Pertemuan 2

Estimasi dan Error

Angka Signifikan (Angka Benar)

Berapa kecepatannya?

48 km/jam ?

49 km/jam ?

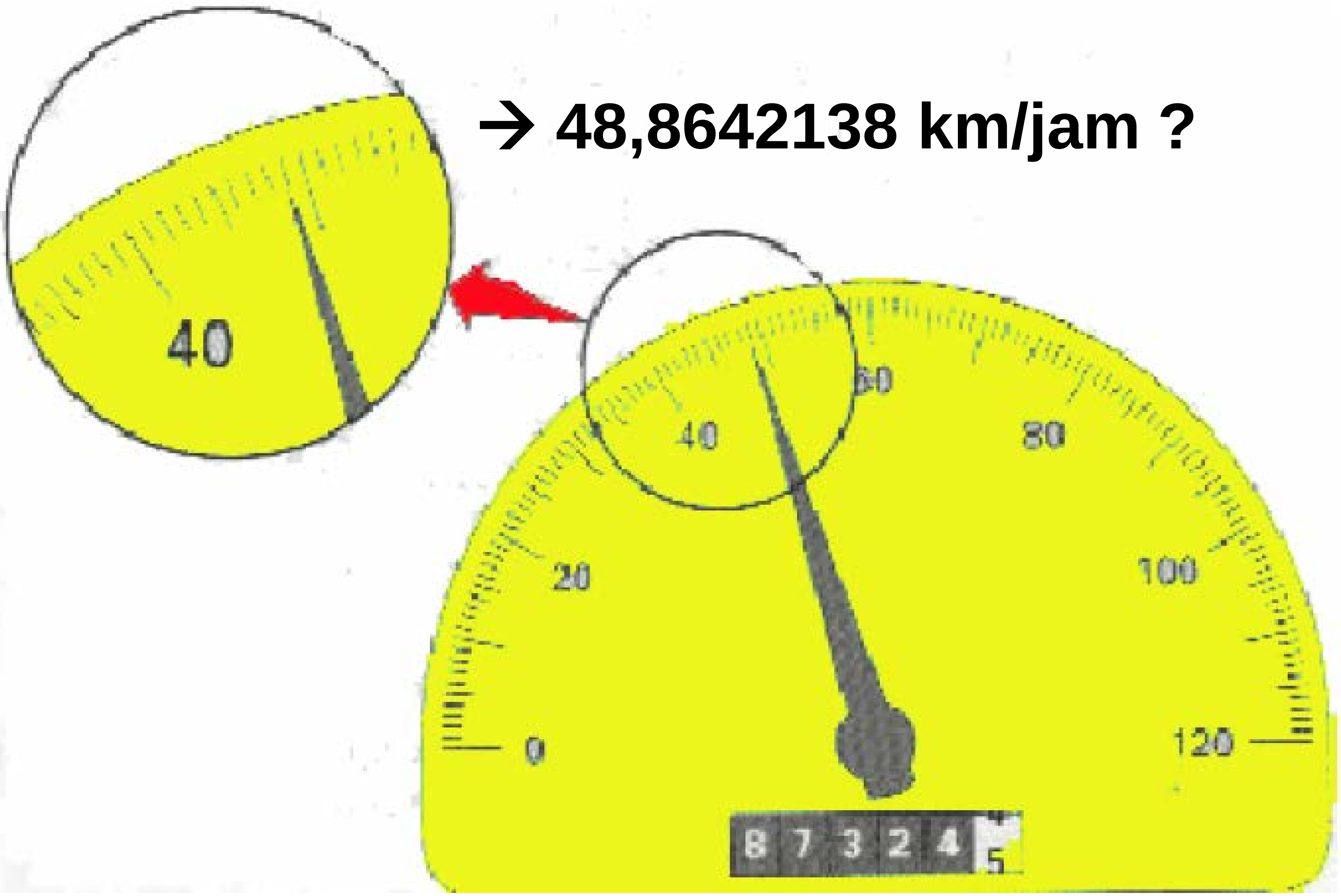
Dengan ketelitian 1 digit di belakang koma?

48,7 km/jam ?

48,8 km/jam ?

Dengan ketelitian 2 digit di belakang koma?

→ 48,8642138 km/jam ?



Speedometer dan Odometer

Angka Signifikan (Angka Benar)

- Angka signifikan menyatakan suatu keandalan sebuah nilai numeric.
- Banyaknya angka signifikan adalah banyaknya digit tertentu yang dapat meyakinkan kita.

