VEKTOR : HASIL KALI TITIK; PROYEKSI

Anggap **u** dan **v** adalah dua vektor tak-nol dalam ruang berdimensi-2 atau ruang berdimensi-3, dan anggap vektor-vektor ini telah diposisikan sehingga titik-titik pangkalnya berimpitan. Yang dimaksud dengan **sudut antara u dan v** adalah sudut θ yang ditentukan oleh **u** dan **v** yang memenuhi $0 \le \theta \le \pi$ (Gambar 3.3.1.)

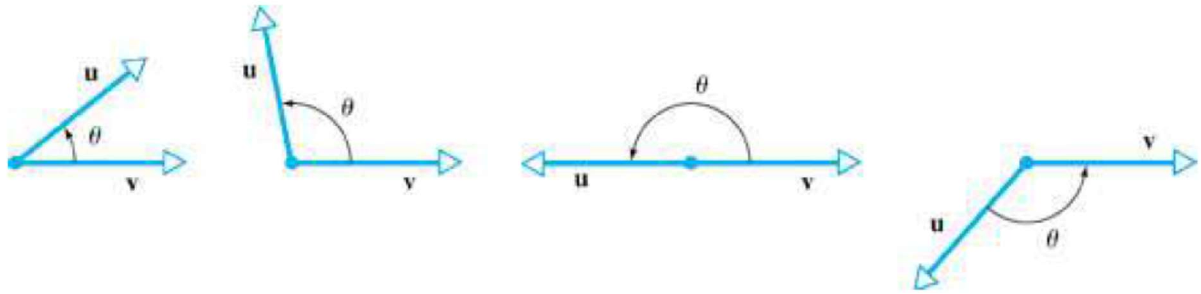

Figure 3.3.1

The angle θ between $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$ satisfies $0 \le \theta \le \pi$.

Definisi:

Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi-2 dan berdimensi-3 dan θ adalah sudut antara **u** dan **v**, maka **hasil kali titik** atau **hasil kali dalam Euclidean u – v** didefinisikan sebagai

$$\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v} = \begin{cases} |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\theta & jika\ \boldsymbol{u} \neq 0\ dan\ \boldsymbol{v} \neq 0 \\ 0 & jika\ \boldsymbol{u} = 0\ dan\ \boldsymbol{v} = 0 \end{cases}$$

Contoh :

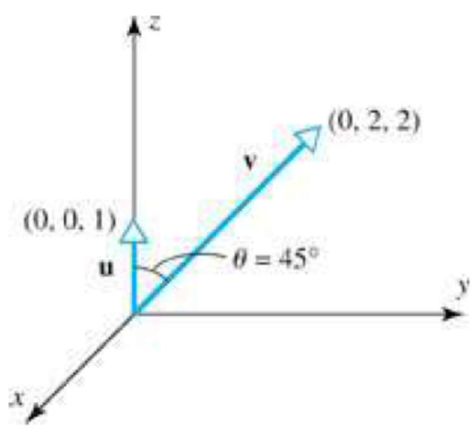

Figure 3.3.2

Sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 3.3.2, sudut antara vektor **u** = (0, 0, 1) dan **v** = (0, 2, 2) adalah 45^0. Jadi,

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta = (\sqrt{0^2+0^2+1^2})(\sqrt{0^2+2^2+2^2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2$$

RUMUS KOMPONEN UNTUK HASIL KALI TITIK.

Untuk tujuan penghitungan, kita ingin mempunyai rumus yang menyatakan hasil kali titik dua vektor dalam bentuk komponen-komponen vektornya. Kita akan menurunkan suatu rumus seperti itu untuk vektor dalam ruang berdimensi-3; turunan untuk vektor dalam ruang berdimensi-2 dapat dicari dengan cara serupa.

