

SPL

(SISTEM PERSAMAAN LINEAR)

Ilham R Arvianto, M.Pd

ir.arvianto@akakom.ac.id

Persamaan Linear

Bentuk Umum

Suatu persamaan linear yang mengandung n peubah x_1, x_2, \dots, x_n dinyatakan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

dengan a_1, a_2, \dots, a_n adalah koefisien dan b adalah konstanta. Peubah (variabel) yang dimaksud **bukan** merupakan fungsi trigonometri, fungsi logaritma ataupun fungsi eksponensial.

- Perhatikan:**
- 1) $x_1 + x_2 = 4$ → Pers. linear 2 variabel
 - 2) $2x - 3y = 2z + 1$ → Pers. linear 3 variabel
 - 3) $2\log x + \log y = 2$ → **Bukan** pers. linear
 - 4) $2e^x = 2x + 3$ → **Bukan** pers. linear

Sistem Persamaan Linear

Definisi

Sistem persamaan linear adalah **himpunan** dari beberapa persamaan linear.

Contoh:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Jenis Sistem Persamaan Linear

Carilah solusi dari system pers. linear berikut!

$$(1) \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

→ Memiliki solusi **tunggal**, yaitu = (2,0)

$$(2) \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

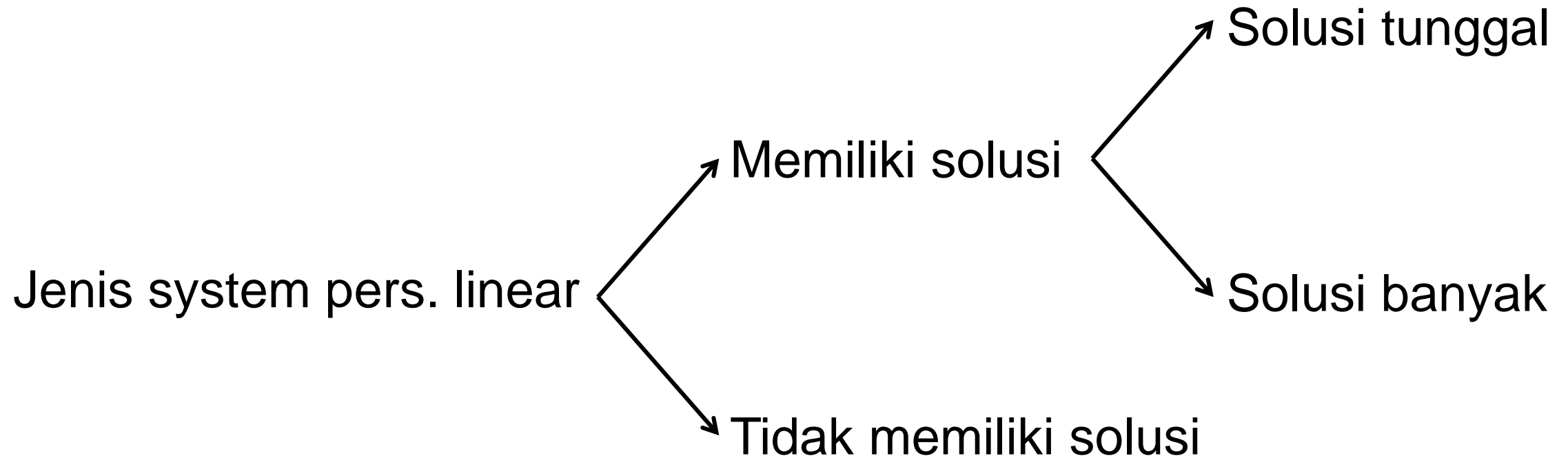
→ Memiliki solusi **banyak**, yaitu:

- Solusi Umum = $(a, 2 - a)$
- Solusi Khusus = $(0, 2), (1, 1), (80, -78), \dots$

$$(3) \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

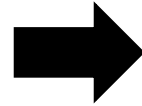
→ **Tidak memiliki** solusi, karena tidak konsisten

