# GARIS DAN BIDANG DALAM RUANG BERDIMENSI 3

**Bidang-bidang dalam ruang berdimensi 3.**

Dalam geometri analitis bidang, sebuah garis bisa didapatkan dengan menentukan kemiringan dan salah satu titiknya. Demikian juga, sebuah bidang dalam ruang berdimensi tiga bisa didapatkan dengan menentukan inklinasi dan salah satu titiknya. Sebuah metode yang mudah untuk menguraikan inklinasi adalah dengan menentukan suatu vektor tak-nol (disebut suatu normal) yang tegak lurus dengan bidang tersebut.

Anggap kita ingin persamaan persamaan bidang tersebut melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan mempunyai vektor tak-nol **n** = (a, b, c) sebagai normal. Terbukti dari Gambar 1 bahwa bidang tersebut persis mengandung titik-titik P(x, y, z) itu dimana vektor $\overrightarrow{P_0P}$ ortogonal terhadap **n**, yaitu

$$\boldsymbol{n} \,.\, \overrightarrow{P_0P} = 0 \qquad (1)$$

Karena $\overrightarrow{P_0P}$ = $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, maka persamaan (1) bisa ditulis sebagai

$$a(x - x_0) + by - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad (2)$$

Kita sebut ini bentuk ***normal-titik*** dari persamaan sebuah bidang

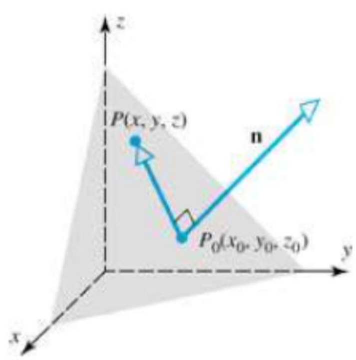


Figure 3.5.1
Plane with normal vector.

Contoh 1. Cari sebuah persamaan bidang yang melalui titik (3, -1, 7) dan tegak lurus terhadap vektor **n** = (4, 2, -5).

Penyelesaian. Dari (2) bentuk normal-titiknya adalah

4(x – 3) + 2(y+1) – 5(z-7) = 0

Dengan mengalikan dan mengumpulkan suku-suku, (2) bisa ditulis ulang dalam bentuk

$ax + by + cz + d = 0$

dimana a, b, c, dan d adalah konstanta, dan a, b dan c tidak semuanya nol. Misalnya, persamaan dalam contoh 1 bisa ditulis ulang sebagai

$4x + 2y - 5z + 25 = 0$

Sebagaimana yang ditunjukkan oleh teorema berikut ini, setiap persamaan berbentuk $ax + by + cz + d = 0$ mewakili sebuah bidang dalam ruang berdimensi 3.

Teorema 3.5.1. Jika a, b, c dan d adalah konstanta dan a, b dan c tidak semuanya nol, maka grafik persamaan

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (3)$$

adalah sebuah bidang yang mempunyai vektor $\mathbf{n} = (a, b, c)$ sebagai normal.

Persamaan (3) adalah suatu persamaan linear dalam x, y, dan z; ini disebut bentuk umum dari persamaan sebuah bidang.

Sebagaimana penyelesaian suatu sistem persamaan linear

$ax + by = k_1$

$cx + dy = k_2$

berpadanan dengan titik-titik potong garis $ax + by + = k_1$ dan $cx + dy = k_2$ dalam bidang-xy, demikian juga penyelesaian sebuah sistem

$ax + by + cz = k_1$

$dx + ey + fz = k_2$

$gx + hy + iz = k_3$

berpadanan dengan titik potong tiga bidang $ax + by + cz = k_1$, $dx + ey + fz = k_2$, $gx + hy + iz = k_3$.

Dalam Gambar 3.5.2 kita telah mengilustrasikan beberapa kemungkinan geometris yang terjadi jika (4) mempunyai nol, satu atau tak-hingga banyaknya penyelesaian.