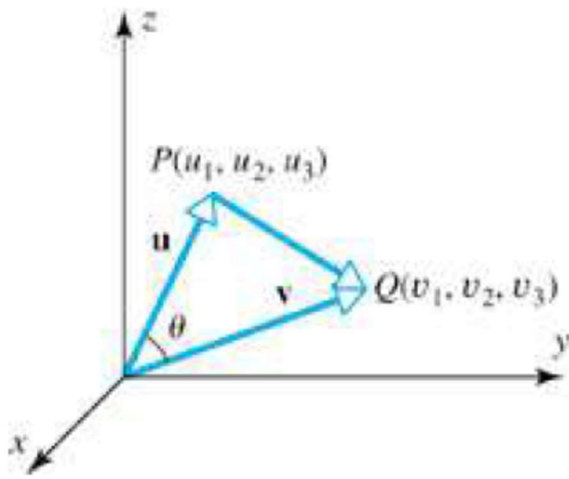

Figure 3.3.3

Anggap **u** = (u_1, u_2, u_3) dan **v** = (v_1, v_2, v_3) adalah dua vektor tak-nol. Jika sebagaimana yang ditunjukkan dalam Gambar 3.3.3, θ adalah sudut antara **u** dan **v**, maka hukum cosinus menghasilkan

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta \qquad (2)$$

Karena $\overrightarrow{PQ}$= **v** – **u**, kita bisa menulis ulang (2) sebagai

$$\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2)$$

Atau

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2)$$

Dengan mensubstitusikan

$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_3^2 + u_3^2, \qquad \|\mathbf{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 .$$

Dan

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$$

Setelah menyederhanakan kita dapatkan

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \qquad (3)$$

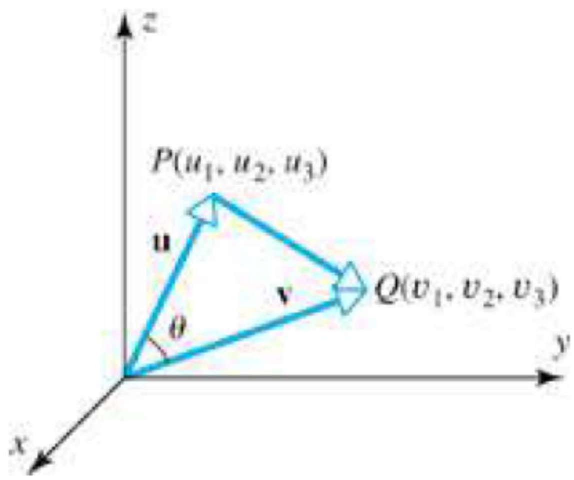

Figure 3.3.3

Jika **u** = (u_1,u_2) dan **v** = (v_1,v_2) adalah dua vektor dalam ruang berdimensi-2 maka rumus yang berpadanan adalah

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \qquad (4)$$

MENCARI SUDUT ANTAR VEKTOR

Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor tak nol, maka rumus (1) bisa ditulis ulang sebagai

$$\cos\theta \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \qquad (5)$$

Contoh 2

Tinjau vektor **u**=(2.-1,1) dan **v**=(1,1,2)

Cari **u** dan **v** dan temukan sudut θ antara **u** dan **v**.

Penyelesaian

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$$

Untuk vektor yang diberikan kita dapatkan $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{6}$, sedemikan sehingga dari (5)

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

Jadi, θ = 60^0.

Contoh 3 Cari sudut antara diagonal suatu kubus dengan salah satu ruasnya.

Penyelesaian. Anggap *k* adalah panjang suatu ruas dan gambarlah suatu sistem koordinat seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.3.4

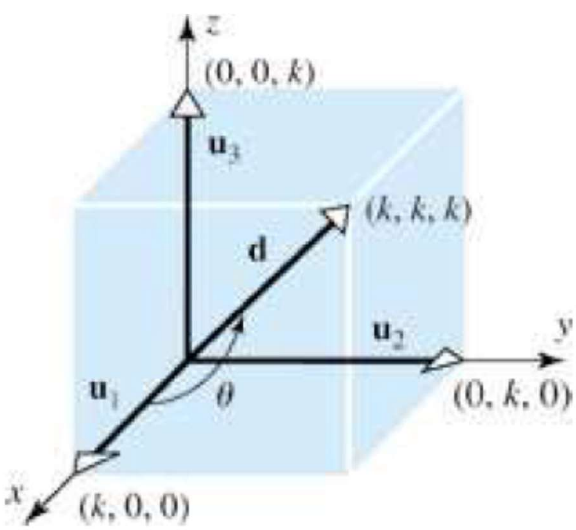

Figure 3.3.4

Jika kita anggap $\mathbf{u}_1$ = (k,0,0), $\mathbf{u}_2$ = (0,k,0), dan $\mathbf{u}_3$ = (0,0,k), maka vektor **d**=(k,k,k)=$\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3$ adalah suatu diagonal kubus tersebut. Sudut antara **d** dan ruas $\mathbf{u}_1$ memenuhi

