Université de Picardie Jules Verne
Master 3EA Parcours IATE M2

# OBSERVATION & COMMANDE DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

Prof. A. El Hajjaji

# INTRODUCTION

**But de ce cours**

- Analyse de la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires décrits par des modèles flous de type Takagi-Sugeno (TS),
- Synthèse des lois de commande pour résoudre des problèmes de stabilisation ou de poursuite,
- Synthèse des observateurs des MF de type TS,
- Commande basée sur observateur pour la même classe des systèmes non linéaires.

**Modèle flou de type Takagi Sugeno =Multimodèles**

# INTRODUCTION

L'étude de la stabilité constitue une phase importante dans la synthèse d'une loi de commande, aussi bien que dans l'analyse des comportements dynamiques d'un système en bouclé fermée.

La notion de stabilité a toujours eu une attention toute particulière de la part des chercheurs.

# INTRODUCTION

De nombreuses approches ont été développées pour étudier la stabilité des différentes catégories de systèmes :

- ✓ systèmes linéaires incertains,
- ✓ systèmes non linéaires,
- ✓ systèmes bilinéaires,
- ✓ systèmes à paramètres variants,
- ✓ systèmes à retards,
- ✓ systèmes flous

# POINT D'ÉQUILIBRE

Point pour lequel $\dot{x} = 0$

Soit un système donnée sous la forme $\dot{x} = f(x)$,

où $x \in R^n$ représente l'état.

Un point d'équilibre est une valeur de l'état telle que lorsque l'argument $x$ de $f(x)$ est remplacé par $x_e$, alors $f(x)$ s'annule :

$$\dot{x} = 0 = f(x_e).$$

# DÉFINITION INTUITIVE DE LA STABILITÉ

Si le système est initialement "légèrement" perturbé de son point d'équilibre le système reste "proche" de ce point d'équilibre.

**Analyse de la stabilité**

Un point d'équilibre est localement asymptotiquement stable(AS) à $t_0$ SSI $\exists$ un domaine $D_n \subset R^n$ tel que pour tout $x(t_0) \in D_n$, on a

$$\|x(t) - x_e\| \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to \infty$$

(l'état x(t) converge vers $x_e$).

Si $D_n = R^n$ tel que x(t) converge vers $x_e$ pour toutes les conditions initiales, alors $x_e$ est globalement asymptotiquement stable à $t_0$ .

# ANALYSE DE LA STABILITÉ PAR L'APPROCHE DE LYAPUNOV

**Désavantages de la définition de la stabilité**

Il est nécessaire de pouvoir calculer de manière explicite chaque solution correspondant à chacune des conditions initiales.

*La stabilité asymptotique est une propriété forte difficilement satisfaite en pratique. Il existe des définitions moins contraignantes et très utiles dans la pratique.*

⇩

**Approche de Lyapunov**

# STABILITÉ AU SENS DE LYAPUNOV

La méthode de Lyapunov permet d'étudier la stabilité des systèmes complexes (représentés par des systèmes d'équations différentielles). L'étude de la stabilité au sens de Lyapunov utilise la fonction candidate de Lyapunov.

***Théorème:*** Une fonction candidate de Lyapunov est une fonction V(x) de $R^n \rightarrow R$ qui possède les propriétés suivantes :

a) V (x) > 0 $\forall x \neq 0$ et V (0) = 0

b) $\exists \alpha(.), \beta(.)$ fonctions scalaires continues de $R^n \rightarrow R$ / $\alpha(\|x\|) \leq V(x) \leq \beta(\|x\|)$

c) quand $\|x\| \rightarrow \infty$ alors $V(x) \rightarrow \infty$ fonction indéfiniment croissante.

Si $\dot{V}(x) \leq 0$, $\forall x \in D_n$ (domaine de stabilité), le point d'équilibre est stable au sens de Lyapunov.

Si $\dot{V}(x) < 0$ $\forall x \in D_n$, le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