Speedometer

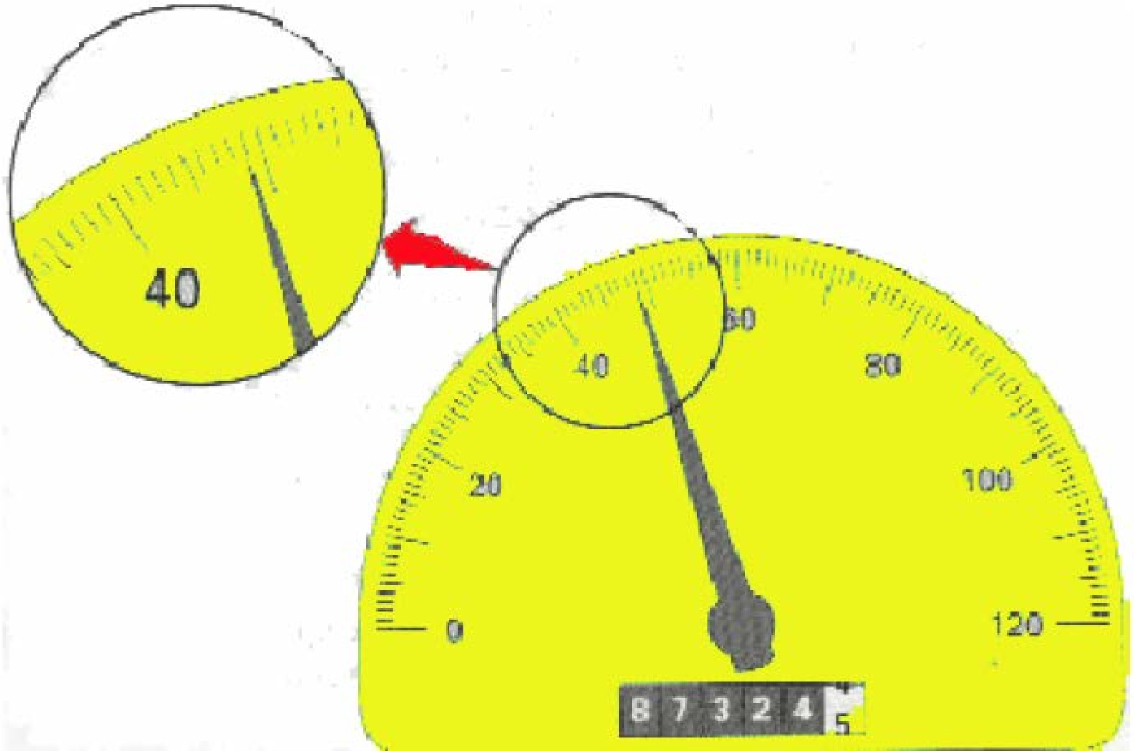
*Angka signifikan : 3

*Contoh : 48,7

Odometer

*Angka signifikan : 7

*Contoh : 87.324,45



Angka Signifikan (Angka Benar)

- Beberapa angka 0 (nol) tak selamanya angka signifikan, karena mereka diperlukan menepatkan sebuah titik decimal.

0,00001848
0,0001848
0,001848

→ 4 angka signifikan

- Jika beberapa angka 0 dipakai di bagian ekor suatu bilangan, tak jelas berapa banyaknya 0 yang signifikan.

45.300 → Tidak dapat ditentukan banyaknya angka signifikan

Alternatifnya, ditulis dalam notasi ilmiah:

$4{,}53 \times 10^4$	$4{,}530 \times 10^4$	$4{,}5300 \times 10^4$
(3 angka signifikan)	(4 angka signifikan)	(5 angka signifikan)

Angka Signifikan (Angka Benar)

Implikasi dari angka signifikan:

- MetNum mengandung hasil aproksimasi (pendekatan). Keyakinannya ditentukan oleh angka signifikan.
- Pernyataan secara eksak besar-besaran yang signifikan seperti π, dibatasi oleh tipa data yang dapat disimpan oleh komputer sampai sejumlah digit tertentu selebihnya diabaikan. Pengabaian ini dinamakan dengan kesalahan pembulatan (*round-off error*)

Error / Galat / Kesalahan

Error pada perhitungan numerik timbul karena:

- **Kesalahan pemotongan** (*truncation error*), dihasilkan sewaktu aproksimasi digunakan untuk menyatakan suatu prosedur matematika eksak.
- **Kesalahan pembualatan** (*round-off error*), dihasilkan bila angka-angka aproksimasi dipakai untuk menyatakan angka-angka eksak.

