Himpunan

Ilham Rais Arvianto
F. Wiwiek Nurwiyati

(diadopsi dari Bahan Kuliah Matematika Diskrit ITB – *Rinaldi Munir*)

Pertemuan 2

Definisi

- Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek yang *berbeda*.

- Objek di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**.

- HMIF adalah contoh sebuah himpunan, di dalamnya berisi anggota berupa mahasiswa. Tiap mahasiswa berbeda satu sama lain.

- Satu *set* huruf (besar dan kecil)

Perhatikan bedanya:

{1, 2, 3, 4, 5, 6 } → Himpunan (*set*)

{1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6} → Bukan himpunan
→ Himpunan-ganda (*multi-set*)

Cara Penyajian Himpunan

1. Enumerasi

Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci.

Contoh 1.

- Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.
- C = {kucing, a, Amir, 10, paku}
- $R = \{ a, b, \{a, b, \mathrm{c}\}, \{a, c\} \}$
- $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$
- $K = \{ \{\} \}$
- Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, ..., 100 \}$
- Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A;

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

- **Contoh 2.** Misalkan:

  $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ a, b, \{a, b, \text{c}\}, \{a, c\} \}$

  $K = \{\{\}\}$

  maka

  $3 \in A$

  $\{a, b, c\} \in R$

  $c \notin R$

  $\{\} \in K$

  $\{\} \notin R$

Contoh 3. Bila $P_1 = \{a, b\}$,

$P_2 = \{ \{a, b\} \}$,

$P_3 = \{\{\{a, b\}\}\}$,

maka

$a \in P_1$

$a \notin P_2$

$P_1 \in P_2$

$P_1 \notin P_3$

$P_2 \in P_3$

2. ***Simbol-simbol Baku***

P = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }

N = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }

Z = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan U.

Contoh: Misalkan U = {1, 2, 3, 4, 5} dan A adalah himpunan bagian dari U, dengan A = {1, 3, 5}.

3. ***<u>Notasi Pembentuk Himpunan</u>***

Notasi: $\{\, x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x \,\}$

Contoh 4.

(i) A adalah himpunan bilangan bulat positif kecil dari 5

$A = \{\, x \mid x \text{ bilangan bulat positif lebih kecil dari } 5\}$

atau $A = \{\, x \mid x \in P, x < 5 \,\}$

yang ekivalen dengan $A = \{1, 2, 3, 4\}$

(ii) $M = \{\, x \mid x$ adalah mahasiswa yang mengambil kuliah IF2151$\}$

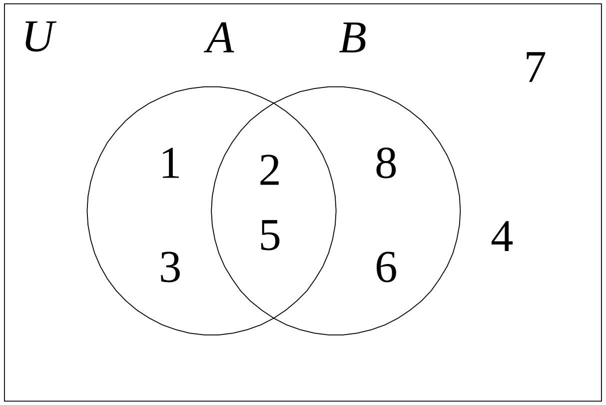
4. Diagram Venn

Contoh 5.

Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8},

A = {1, 2, 3, 5} dan B = {2, 5, 6, 8}.

Diagram Venn:



Kardinalitas

Jumlah elemen di dalam A disebut **kardinal** dari himpunan A.

Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh 6.

(i) $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima lebih kecil dari 20 $\}$,

atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$

(ii) T = {kucing, a, Amir, 10, paku}, maka $|T| = 5$

(iii) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$, maka $|A| = 3$

Himpunan kosong (*null set*)

- Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*).
- Notasi : ∅ atau {}

Contoh 7.

