

VEKTOR: Hasil Silang.

Hasil kali silang vektor-vektor.

Definisi:

Jika $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 3, maka hasil kali silang $u \times v$ adalah vektor yang didefinisikan sebagai

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

atau dalam notasi determinan

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Secara sederhana komponen $u \times v$ dapat kita peroleh sebagai berikut.

- Bentuk matriks 2 x 3

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Yang baris pertamanya terdiri dari komponen-komponen u dan yang baris keduanya terdiri dari komponen-komponen v .

- Untuk mencari komponen pertama dari $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, hilangkan kolom pertama dan ambil determinannya; untuk mencari komponn kedua, hilangkan kolom kedua dan ambil negatif dari determinannya; dan untuk mencari komponen ketiga, hilangkan kolom ketiga dan ambil determinannya.

Contoh 1. Cari $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, dimana $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ dan $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$

Penyelesaian,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= (2, -7, -6) \end{aligned}$$

Ada suatu perbedaan penting antara hasil kali titik dan hasil kali silang dari dua vektor – hasil kali titik berupa suatu skalar dan hasil kali silang berupa suatu vektor. Teorema berikut ini memberikan

beberapa hubungan penting antara hasil kali titik dan hasil kali silang dan juga menunjukkan bahwa $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ortogonal baik terhadap \mathbf{u} maupun \mathbf{v} .

Teorema 3.4.1.

Jika \mathbf{u} , \mathbf{v} dan \mathbf{w} adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 3, maka

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ | $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ ortogonal terhadap \mathbf{u} |
| b) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ | $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ ortogonal terhadap \mathbf{v} |
| c) $\ \mathbf{u} \times \mathbf{v}\ ^2 = \ \mathbf{u}\ ^2 \ \mathbf{v}\ ^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ | (identitas Lagrange) |
| d) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$ | (hubungan antara hasil kali silang dan hasil kali titik) |
| e) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$ | (hubungan antara hasil kali silang dan hasil kali titik) |

Contoh 2. Tinjau vektor-vektor

$$\mathbf{u} = (1, 2, -2) \text{ dan } \mathbf{v} = (3, 0, 1)$$

Pada contoh 1 kita telah mendapatkan bahwa

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2, -7, -6)$$

Karena

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (1)(2) + (2)(-7) + (-2)(-6) = 0$$

dan

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (3)(2) + (0)(-7) + (1)(-6) = 0$$

$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ortogonal terhadap \mathbf{u} dan \mathbf{v} .

Teorema 3.4.2.

Jika \mathbf{u} , \mathbf{v} dan \mathbf{w} adalah sebarang vektor dalam ruang berdimensi 3 dan k adalah sebarang skalar, maka:

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
- $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$
- $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
- $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Contoh 3. Tinjau vektor

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0)$$

$$\mathbf{j} = (0, 1, 0)$$

$$\mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

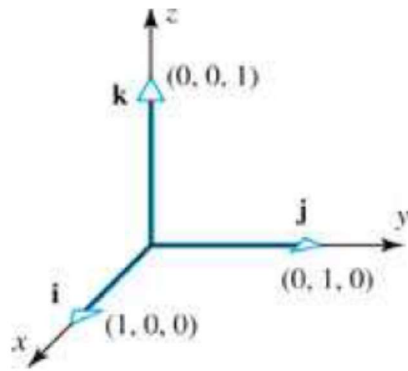


Figure 3.4.1

The standard unit vectors.

Vektor-vektor ini masing-masing mempunyai panjang 1 dan terletak di sumbu koordinat (Gambar 3.4.1). Vektor-vektor ini disebut vektor satuan standar dalam ruang berdimensi 3. Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dalam ruang berdimensi 3 dapat dinyatakan dalam bentuk \mathbf{i} , \mathbf{j} dan \mathbf{k} karena kita bisa menuliskan

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

Misalnya

$$(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Dari (1) kita peroleh

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$$

Bisa dihitung

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} &= \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j} \end{aligned}$$

Gambar 2 bisa membantu kita untuk mengingat hasil-hasil ini. Dengan mengacu pada diagram ini, hasil kali silang dari dua vektor berturut-turut searah dengan jarum jam adalah vektor yang berikutnya, dan hasil kali silang dua vektor berturut-turut berlawanan arah dengan jarum jam adalah negatif dari vektor berikutnya.

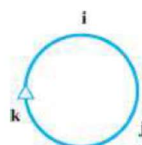


Figure 3.4.2

RUMUS DETERMINAN UNTUK HASIL KALI SILANG.