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{d}}{\|\mathbf{u}_1\|\|\mathbf{d}\|} = \frac{k^2}{(k)(\sqrt{3k^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Jadi.

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.74°$$

Teorema berikut ini menunjukkan bagaimana hasil kali titik bisa digunakan untuk memperoleh informasi mengenai sudut antara dua vektor, teorema ini juga menetapkan suatu hubungan penting antara norma dan hasil kali titik.

Teorema 3.3.1. Anggap **u** dan **v** adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi-2 atau berdimensi-3.

(a) **v • v =** $||\mathbf{v}||^2$; yaitu $||\mathbf{v}|| = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{v})^{1/2}$

(b) Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor tak nol dan θ adalah sudut antara kedua vektor tersebut, maka

Θ lancip jika dan hanya jika **u.v** >0

Θ tumpul jika dan hanya jika **u.v** < 0

Θ = π/2 jika dan hanya jika **u.v** = 0

Contoh 4

Jika **u** = (1, -2, 3), **v** = (-3, 4, 2) dan **w** = (3, 6, 3), maka

u . **v** = (1) (-3) + (-2) (4) + (3) (2) = -5

v . w = (-3) (3) + (4) (6) + (2) (3) = 21

u . w = (1) (3) + (-2) (6) + (3) (3) = 0

Oleh karena itu, **u** dan **v** membentuk suatu sudut tumpul, **v** dan **u** membentuk suatu sudut lancip, dan **u** dan **v** tegak lurus.

VEKTOR-VEKTOR ORTOGONAL

Vektor-vektor yang tegak lurus disebut juga vektor-vektor ortogonal. Berdasarkan Teorema 3.3.1b, dua vektor tal-nol ortogonal jika dan hanya jika hasil kali titiknya nol. Jika kiat sepakat untuk menganggap **u** dan **v** tegak lurus ketika salah satu atau kedua vektor ini adalah **0**, maka kita bisa menyatakan tanpa perkecualian bahwa dua vektor **u** dan **v** ortogonal (tegak lurus) jika dan hanya jika **uv** = 0. Untuk menunjukkan bahwa **u** dan **v** adalah vektor-vektor yang ortogonal kita tuliskan **u** ⊥ **v**.

Contoh 5.

Tunjukkan bahwa dalam ruang berdimensi 2 vektor tak nol **n** = (a, b) tegak lurus dengan garis ax+by+c=0.

Penyelesaian.

Anggap $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ adalah titik-titik yang berbeda pada garis tersebut, sedemikian sehingga

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \qquad (6)$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0$$

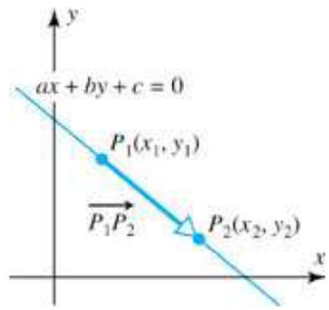

Figure 3.3.5

Karena vektor $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ ada pada garis tersebut (Gambar 3.3.5), kita hanya perlu menunjukkan bahwa **n** dan $\overrightarrow{P_1P_2}$ tegak lurus. Tetapi dengan mengurangkan persamaan-persamaan dalam (6) kita peroleh

$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$

yang bisa dinyatakan dalam bentuk

$(a, b) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = 0$ atau $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}=0$

Jadi, **n** dan $\overrightarrow{P_1P_2}$ adalah tegak lurus.

Teorema 3.3.2.