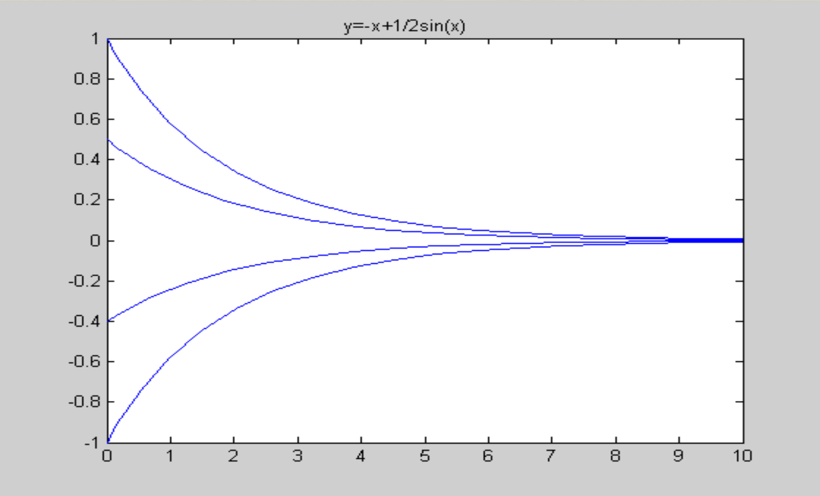
# EXEMPLES

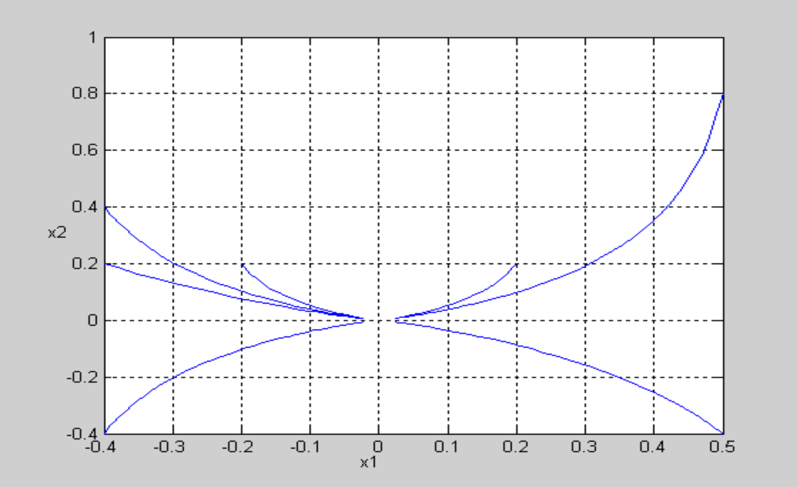
$$\dot{x} = -x + \frac{1}{2}\sin(x)$$

Fonction de Lyapunov candidate $V(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$\dot{V}(x) = x\dot{x}$$
$$= \underbrace{-x^2 + \underbrace{\frac{1}{2}x\sin(x)}_{<x^2}}_{<0}$$

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2^2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 x_1^2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$
$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$$
$$= -(x_1^2 + x_2^2)$$



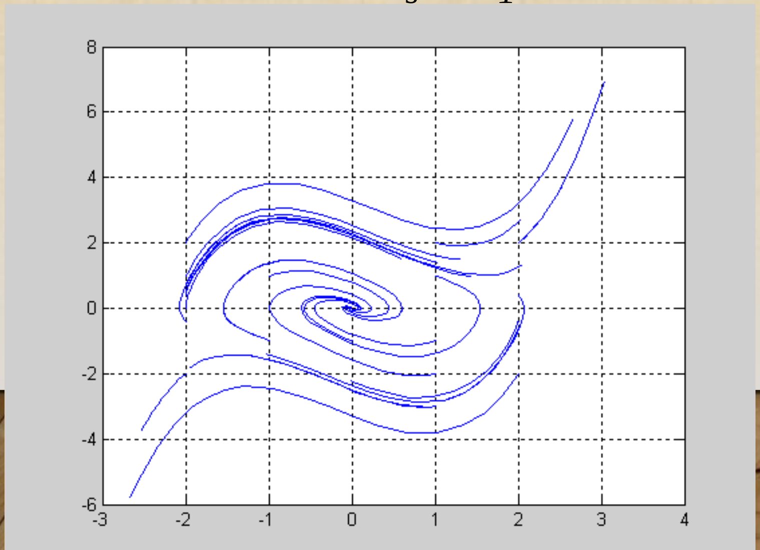
# EXEMPLES

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1+x_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 \\ &= x_1 x_2 - x_1 x_2 + x_2^2(x_1^2 - 1) \end{aligned}$$

Domaine de stabilité $D_s$ : $|x_1| < 1$.



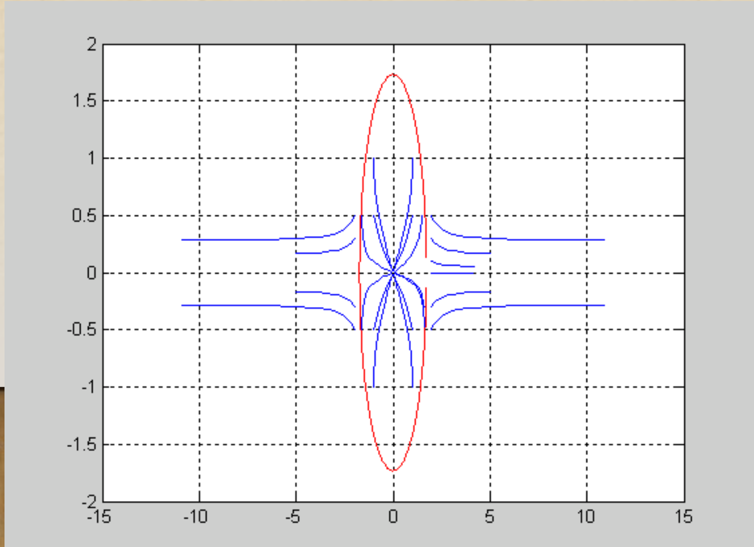
$$\dot{x}_1 = x_1 x_2^2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 3)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 x_1^2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 3)$$

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 \\ &= -(x_1^2 + x_2^2)(3 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned}$$

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 < 3$$



# SYSTÈME LINÉAIRE LIBRE

1) Cas continu :

