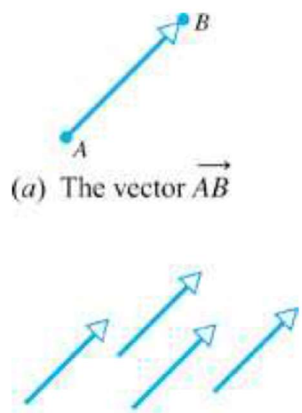
VEKTOR

1. PENGANTAR VEKTOR

Vektor bisa disajikan secara geometris sebagai ruas garis berarah atau panah dalam ruang berdimensi 2 dan ruang berdimensi 3. Arah panah menentukan arah vektor dan panjang panah menentukan besar vektor. Ekor dari panah tersebut disebut titik pangkal (**initial point**) dan ujung panah disebut titik ujung (**terminal point**). Kita akan menuliskan vektor dengan huruf kecil tebal (misalnya **a, k, v, w**). Ketika mendefinisikan vektor, kita akan menyebut bilangan sebagai skalar. Semua skalar kita adalah bilangan dan akan dinyatakan dalam huruf kecil miring (misalnya *a, k, v, w*).

Kita lihat contoh vektor berikut ini.



(a) The vector $\overrightarrow{AB}$

(b) Equivalent vectors

Figure 3.1.1

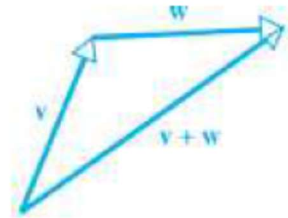
Pada Gambar 3.1.1.a vektor v mempunyai titik pangkal A dan titik ujung B, dapat dituliskan sebagai

$$v = \overrightarrow{AB}$$

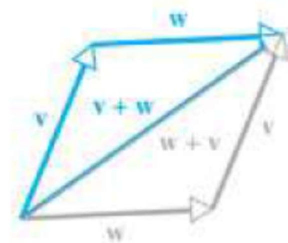
Vektor-vektor yang panjang dan arahnya sama disebut vektor ekuivalen. Jika **v** dan **w** ekuivalen, kita tuliskan

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

DEFINISI: Jika **v** dan **w** adalah vektor sebarang, maka jumlah **v** + **w** adalah vektor yang ditentukan sebagai berikut : Letakkan vektor **w** sedemikian sehingga titik pangkalnya bertautan dengan titik ujung **v**. Vektor **v** + **w** disajikan oleh panah dari titik pangkal **v** ke titik ujung **w**.



(a) The sum **v** + **w**



(b) **v** + **w** = **w** + **v**

Figure 3.1.2

Berdasarkan definisi diatas dan Gambar 3.1.2. kita lihat bahwa

v + w = w + v

jumlah tersebut sama dengan diagonal jajaran genjang yang ditentukan oleh **v** dan **w** jika vektor-vektor ini diletakkan sehingga keduanya mempunyai titik pangkal yang sama.

Vektor yang panjangnya nol disebut **vektor nol** dan dinyatakan dengan **0**. Kita definisikan

0 + v = v + 0 = v

untuk setiap vektor **v**.

Jika **v** adalah sebarang vektor tak-nol, maka –v, ***negatif*** dari **v**, didefinisikan sebagai vektor yang besarnya sama dengan **v**, tetapi arahnya terbalik.

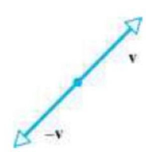


Figure 3.1.3
The negative of *v* has the same length as *v* but is oppositely directed.

Vektor ini mempunyai sifat

v + (-**v**) = **0**

DEFINISI: Jika **v** dan **w** adalah dua vektor sebarang, maka selisih **w** dan **v** didefinisikan sebagai

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$$

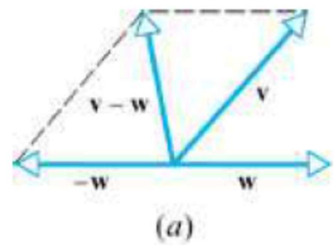


Figure 3.1.4

Untuk mendapatkan selisih **v – w** tanpa menyusun **–w**, posisikan **v** dan **w** sehingga titik-titik pangkalnya berimpitan. Vektor dari titik ujung **w** ke titik ujung **v** adalah vektor **v – w** (Gambar 3.1.4.b).