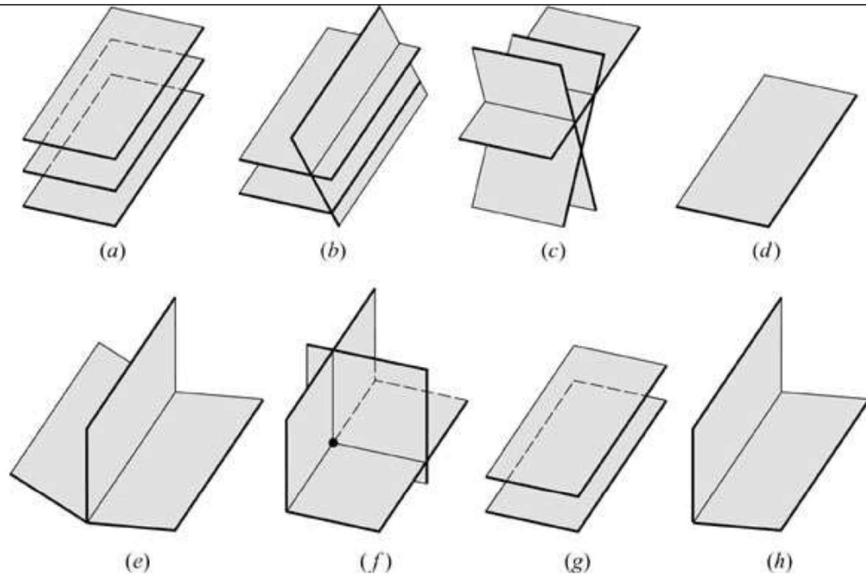


Figure 3.5.2

(*a*) No solutions (3 parallel planes). (*b*) No solutions (2 parallel planes). (*c*) No solutions (3 planes with no common intersection). (*d*) Infinitely many solutions (3 coincident planes). (*e*) Infinitely many solutions (3 planes intersecting in a line). (*f*) One solution (3 planes intersecting at a point). (*g*) No solutions (2 coincident planes parallel to a third plane). (*h*) In.nitely many solutions (2 coincident planes intersecting a third plane).

Contoh 2. Cari persamaan bidang yang melalui titik-titik $P_1(1, 2, -1)$, $P_2(2, -3, 1)$ dan $P_3(3, -1, 2)$

Penyelesaian. Karena ketiga titik tersebut terletak pada bidang, maka koordinat-koordinatnya harus memenuhi persamaan umum ax + by + cz + d = 0 dari bidang tersebut. Jadi,

$a - 2b - c + d = 0$

$2a + 3b + c + d = 0$

$3a - b + 2c + d = 0$

Dengan menyelesaikan sistem ini, kita akan mendapatkan

$$a = -\frac{9}{16}t, \quad b = -\frac{1}{16}t, \quad c = \frac{5}{16}t, \quad d = t$$

Misalnya, anggap t = -16, maka kita akan mendapatkan persamaan

$9x + y - 5z - 16 = 0$

Kita perhatikan bahwa setiap pilihan t lainnya memberikan suatu penggandaan dari persamaan ini, sehingga sebarang nilai t ≠ 0 juga akan memberikan suatu persamaan bidang yang sahih.

## Bentuk Vektor dari Persamaan sebuah Bidang

Notasi vektor memberikan suatu cara alternatif yang berguna untuk menuliskan bentuk normal-titik darii persamaan sebuah bidang. Mengacu pada Gambar 3, anggap **r** = (x, y, z) adalah vektor dari titik asal ke titik P(x, y, z), anggap $\mathbf{r}_0$ = ($x_0$, $y_0$, $z_0$) adalah vektor dari titik asal ke titik $P_0$($x_0$, $y_0$, $z_0$) dan anggap **n** = (a, b, c) adalah suatu normal vektor pada bidang tersebut (Gambar 3).

Maka $\overrightarrow{P_0P}$ = **r** – $\mathbf{r}_0$ sehingga Rumus (1) bisa ditulis ulang sebagai

$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$

Ini disebut bentuk vektor dari persamaan sebuah bidang.