$$\dot{x} = Ax$$

Le système est stable si et seulement si $\exists P=P^T > 0;\ A^TP + PA < 0$

*Preuve :* $V(x)=x^TPx$

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x}$$

2) Cas discret $x(k+1)=Ax(k)$

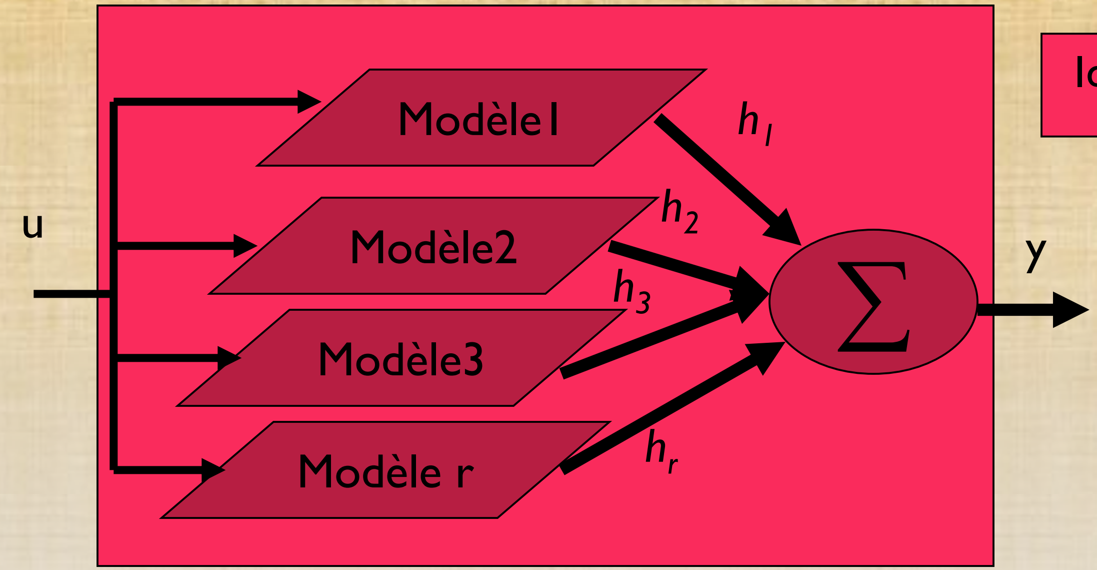
Le système est stable si et seulement si $\exists P=P^T > 0;\quad A^TPA - P < 0$

*Preuve :*

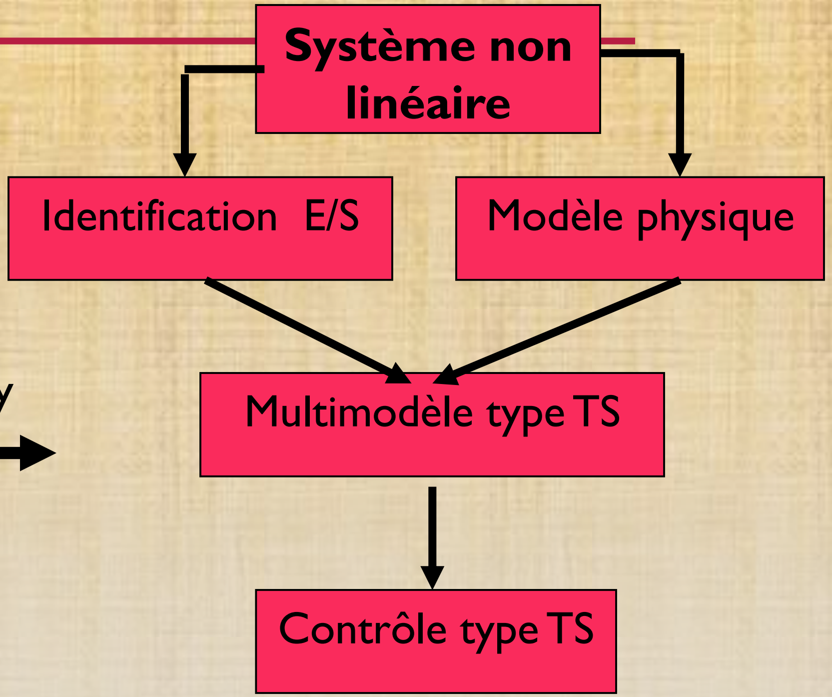
$V(x(k))=x^T(k)Px(k)$ *on a* $V(x(k+1))=x^T(k+1)Px(k+1)$