DEFINISI: Jika **v** adalah suatu vektor tak nol dan *k* adalah suatu bilangan tak nol (skalar), maka hasil kali *k***v** didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya |k| kali panjang **v** dan arahnya sama dengan arah **v** jika $k > 0$ dan berlawanan arah dengan **v** jika $k < 0$. Kita definisikan $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$ jika $k = 0$ atau $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

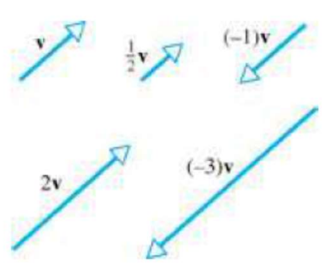


Figure 3.1.5

Contoh perkalian vektor dengan skalar dapat dilihat pada Gambar 3.1.5.

Vektor-vektor dalam Sistem Koordinat

Anggap **v** adalah sebarang vektor pada bidang, dan asumsikan bahwa **v** telah diletakkan sehingga titik pangkalnya berada pada titik asal sistem koordinat segi empat. Koordinat (v_1, v_2) dari titik ujung **v** disebut komponen **v**, dan kita tuliskan

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

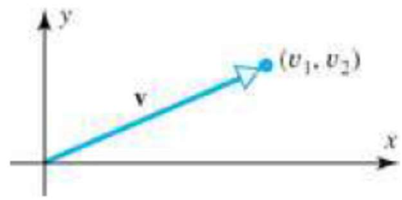


Figure 3.1.6

v_1 and v_2 are the components of $\boldsymbol{v}$.

Dua vektor

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \text{ dan } \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

ekuivalen jika dan hanya jika

$$v_1 = w_1 \text{ dan } v_2 = w_2$$

Operasi penjumlahan dan perkalian vektor dengan skalar mudah dilakukan dalam bentuk komponen. Berdasarkan Gambar 3.1.7, jika

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \text{ dan } \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

maka

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

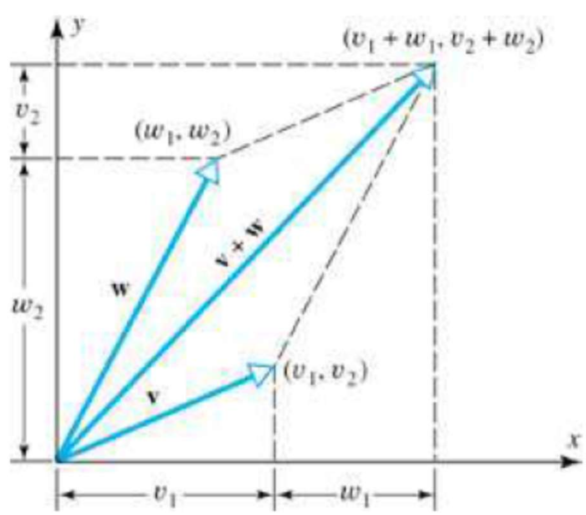


Figure 3.1.7

Vektor-vektor dalam Ruang Berdimensi 3

Sama seperti vektor-vektor pada bidang yang bisa diuraikan dengan pasangan bilangan real, vektor-vektor dalam ruang berdimensi 3 bisa diuraikan dengan bilangan real dengan memperkenalkan suatu sistem koordinat segi empat. Untuk membangun suatu sistem koordinat tersebut, pilih satu titik O yang disebut **titik asal**, dan pilih tiga garis yang saling tegak lurus, yang disebut **sumbu-sumbu koordinat**, yang melalui titik asal. Beri nama sumbu-sumbu ini dengan x, y dan z, pilih suatu arah positif untuk masing-masing sumbu koordinat dan juga satu satuan panjang untuk mengukur jarak (Gambar 3.1.9.a).

