qu'infinitésimalement d'elle sont turbulentes (ressembler à une fonction calme ne garantit pas qu'on l'est). En revanche, si une fonction est turbulente (et non singulière), alors toutes les fonctions qui sont assez proches d'elle sont aussi turbulentes. Il y a stabilité des situations turbulentes et instabilité des situations calmes.

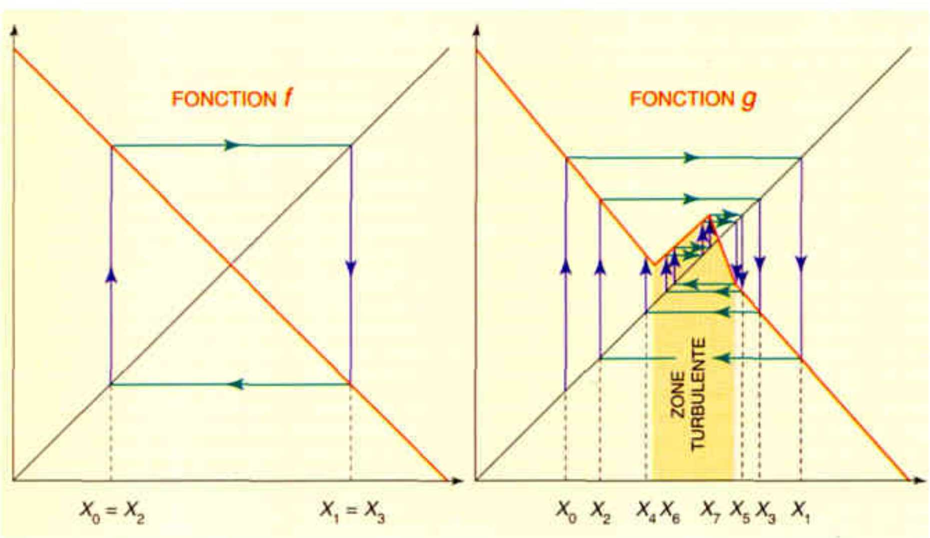
Ces résultats importants énumèrent des lois du chaos et bien que parfois difficiles à prouver, ils ne font intervenir que des mathématiques élémentaires. Pourtant ils ont échappé aux mathématiciens du XIX^e^ siècle, qui disposaient de



4. Il y a une interpénétration extrême des divers types de points. Entre deux points périodiques (conduisant à un cycle), il y a toujours une infinité de points turbulents (possédant un attracteur étrange infini), et entre deux points turbulents il y a toujours une infinité de points périodiques. Lorsqu'on se donne un point avec une certaine imprécision, il est donc impossible de savoir si l'itération aboutira sur un cycle ou donnera un attracteur infini : c'est la sensibilité aux conditions initiales ou encore le chaos déterministe.



5. Si une fonction continue possède un cycle d'ordre 7, il se peut qu'elle ne possède pas de cycle d'ordre 5, ni de cycle d'ordre 3 (car 5 et 3 sont placés devant 7 dans le tableau de l'ordre secret des cycles (découvert par Sharkovski), mais elle possédera nécessairement des cycles d'ordre 9, 11, 6, 10, etc. S'il existe un cycle d'odre 3, tous les autres cycles existent.



6. Une fonction est calme si tout germe conduit à un cycle limite. Une fonction est turbulente s'il existe au moins un germe qui conduit à un attracteur étrange infini. Dès qu'une fonction possède un cycle qui n'est pas une puissance de 2, elle est turbulente. Si une fonction ne possède que des cycles puissance de 2, et qu'elle n'a qu'un nombre fini de tels cycles, alors elle est calme. Les fonctions turbulentes sont stables : toute fonction très proche d'une fonction turbulente l'est aussi. En revanche, le fait d'être calme n'est pas stable : la fonction g, très proche de la fonction f(x) = 1 – x (qui est calme, car elle ne possède que des cycles d'ordre 1 et 2) est pourtant turbulente.

tous les outils pour les prouver. Ils n'ont pas su les voir, parce que, sans doute, ils n'avaient pas clairement pris conscience de l'existence du chaos déterministe et de la nécessité d'en explorer les arcanes.

Le doublement de période

L'importance des cycles dont l'ordre est une puissance de deux (que nous avons noté dans les résultats de A. Sharkovski et la caractérisation des fonctions calmes) était apparue avant qu'on ne redécouvre les résultats du mathématicien russe et ses prolongements. On retrouve en effet les puissances de deux dans de nombreux phénomènes.

Prenons pour exemple la fonction logistique qui décrit l'évolution de la population de certains poissons. Sa définition est $f(x) = kx(1 - x)$, où k est un paramètre qu'on fait varier entre 0 et 4. Pour des valeurs de k inférieures à $L_1 = 3$, elle est de type 1 (elle possède un cycle d'ordre 1 et tout germe est calme) ; puis, entre 3 et $L_2 = 3{,}5$, elle est de type 2 (elle possède des cycles d'ordre 1 et 2, mais aucun autre et tout germe est calme) ; plus loin, vers $L_3 = 3{,}56$, l'application devient de type 4, etc. Les sauts (doublements de période) se produisent en des valeurs L_1, L_2, L_3... de plus en plus rapprochées qui convergent vers une valeur L (le point d'arrivée sur le chaos), et l'on constate que le rapport $(L_i - L_{i-1})/(L_{i+1} - L_i)$ tend vers un nombre d égal à 4,6692016090... nommé constante de Feigenbaum. Ce nombre, étrangement, ne dépend pas de la courbe logistique : si vous prenez une autre famille paramétrée assez régulière et de même allure que la fonction logistique, vous constaterez le même dédoublement de période en des points L_1, L_2, L_3... ayant la même propriété limite. Cette nouvelle constante universelle d (comme π et e) est l'une des découvertes remarquables de la théorie des systèmes dynamiques et elle a beaucoup étonné. Feigenbaum est tombé dessus en «jouant» avec une calculette ; plus tard, P. Collet, J.-P. Eckmann et O. Lanford ont démontré son universalité, c'est-à-dire sa présence dans nombre de situations de la théorie des systèmes dynamiques.