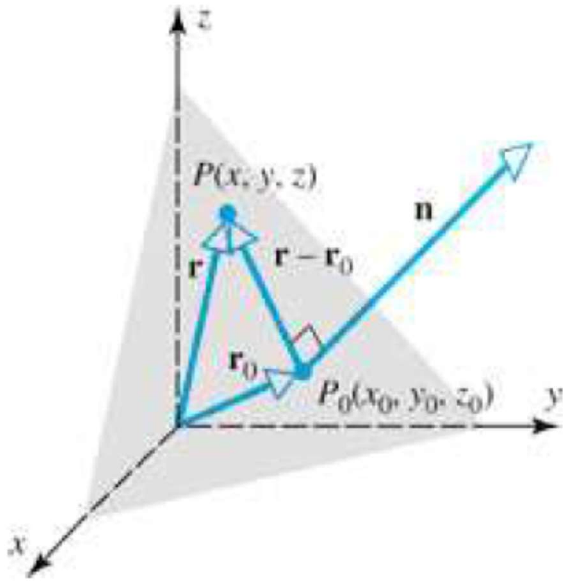


Figure 3.5.3

Contoh 3. Persamaan

(-1, 2, 5) . (x – 6, y – 3, z + 4) = 0

Adalah persamaan bidang dalam bentuk vektor yang melalui titik (6, 3, -4) dan tegak lurus terhadap vektor **n** = (-1, 2, 5)

**Garis-garis dalam Ruang Berdimensi 3.**

Sekarang kami akan menunjukkan bagaimana mendapatkan persamaan untuk garis dalam ruang berdimensi 3. Anggap l adalah garis dalam ruang berdimensi 3 yang melalui titik $P_0$($x_0$, $y_0$, $z_0$) dan sejajar dengan vektor tak nol **v** = (a, b, c). Jelas (Gambar 3.5.4.) bahwa l persis terdiri dari titik-titik Px, y, z) di mana vektor $\overrightarrow{P_0P}$ sejajar dengan v, yaitu, di mana terdapat skala t sedemikian sehingga

$\overrightarrow{P_0P}$ = t**v**

Dalam bentuk komponen, (6) bisa ditulis sebagai

(x – $x_0$, y – $y_0$, z – $z_0$) = (ta, tb, tc)

Yang dari padanya kita dapatkan bahwa $x - x_0 = ta$, $y - y_0 = tb$, dan $z - z_0 = tc$, sedemikian sehingga

$x = x_0 + ta$, $y = y_0 + tb$, $z = z_0 + tc$

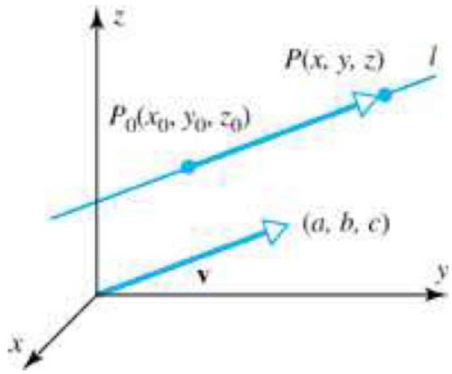


**Figure 3.5.4**
$\overrightarrow{P_0P}$ is parallel to $\boldsymbol{v}$.

Ketika parameter t berubah-ubah dari $-\infty$ ke $+\infty$ titik P(x,y,z) menelusuri garis l. Persamaan

$x = x_0 + ta$, $y = y_0 + tb$, $z = z_0 + tc$ $\quad (-\infty < t < +\infty)$

disebut persamaan parametrik untuk l.

Contoh 4. Garis yang melalui titik (1, 2, -3) dan sejajar dengan vektor **v** = (4, 5, -7) mempunyai persamaan parametrik

$x = 1 + 4t$, $y = 2 + 5t$, $z = -3 - 7t$ $\quad (-\infty < t < +\infty)$

Contoh 5.

a) Cari persamaan parametrik untuk garis l yang melalui titik-titik $P_1(2, 4, -1)$ dan $P_2(5, 0, 7)$
b) Dimanakah garis tersebut memotong bidang-xy?