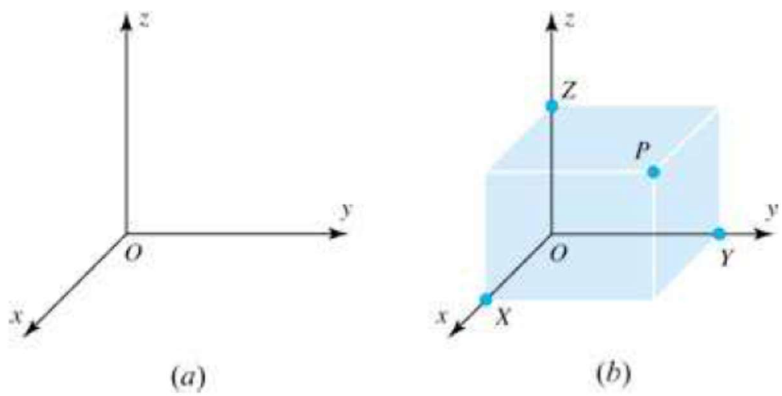


Figure 3.1.9

Setiap pasangan sumbu koordinat menentukan suatu bidang yang disebut suatu bidang yang disebut suatu bidang koordinat. Bidang-bidang koordinat ini disebut **bidang-xy**, **bidang-xz** dan **bidang-yz**. Untuk setiap titik P di ruang berdimensi 3 kita beri tiga bilangan (x,y,z) yang disebut **koordinat P**, sebagai berikut: Lewatkan tiga bidang yang sejajar dengan tiga sumbu kordinat X, Y dan Z (Gambar 3.1.9.b). Koordinat P didefinisikan sebagai panjang bertanda

$$x = OX, \quad y=OY \text{ dan } z=OZ$$

Contoh ditunjukkan pada Gambar 3.1.10.

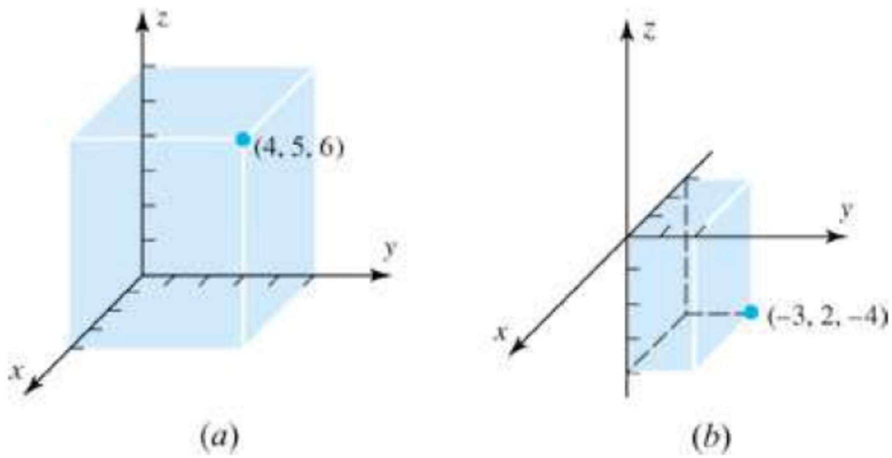


Figure 3.1.10

Sistem koordinat segi empat dalam ruang berdimensi 3 mempunyai dua kategori, tangan-kiri (left handed) dan tangan-kanan (right handed). Suatu sistem tangan kanan mempunyai sifat yang ditunjukkan oleh suatu sekrup biasa dalam arah positif pada sumbu-z jika sumbu-x positif diputar 90^0 ke arah sumbu-y positif (Gambar 3.1.11.a). Sistem tersebut disebut sistem tangan-kiri jika sekrup diputar ke arah untuk mengendurkan (Gambar 3.1.11b).

Catatan : Kita akan menggunakan sistem koordinat tangan-kanan.

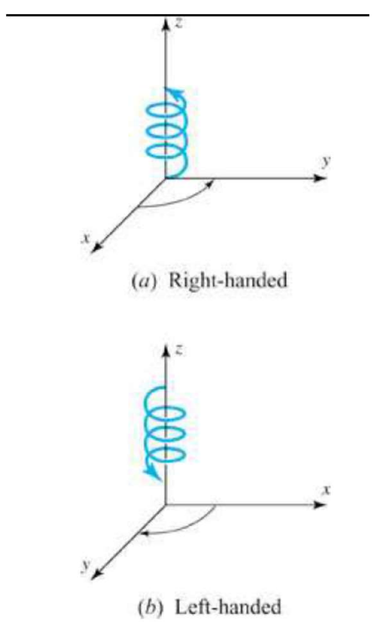


Figure 3.1.11

Jika suatu vektor **v** dalam ruang berdimensi 3 diposisikan sehingga titik pangkalnya ada pada titik asal sistem koordinatsegiempat, maka koordinat titik ujungnya disebut **komponen v**, dan kita tulis