$$\Delta V(x(k))=V(x(k+1))-V(x(k))$$

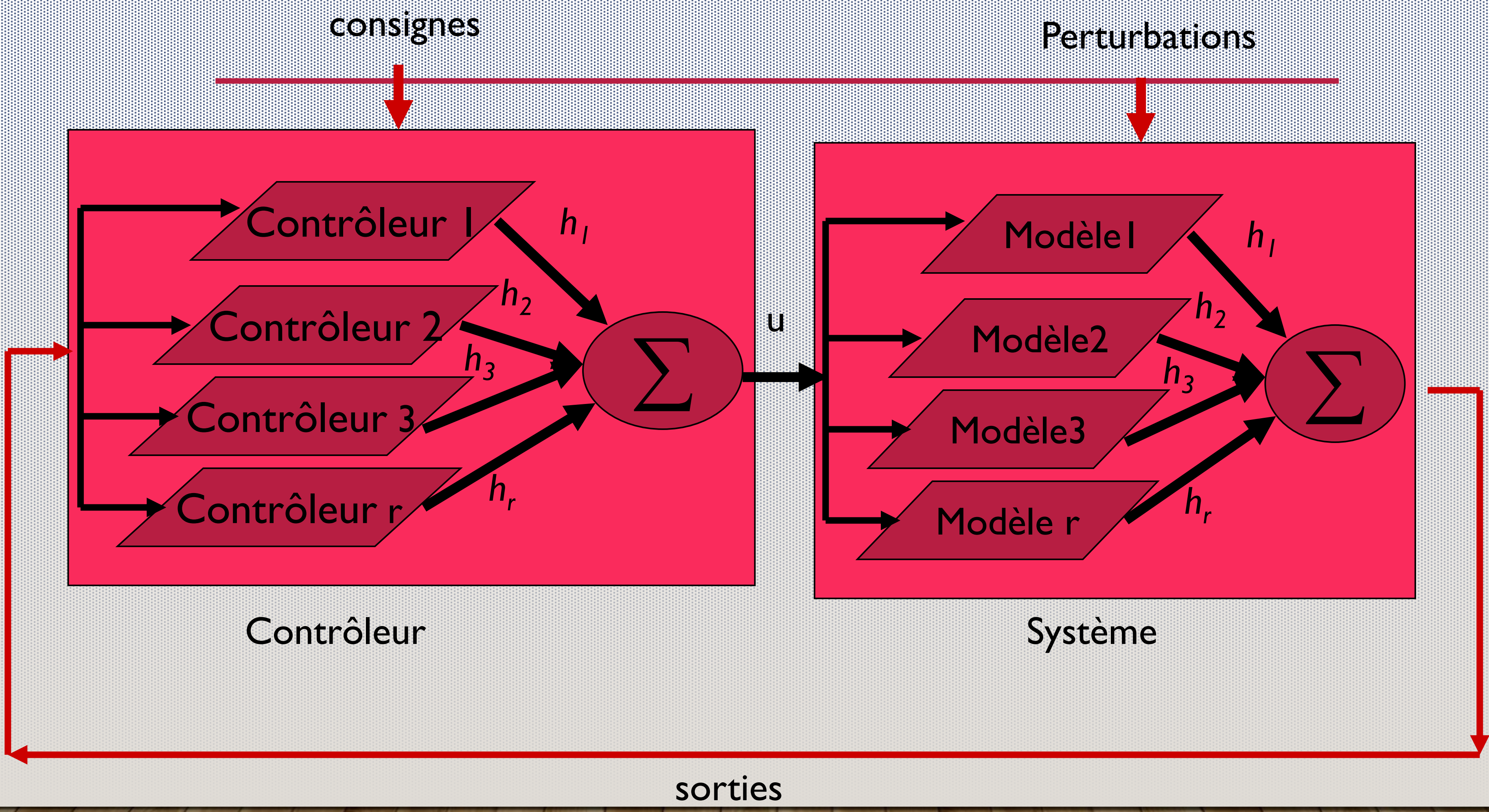
# MULTIMODÈLE




**Système non linéaire**



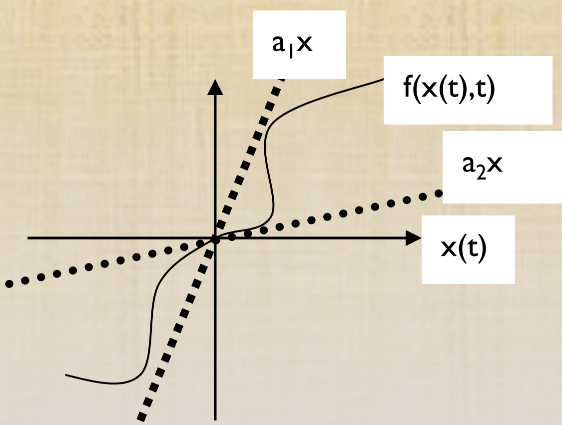
# MULTIMODÈLE

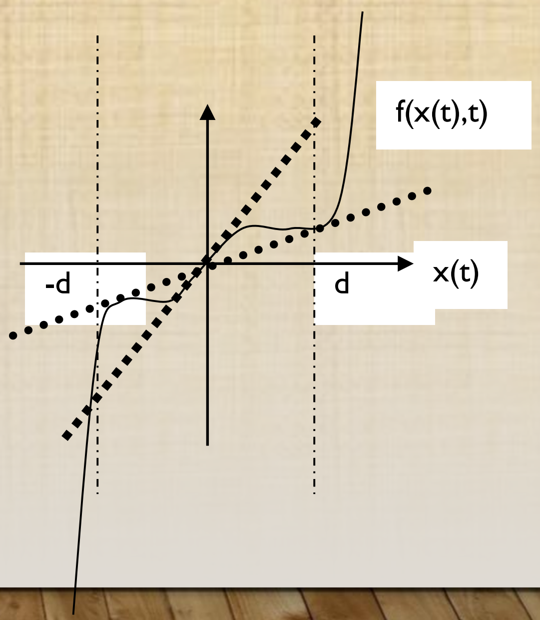


# REPRÉSENTATION DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES PAR DES MULTIMODÈLES

$\dot{x}(t) = f(x,t)$ avec f(0)=0

$\dot{x}(t) = f(x,t) \in [a_1 \quad a_2] x(t)$



# EXEMPLES

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_1 x_2^3 \\ -x_2 + (3 + x_2) x_1^3 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & x_1 x_2^2 \\ (3 + x_2) x_1^2 & -1 \end{pmatrix} x$$

Soit $x = [x_1 \quad x_2]^T$ $\Rightarrow$ $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & z_1 \\ z_2 & -1 \end{pmatrix} x$

$z_2 = (3 + x_2) x_1^2$ $\qquad$ $z_1 = x_1 x_2^2$

# EXEMPLES

On suppose $x_1$ et $x_2 \in [-1,1]$.

