



École Centrale Casablanca

Projet Coding Week

Modélisation du transfert de chaleur dans le corps humain en présence d'un kyste

Présenté par:

MOUKHTARI Fatima-Ezzahra

ARROUBAT Hakima

AIT HASSOU Adnane

BELKHARACHI Houssam

CHELLALI Tariq

EL LAMTI Yassine

EL MAHNI Nihal

MIRINIOUI Othmane

HANINI Mohamed

VAUCHAUSSADE Gaspard

ZIDANI Yasser

Encadré par: Stephane Lejeunes

Yousra El Archi

F.k.Feutang

REMERCIEMENTS

La réalisation de ce présent rapport a été possible grâce au travail approuvé par notre Professeur Mr.Stephane Lejeunes. Pour cela nous voudrions, dans un premier temps, le remercier chaleureusement pour ses efforts depuis le début et durant les échanges en coding week. Surtout pour les articles et les sources qu'il a mis à notre disposition et qui nous ont permet d'alimenter notre réflexion.

Nous tenons à remercier ainsi les Professeurs Mr.F.K.Feutang et Mme.Yousra EL Archi pour la qualité de leurs enseignements du module "Méthode numérique pour l'ingénieur".

Sommaire

.1	Introduction	4
.1.1	Présentation du projet	4
.1.2	Contexte	4
.2	Présentation de l'équation de Pennes	5
.3	Résolution numérique	5
.3.1	Schéma explicite à l'instant $t=0$	5
.3.2	Schéma implicite et explicite à l'instant $t>0$	6
.3.3	Résultats et interpretation	8
.4	Résolution analytique	9
.4.1	Résolution à l'instant $t=0$	9
.4.2	Résolution à l'instant $t>0$	9
.4.3	Interpretation	10
.5	Interpretation d'erreur	11
.5.1	Erreur de troncature à $t=0$	11
.5.2	Erreur de troncature à $t> 0$	12
.6	Conclusion	12

.1 Introduction

.1.1 Présentation du projet

La connaissance des propriétés du transfert de chaleur dans le corps humain joue un rôle primordiale en ce qui concerne la détection et le traitement des diverses maladies. En effet, l'utilisation de l'effet thermique dans les thérapies médicales a prouvé sa puissance dans le traitement du cancer, y compris le cancer du sein, qui est le carcinome le plus fréquemment diagnostiqué chez les femme. Grâce a une modélisation mathématique précise permettant de modliser le kyste mammaire, cavité qui contient un liquide ou une substance semi solide ayant des caractéristiques thermiques spécifiques , nous disposons d'une méthode non invasives permettant de diagnostiquer le cancer a un stage anticipé, et ainsi d'augmenter les chances de survie.

.1.2 Contexte

Ce rapport est le fruit d'un travail d'équipe bien organisé et d'une grande implication, ainsi qu'une profonde motivation de découvrir l'intérêt du transfert de la chaleur sur la détection du kyste dans le sein. Notre périmètre d'action était basé sur des connaissances mathématique à savoir la méthode de différences finie afin de résoudre l'équation aux dérivés partiels de Pennes en une dimension. Toutes en manipulant les méthodes numériques vu en cours pour réaliser le schéma implicite et explicite. Sans oubliant l'approche physique et biologique qui était basée sur des recherches scientifiques dans le but d'analyser et comprendre le contexte du problème . Finalement, nous sommes optés pour développer un code python et comparer les résultats obtenus avec ceux de la méthode analytique.

.2 Présentation de l'équation de Pennes

Dans notre étude on suppose que le sang et les tissus sont en équilibre thermique. Et on procède par la résolution de l'équation de Pennes (1) dans le cas unidimensionnel en utilisant la méthode des différences finie (MDF) , elle est donné par :

$$\rho_t c_t \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla k_t \nabla T + \rho_b c_b w_b (T_a - T) + Q_m \quad (1)$$

Avec, ρ_t est la densité tissulaire, T est la temperature des tissus , T_a la température artérielle, ρ_b la densité sanguine en kg et c_b est la chaleur spécifique du sang.