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

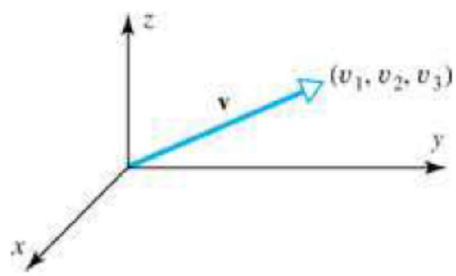


Figure 3.1.12

Jika **v** = (v_1, v_2, v_3) dan **w** = (w_1, w_2, w_3) adalah dua vektor pada ruang berdimensi 3, maka uraian yang serupa dengan digunakan untuk vektor pada bidang bisa digunakan untuk menyusun hasil berikut ini.

v dan **w** ekuivalen jika dan hanya jika $v_1 = w_1$, $v_2 = w_2$ dan $v_3 = w_3$

v + **w** = (v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3)

kv = (kv_1, kv_2, kv_3), dengan k adalah sebarang skalar.

Contoh 1:

Jika **v** = (1, -3, 2) dan **w** = (4, 2, 1) maka

v + **w** = (5, -1, 3)

2**v** = (2, -6, 4)

-**w** = (-4, -2, -1)

v – **w** = **v** + (-**w**) = (-3, -5, 1)

Kadang-kadang suatu vektor diposisikan sedemikian rupa sehingga titik pangkalnya tidak berada di titik asal. Jika vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ mempunyai titik pangkal P_1 (x_1, y_1, z_1) dan titik ujung P_2 (x_2, y_2, z_2) maka

$\overrightarrow{P_1P_2}$ = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)

Yaitu komponen $\overrightarrow{P_1P_2}$ diperoleh dengan mengurangkan koordinat titik pangkal dari koordinat titik ujung. Hal ini bisa dilihat dengan menggunakan Gambar 13.1.13

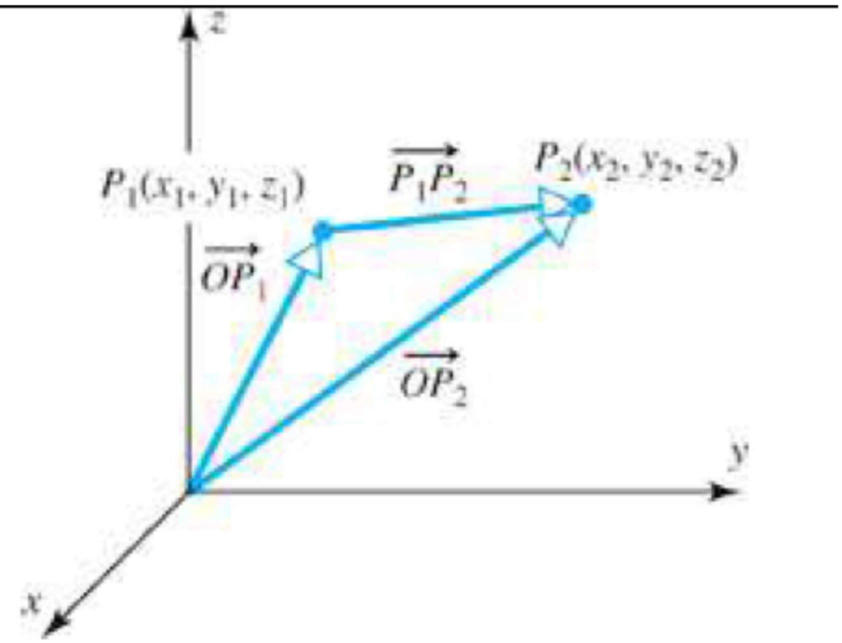


Figure 3.1.13

Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ adalah selisih vektor $\overrightarrow{OP_2}$ dan $\overrightarrow{OP_1}$ sehingga