Le complexe surgit-il brusquement du simple ?

Revenons sur le simple et le complexe. La fonction du chapeau de clown montre clairement que la complexité des itérés dépend de la complexité du germe. Quand le germe est simple (rationnel, par exemple), il engendre une suite périodique d'itérés, donc une suite simple. Le résultat des itérations ne sera turbulent que si le germe est irrationnel, c'est-à-dire déjà assez complexe.

La montée des chiffres *(illustrée sur la figure 3)* enlève tout mystère à ce chaos prétendument sorti de rien : dans le cas du chapeau de clown, quand l'itération est complexe, c'est parce que les chiffres du germe sont déjà complexes et qu'ils se déplacent vers la virgule, itération après itération. On constate que, contrairement à ce qu'une vue superficielle des choses peut laisser penser, on ne crée pas du complexe avec du simple.

La question reste posée : peut-on créer du complexe avec du simple ? Si l'on introduit du hasard, la réponse est clairement oui, mais la complexité des résultats (par exemple, d'une suite de lancers de dés) provient uniquement de ce hasard qu'on sollicite : la complexité ne sort pas de rien ! Restons-en aux cas purement déterministes.

Une réponse générale catégorique n'existe pas, mais, dans certains cadres précis, la réponse est : «Non, le simple ne peut pas produire du complexe.» Cela est, somme toute, conforme à nos intuitions ; cette réponse serait mieux admise si, par goût du paradoxe, on n'avait pas interprété sans retenue certains phénomènes physiques et mathématiques, comme ceux du chapeau de clown.

Pour démontrer que le simple ne peut engendrer que le simple, plaçons-nous dans le cadre des systèmes dynamiques discrets qui est proche de celui étudié auparavant. Fixons-nous un entier n (même très grand, tel que $100^{100^{100}}$) et une fonction f de l'ensemble des entiers $\{0, 1, 2, ..., n\}$ dans lui-même. Prenons alors un germe de départ inférieur à n et calculons, comme dans le cas continu, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, etc. jusqu'à x_m. Interrogeons-nous sur la complexité de la suite S finie d'entiers inférieurs à n égale à $(x_0, x_1, ..., x_m)$. Si m est grand, cette suite est longue. Est-elle complexe ?

Il existe un concept universel de complexité pour les objets finis comme x_0, f et S : la complexité de Kolmogorov. La complexité de Kolmogorov d'un objet fini est la taille du plus petit programme (par exemple, écrit en basic) engendrant cet objet. Cette mesure de complexité est la meilleure mesure universelle de complexité (même si, en pratique, elle est difficile à mettre en œuvre). La complexité de Kolmogorov d'une suite de 100 millions de zéros est très petite (ce qui est naturel, puisqu'on peut la décrire de manière brève, comme je viens de le faire) ; la complexité d'une suite de nombres tirés au hasard (à l'aide d'un dé, par exemple) sera très grande dans la quasi totalité des cas puisque, pour la décrire, on ne peut mieux faire que d'en énumérer un à un les éléments. La complexité de Kolmogorov, dans le cas des systèmes dynamiques discrets, donne une réponse sans appel à notre interrogation : la complexité de la suite S est inférieure à la somme des complexités du nombre m, de la fonction f et du germe x_0.

Donc, si vous prenez une valeur de m assez simple ($10^{10^{10}}$, par exemple, est simple, même si c'est un grand nombre), et une fonction f assez simple (c'est le cas si f est définissable par un programme court) et que vous choisissez un germe x_0 assez simple (par exemple, le nombre 9^{9^9}), vous obtenez une suite d'itérés qui, au sens de Kolmogorov, est simple. Dans ce système de mesure précis et universel que constitue la théorie de la complexité de Kolmogorov, nous avons prouvé qu'un processus déterministe dont les données initiales sont simples ne peut engendrer que des suites d'itérés simples.

Ainsi les mathématiques sur le chaos déterministe ne doivent-elles pas faire oublier le bon sens. Même si nous sommes souvent guidés par le goût des paradoxes et des nouveautés fracassantes qui bouleversent les conceptions anciennes, il est sage de ne pas se précipiter. Quand le simple engendre du complexe, c'est que le complexe est déjà caché au départ (par exemple, dans les décimales du germe, ainsi que nous l'avons vu pour le chapeau de clown) ou alors que le hasard intervient et produit le phénomène complexe. Je suis d'ailleurs prêt à parier que c'est ce qui se passe le plus souvent en physique où, on le sait, manipuler des nombres à 200 décimales n'a guère de sens.

David Ruelle, reconnu pour ses contributions majeures au développement de la théorie mathématique du chaos, insiste sur les précautions qu'il faut prendre avant d'appliquer les beaux résultats abstraits à des situations concrètes. Il a exprimé clairement sa méfiance pour les applications parfois proposées sans justification (en économie, par exemple) : «D'une part, je crois que les idées autour du chaos sont parmi les plus originales de la science moderne et qu'elles auront de nombreuses applications utiles ; d'autre part, je pense que certaines des notions qui ont eu le plus de succès dans les médias sont, soit douteuses, soit carrément fausses. [...] Prétendre, par exemple, qu'on peut rendre compte de l'évolution des cours de bourse en utilisant les idées des systèmes dynamiques apparaît pour le moins irréaliste.»