La distribution de temperature dans le cas initial est obtenu en résolvant l'équation (1) dans des conditions de régime permanent.Elle est donnée par:

$$\nabla k_t \nabla T + \rho_b c_b w_b (T_a - T) + Q_m + Q_r = 0 \quad (2)$$

Dans tout ce qui suit, nous utilisons les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} T = T_c & \text{à } x = 1 \\ -k \frac{dT}{dx} = h_o (T_f - T) & \text{à } x=0 \\ Q_r = 0 & \text{à } t = 0 \text{ et } x = 0 \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} = f_1(t) & \text{à } t > 0 \text{ et } x=0 \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} = h(f_2(t) - T) & \text{à } t > 0 \text{ et } x=0 \end{array} \right.$$

.3 Résolution numérique

.3.1 Schéma explicite à l'instant t=0

En faisant un développement de Taylor à l'ordre 2 de $\frac{d^2 T}{dx^2}$ et nous le remplaçons dans l'équation de Pennes (2) , ensuite nous discrétisons l'espace.

Nous obtenons l'équation décritisé suivante :

$$T_{i-1} - T_i \left(2 + \frac{\alpha \Delta x^2}{K}\right) + T_{i+1} = -\frac{\Delta x^2}{k} (Q_m + \alpha T_a) \quad (*)$$

Afin de trouver une relation entre S_1, T_1 et S_2 nous allons décritisé les conditions aux limites à $x=0$, où T_o est un point fictif, c'est la raison pour laquelle nous devons l'éliminer. on trouve finalement:

$$-k \frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_0}{2\Delta x} = \frac{h}{k} (T_f - T_1)$$

Maintenant, nous allons remplacer T_0 dans l'équation (*) pour $i=1$. Finalement, on trouve l'équation suivante :

$$\underbrace{T_1 \left(-2\frac{\Delta x h}{k}\right) - 2 - \frac{\Delta x^2}{k} \alpha}_{A} + T_2 = \underbrace{-2\frac{\Delta x h}{k} T_f - \frac{\Delta x^2}{k} \alpha T_a - Q_m \frac{\Delta x^2}{K}}_B$$

Enfin, nous obtenons l'écriture matricielle suivante:

$$M = \begin{pmatrix} A & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (2 + \alpha \frac{\Delta x^2}{k}) & b & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ T_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ -\frac{\Delta x^2}{K} (Q_m + \alpha T) \\ \vdots \\ T_c \end{pmatrix}$$

.3.2 Schéma implicite et explicite à l'instant $t > 0$

Avec les mêmes étapes de discrétisation appliqué à l'instant $t=0$ en utilisant les différentes conditions aux limites (CL), nous avons abouti aux schémas ainsi qu'aux matrices après la simplification de ces derniers, que nous avons essayer de les résumer dans le tableau ci-dessous.

	MDF explicite	MDF implicite
Schéma obtenu	$AT_i^n + BT_{i+1}^n + BT_{i-1}^n = KT_i^{n+1} + Q_m + Q_{r_i} + \alpha T_a$ <p>Avec :</p> $A = \frac{\rho c}{\Delta t} + \frac{2k}{(\Delta x)^2} + \alpha$ $B = \frac{k}{(\Delta x)^2}$ $K = \frac{\rho c}{\Delta t}$ $Q_{r_i} = \eta P(e^{-\eta i \Delta x})$ $\alpha = \rho c \omega$	$T_i^n = aT_i^{n+1} + b(T_{i-1}^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) + d_i$ <p>Avec :</p> $a = 1 + \frac{2k}{\rho c} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} - \omega \Delta t$ $b = -\frac{k \Delta t}{\rho c (\Delta x)^2}$ $d_i = -(\omega T_a + Q_m) \Delta t - \eta P(e^{-\eta i \Delta x})$
1^{er} cas : CL discrétisés en utilisant l'eq (5)	$\begin{cases} T_N^n = T_N^{n+1} = T_c \\ -k \frac{T_2^n - T_0^n}{2\Delta x} = f_1 \end{cases}$	$\begin{cases} T_N^n = T_N^{n+1} = T_c \\ -k \frac{T_2^n - T_1^n}{\Delta x} = f_1 \end{cases}$
2^{eme} cas : CL discrétisés en utilisant l'eq (6)	$\begin{cases} T_N^n = T_N^{n+1} = T_c \\ T_0^n = \frac{2\Delta x h_f}{k} (f_2 - T_1^n) + T_2^n \end{cases}$	$\begin{cases} T_N^n = T_N^{n+1} = T_c \\ \left(1 + \frac{h_f}{k} \Delta x\right) T_1^n - T_2^n = \Delta x f_2 \frac{h_f}{k} \end{cases}$
Formule matricielle dans le 1^{er} cas	$T^{n+1} = MT^n + V$ $V = (V_1 \ V_2 \ \dots \ V_N)^T$ $V = \begin{cases} d_2 + \frac{\Delta x f_1}{k} & \text{si } i = 1 \\ d_i & \text{si } i = 2 \\ 0 & \text{si } i = N \end{cases}$ $M = \begin{pmatrix} b & a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b & a & b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & b & a & b \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$T^n = MT^{n+1} + Q$ $Q_i = \begin{cases} d_2 + \frac{\Delta x f_1}{k} & \text{si } i = 1 \\ d_i & \text{si } N > i \geq 2 \\ 0 & \text{si } i = N \end{cases} \quad Q = (Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_N)^T$ $M = \begin{pmatrix} b & a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b & a & b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & b & a & b \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Formule matricielle dans le 2^{eme} cas	$T^{n+1} = MT^n + U$ $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b & a & b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & b & a & b \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix}$ $U = \begin{cases} d_1 + bT_0^n & \text{si } i = 1 \\ d_i & \text{si } N > i \geq 2 \\ d_N + bT_c & \text{si } i = N \end{cases}$ $U = (U_1 \ U_2 \ \dots \ U_N)^T \quad C = -\frac{1}{k} (A - B \frac{2\Delta x h_f}{k})$ $D = \frac{2B\Delta t}{\rho c}$	$T^n = MT^{n+1} + D$ $D_i = \begin{cases} d_2 + \frac{\Delta x h_f f_2}{k + \Delta x h_f} & \text{si } i = 1 \\ d_i & \text{si } i \geq 2 \\ 0 & \text{si } i = N \end{cases} \quad D = (D_1 \ D_2 \ \dots \ D_N)^T$