$\overrightarrow{P_1P_2}$ = $\overrightarrow{OP_2}$ - $\overrightarrow{OP_1}$ = $(x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Contoh 2:

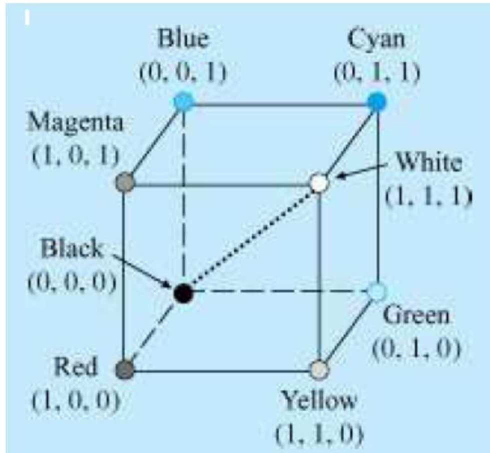
Komponen vektor **v** = $\overrightarrow{P_1P_2}$ dengan titik pangkal $P_1(2, -1, 4)$ dan titik ujung P_2 $(7, 5, -8)$ adalah

v = (7-2, 5-(-1),-8-4) = (5, 6 -12)

Dalam ruang berdimensi 2 vektor dengan titik pangkal P_1 (x_1, y_1) dan titik ujung $P_2(x_2, y_2)$ adalah

$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Aplikasi pada model warna komputer



Warna pada monitor komputer biasanya didasarkan pada apa yang disebut model warna RGB. Warna dalam sistem ini dibuat dengan menjumlahkan persentase warna primer merah (R), hijau (G), dan biru (B). Salah satu cara untuk melakukannya adalah dengan mengidentifikasi warna primer dengan vektor

$\mathbf{r} = (1, 0, 0)$ (pure red),
$\mathbf{g} = (0, 1, 0)$ (pure green),
$\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ (pure blue)

Dalam R^3 dan untuk membuat semua warna lain dengan membentuk kombinasi linier dari **r**, **g**, dan **b** menggunakan koefisien antara 0 dan 1, inklusif; koefisien ini mewakili persentase dari setiap warna murni dalam campuran. Himpunan dari semua vektor warna tersebut disebut ruang RGB atau kubus warna RGB. Jadi, setiap vektor warna **c** dalam kubus ini dapat diekspresikan sebagai kombinasi linier dari bentuk tersebut

$$\begin{aligned} c &= c_1 r + c_2 b + c_3 b \\ &= c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1) \\ &= (c_1, c_2, c_3) \end{aligned}$$

dimana $0 \leq c_i \leq 1$. Seperti yang ditunjukkan pada gambar, sudut kubus mewakili warna primer murni bersama dengan warna, hitam, putih, magenta, cyan, dan kuning. Vektor di sepanjang diagonal yang berjalan dari hitam ke putih sesuai dengan bayangan abu-abu.

Pergeseran Sumbu.

Penyelesaian atas banyak permasalahan bisa disederhanakan dengan menggeser sumbu koordinat untuk memperoleh sumbu baru yang sejajar dengan sumbu aslinya.