Adalah berharga untuk memperhatikan bahwa suatu hasil kali silang bisa disajikan secara simbolis dalam bentuk determinan 3 x 3 :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Misalnya, jika $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ dan $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$, maka

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

Yang sesuai dengan hasil yang diperoleh dalam Contoh 1.

Kita tahu dari Teorema 3.4.1. bahwa $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ortogonal terhadap \mathbf{u} dan \mathbf{v} . Jika \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah vektor-vektor tak nol, bisa ditunjukkan bahwa arah $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ bisa ditentukan dengan menggunakan “aturan tangan kanan” (Gambar 3.4.3)

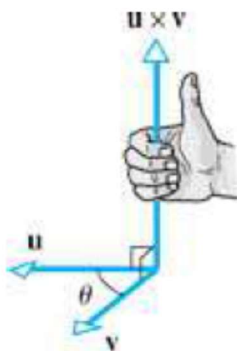


Figure 3.4.3

Anggap θ adalah sudut antara \mathbf{u} dan \mathbf{v} , dan anggap \mathbf{u} diputar dengan sudut θ sampai berimpit dengan \mathbf{v} . Jika jari-jari tangan kanan ditekuk sehingga menunjuk arah putaran, maka ibu jari menunjukkan (kira-kira) arah $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

INTERPRETASI GEOMETRIS DARI HASIL KALI SILANG.

Jika \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 3, maka norma dari $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ mempunyai suatu interpretasi geometris yang berguna. Identitas Lagrange, yang diberikan dalam Teorema 3.4.1, menyatakan bahwa.

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \quad (5)$$

Jika θ menyatakan sudut antara \mathbf{u} dan \mathbf{v} , maka $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$, sedemikian sehingga (5) bisa ditulis ulang sebagai

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

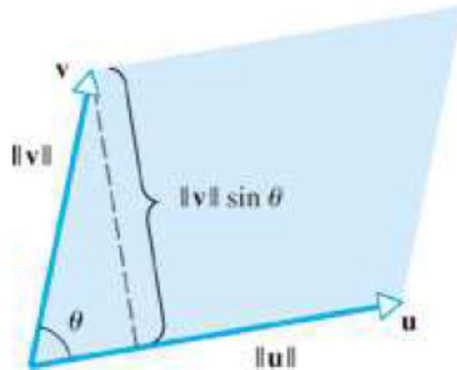


Figure 3.4.4

Karena $0 \leq \theta \leq \pi$, maka $\theta \geq 0$, sehingga ini bisa ditulis ulang sebagai,

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta \quad (6)$$

Tetapi $\|\mathbf{v}\| \sin \theta$ adalah ketinggian jajaran genjang yang ditentukan oleh \mathbf{u} dan \mathbf{v} (Gambar 3.4.4.). Jadi, dari (6), luas jajaran genjang diberikan oleh

$$A = (\text{alas}) (\text{tinggi}) = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

Hasil ini benar bahkan jika \mathbf{u} dan \mathbf{v} kolinear, karena jajaran genjang yang ditentukan oleh \mathbf{u} dan \mathbf{v} mempunyai luas nol dan dari (6) kita dapatkan $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ karena $\theta = 0$ dalam kasus ini.

Teorema 3.4.3.

Jika \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 3 maka $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ sama dengan luas jajaran genjang yang ditentukan oleh \mathbf{u} dan \mathbf{v} .

Contoh 4. Cari luas segitiga yang dibentuk oleh titik-titik $P_1(2, 2, 0)$, $P_2(-1, 0, 2)$, dan $P_3(0, 4, 3)$.

Penyelesaian. Luas A segitiga adalah $\frac{1}{2}$ luas jajaran genjang yang dibentuk oleh vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ dan $\overrightarrow{P_1P_3}$ (Gambar 3.4.5)

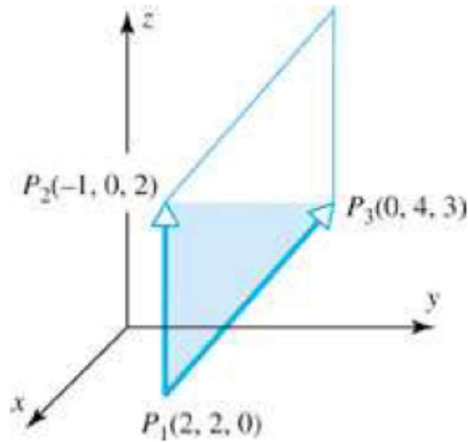


Figure 3.4.5

Dengan menggunakan cara sebelumnya, kita bisa dapatkan $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, -2, 2)$ dan $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2, 2, 3)$. Jadi,

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-10, 5, -10)$$

Dan oleh karena itu

$$A = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \frac{1}{2}(15) = \frac{15}{2}$$

HASIL KALI SKALAR GANDA TIGA

Definisi. Jika u , v dan w adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 3, maka

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

disebut hasil kali skalar ganda tiga dari \mathbf{u} , \mathbf{v} dan \mathbf{w} .