Jenis Sistem Persamaan Linear

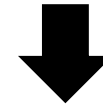


Menyajikan Sis. Pers. Linear dalam Matriks

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$



$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_B$$



$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array} \right)$$

Matriks Diperbesar A dan B

Metode Penyelesaian SPL

1. Substitusi
2. Eliminasi
- 3. Gauss**
- 4. Gauss-Jordan**
5. Cramer

Metode Gauss dan Metode Gauss-Jordan

- **Metode Gauss** adalah metode penyelesaian SPL dengan cara mengubah **matriks diperbesar** → **matriks EB**
- **Metode Gauss-Jordan** adalah metode penyelesaian SPL dengan cara mengubah **matriks diperbesar** → **matriks EBT**

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \begin{array}{l} \text{Ubah matriks (A|B)} \\ \text{menjadi bentuk EBT} \end{array}$$

Matriks Diperbesar A dan B

Contoh 1 : Penyelesaian dgn Mtd. Gauss-Jordan

Selesaikan sistem persamaan linear berikut!

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 3z = 6 \\ x + 8z = -6 \end{array} \right. \rightarrow (A \mid B) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 2 & 5 & 3 & | & 6 \\ 1 & 0 & 8 & | & -6 \end{pmatrix}}_{\text{Matriks Diperbesar}} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Eselon Baris Tereduksi}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jadi, **solusinya tunggal.**

Contoh 2 : Penyelesaian dgn Mtd. Gauss-Jordan

Selesaikan sistem persamaan linear berikut!

$$\left| \begin{array}{l} x + 2z = 1 \\ -x + y - z = 0 \\ 2x + y + 5z = 3 \end{array} \right. \rightarrow (A \mid B) = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{array} \right)}_{\text{Matriks Diperbesar}} \sim \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)}_{\text{Eselon Baris Tereduksi}}$$

$$\begin{pmatrix} x + 2z \\ y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left| \begin{array}{l} x + 2z = 1 \rightarrow x = 1 - 2z \\ y + z = 1 \rightarrow y = 1 - z \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 1 - t \\ t \end{pmatrix}$$

Karena kolom ke-3 (kolom z) tidak memiliki kunci, maka dapat dimisalkan $z = t$.

Jadi, **solusinya banyak.**

Contoh 3 : Penyelesaian dgn Mtd. Gauss-Jordan

Selesaikan sistem persamaan linear berikut!

$$\left| \begin{array}{l} 2x + 2z = 4 \\ -2x + y = -3 \\ x + 2y + 5z = 6 \end{array} \right. \rightarrow (A \mid B) = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} \right)}_{\text{Matriks Diperbesar}} \sim \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)}_{\text{Eselon Baris Tereduksi}}$$

Pada B_3 matriks eselon baris tereduksi didapatkan persamaan:

$$0x + 0y + 0z = 2$$

hal ini jelas menunjukkan bahwa **tidak ada** nilai untuk x , y dan z yang memenuhi persamaan karena apapun nilai x , y dan z nya, ruas kiri akan selalu bernilai nol jadi nilai 2 tidak akan tercapai.

Jadi, tidak memiliki solusi

Latihan 1

Tentukan jenis dan solusi dari SPL berikut!

$$\text{a. } \begin{cases} x_1 + x_2 + 6x_3 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -2x - 4y + 2z = -2 \end{cases}$$

Latihan 2

Misalkan matriks berikut adalah hasil pengubahan matriks diperbesar menjadi bentuk EB, kolom 1 (x_1), kolom 2(x_2) dan seterusnya, serta kolom terakhir adalah konstanta (b) maka tentukan jenis dari tiap SPL dan tentukan solusinya!

$$\text{a. } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

$$\text{c. } \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{b. } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{d. } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Terima Kasih