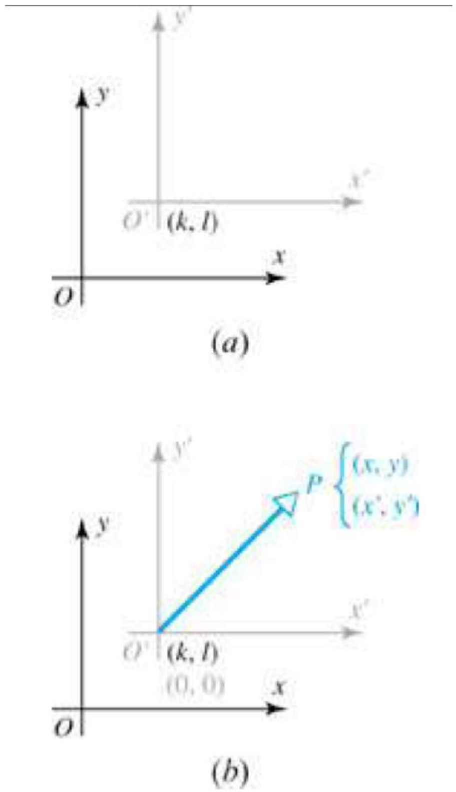


Figure 3.1.14

Pada Gambar 3.1.14.a kita telah menggeser sumbu suatu sistem koordinat-xy untuk mendapatkan suatu sistem koordinat x'y' yang titik awalnya O' berada pada titik (x,y) = (k,l). Suatu titik P pada ruang berdimensi 2 sekarang mempunyai koordinat (x,y) dan koordinat (x',y'). Untuk melihat bagaimana keduanya terkaitkan, tinjau vektor $\overrightarrow{O'P}$ (Gambar 3.1.14.b). Pada sistem-xy titik pangkalnya ada pada (k,l) dan titik ujungnya ada pada titik (x,y), sehingga $\overrightarrow{O'P}$ = (x-k, y-l). Pada sistem-x'y' titik pangkalnya ada pada (0,0) dan titik ujungnya ada pada (x',y'), sehingga $\overrightarrow{O'P}$ = (x',y'). Oleh karena itu x' = x-k dan y'=y-l. Rumus ini disebut persamaan pergeseran.

Contoh 3:

Anggap suatu sistem koordinat-xy digeser untuk memperoleh suatu sistem koordinat-x'y' yang titik asalnya mempunyai koordinat-xy (k,l) = (4,1).

a. Carilah koordinat-x'y' dari titik dengan koordinat-xy P(2,0)

   Persamaan pergeseran

   x'=x-4   dan   y'=y-1

   sehingga koordinat-x'y' dari P(2,0) adalah

   x'=2-4 = -2   dan   y'=0-1=-1

b. Carilah koordinat-xy dari titik dengan koordinat-x'y' Q(-1,5)

   Persamaan pergeseran dalam (a) bisa ditulis ulang sebagai

   x= x'+4 dan y=y'+1

   Sehingga koordinat-xy dari Q adalah

   x=-1+4=3 dan y = 5+1 = 6

Dalam ruang berdimensi 3 persamaan pergeserannya adalah

x' = x-k dan y' = y-l dan z'=z-m

dengan (k,l,m) adalah koordinat-xyz dari koordinat asal-x'y'z'

2. NORMA SUATU VEKTOR; ARITMETIKA VEKTOR.

Sifat-sifat operasi vektor.

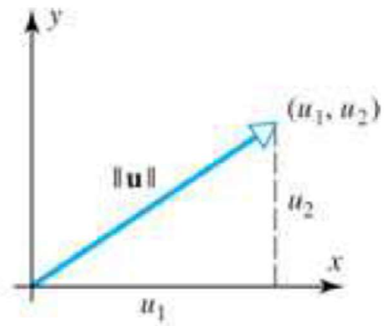
Teorema 3.2.1. Jika **u, v dan w** adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 2 dan berdimensi 3 dan k dan l adalah skalar, maka hubungan berikut berlaku.

a) **u** + **v** = **v** + **u**.
b) (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**)
c) **u** + **0** = **0** + **u** = **u**.
d) **u** + (-**u**) = **0**.
e) k(l**u**) = (kl)**u**.
f) k(**u** + **v**) = k**u** + k**v**
g) (k+l) **u** = k**u** + l**u**.
h) 1**u** = **u**.

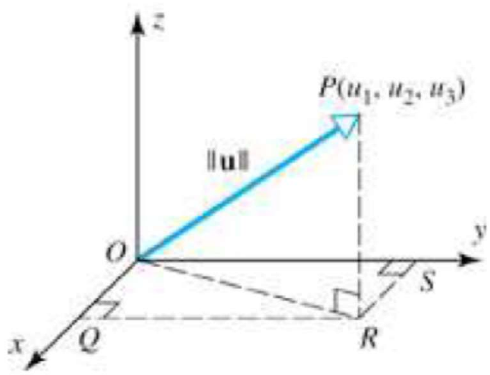
Norma suatu Vektor.