$z_2 = (3 + x_2)x_1^2$

$z_1 = x_1 x_2^2$

$\max_{x_1,x_2} z_1 = 1$ $\min_{x_1,x_2} z_1 = -1$ $\max_{x_1,x_2} z_2 = 0$ $\max_{x_1,x_2} z_2 = 4$

$z_1 = x_1 x_2^2 = M_1(z_1).1 + M_2(z_1)(-1),$

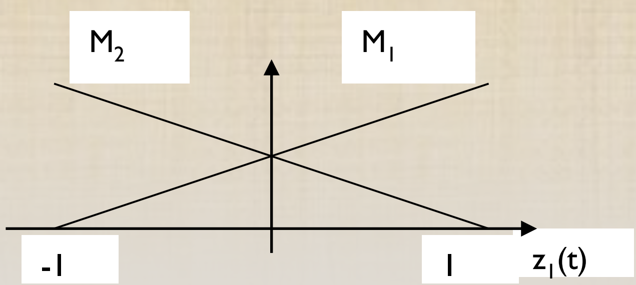
$M_1(z_1) + M_2(z_1) = 1$

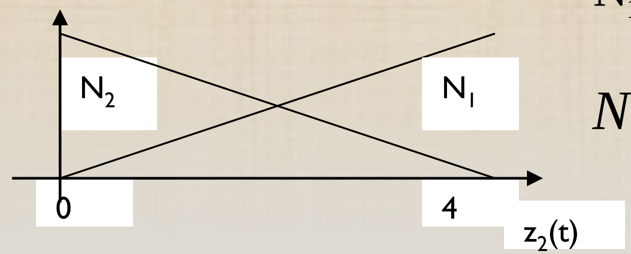
$z_2 = (3 + x_2)x_1^2 = N_1(z_2).4 + N_2(z_2)(0),$

$N_1(z_2) + N_2(z_2) = 1$

$M_1(z_1) = \frac{z_1 + 1}{2}$

$M_2(z_1) = \frac{-z_1 + 1}{2}$




$N_1(z_2) = \frac{z_2}{4}$

$N_2(z_2) = 1 - \frac{z_2}{4}$

# EXEMPLES

Le système non linéaire précédent peut être représenté par le modèle flou de type TS :

Si $z_1$ est $M_1$ et $z_2$ est $N_1$ Alors $\dot{x}=A_1x$

Si $z_1$ est $M_1$ et $z_2$ est $N_2$ Alors $\dot{x}=A_3x$ avec

Si $z_1$ est $M_2$ et $z_2$ est $N_1$ Alors $\dot{x}=A_2x$

Si $z_1$ est $M_2$ et $z_2$ est $N_2$ Alors $\dot{x}=A_4x$

$$A_1=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix} \quad A_2=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 4 & -1\end{bmatrix} \quad A_4=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

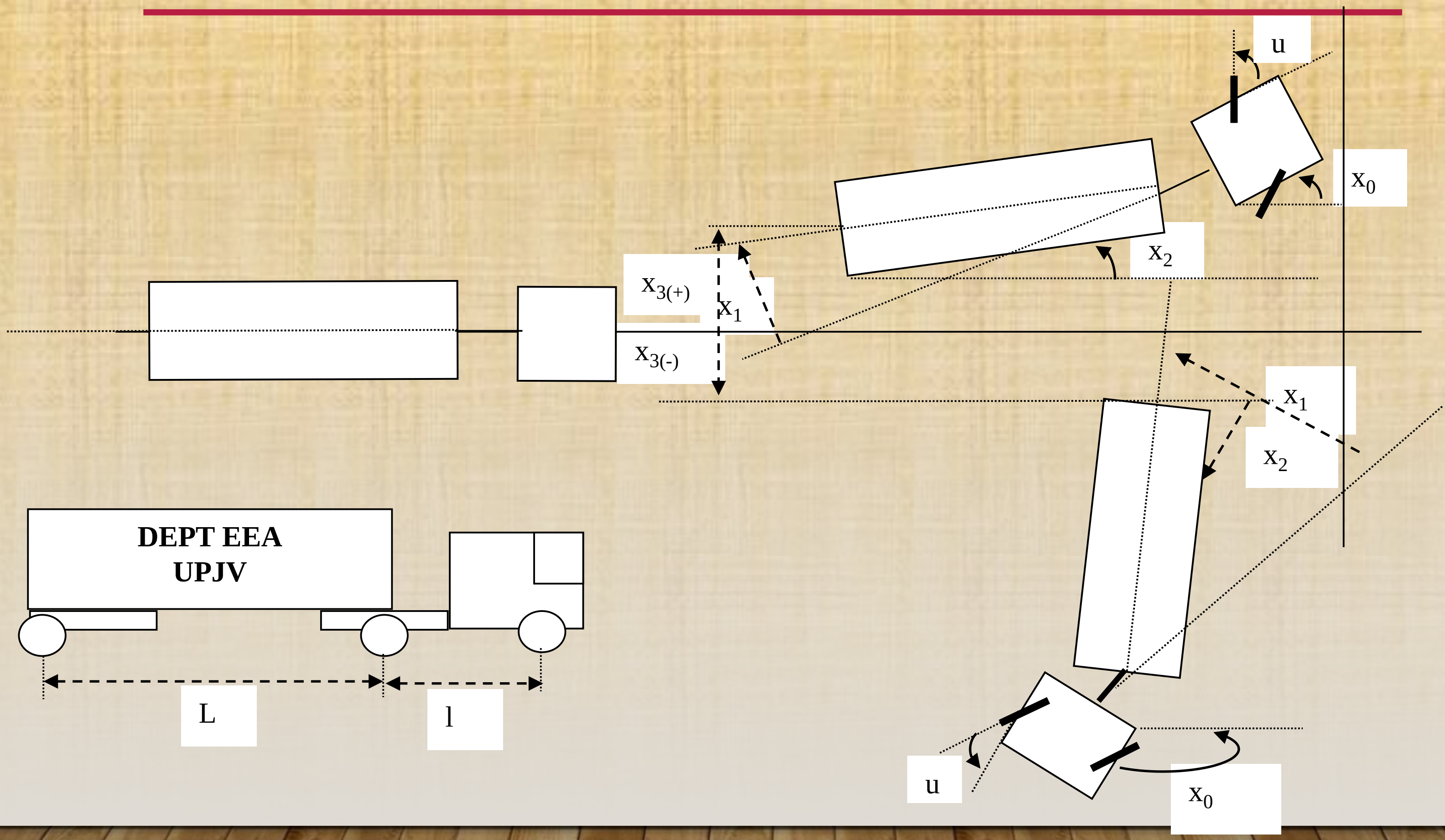
La dérivée de l'état globale est :