(i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$

(ii) P = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka $n(P) = 0$

(iii) $A = \{x \mid x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0 \}$, $n(A) = 0$

- himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai {∅}
- himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai {∅, {∅}}
- {∅} bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

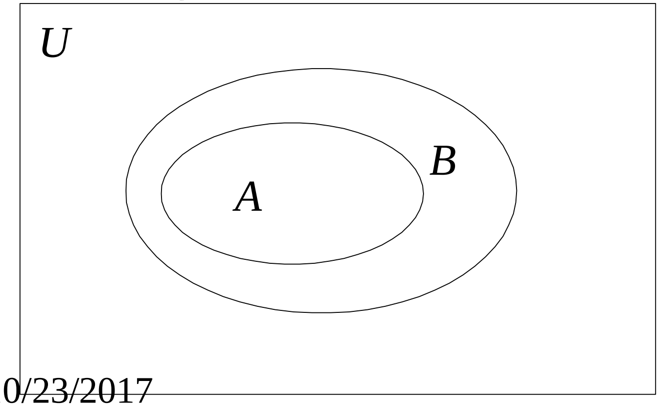
Himpunan Bagian (*Subset*)

- Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B.

- Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A.

- Notasi: $A \subseteq B$

- Diagram Venn:



Contoh 8.

(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

(iii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq, y \geq 0 \}$ dan

$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0$ dan $y \geq 0 \}$, maka $B \subseteq A$.

TEOREMA 1. Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).

(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\emptyset \subseteq A$).

(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

- $\varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\varnothing$ dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A.

  Contoh: $A = \{1, 2, 3\}$, maka $\{1, 2, 3\}$ dan $\varnothing$ adalah *improper subset* dari A.

- $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

  (i) $A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.
  A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B.
  Contoh: {1} dan {2, 3} adalah *proper subset* dari {1, 2, 3}

  (ii) $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

- Latihan

  [LIP00] Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tentukan semua kemungkinan himpunan C sedemikian sehingga $A \subset C$ dan $C \subset B$, yaitu A adalah *proper subset* dari C dan C adalah *proper subset* dari B.

Jawaban:

C harus mengandung semua elemen $A = \{1, 2, 3\}$ dan sekurang-kurangnya satu elemen dari B.

Dengan demikian, $C = \{1, 2, 3, 4\}$ atau $C = \{1, 2, 3, 5\}$.

C tidak boleh memuat 4 dan 5 sekaligus karena C adalah *proper subset* dari B.

Himpunan yang Sama

- $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.
- $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.
- Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh 9.

(i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

(iii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:

(a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$

(b) jika $A = B$, maka $B = A$

(c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Himpunan yang Ekivalen

- Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

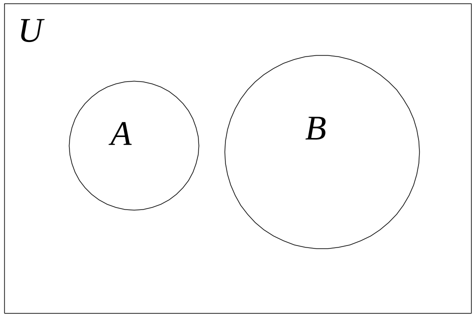
Contoh 10.
Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka
$A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

Himpunan Saling Lepas

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.

- Notasi : $A \,//\, B$

- Diagram Venn:



Contoh 11.
Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka $A \,//\, B$.

Himpunan Kuasa

- Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

- Notasi : $P(A)$ atau 2^A

- Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

Contoh 12.

Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = \{ \emptyset, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \}\}$

Contoh 13.

Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\emptyset\}$ adalah $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Latihan

Diberikan himpunan $A = \{1,2,3\}$, $B = \{\emptyset\}$, $C = \{1,2\}$, dan $D = \{3\}$. Tentukan :

a. Himpunan kuasa dari A dan B
b. Hubungan *proper subset* dan *improper subset* dari himpunan A dengan himpunan B, C, dan D
c. Kardinal dari himpunan A dan B

Berapa banyak elemen dari himpunan-himpunan berikut?

a) $P(\emptyset)$ b) $P(\{a,b,\{a,b\}\})$ c) $P(\{\emptyset,\{a,b,c\}\})$ d) $\{\emptyset,P(\{a,b\})\}$

Dikumpulkan melalui ELA dgn tulis tangan