Jika **u, v** dan **w** adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 2 atau 3 dan k adalah suatu skalar, maka

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
(b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}.\mathbf{v} + \mathbf{u}.\mathbf{w}$
(c) $k(\mathbf{u}.\mathbf{v}) = (k\mathbf{u}).\mathbf{v} = \mathbf{u}.(k\mathbf{v})$
(d) $\mathbf{v}.\mathbf{v} > 0$ jika $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, dan $\mathbf{v}.\mathbf{v} = 0$ jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

PROYEKSI ORTOGONAL

Dalam banyak aplikasi, kita akan tertarik untuk "mendekomposisi" suatu vektor **u** menjadi jumlah dua suku, satu sejajar dengan vektor tak-nol **a** yang ditentukan dan lainnya tegak lurus dengan **a**. Jika **u** dan **a** diposisikan sehingga titik-titik pangkalnya berimpitan pada suatu titik Q, kita bisa mendekompisisi vektor **u** sebagai berikut (Gambar 3.3.6): Tarik garis tegak lurus ke bawah darii ujung **u** ke garis melalui **a**, dan bentuk vektor **w**, dari Q ke kaki garis tegak lurus ini. Berikutnya susunlah selisih

$$\mathbf{w_2} = \mathbf{u} - \mathbf{w_1}$$

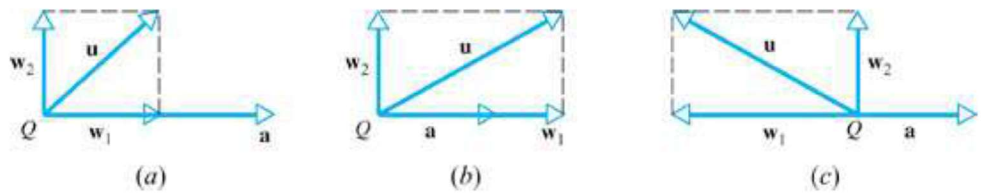

Figure 3.3.6 The vector $\boldsymbol{u}$ is the sum of $\mathbf{w}_1$ and $\mathbf{w}_2$, where $\mathbf{w}_1$ is parallel to $\boldsymbol{a}$ and $\mathbf{w}_2$ is perpendicular to $\boldsymbol{a}$.

Sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 3.3.6, vektor **w**, sejajar dengan **a**, vektor $\mathbf{w_2}$ tegak lurus dengan **a**, dan

$$\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2} = \mathbf{w_1} + (\mathbf{u} - \mathbf{w_1}) = \mathbf{u}$$

Vektor $\mathbf{w_1}$ disebut ***proyeksi ortogonal dari u pada a*** atau kadang-kadang ***komponen vektor dari u yang sejajar dengan a***. Hal ini dinyatakan dengan

$$\text{proy}_{\mathrm{a}}\, \mathbf{u}$$

Vektor $\mathbf{w_2}$ disebut ***komponen vektor u yang ortogonal terhadap a***. Karena kita dapati $\mathbf{w_2} = \mathbf{u} - \mathbf{w_1}$, vektor ini bisa ditulis ulang dalam notasi (7) sebagai

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \text{proy}_{\mathrm{a}}\, \mathbf{u}$$

Teorema 3.3.3.

Jika **u** dan **a** adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 2 atau ruang berdimensi 3 dan jika **a** ≠ **0**, maka

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$

(komponen vektor **u** yang sejajar dengan **a**)

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$

(komponen vektor **u** yang ortogonal terhadap **a**)

Bukti

Anggap $\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathrm{a}}\, \mathbf{u}$ dan $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \text{proy}_{\mathrm{a}}\, \mathbf{u}$. Karena $\mathbf{w_1}$ sejajar dengan **a**, maka $\mathbf{w}_1$ pastilah penggandaan skalar dari **a**, sehingga bisa ditulis dalam bentuk $\mathbf{w_1} = k\mathbf{a}$. Jadi,

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = k\mathbf{a} + \mathbf{w}_2 \tag{8}$$

Dengan mengalikan kedua ruas (8) dengan a dan dengan menggunakan Teorema 3.3.1a dan 3.3.2 kita akan mendapatkan

$$\mathbf{u}.\mathbf{a} = (k\mathbf{a} + \mathbf{w}_2).\mathbf{a} = k\,\|\boldsymbol{a}\|^2 + \mathbf{w}_2.\mathbf{a} \tag{9}$$