Penyelesaian (a). Karena vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ = (3, -4, 8) sejajar dengan l dan $P_1(2, 4, -1)$ terletak pada l, maka garis l diberikan oleh

$x = 2 + 3t$, $y = 4 - 4t$, $z = -1 + 8t$ $\quad (-\infty < t < +\infty)$

Penyelesaian (b). Garis tersebut memotong bidang-xy pada titik di mana $z = -1 + 8t = 0$, yaitu, dimana $t = \frac{1}{8}$. Dengan mensubstitusi nilai t ini dalam persamaan parametrik untuk l kita akan mendapatkan titik potong

$$(x, y, z) = \left(\frac{19}{8}, \frac{7}{2}, 0\right)$$

Contoh 6. Cari persamaan parametrik untuk garis potong bidang-bidang

3x + 2y – 4z – 6 = 0 dan x – 3y – 2z – 4 = 0

Penyelesaian. Garis potong terdiri dari semua titik (x, y, z) yang memenuhi dua persamaan dalam sistem

3x + 2y + 4z = 6

x – 3y – 2z = 4

Dengan menyelesaikan sistem ini kita akan mendapatkan

$$x = \frac{26}{11} + \frac{16}{11}t, \;\; y = -\frac{6}{11} - \frac{2}{11}t, \quad z = t$$

Oleh sebab itu, persamaan parametrik untuk l adalah

$x = \frac{26}{11} + \frac{16}{11}t, \;\; y = -\frac{6}{11} - \frac{2}{11}t, \quad z = t$ (-∞ < t < +∞)

**<u>Bentuk vektor dari Persamaan sebuah Garis</u>**

Notasi vektor memberikan sebuah cara alternatif yang berguna untuk menuliskan persamaan parametrik sebuah garis : Mengacu pada Gambar 3.5.3, anggap **r** = (x,y,z) adalah vektor dari titik asal ke titik P(x,y,z) anggap $\mathbf{r}_0$ = ($x_0$, $y_0$, $z_0$) adalah vektor dari titik asal ke titik $P_0$ ($x_0$, $y_0$, $z_0$) dan anggap v = (a,b,c) adalah sebuah vektor yang sejajar dengan garis tersebut (Gambar 3.5.5.) Maka $\overrightarrow{P_0P}$ = **r** – $\mathbf{r}_0$**,** sehingga Rumus (6) bisa ditulis ulang sebagai

$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = tv$

Dengan memperhitungkan kisaran nilai-t, persamaan ini bisa ditulis ulang sebagai

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + tv$ (-∞ < t < +∞)

Ini disebut bentuk dari persamaan sebgai garis dalam ruang berdimensi 3.

Contoh 7. Persamaan

(x,y,z) = (-2, 0, 3) + r(4, -7, 1) (-∞ < t < +∞)

Adalah persamaan garis dalam bentuk vektor yang melalui titik (-2, 0, 3) yang sejajar dengan vektor **v** = (4, -7, 1)

Beberapa Masalah tentang Jarak

Dua “masalah jarak” dasar dalam ruang berdimensi 3.

a) Cari jarak antara sebuah titik dan sebuah bidang
b) Cari jarak antara dua bidang yang sejajar

Kedua masalah tersebut berkaitan. Jika kita bisa mencari jarak antara sebuah titik dan sebuah bidang, maka kita bisa mencari jarak antara dua bidang yang sejajar dengan menghitung jarak antara salah satu bidang dengan sebarang titik $P_0$ pada bidang satunya lagi (Gambar 3.5.6)

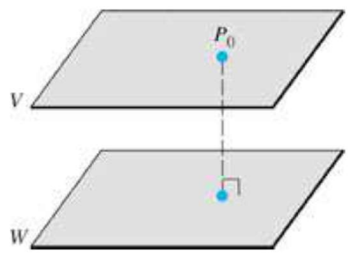


**Figure 3.5.6** The distance between the parallel planes $V$ and $W$ is equal to the distance between $P_0$ and $W$.

| |
|---|
| Teorema 3.5.2. Jarak D antara sebuah titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan bidang ax + by + cz + d = 0 adalah<br>$$D = \frac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (9)$$ |

Bukti. Anggap $Q(x_1, y_1, z_1)$ adalah sebarang titik pada bidang tersebut. Posisikan normal **n** = (a, b, c) sedemikian sehingga titik pangkalnya ada pada Q. Sebagaimana yang diilustrasikan pada Gambar 5.5.7, jarak D sama dengan panjang proyeksi ortogonal $\overrightarrow{QP_0}$ pada **n**. Jadi, dari materi sebelumnya

$$D = \lVert \text{proj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{QP_0} \rVert = \frac{\lvert \overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n} \rvert}{\lVert \mathbf{n} \rVert}$$

