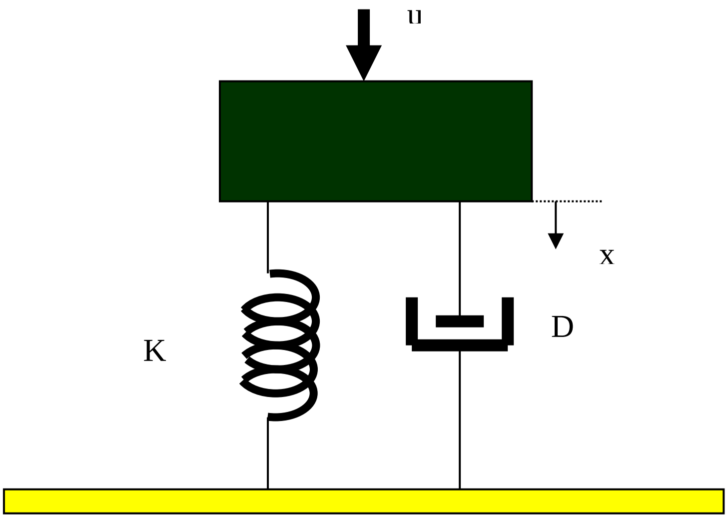
Université de Picardie Jules Verne
UFR des Sciences
Département EEA
Mention 3EA Parcours IATE

TD 1 : Observation et Commande Non Linéaire

<u>Exercice 1 :</u>

Soit le système masse-ressort-amortisseur suivant :



Avec M la masse en Kg, K est la raideur du ressort et D et coefficient de frottement de l'amortisseur, x est le déplacement vertical de la masse
On suppose que la force f(x) due au ressort de raideur K est donnée par $f(x) = c_3 x + c_4 x^3$,

celle de l'amortisseur est $g(x, \dot{x}) = D(c_1 x + c_2 \dot{x}^3)$ et celle produite par l'actionneur u est $\varphi(\dot{x})u$ avec $\varphi(x) = 1 + c_5 \dot{x}^3$

Les valeurs numériques c_1=0.01 c_2=0.1 c_3=0.01 c_4=0.67 c_5=0, M=1 D=1

1) En utilisant le principe de Newton, monter que le déplacement de la masse M est régi par l'équation différentielle suivant :
$$M\ddot{x} + g(x, \dot{x}) + f(x) = \varphi(\dot{x})u$$

2) *Ecrire le modèle sous la forme $\dot{X} = A(X)X + B(X)u$ avec $X = [x \quad \dot{x}]^T$*

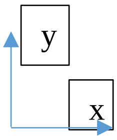
3) En supposant que le déplacement de la masse $x \in [-a \quad a]$ et sa vitesse $\dot{x} \in [-b \quad b]$ avec *a=1.5 b=1.5, Donner le mutimodèle équivalent du modèle non linéaire précédent*
4) *Exprimer le multimodèle sous la forme*
$\dot{X} = \sum_{i=1}^{r} h_i(X)(A_i X + B_i u)$ *pour* $X = [x \quad \dot{x}]^T$

(*Préciser les valeurs des matrices A_i et B_i ainsi que la valeur r*

5) *Pour x_0= [-0.7 0.2] , tracer l'évolution de l'état x(t) en fonction du temps t en utilisant les 2 modèles et comparer les résultats obtenus pour u=0 puis pour u=0.5*sin(0.5*pi*t).*
6) *Analyser la stabilité du système libre (u=0).*

Exercice 2

On cherche à contrôler l'atterrissage d'un paramoteur de la figure ci-dessous :



Le modèle cinématique du paramoteur en régime stationnaire est le suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= V\cos(\Phi(t)) \\ \dot{y}(t) &= V\sin(\Phi(t)) \\ \dot{\Phi}(t) &= ku(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

Où *x(t)* et *y(t)* désignent la position dans le plan (ox,oy) à l'instant *t* et $\phi(t)$ est l'angle d'inclinaison du paramoteur par rapport à l'horizontale. V est la vitesse du paramoteur supposée constante (V=5m/s) (k=0.6) est une constante et u(t) est l'angle de braquage à contrôler pour assurer son atterrissage ($\Phi \to 0 \quad y(t) \to 0$).

1) Pour $-178\deg \le \Phi(t) \le 178\deg$, montrer que $\varepsilon\Phi(t) \le \sin(\Phi(t) \le \Phi(t)$ (préciser la valeur de ε).
2) En considérant le vecteur d'état $z(t) = [y(t) \quad \Phi(t)]^T$, donner la représentation équivalente du système (1) sous la forme :

$$\dot{z} = \sum_{i=1}^{2} h_i(\Phi(t))(A_i z + B_i u) \qquad (2)$$

$$\text{avec } \sum_{i=1}^{2} h_i(\Phi) = 1 \quad h_i(\Phi) \ge 0$$

Préciser les expressions des fonctions d'appartenance $h_i(\Phi(t))$ et des matrices A_i et B_i

3) On cherche à stabiliser le système (2) par une loi de commande de la forme $u(t) = \sum_{i=1}^{2} h_i K_i z(t)$, donner l'expression de la dynamique de l'état *z(t)* en boucle fermée.
4) En utilisant la fonction de Lyapunov $\mathrm{V(z)} = z^{\mathrm{T}} P z$, exprimer les conditions de stabilisation sous forme des Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs).
5) A l'aide de la Toolbox LMI, déterminer les gains du contrôleur *u* et tracer l'évolution de la trajectoire du paramoteur en boucle fermée dans le plan *(ox,oy)*.

6) On suppose que seule l'angle d'inclinaison $\Phi(t)$ du paramoteur est mesurable, proposer une structure de commande basée sur observateur permettant de converger $(\Phi \to 0 \quad y(t) \to 0$ puis étudier ses conditions de convergence.
7) En utilisant la Toolbox LMI, déterminer les gains du contrôleur et de l'observateur permettant de garantir l'atterrissage du paramoteur.

Exercice 3

On considère le système décrit par le modèle non linéaire suivant:

$$\dot{x}(t) = A(x)x + Bu(t) \text{ u(t)} \qquad (1)$$

Avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -2f(x) \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ et f(x) une fonction non linéaire / $0 \leq f(x) \leq 2$

8) En utilisant la technique du secteur de non linéarité, donner la représentation équivalente du système (1) sous la forme

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{2} h_i(x)(A_i\, x + B_i u) \qquad (2)$$

$$\text{avec } \sum_{i=1}^{2} h_i(x) = 1 \; h_i(x) \geq 0$$

Préciser les expressions des fonctions d'appartenance $h_i(x)$ .et des matrices A_i *et* B_i

9) On cherche à stabiliser le système par une loi de commande de la forme

$$u = -\sum_{i=1}^{2} h_i(z) K_i x$$

   a. Donner l'expression du système en boucle fermée sous la forme

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{2} h_i(x)(A_i - BK_i)\, x$$

   b. Déterminer les gains K_i permettant de placer les pôles en boucle fermée de chaque sous-système en -1 et -2.
   c. En déduire l'expression du système en boucle fermée.
   d. Analyser la stabilité globale du système en boucle fermée.