Hasil kali skalar ganda tiga dari $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ bisa dihitung dari rumus

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

(7)

Karena

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3 \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Contoh 5. Hitunglah hasil kali skalar ganda tiga $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ dari vektor-vektor

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k},$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

$$\mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Penyelesaian. Dari (7)

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 60 + 4 - 15 = 49\end{aligned}$$

INTERPRETASI GEOMETRIS DETERMINAN

Teorema 3.4.4.

1. Nilai mutlak determinan

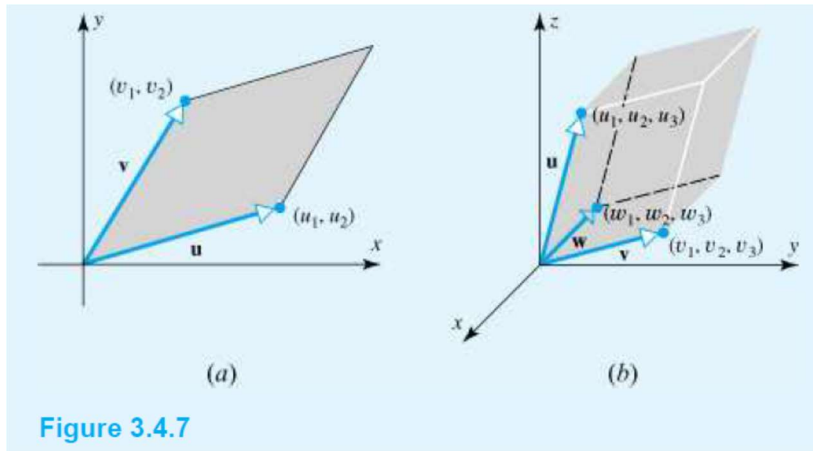
$$\det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

Sama dengan luas jajaran genjang dalam ruang berdimensi 2 yang dibentuk oleh vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Gambar 3.4.7.a.

2. Nilai mutlak determinan

$$\det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

Sama dengan volume paralelepiped dalam ruang berdimensi 3 yang dibentuk oleh vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Gambar 3.4.7.b.



Teorema 3.4.5.

Jika vektor-vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ mempunyai titik pangkal yang sama, maka ketiganya terletak pada bidang yang sama jika dan hanya jika

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Latihan.

1. Anggap $\mathbf{u} = (3, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 2, -3)$, dan $\mathbf{w} = (2, 6, 7)$. Hitunglah

(a) $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$

(b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$

(d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(e) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - 2\mathbf{w})$

(f) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) - 2\mathbf{w}$

2. Cari suatu vektor yang ortogonal baik terhadap \mathbf{u} dan \mathbf{v} .

(a) $\mathbf{u} = (-6, 4, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 1, 5)$

(b) $\mathbf{u} = (-2, 1, 5)$, $\mathbf{v} = (3, 0, -3)$

3. Cari luas jajaran genjang yang dibentuk oleh \mathbf{u} dan \mathbf{v} .

(a) $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 3, 1)$

(b) $\mathbf{u} = (2, 3, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, -2)$

(c) $\mathbf{u} = (3, -1, 4)$, $\mathbf{v} = (6, -2, 8)$

4. Cari luas segitiga yang mempunyai titik-titik sudut P, Q, dan R.

(a) $P(2, 6, -1)$, $Q(1, 1, 1)$, $R(4, 6, 2)$

(b) $P(1, -1, 2)$, $Q(0, 3, 4)$, $R(6, 1, 8)$

5. Cari hasil skalar ganda tiga $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(a) $\mathbf{u} = (-1, 2, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 4, -2)$, $\mathbf{w} = (-1, 2, 5)$

(b) $\mathbf{u} = (3, -1, 6)$, $\mathbf{v} = (2, 4, 3)$, $\mathbf{w} = (5, -1, 2)$

Referensi

1. Howard Anton and Chris Rorres, Elementary Linear Algebra with Application, John Wiley and Sons, 2005
2. Howard Anton (alih bahasa : Ir. Hari Suminto), Dasar-dasar Aljabar Linear, Jilid 1, Interaksara, 2000.