Panjang suatu vektor **u** sering disebut sebagai **norma u** dan dinyatakan sebagai $\|\boldsymbol{u}\|$. Dari teorema Pythagoras kita dapatkan bahwa norma suatu vektor **u** = (u_1, u_2) dalam ruang berdimensi 2 adalah

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \qquad (1)$$



(*a*)



(*b*)

Figure 3.2.2

Mengacu ke Gambar 3.2.2. Anggap **u** = (u_1, u_2, u_3) adalah vektor dalam ruang berdimensi 3. Dengan menggunakan Gambar 3.2.2.b dan dua penerapan teorema Pythagoras, kita peroleh

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= (QR)^2 + (RP)^2 \\ &= (OQ)^2 + (OS)^2 + (RP)^2 \\ &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\end{aligned}$$

Jadi

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \qquad (2)$$

Suatu vektor bernorma 1 disebut suatu **vektor satuan**.

Jika $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah dua titik dalam ruang berdimensi 3, maka jarak d antara kedua titik tersebut adalah norma vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ (Gambar 3.2.3).

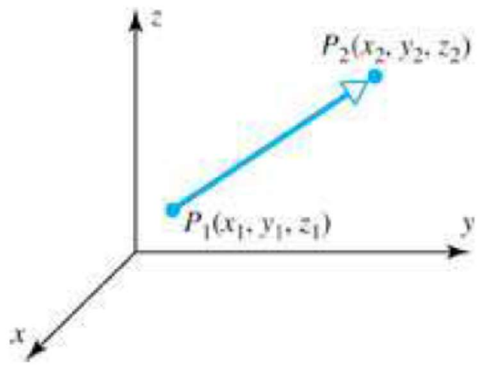


Figure 3.2.3
The distance between P_1 and P_2 is the norm of the vector $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Karena $\overrightarrow{P_1P_2}$ = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) maka dari (2) kita dapatkan

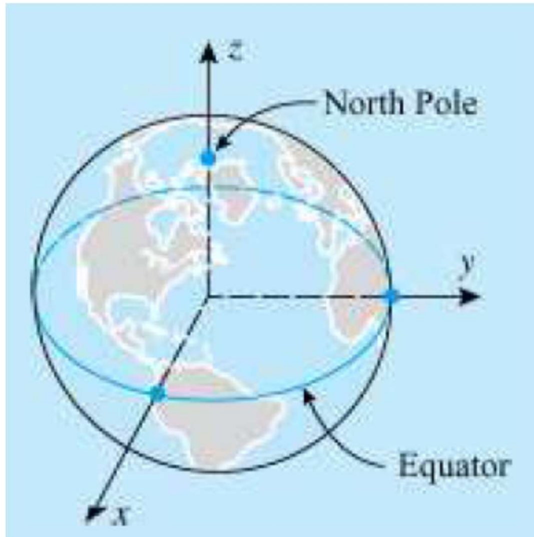
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Demikian juga, jika P_1 (x_1, y_1) dan P_2 (x_2, y_2) adalah titik-titik dalam ruang berdimensi 2, maka jarak antara kedua titik tersebut diberikan oleh

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

GLOBAL POSITIONING

GPS () adalah sistem yang digunakan oleh militer, kapal, pilot pesawat, surveyor, perusahaan utilitas, mobil, dan pejalan kaki untuk menemukan posisi saat ini dengan berkomunikasi dengan sistem satelit. Sistem, yang dioperasikan oleh Departemen Pertahanan AS, secara nominal menggunakan 24 satelit yang mengorbit Bumi setiap 12 jam pada ketinggian sekitar 11.000 mil. Satelit-satelit ini bergerak dalam enam bidang orbit yang telah dipilih untuk membuat antara lima dan delapan satelit terlihat dari titik mana pun di Bumi.



Untuk menjelaskan cara kerja sistem, anggaplah Bumi bulat, dan anggaplah ada sistem koordinat-xyz dengan asalnya di pusat Bumi dan sumbu z melalui Kutub Utara. Mari kita asumsikan bahwa relatif terhadap sistem koordinat ini sebuah kapal berada pada titik yang tidak diketahui (x, y, z) pada suatu waktu t. Untuk mempermudah, asumsikan jarak diukur dalam satuan yang sama dengan jari-jari bumi, sehingga koordinat kapal selalu memenuhi persamaan