Tetapi

$$\overrightarrow{QP_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$
$$\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)$$
$$\lVert \mathbf{n} \rVert = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Jadi

$$D = \frac{\lvert a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Karena titik $Q(x_1, y_1, z_1)$ terletak pada bidang tersebut, maka koordinatnya memenuhi persamaan bidang, jadi

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

Atau

$$d = -ax_1 - by_1 - cz_1$$

Dengan mensubstitusi ekspresi ini pada (10) kita akan mendapatkan (9).

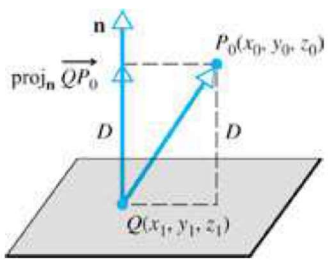


**Figure 3.5.7** Distance from $P_0$ to plane.

Contoh 8. Cari jarak D antara titik (1, -4, -3) dan bidang 2x – 3y + 6z = -1

Penyelesaian. Untuk menerapkan (9), pertama-tama kita menuliskan ulang persamaan bidang dalam bentuk

$2x - 3y + 6z + 1 = 0$

Maka

$$D = \frac{|2(1) + (-3)(-4) + 6(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-3|}{7} = \frac{3}{7}$$

Diketahui dua bidang, keduanya bisa berpotongan, di mana kita bisa menanyakan garis atau titik potongnya, sebagaimana dalam Contoh 6, atau sejajar, dimana kita bisa menanyakan jarak antara keduanya. Contoh berikut ini mengilustrasikan masalah yang kedua.

Contoh 9. Bidang-bidang

$x + 2y - 2z = 3$ dan $2x + 4y - 4z = 7$

sejajar karena normalnya (1, 2, -2) dan (2, 4, -4) adalah vektor-vektor yang paralel. Cari jarak antara keduanya.

Penyelesaian. Untuk mencari jarak D antara kedua bidang tersebut, kita bisa memilih sebarang titik pada salah satu bidang dan menghitung jaraknya ke bidang lainnya. Dengan menetapkan y = z = 0 dalam persamaan x + 2y – 2z = 3, kita dapatkan titik $P_0(3, 0, 0)$ pada bidang ini. Dari (9), jarak antara $P_0$ dan bidang 2x + 4y – 4z = 7 adalah

$$D = \frac{|2(3) + 4(0) + (-4)(0) - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{6}$$

**Latihan**

1. Cari suatu bentuk normal-titik dari persamaan bidang yang melalui P dan mempunyai **n** sebagai normal.

(a) $P(-1, 3, -2)$; $\mathbf{n} = (-2, 1, -1)$

(b) $P(1, 1, 4)$; $\mathbf{n} = (1, 9, 8)$

(c) $P(2, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (0, 0, 2)$

(d) $P(0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (1, 2, 3)$

2. Cari sebuah persamaan untuk bidang yang melalui titik-titik yang diberikan di bawah ini.

(a) $P(-4, -1, -1)$, $Q(-2, 0, 1)$, $R(-1, -2, -3)$

(b) $P(5, 4, 3)$, $Q(4, 3, 1)$, $R(1, 5, 4)$

3. Tentukan apakah bidang-bidang di bawah ini sejajar

(a) $4x - y + 2z = 5$ and $7x - 3y + 4z = 8$

(b) $x - 4y - 3z - 2 = 0$ and $3x - 12y - 9z - 7 = 0$

(c) $2y = 8x - 4z + 5$ and $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}y$

4. Tentukan apakah garis-garis berikut tegak lurus.

(a) $3x - y + z - 4 = 0$, $x + 2z = -1$

(b) $x - 2y + 3z = 4$, $-2x + 5y + 4z = -1$

Referensi


1. Howard Anton and Chris Rorres, Elementary Linear Algebra with Application, John Wiley and Sons, 2005
2. Howard Anton (alih bahasa : Ir. Hari Suminto), Dasar-dasar Aljabar Linear, Jilid 1, Interaksara, 2000.