Error / Galat / Kesalahan

- Hubungan antara harga sebenarnya (*true value*), aproksimasi dan error adalah:

$$\text{Harga sebenarnya} = \text{Aproksimasi} + \text{Error}\left(\text{E}_{\text{t}}\right)$$

atau

$$\text{E}_{\text{t}} = \text{Harga sebenarnya} - \text{Aproksimasi}$$

- Bila besaran diperhitungkan dengan menormalisasikan error terhadap harga sebenarnya, maka diperoleh:

$$\text{Error relatif pecahan} = \frac{\text{E}_{\text{t}}}{\text{Harga sebenarnya}}$$

- Bila pers. di atas dinyatakan dalam persen:

$$\varepsilon_t = \frac{\text{E}_{\text{t}}}{\text{Harga sebenarnya}} \times 100\% \qquad\qquad \varepsilon_t = \text{persen error relatif}$$

Error / Galat / Kesalahan

Contoh:

Terdapat tugas untuk mengukur panjang sebuah jembatan dan sebuah paku. Diperoleh nilai 9.999 cm untuk panjang jembatan dan 9 cm untuk panjang paku. Jika harga sebenarnya adalah 10.000 cm dan 10 cm, maka hitunglah (a) Error dan (b) Error relative persen, untuk setiap kasus!

Jawab

(a) Error

Jembatan : E_t = 10.000 – 9.999 = 1 cm

Paku : E_t = 10 – 9 = 1 cm

(b) Error relative persen

Jembatan : $\varepsilon_t = \dfrac{1}{10.000} \times 100\% = 0{,}01\%$

Paku : $\varepsilon_t = \dfrac{1}{10} \times 100\% = 10\%$

Jadi, walaupun memiliki error yang sama (yaitu E_t = 1), tetapi pengukuran dikatakan lebih baik untuk jembatan.

Error / Galat / Kesalahan

- Dalam kenyataanya, jarang sekali kita bisa mengetahui harga sesungguhnya.
- **Error Aproksimasi,** alternatif untuk menormalisasi error dengan menggunakan pendekatan (aproksimasi) dari harga sebenarnya, yaitu:

$$\varepsilon_a = \frac{\text{error aproksimasi}}{\text{aproksimasi}} \times 100\%$$

- Jika digunakan pendekatan iterasi/perulangan untuk menghitung jawaban. Maka aproksimasinya dibuat berdasarkan suatu aproksimasi sebelumnya, dan proses ini dilakukan secara berulang.

$$\varepsilon_a = \frac{\text{aproksimasi sekarang - aproksimasi sebelumnya}}{\text{aproksimasi sekarang}} \times 100\%$$

- Proses iterasi/perulangan akan berakhir pada suatu **nilai persentase toleransi praspesifikasi**.

$$\left|\varepsilon_a\right| < \varepsilon_s$$

Error / Galat / Kesalahan

Hubungan Error dan Banyaknya Angka Signifikan

Jika kriteria berikut dipenuhi, dapat dijamin bahwa hasilnya adalah betul hingga sekurang-kurangnya n angka signifikan [Scarborough, 1966]

$$\varepsilon_s = \left(0{,}5 \times 10^{2-n}\right)\%$$

Contoh Aproksimasi Error dengan Iterasi

Fungsi eksponensial, dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut

$$\boxed{e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{4}}{4!} + \ldots + \frac{x^{n}}{n!}}$$

Perluasan deret **MacLaurin**

Semakin banyak suku ditambahkan dalam deret, aproksimasinya akan lebih baik.

Contoh Aproksimasi Error dengan Iterasi

Soal: Dengan menggunakan metode iterasi/perulangan, hitunglah hasil dari **e**^{0,5} sampai minimal memiliki 3 angka signifikan!