$$\dot{x}=\sum_{i=1}^{4} h_i(z)A_i x$$

$$h_1=M_1(z_1)N_1(z_2) \quad h_2=M_1(z_1)N_2(z_2) \quad h_3=M_2(z_1)N_1(z_2) \quad h_4=M_2(z_1)N_2(z_2)$$

Ce modèle représente le système non linéaire (1) dans le domaine $[x_1 \quad x_2]\in[-1 \quad 1]\times[-1 \quad 1]$

# EXEMPLE VÉHICULE



# MODÈLE NON LINÉAIRE

$$
\begin{aligned}
x_0(k+1) &= x_0(k) + \frac{vt}{l}\tan(u(k)) \\
x_1(k) &= x_0(k) - x_2(k) \\
x_2(k+1) &= x_2(k) + \frac{vt}{L}\sin(u(k)) \\
x_3(k+1) &= x_3(k) + vt\cos(u(k))\sin\left(\frac{x_2(k+1)+x_2(k)}{2}\right) \\
x_4(k+1) &= x_4(k) + vt\cos(u(k))\cos\left(\frac{x_2(k+1)+x_2(k)}{2}\right)
\end{aligned}
$$

où $x_0(k)$, $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_3(k)$ et $x_4(k)$ désignent respectivement l'angle de véhicule, l'écart d'angle entre la remorque et le véhicule, l'angle de la remorque, la position verticale de l'arrière de la remorque et la position horizontale de l'arrière de la remorque. u(k) désigne l'angle de braquage à l'instant kt.

l=2.8m est la longueur du véhicule, L=5.5m longueur de la remorque, t=2s la période d'échantillonnage,

# MODÈLE NON LINÉAIRE

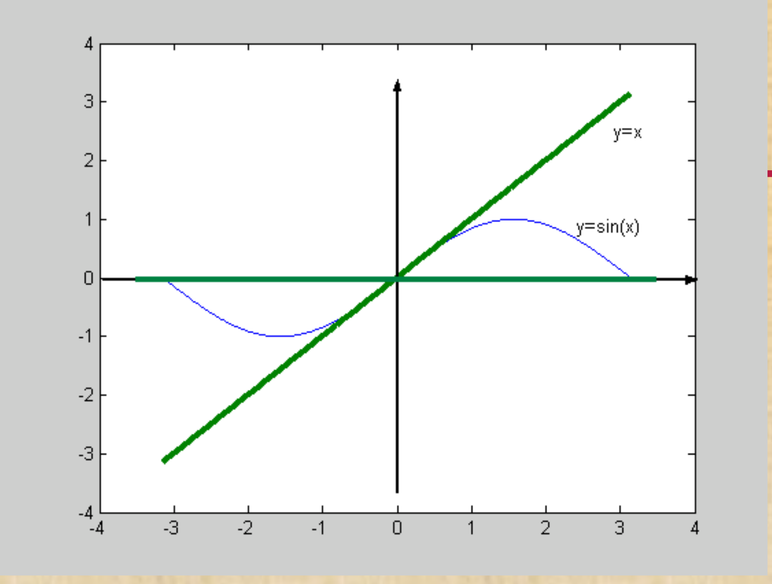
On suppose que $x_1(k)$ et u(k) ont toujours les mêmes valeurs, le modèle devient :

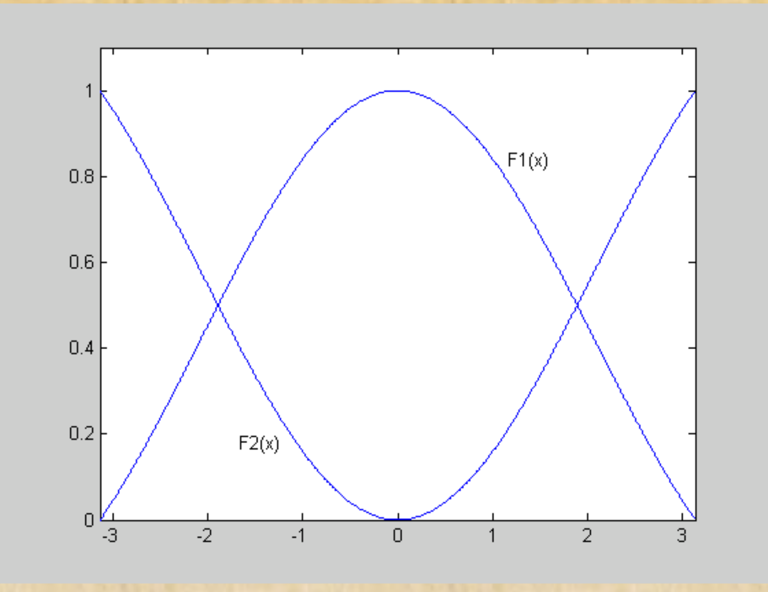
$$\begin{aligned}
x_0(k+1) &= x_0(k) + \frac{vt}{l}u(k) \\
x_1(k+1) &= x_0(k+1) - x_2(k+1) \\
x_2(k+1) &= x_2(k) + \frac{vt}{L}x_1(k) \\
x_3(k+1) &= x_3(k) + vt\sin\left(\frac{x_2(k+1)+x_2(k)}{2}\right) \\
x_4(k+1) &= x_4(k) + vt\cos\left(\frac{x_2(k+1)+x_2(k)}{2}\right)
\end{aligned}$$

Le but du contrôle est de ramener le véhicule sur la trajectoire désirée définie par ($x_3(k)=0$ ($x_2(k)=0$ *et* $x_1(k)=0$) en contrôlant le braquage $u(k)$.

