Homework 1

5130309059 李佳骏

taringlee@sjtu.edu.cn

2015.9.21

Exercise 1.8

这题我最初的想法是:

在 A 中找一个她的 clique 中度最小的点 x，在 B 中找一个他的 IS(independent set) 中度最大的点 y。然后把不和 x 有边的点、和 y 没有边的点都从图里删掉。这样只需要保证每次删掉至少一半点就可以解决这个问题。

当然这并不能被保证。没有想到 $\frac{1}{2}$ 的那个构造，所以看了答案，以下是根据自己的理解写下的标准答案:

我们通过构造一个合理的协议 (Protocol) 来解决这个问题。在这个协议中 Alice 和 Bob 将共同维护一个集合 V'，表示答案 $C \cap I$ 所在的可能集合。初始化为 $V' = V$。对其进行若干次折半操作。每次折半操作将至少减少 V' 一半的元素个数。这样至多进行 $\frac{n}{2}$ 次折半操作即可得到解 (其中 $n = |V|$)。

若每一次折半操作的通讯传输是 $\mathrm{O}(\log_2 n)$bits。这整体的通讯复杂度 $D(CIS_G) = \mathrm{O}(\log_2^2 n)$。

定义 $n(x;Y)$ 表示点集 Y 中所有和 x 相邻的点的集合。显然的，它是 Y 的子集。以下是每一次折半操作的协议设计:

- Alice 寻找一个点 $x \in C \cap V'$，且 $n(x;V') \leq \frac{|V'|}{2}$。如若找不到这样的点，向 Bob 传输“0”(1 bit)；否则向 Bob 传输“1”和这个点的标号 x$(1 + \log n$bits$)$。
- 若 Bob 收到的信息为“1”和 x，Bob 将优先判断 $x \in I$ 是否成立。若成立则输出答案 x。否则执行减半操作 $V' = n(x;V')$，并告知 Alice(例如传输“0”)，该次操作结束。若 Bob 收到的信息为“0”。则 Bob 寻找一个点 $y \in I \cap V'$，且 $n(x;V') \geq \frac{|V'|}{2}$。如若找不到这个点，将输出"0" 表示最终结果 ($C \cap I$ 为空)；否则传输“1”和这个点的标号 y$(1+\log n$bits$)$ 给 Alice。
- 当 Alice 收到“1”和 y 时，Alice 将优先判断 $y \in C$ 是否成立。若成立则立即输出答案 y。否则执行减半操作 $V' = V' - n(y;V')$，并告知 Bob(例如传输“0”)，该次操作结束。

通过上述操作，不难发现。如果答案 v' 存在，无论怎么进行操作，始终满足 $v' \in V'$。且 x 与 y 中有一个肯定可以选择为 v'。而由于选点的不等式限制的缘故，每次操作将一定至少是折半的操作。所以该操作满足上述要求，$D(CIS_G) = \mathrm{O}(\log_2^2 n)$ 得证。

Exercise 1.31

Let $f : X \times Y \to (0, 1)$ be a Boolean function.

Subproblem 1

Prove that if f is such that all the rows of M_f are distinct, then $D(f) \geq \log\log|X|$.

在当前条件下，证明 $rank(f) \geq \log|X|$。其中 $rank(f)$ 指的是矩阵 M_f 的秩 (线性秩)。

若 $|X|$ 行都不相同，则至少需要 $\log|X|$ 列以表示 $2^{\log|X|} = |X|$ 组解，所以列秩至少为 $\log|X|$。

由矩阵秩等于列秩可得，$rank(f) \geq \log|X|$。

根据定理

$$D(f) \geq \log rank(f)$$

可推导得

$$D(f) \geq \log\log|X|$$

Subproblem 2

Prove that $D(f) \leq rank(f) + 1$.

通过构造协议进行证明。

Alice 和 Bob 使用相同的算法计算得到矩阵 M_f 的一组相同的基向量。Alice 传输 $rank(f)$ 个 bits 以表示这个基向量的一组构造。而 Bob 只需要通过这个构造计算得出这个解，就能得到 Alice 的信息。且以此推出答案并输出 (需要一个 bit)。

因此 $D(f) \leq rank(f) + 1$ 成立。