Tentukan nilai persentase toleransi praspesifikasi.

$$\varepsilon_s = \left(0,5 \times 10^{2-3}\right)\% = 0,05\%$$

Ingat: syarat $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$

Sebagai pembanding, nilai sebenarnya dari **e^{0,5} = 1,648721271**

1) Iterasi ke-1: $e^x \approx 1$

2) Iterasi ke-2

$$e^x \approx 1 + x$$

$$x = 0,5 \rightarrow e^{0,5} \approx 1 + 0,5 = 1,5$$

$$\varepsilon_t = \frac{1,648721271 - 1,5}{1,648721271} \times 100\% = 9,02\%$$

$$\varepsilon_a = \frac{1,5 - 1}{1,5} \times 100\% = 33,3\%$$

$$|\varepsilon_a| > \varepsilon_s \rightarrow \text{iterasi dilanjutkan}$$

Contoh Aproksimasi Error dengan Iterasi

3) Iterasi ke-3

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$x = 0{,}5 \rightarrow e^{0,5} \approx 1{,}5 + \frac{(0{,}5)^2}{2!} = 1{,}625$$

$$\varepsilon_t = \frac{1{,}648721271 - 1{,}625}{1{,}648721271} \times 100\% = 1{,}44\%$$

$$\varepsilon_a = \frac{1{,}625 - 1{,}5}{1{,}625} \times 100\% = 7{,}69\%$$

$$|\varepsilon_a| > \varepsilon_s \rightarrow \text{iterasi dilanjutkan}$$

4) Iterasi ke-4

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$x = 0{,}5 \rightarrow e^{0,5} \approx 1{,}625 + \frac{(0{,}5)^3}{3!} = 1{,}645833333$$

$$\varepsilon_t = \frac{1{,}648721271 - 1{,}645833333}{1{,}648721271} \times 100\% = 0.175\%$$

$$\varepsilon_a = \frac{1{,}645833333 - 1{,}625}{1{,}645833333} \times 100\% = 1{,}27\%$$

$$|\varepsilon_a| > \varepsilon_s \rightarrow \text{iterasi dilanjutkan}$$

Contoh Aproksimasi Error dengan Iterasi

$\varepsilon_s = 0{,}05\%$ $\quad$ $Syarat : |\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ $\quad$ Nilai sebenarnya: **$e^{0,5}$ = 1,648721271**

Iterasi	**Hasil**	$\varepsilon_t(\%)$	$\varepsilon_a(\%)$
1	1		
2	1,5	9,02	33,3
3	1,625	1,44	7,69
4	1,645833333	0,175	1,27
5	1,648437500	0,0172	0,158
6	1,648697917	0,00142	0,0158

Jadi, pada iterasi ke-6 diperoleh hasil bahwa **$e^{0,5}$ 🕔 1,648697917** dengan **error aproksimasi 0,0158%** (kurang dari 0,05%)

Round-Off Error (Kesalahan Pembulatan)

- Komputer hanya dapat menyimpan sejumlah angka signifikan selama kalkukasi. **Contoh** π = 3,141592 dengan mengabaikan suku-suku lainnya diperoleh E_t = 0,00000065 …
- Nama teknik penyimpanan ini adalah *chopping*, jadi tergantung tipe data yang digunakan.
- Tipe chopping
  - ✓ Mengambil digit bilangan sesuai dengan maksimal tipe datanya
  - ✓ Mengambil digit bilangan sesuai dengan maksimal tipe datanya dan memperhitungkan digit selanjutnya setelah dipotong, apakah perlu dibulatkan ataukah tidak. Cara ini memperlama waktu komputasi.

Soal : Hitung Aproksimasi Error dengan Iterasi

1) Hitunglah nilai dari sebenarnya dari **$e^{0,25}$** sampai dengan **minimal 3 angka signifikan** dengan menggunakan deret MacLaurin berikut.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

2) Hitunglah nilai dari sebenarnya dari **cos(π/3)** sampai dengan **minimal 2 angka signifikan** dengan menggunakan deret MacLaurin berikut.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots$$

Cara Meminimalkan Round-Off Error

1. **Pengelompokan**

   Ketika melakukan perhitungan pada bilangan yang kecil, seperti menjumlahkan, mengurangkan dll, pengelompokan membantu mengurangi rounf round-off errors.

   Contoh: menjumlahkan 0.00001 sebanyak 10.000 kali, dapat dikelompokkan menjadi 100 grup dengan setiap grup terdiri dari 100 nilai.

Cara Meminimalkan Round-Off Error

2. **Perluasan Deret Taylor**

3. **Menuliskan Kembali Persamaan yang Mencegahnya dari Operasi Pengurangan**

$$f(x) = x\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Tugas bab 2

- Silahkan kerjakan Soal yang ada dihal 15
- Soal no.1 bagi yang angka terakhir dari NIM adalah ganjil\
- Soal no.2 bagi yang angka terakhir dari NIM adalah nol atau genap
- Jawaban dikerjaka tulis tangan dikumpulkan max besok jumat pukul 10.00wib ke email merarinta@yahoo.com dg judul Metnumti3p2-NIM