.3.3 Résultats et interpretation

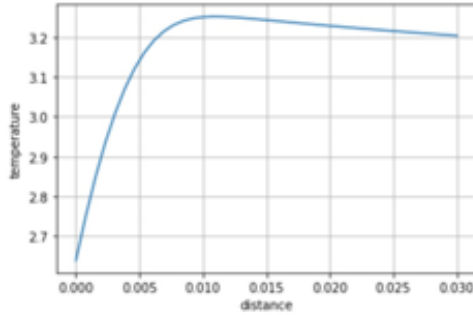


Figure 2 : Température dans le cas non stationnaire (Explicite avec f_2)

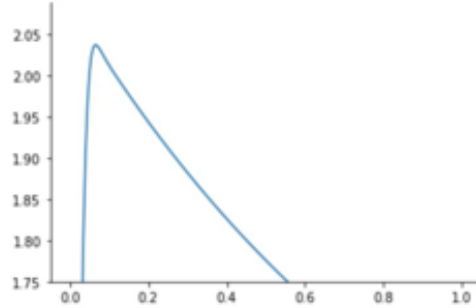


Figure 2 : Température dans le cas non stationnaire (Explicite avec f_1)



Figure 2 : Température dans le cas non stationnaire (Implicite avec f_2)

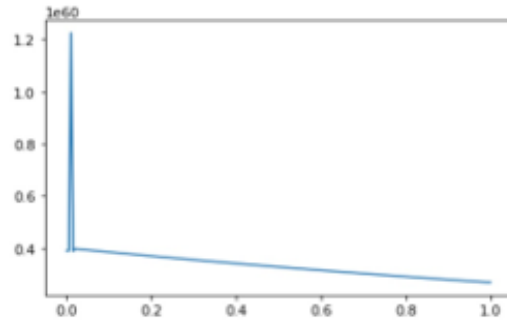


Figure 2 : Température dans le cas non stationnaire (Implicite avec f_1)

-Pour le cas implicite: on n'a pas pu l'implémenter que pour 4 points de discrétisation vu le coût de calcul qu'elle nécessite. Cependant nous avons constaté, que même avec 4 points, son allure se rapproche de celle de la méthode explicite pour les deux conditions aux limites.