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= \left(1 - vt/L\right)x_1(k) + vt/Lu(k) \\
x_2(k+1) &= x_2(k) + \frac{vt}{L}x_1(k) \\
x_3(k+1) &= x_3(k) + vt\sin\left(x_2(k) + \left(vt/2L\right)x_1(k)\right)
\end{aligned}$$

# MODÈLE FLOU ÉQUIVALENT




*sin(z)=$F_1$(z)z+$F_2$(z)*0 avec $F_1+F_2=1$* $\Rightarrow F_1(z)=\sin(z)/z \quad F_2(z)=1-\sin(z)/z.$

On pose $z(k)=x_2(k)+(vt/2L)x_1(k)$

*Si z(k) est proche de 0 alors* $x(k+1)=A_1\,x(k)+B_1u(k)$

*Si z(k) est proche de* $\pm\pi$ *alors* $x(k+1)=A_2\,x(k)+B_2u(k)$

$$A_1=\begin{bmatrix}1-\frac{vt}{L} & 0 & 0\\ \frac{vt}{L} & 1 & 0\\ \frac{v^2t^2}{2L} & vt & 1\end{bmatrix} \quad A_2=\begin{bmatrix}1-\frac{vt}{L} & 0 & 0\\ \frac{vt}{L} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$x(k)=\begin{bmatrix}x_1(k) & x_2(k) & x_3(k)\end{bmatrix}^T \qquad B_1=B_2=\begin{bmatrix}\frac{vt}{l} & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

# STABILITÉ DES MULTIMODÈLES (*CAS CONTINU* )

Si $z_1(t)$ est $M_{i1}$ $et$ $\cdots$ $et$ $z_p(t)$ $est$ $M_{ip}$ ALORS $\dot{x}(t) = A_i x(t)\ i = 1, 2, \cdots, r.$

$M_{ij}$ est l'ensemble flou et $r$ est le nombre des règles SI-ALORS.

$x(t) \in R^n$ est le vecteur d'état

$u(t) \in R^m$ est le vecteur d'entrée

Pour un vecteur d'état *x(t)* donné à l'instant t, la dérivée totale de l'état est obtenue en calculant la moyenne pondérée sur tous les modèles locaux décrivant le système :

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{r} \omega_i(z(t)) A_i x(t)}{\sum_{i=1}^{r} \omega_i(z(t))} = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) A_i x(t)$$

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{n} w_i(z(t))}$$

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^{p} M_{ij}(z_j(t))$$

# STABILITÉ DES MULTIMODÈLES
# (*CAS CONTINU* )

***Théorème :***

Le point d'équilibre du système décrit par le modèle (1) est asymptotiquement stable SSI

∃ $P=P^T>0$ $$A_i^T P + PA_i < 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, r.$$

*Preuve :* On considère la fonction de Lyapunov , $V(x(t)) = x^T P x$

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} h_i\big(z(t)\big) x^T(t)(A_i^T P + A_i P)x(t)$$

Si ∀ $h(z(t)) \neq 0$ alors $A_i^T P + PA_i < 0$ ⟹ $\dot{V}(x(t)) < 0$

(Système est asymptotiquement stable)

# Stabilité des multimodèles
# (*Cas discret* )

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^{r} \omega_i\big(z(k)\big)A_i x(t)}{\sum_{i=1}^{r} \omega_i\big(z(k)\big)} = \sum_{i=1}^{r} h_i\big(z(k)\big)A_i x(k)$$

***Théorème :*** Le point d'équilibre du système décrit par le modèle précédent est

asymptotiquement stable SSI $\exists$ $P=P^T>0$ $\quad A_i^T P A_i - P < 0 \quad\quad i = 1,2,\cdots,r.$

Preuve:

***Lemme*** **:** Si P >0 / $A^TPA-P<0$ et $B^TPB-P<0$ alors $A^TPB+B^TPA-2P<0$

$V(x(k)) = x^T(k)Px(k)$ et $\Delta V\big(x(k)\big) = V\big(x(k+1)\big) - V\big(x(k)\big) = x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k)$

$$\Delta V = \left(\sum_{i=1}^{r} h_i A_i x(k)\right)^T P \left(\sum_{i=1}^{r} h_i A_i x(k)\right) - x^T(k)Px(k) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i\, h_j x^T(k) {A_i}^T P A_j x(k) - x^T(k)Px(k)$$

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i\, h_j x^T(k)({A_i}^T P A_j - P)x(k) = \sum_{i=1}^{r} h_i h_i x^T(k)({A_i}^T P A_i - P)x(k) +$$

$$\sum_{i<j}^{r} h_i h_j x^T(k)({A_i}^T P A_j + {A_j}^T P A_i - 2P)x(k)$$

$\Rightarrow$ $\Delta V<0$

# STABILITÉ DES MULTIMODÈLES

Les théorèmes précédents donnent des conditions suffisantes de stabilité.