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

GPS mengidentifikasi koordinat kapal (x, y, z) pada waktu t menggunakan sistem triangulasi dan menghitung jarak dari empat satelit. Jarak ini dihitung menggunakan kecepatan cahaya (kira-kira 0,469 jari-jari Bumi per seperseratus detik) dan waktu yang dibutuhkan sinyal untuk melakukan perjalanan dari satelit ke kapal. Misalnya, jika kapal menerima sinyal pada waktu t dan satelit menunjukkan bahwa ia mengirimkan sinyal pada waktu t_0, maka jarak yang ditempuh oleh sinyal tersebut adalah

$$d = 0.469(t-t_0)$$

Secara teori, mengetahui tiga jarak kapal-ke-satelit akan cukup untuk menentukan tiga koordinat kapal yang tidak diketahui. Namun, masalahnya adalah bahwa kapal (atau pengguna GPS lainnya) umumnya tidak memiliki jam yang dapat t menghitung dengan cukup akurat untuk penentuan posisi global. Jadi, variabel t harus dianggap sebagai variabel keempat yang tidak diketahui, dan karenanya diperlukan untuk jarak ke satelit keempat. Misalkan selain mentransmisikan waktu t_0, setiap satelit juga memancarkan koordinatnya (x_0, y_0, z_0) pada saat itu, sehingga memungkinkan d dihitung sebagai

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

Jika sekarang kita menyamakan kuadrat d dari kedua persamaan dan membulatkannya ke tiga tempat desimal, maka kita mendapatkan persamaan derajat kedua

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0.22(t - t_0)^2$$

Karena ada empat satelit yang berbeda, dan kita bisa mendapatkan persamaan seperti ini untuk masing-masing satelit, kita bisa menghasilkan empat persamaan dalam x, y, z, dan t_0. Meskipun ini adalah persamaan tingkat dua, persamaan ini dan beberapa aljabar dapat digunakan untuk menghasilkan sistem persamaan linier yang dapat diselesaikan untuk hal-hal yang tidak diketahui.

Contoh :

Norma vektor **u** = (-3, 2, 1) adalah

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$$

Jarak d antara titik $P_1(2, -1, -5)$ dan $P_2(4, -3, 1)$ adalah

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (-3-(-1))^2 + (1-(-5))^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

Dari definisi hasil kali k**u**, panjang vektor k**u** adalah |k| kali panjang **u**. Jika dinyatakan dalam suatu persamaan, pernyataan ini mengatakan bahwa

$$\|k\boldsymbol{u}\| = |k|\|\boldsymbol{u}\|$$

Rumus ini dapat diterapkan baik dalam ruang berdimensi 2 maupun ruang berdimensi 3.

LATIHAN

1. Sketsalah vektor-vektor berikut ini dengan titik pangkal diletakkan pada titik asal
   a. v_1 = (3,6)
   b. v_2 = (-4, -8)
   c. v_3 = (5, -4)
   d. v_4 = (3, 4, 5)
2. Anggap **u** = (-3, 1, 2), **v** = (4, 0, -8) dan **w** = (6, -1, -4). Carilah komponen-komponen dari
   a. **v** – **w**
   b. 6**u** – 2**v**
   c. –**v** + **u**
   d. 5(**v** – 4**u**)
   e. -3(**v** – 8**w**)
   f. (2**u** – 7**w**) – (8**v** + **u**)
3. Cari jarak antara P_1 dan P_2
   a. $P_1(3, 4)$ $P_2(5, 7)$
   b. $P_1(-3, 6)$ $P_2(-1, -4)$
   c. $P_1(7, -5, 1)$ $P_2(-7, -2, -1)$
   d. $P_1(3, 3, 3)$ $P_2(6, 0, 3)$
4. Anggap **u** = (2, -2, 3) **v** = (1, -3, 4) **w** = (3, 6, -4). Pada masing-masing bagian hitunglah ekspresi yang ditunjukkan
   a. $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|$
   b. $\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$
   c. $\|-2\boldsymbol{u}\| + 2\|\boldsymbol{u}\|$
   d. $\|3\boldsymbol{u} - 5\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\|$

Referensi

1. Howard Anton and Chris Rorres, Elementary Linear Algebra with Application, John Wiley and Sons, 2005
2. Howard Anton (alih bahasa : Ir. Hari Suminto), Dasar-dasar Aljabar Linear, Jilid 1, Interaksara, 2000.