SPL

(SISTEM PERSAMAAN LINEAR)

Ilham R Arvianto, M.Pd
ir.arvianto@akakom.ac.id

Persamaan Linear

Bentuk Umum

Suatu persamaan linear yang mengandung n peubah x_1, x_2, ..., x_n dinyatakan dalam bentuk

$$\boldsymbol{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b}$$

dengan a_1, a_2, ..., a_n adalah koofisien dan b adalah konstanta. Peubah (variabel) yang dimaksud **bukan** merupakan fungsi trigonometri, fungsi logaritma ataupun fungsi exponensial.

Perhatikan:

1) $x_1 + x_2 = 4$ → Pers. linear 2 variabel

2) $2x - 3y = 2z + 1$ → Pers. linear 3 variabel

3) $2\log x + \log y = 2$ → **Bukan** pers. linear

4) $2e^x = 2x + 3$ → **Bukan** pers. linear

Sistem Persamaan Linear

Definisi

Sistem persamaan linear adalah **himpunan** dari beberapa persamaan linear.

Contoh:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Jenis Sistem Persamaan Linear

Carilah solusi dari system pers. linear berikut!

$$(1)\left|\begin{array}{l} x+y=2 \\ x-y=2 \end{array}\right.$$

→ Memiliki solusi **tunggal**, yaitu = (2,0)

$$(2)\left|\begin{array}{r} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{array}\right.$$

→ Memiliki solusi **banyak**, yaitu:

- Solusi Umum = (a,2 - a)
- Solusi Khusus = (0,2), (1,1), (80,-78), ….

$$(3)\left|\begin{array}{r} x+y=2 \\ 2x+2y=6 \end{array}\right.$$

→ **Tidak memiliki** solusi, karena tidak konsisten

Jenis Sistem Persamaan Linear

- Jenis system pers. linear
  - Memiliki solusi
    - Solusi tunggal
    - Solusi banyak
  - Tidak memiliki solusi

Menyajikan Sis. Pers. Linear dalam Matriks

$$\left|\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \mid B) = \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)}_{\text{Matriks Diperbesar A dan B}}$$

Metode Penyelesaian SPL

1. Subtitusi
2. Eliminasi
3. **Gauss**
4. **Gauss-Jordan**
5. Cramer

Metode Gauss dan Metode Gauss-Jordan

- **Metode Gauss** adalah metode penyelesaian SPL dengan cara mengubah **matriks diperbesar → matriks EB**
- **Metode Gauss-Jordan** adalah metode penyelesaian SPL dengan cara mengubah **matriks diperbesar → matriks EBT**

$$(A \mid B) = \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)}_{\text{Matriks Diperbesar A dan B}}$$

➡

Gauss Jordan

Ubah matriks (A|B) menjadi bentuk **EBT**

Contoh 1 : Penyelesaian dgn Mtd. Gauss-Jordan

Selesaikan sistem persamaan linear berikut!

$$\left|\begin{aligned} x+2y+3z&=1 \\ 2x+5y+3z&=6 \\ x+8z&=-6 \end{aligned}\right. \rightarrow (A \mid B) = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & -6 \end{array}\right)}_{\text{Matriks Diperbesar}} \sim \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)}_{\text{Eselon Baris Tereduksi}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jadi, **solusinya tunggal.**

Contoh 2 : Penyelesaian dgn Mtd. Gauss-Jordan

Selesaikan sistem persamaan linear berikut!

$$\left|\begin{aligned} x+2z&=1\\ -x+y-z&=0\\ 2x+y+5z&=3\end{aligned}\right. \rightarrow (A\mid B)=\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 5 & 3\end{array}\right)}_{\text{Matriks Diperbesar}} \sim \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)}_{\text{Eselon Baris Tereduksi}}$$

$$\begin{pmatrix} x+2z\\ y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rightarrow \left|\begin{aligned} x+2z&=1\rightarrow x=1-2z\\ y+z&=1\rightarrow y=1-z\end{aligned}\right.$$

Karena kolom ke-3 (kolom z) tidak memiliki kunci, maka dapat dimisalkan z = t.

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2t\\ 1-t\\ t\end{pmatrix}$$

Jadi, **solusinya banyak.**

Contoh 3 : Penyelesaian dgn Mtd. Gauss-Jordan

Selesaikan sistem persamaan linear berikut!

$$\left|\begin{aligned} 2x+2z&=4 \\ -2x+y&=-3 \\ x+2y+5z&=6 \end{aligned}\right. \rightarrow (A \mid B) = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \end{array}\right)}_{\text{Matriks Diperbesar}} \sim \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)}_{\text{Eselon Baris Tereduksi}}$$

Pada B_3 matriks eselon baris tereduksi didapatkan persamaan:

$$\mathbf{0x + 0y + 0z = 2}$$

hal ini jelas menunjukkan bahwa **tidak ada** nilai untuk *x*, *y* dan *z* yang memenuhi persamaan karena apapun nilai x, y dan z nya, ruas kiri akan selalu bernilai nol jadi nilai 2 tidak akan tercapai.

Jadi, **tidak memiliki solusi**

Latihan 1

Tentukan jenis dan solusi dari SPL berikut!

a. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 6x_3 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

b. $$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -2x - 4y + 2z = -2 \end{cases}$$

Latihan 2

Misalkan matriks berikut adalah hasil pengubahan matriks diperbesar menjadi bentuk EB, kolom 1 (x_1), kolom 2(x_2) dan seterusnya, serta kolom terakhir adalah konstanta (b) maka tentukan jenis dari tiap SPL dan tentukan solusinya!

a. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

b. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

c. $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

d. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Terima Kasih