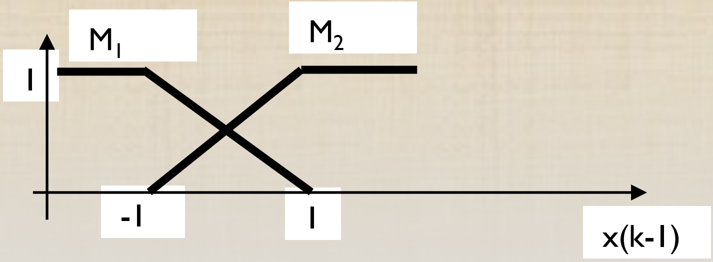
Question : Est ce que la stabilité de chaque modèle local suffit pour garantir la stabilité globale du Système Non Linéaire ?

Réponse : La réponse est non

***Exemple :*** Si x(k-1) est $M_1$ alors $x(k+1)=A_1x(k)$

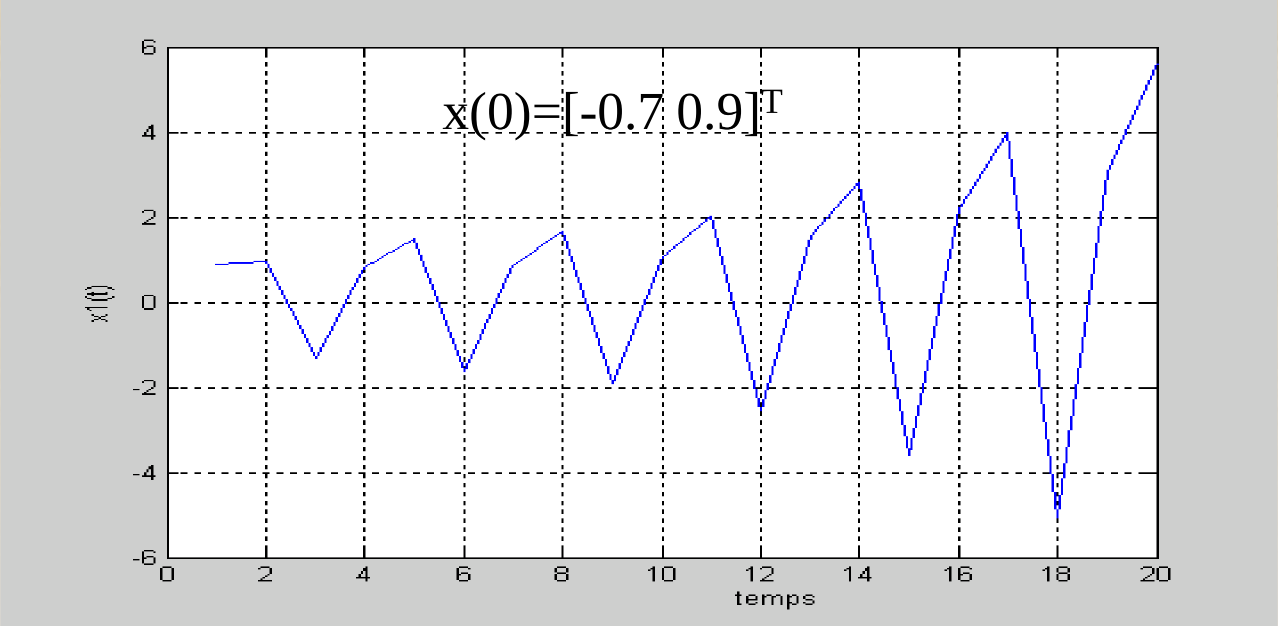
Si x(k-1) est $M_2$ alors $x(k+1)=A_2x(k)$

Avec $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



# STABILITÉ DES MULTIMODÈLES

$$x(k+1) = \frac{M_1(x(k-1))A_1x(k) + M_2(x(k-1))A_2x(k)}{M_1(x(k-1)) + M_2(x(k-1))}$$



# STABILITÉ DES MULTIMODÈLES

En général, pour que P existe, deux conditions nécessaires sont à vérifier :

- la première est liée à la stabilité de tous les sous systèmes.
- la deuxième condition nécessaire est donnée par le théorème suivant :

**Théorème**: On suppose que toutes les matrices $A_i$ du modèle flou sont asymptotiquement stable. Si la matrice P vérifiant les conditions de stabilité existe alors les matrices $\sum_{k=1}^{s} A_k$ avec k $\in$ {1,…,p} et s=2,3,…,p sont asymptotiquement stables.

**Corollaire :** Si le système décrit par le multimodèle est stable alors nécessairement les matrices $A_i+A_j$ $\forall$ i,j=1,2,3…,p sont asymptotiquement stables.

# STABILITÉ DES MULTIMODÈLES

Ce corollaire nous donne une information supplémentaire sur l'existence de la matrice P>0 Par conséquent, $\exists$ (i, j) / $A_i+A_j$ n'est pas asymptotiquement stable alors la matrice P>0 vérifiant les conditions de stabilité n'existe pas.

***Exemple (cas continu ) :*** On considère un modèle flou continu à 2 règles et deux variables d'état r = 2 avec $A_1=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ $A_2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 4 & -2\end{bmatrix}$

$A_1$ et $A_2$ sont asymptotiquement stables.

Cependant, il n'existe pas de matrice P /

$$A_1^TP+PA_1<0 \text{ et } A_2^TP+PA_2<0$$

car $A_1+A_2=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 4 & -4\end{bmatrix}$ est instable.