-Pour le cas explicite: pour le cas f_2 , ca nous a donné l'allure attendue. En effet, on aperçoit bien un maximum de température (pic) au voisinage du kyste ($x=0$). Cependant, l'échelle de température obtenue est de l'ordre de 10^4 contre 10 pour celle de l'article et de la solution analytique. Pour le cas f_1 , nous apercevons aussi les maximums de température au voisinage du kyste avec le même problème d'échelle de température (nous avons pris pour f_1 la même valeur que nous avons pris dans nos implémentations des solutions analytiques, i.e $f_1=0$)

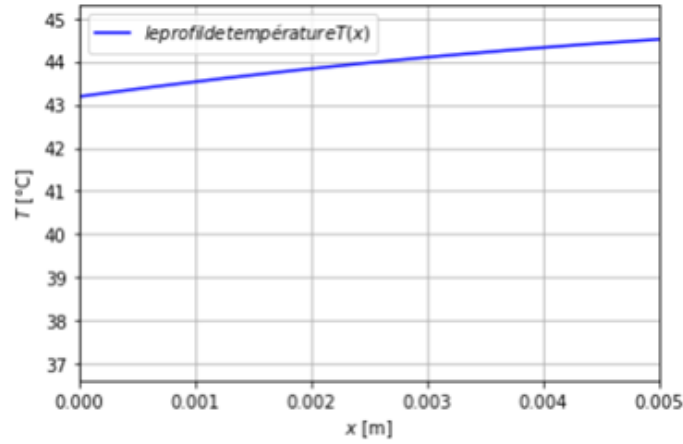
.4 Résolution analytique

.4.1 Résolution à l'instant t=0

Dans le cadre de la résolution analytique de l'équation (*), Nous avons procédé à l'implémentation de la formule suivante:

$$T_0(x) = T_a + \frac{Q_m}{w_b \rho_b c_b} + \frac{(T_c - T_a - \frac{Q_m}{w_b \rho_b c_b})[\sqrt{A}ch(\sqrt{A}x) + \frac{h_0}{k} + sh(\sqrt{A}x)]}{\sqrt{A}ch(\sqrt{A}L) + \frac{h_o}{k}sh(\sqrt{A}L)} + \frac{\frac{h_o}{k}(T_f - T_a - \frac{Q_m}{w_b \rho_b c_b})[sh(\sqrt{A}(L-x))]}{\sqrt{A}ch(\sqrt{A}L) + \frac{h_o}{k}sh(\sqrt{A}L)}$$

nous avons obtenu le profile de la temperature en t=0 donné par le schéma ci-dessous:

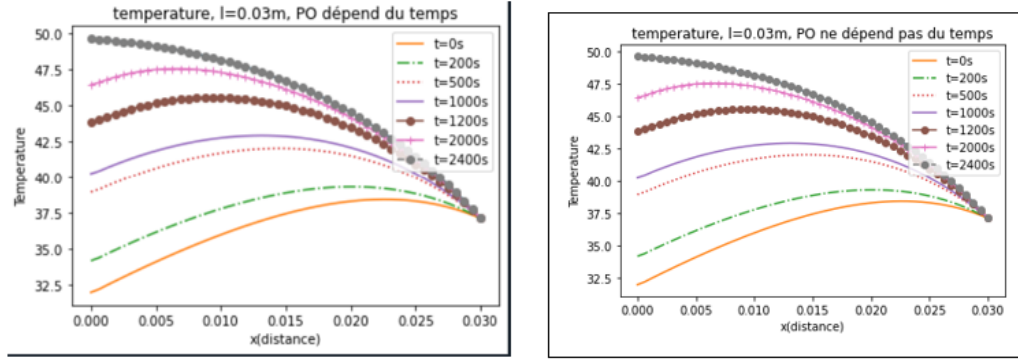


.4.2 Résolution à l'instant t>0

À l'instant t=0, Nous avons implémenté l'équation suivante qui est obtenu à l'aide de la formule de Green :

$$T(x,t) = T_o(x) + W(x,t) \exp\left(-\frac{w_b \rho_b c_b}{\rho c} t\right)$$

le résultat d'implémentation est donné par le schéma suivant:



.4.3 Interpretation

De prime abord, on tient à préciser que la surface de la peau est considérée comme adiabatique, i.e $f_1(t)=0$. Dans le cas où le tissu est chauffé par un laser, microonde, ultrasons ou perfusion, le terme de chauffage spatial noté $Q_r(x,t) = \eta p_o(t) \exp(-\eta x)$ où η est le coefficient de diffusion, $p_o(t)$ correspond à la puissance de chauffage en fonction du temps sur la surface de la peau. Aussi avons-nous jugé de tirer au clair, que pendant l'implémentation du code on a procédé de deux manières :

-D'une part, $p_o(t)$ est indépendant du temps: $p_o(t)=250$, pour le cas d'un chauffage par laser.