Tetapi $\mathbf{w_2.a} = \mathbf{0}$ karena $\mathbf{w}_2$ tegak lurus dengan **a**; jadi (9) menghasilkan

$$k = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}$$

Karena proy$_a$**u** = $\mathbf{w_1}$ = k**a**, kita dapatkan

$$proy_a\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}$$

Contoh 6:

Anggap **u** = (2, -1, 3) dan **a** = (4, -1, 2). Carilah komponen vektor dari **u** yang sejajar **a** dan komponen vektor **u** yang ortogonal terhadap **a**.

Penyelesaian.

u.a = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15.

$\|\boldsymbol{a}\|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$

Jadi, komponen vektor **u** yang sejajar **a** adalah

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = \frac{15}{21}(4,\ -1, 2) = (\tfrac{20}{7},\ -\tfrac{5}{7}, \tfrac{10}{7})$$

Dan komponen vektor yang ortogonal terhadap a adalah

$$\mathbf{u} - \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = (2,\ -1, 3) - (\tfrac{20}{7},\ -\tfrac{5}{7}, \tfrac{10}{7}) = \left(-\tfrac{6}{7},\ -\tfrac{2}{7}, \tfrac{11}{7}\right)$$

Suatu rumus untuk panjang komponen vektor **u** yang sejajar **a** bisa diperoleh dengan menuliskan

$$\|\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\| = \left\|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}\right\|$$

$$= \left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\right|\|\mathbf{a}\| \qquad \text{rumus (5)}$$

$$= \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|^2}\|\mathbf{a}\| \qquad \text{karena } \|\boldsymbol{a}\|^2 > 0$$

Yang menghasilkan

$$\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|} \tag{10}$$

Jika θ menyatakan sudut antara u dan a, maka u.a = $\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{a}\|$ cos θ, sehingga (10) bisa ditulis sebagai

$$\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|\,|\cos\theta| \tag{11}$$

Suatu interprestasi geometris dari hasil ini diberikan pada Gambar 3.3.7.

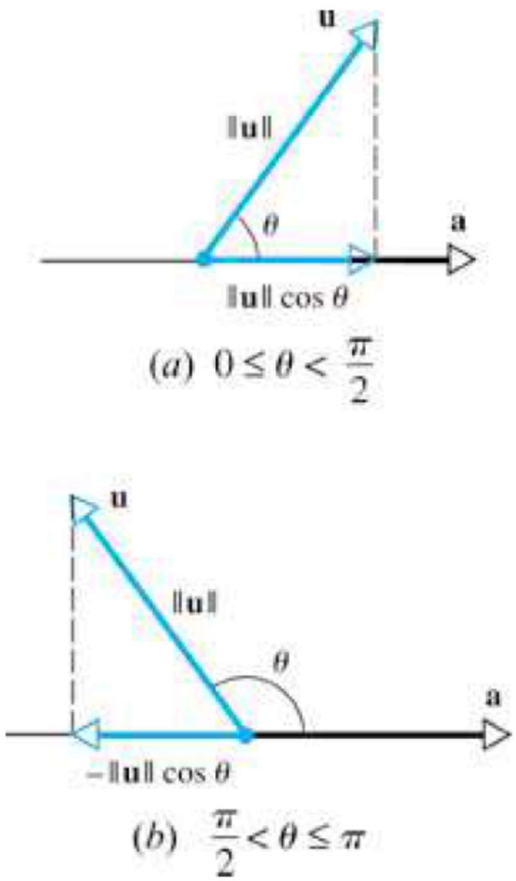

Figure 3.3.7

Contoh 7.

Cari suatu rumus untuk jarak D antara titik $P_0(x_0, y_0)$ dan garis ax + by + c = 0.

Penyelesaian.

Anggap $Q(x_1, y_1)$ adalah sebarang titik pada garis tersebut dan letakkan vektor

$$\mathbf{n} = (a,b)$$

Sedemikian sehingga titik pangkalnya ada di Q.