-D'autre part, $p_o(t)$ dépend du temps sinusoidalement : $p_o(t)=250+200 \cos(0.02t)$, dans le cas d'un chauffage par perfusion. Les graphes ci-dessous, illustrent la distribution de la température pour un corps humain soumis à deux différents chauffages surfaciques. De surcroit, on observe que tous les profils de température à chaque instant t , où t prend les valeurs : 0, 200s, 500s, 1000s, 1200s, 2000s, 2400s. En outre, dans les deux cas, la température des tissus après un chauffage sur la peau vers le corps humain, pour arriver

enfin à la valeur $T=37.5$. Cependant, la température va subir une croissance à cause du chauffage. À cela s'ajoute, une intersection entre les profils de températures pour le cas où $p_o(t)$ dépend du temps sinusoidalement, causée par une oscillation sinusoidale de la température.

.5 Interpretation d'erreur

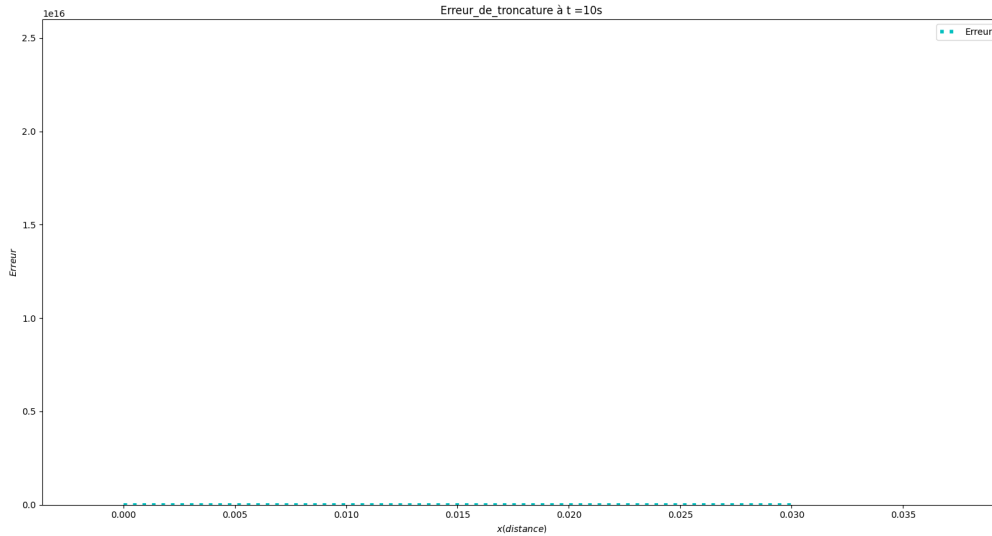
.5.1 Erreur de troncature à $t=0$



le graphe ci-dessus représente l'erreur de troncature du profil de la température à $t=0$. Cet erreur nous permet de rassurer de combien la solution analytique diverge de la solution approximative (implicite, explicite). Nous remarquons que l'erreur reste stable avec l'augmentation de la distance x sur le domaine étudié $[0,L]$, jusqu'au point critique $L=0,03$ m, où l'erreur commence à diverger. En somme, il n'y a pas une grande difference entre la solution analytique et approximative. Néanmoins, il reste toujours une petite marge d'erreur, qui vient des erreurs des calculs numériques.

.5.2 Erreur de troncature à $t > 0$

Pour comparer la condition aux limites f_1 dans le cas analytique et numérique, nous avons rencontré un problème de calcul. Cependant, nous avons réussi à faire l'implémentation que pour $t=10$ s où l'erreur est quasiment nul ce qui valide notre méthode.



.6 Conclusion

En guise de conclusion, ce projet a été très enrichissant pour nous en tant qu'élèves ingénieurs polyvalente et ouverte aux différentes domaines. Les principaux problèmes que nous avons rencontré étaient liés à la difficulté de trouver une cohérence entre les différents codes qui ont été développés. Ensuite, en raison de la complexité des différents codes, leur mise en oeuvre était très chronophage. Enfin, la différence d'échelle entre les graphes analytiques et numériques nous a rendu difficile de trouver l'erreur facilement. Cependant, nous avons pu aboutir à des résultats satisfaisantes, notamment pour le schéma explicite dans le cas stationnaire, ainsi nous avons pu mettre en place avec succès la solution analytique, et nous avons pu voir les maximums des températures au voisinage du kyste pour les différents schémas.

Bibliography

[2] <https://kausherald.wordpress.com/category/iit-internship/>

[3] <https://www.scopus.com/home.uri>

[4] https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_public/05/116/5116327.pdf

[5] <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0010482503000866>