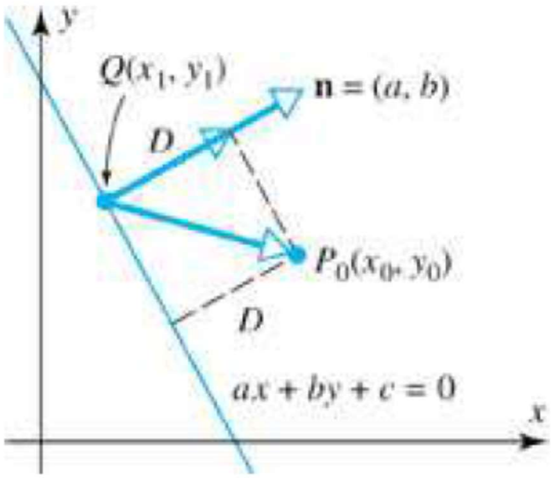

Figure 3.3.8

Dari contoh 5, vektor **n** tegak lurus dengan garis (Gambar 3.3.8). Sebagaimana yang ditunjukkan dalam gambar tersebut, jarak D sama dengan panjang proyeksi ortogonal dari $\overrightarrow{QP_0}$ terhadap **n**; jadi, dari (10),

$$D = \|\text{proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{QP}_0\| = \frac{|\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

Tetapi

$$\overrightarrow{QP_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$$

$$\overrightarrow{QP}_0 \cdot \mathbf{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)$$

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Sedemikian sehingga

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Karena titik $Q(x_1, y_1)$ terletak pada garis tersebut, maka koordinatnya memenuhi persamaan garis tersebut, sehingga

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$

Atau

$$c = -ax_1 - by_1$$

Dengan mensubstitusikan ekspresi ini pada (12) kita akan mendapatkan rumus

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Contoh 8.

Dari rumus (13) kita dapatkan bahwa jarak D dari titik (1, -2) ke garis 3x + 4y – 6 = 0 adalah

$$D = \frac{|(3)(1) + 4(-2) - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$$

LATIHAN

1. Carilah **u.v**.

   (a) $\mathbf{u} = (2, 3), \mathbf{v} = (5, -7)$

   (b) $\mathbf{u} = (-6, -2), \mathbf{v} = (4, 0)$

   (c) $\mathbf{u} = (1, -5,)4, \mathbf{v} = (3, 3, 3)$

   (d) $\mathbf{u} = (-2, 2, 3), \mathbf{v} = (1, 7, -4)$

2. Pada setiap point nomor 1, carilah nilai cosinus dari sudut θ antara **u** dan **v**.

3. Tentukan apakah **u** dan **v** membentuk suatu sudut lancip, tumpul atau ortogonal

   (a) $\mathbf{u} = (6, 1, 4), \mathbf{v} = (2, 0, -3)$

   (b) $\mathbf{u} = (0, 0, -1), \mathbf{v} = (1, 1, 1)$

   (c) $\mathbf{u} = (-6, 0, 4), \mathbf{v} = (3, 1, 6)$

   (d) $\mathbf{u} = (2, 4, -8), \mathbf{v} = (5, 3, 7)$

4. Carilah proyeksi ortogonal dari **u** terhadap **v**.

(a) $\mathbf{u} = (6, 2)$, $\mathbf{a} = (3, -9)$

(b) $\mathbf{u} = (-1, -2)$, $\mathbf{a} = (-2, 3)$

(c) $\mathbf{u} = (3, 1, -7)$, $\mathbf{a} = (1, 0, 5)$

(d) $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{a} = (4, 3, 8)$

5. Pada setiap point latihan 4, carilah komponen vektor dari **u** yang ortogonal terhadap **a**.
6. Pada setiap point cari $\|proy_a \boldsymbol{u}\|$

(a) $\mathbf{u} = (1, -2)$, $\mathbf{a} = (-4, -3)$

(b) $\mathbf{u} = (5, 6)$, $\mathbf{a} = (2, -1)$

(c) $\mathbf{u} = (3, 0, 4)$, $\mathbf{a} = (2, 3, 3)$

(d) $\mathbf{u} = (3, -2, 6)$, $\mathbf{a} = (1, 2, -7)$

****Selamat belajar. Salam sehat selalu****