PERTEMUAN 8

1. MATRIKS
2. METODE ELIMINASI GAUSS
3. METODE Eliminasi Gauss Jordan

MATRIKS

Definisi Matriks

Adalah kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam baris dan kolom.

Notasi Matriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Ukuran Matrik atau Ordo Matrik A adalah

$$m \times n$$

dimana :

m = banyak baris

n = banyak kolom

- Elemen matrik a_{ij} artinya elemen baris ke-i dan kolom ke-j pada matrik A

Matriks identitas

Matriks identitas adalah matriks persegi yang elemen-elemen di diagonal utamanya bernilai 1 dan elemen-elemen selain diagonal utama bernilai nol.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks identitas 3 x 3

Matriks nol

Matriks nol adalah matriks berordo m x n yang elemen-elemennya bernilai nol.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks nol 3 x 3

Matriks diagonal

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang elemen-elemen selain diagonal utama bernilai nol.

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks diagonal 3 x 3

Matriks identitas

Matriks identitas adalah matriks persegi yang elemen-elemen di diagonal utamanya bernilai 1 dan elemen-elemen selain diagonal utama bernilai nol.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks identitas 3 x 3

. Matriks segitiga

Matriks segitiga terdiri dari dua jenis yaitu matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Matriks segitiga atas merupakan matriks yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol. Matriks segitiga bawah merupakan matriks yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga atas   Matriks segitiga bawah

Disebut Matrix apa dibawah ini ?

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ -9 & 5 & 8 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Contoh 1 penambahan matriks:

$$A_{2\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+2 & 5+6 \\ 4+3 & 1+2 & 2+1 \end{bmatrix}$$

$$= \underset{2\times3}{\begin{bmatrix} 3 & 5 & 11 \\ 7 & 3 & 3 \end{bmatrix}}$$

Contoh 2 Pengurangan Matriks

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = = \begin{bmatrix} 2-6 & 6-(-2) \\ -4-4 & 1-1 \\ 3-0 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -8 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Perkalian Skalar

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Contoh 3 perkalian skalar

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 9 & 24 & 3 \\ 21 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Contoh 4 perkalian matriks dengan matriks

$$A_{2\times3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2\times3}B_{3\times3} = C_{2\times3} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix}$$

Contoh 4

$$C_{11} = (2)(1) + (1)(0) + (-6)(-2) = 14$$

$$C_{12} = (2)(0) + (1)(4) + (-6)(1) = -2$$

$$C_{13} = (2)(-3) + (1)(2) + (-6)(1) = -10$$

$$C_{21} = (1)(1) + (-3)(0) + (2)(-2) = -3$$

$$C_{22} = (1)(0) + (-3)(4) + (2)(1) = -10$$

$$C_{23} = (1)(-3) + (-3)(2) + (2)(1) = -7$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -10 \\ -3 & 10 & -7 \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss

- Metode Eliminasi Gauss yaitu cara menghilangkan atau mengurangi jumlah variable sehingga dapat diperoleh nilai dari suatu variable bebas
- matrik diubah menjadi augmented matrik :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Metode Eliminasi Gauss

- ubah matrik menjadi matrik segitiga atas atau dengan menggunakan **OBE** (**Operasi Baris Elementer**).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{bmatrix}$$

Contoh 1:

- Selesaikan sistem persamaan berikut:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1\ ($$

- Augmented matrik dari persamaan linier simultan tersebut :

$$\begin{array}{c} \text{B1} \\ \text{B2} \\ \text{B3} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1\,0 \end{bmatrix}$$

Contoh 1 :

- Lakukan operasi baris elementer

$$\begin{array}{l} \\ B_2 - B_1 \\ B_3 - 2B_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ B_3 + B_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Contoh 1:

- Penyelesaian :

$$x_3 = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{1}\left(-4-(2)3\right) = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{1}\left(6-2-3\right) = 1$$

Tugas pertemuan 8 : Selesaikan soal dibawah ini, dikirim via email dg judul MetnumTi3p8-NIM, paling lambat besok jumat pukul 12.00 wib

Diberikan sistim persamaan linier:

$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11$.............(1)

$4x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 28$.............(2)

$2x_1 + 4x_2 + 17x_3 = 31$.............(3)

Tentukan nilai-nilai x_1, x_2, dan x_3 dg metode eliminasi Gauss

- Soal 2: dengan eliminasi gauss Jordan tentukan nilai x,y dan z

$$x + y + 2z = 8$$
$$-x - 2y + 3z = 1$$
$$3x + 7y + 4z = 10$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 10 \end{array}\right]$$

$$R3 + 3R2$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 13 & 13 \end{array}\right]$$

$$R2 + R1$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 13 & 13 \end{array}\right]$$

$$R3 + R2$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 18 & 22 \end{array}\right]$$

2. Eliminasi gauss-Jordan

- Metode ini merupakan pengembangan metode eliminasi gauss, hanya saja metode ini menggunakan augmented matriks pada sebelah kiri dibawah menjadi matriks diagonal.
- Contohnya :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Gauss – Jourdan

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 15 \\ 2 & 4 & 3 & 22 \\ 3 & 4 & 7 & 39 \end{bmatrix}$$

$$R_1' = R_1$$
$$R_2' = R_2 - 2R_1'$$
$$R_3' = R_3 - 3R_1'$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 15 \\ 0 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & -5 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 15 \\ 0 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & -5 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$R_1' = R_1 - 3R_2'$$
$$R_2' = -R_2/2$$
$$R_3' = R_3 - 5R_2'$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 15 \\ 0 & 1 & 1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 7/2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 15 \\ 0 & 1 & 1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 7/2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$R_1' = R_1 - \tfrac{1}{2} R_3'$$
$$R_2' = R_2 - \tfrac{1}{2} R_3'$$
$$R_3' = \frac{R_3}{-7/2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

latihan

Selesaikan SPL simultan berikut dengan metode Gauss-Jordan :

$X_1+X_2+X_3 = 6$

$X_1+2X_2 - X_3 = 2$

$2X_1+X_2+2X_3 = 10$

Jawaban

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{pmatrix} \quad B3-B1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B2-B1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B1-B2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B3-B1$$

Jawaban

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \quad B3/-2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B1-3B3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B2+2B3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} X1 = 1 \\ X2 = 2 \\ X3 = 3 \end{matrix}$$

Soal :

Selesaikan persamaan linier simultan dg Gauss-Jordan:

$x_1 + x_2 = 3$

$2x_1 + 4x_2 = 8$

Metode Iterasi Gauss-Seidel

- Metode interasi Gauss-Seidel adalah metode yang menggunakan proses iterasi hingga diperoleh nilai-nilai yang berubah.
- Bila diketahui persamaan linier simultan

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + & a_{13} & x_3 & + & \ldots & + & a_{1n} & x_n & \text{¿} & b_1 \\
a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + & a_{23} & x_3 & + & \ldots & + & a_{2n} & x_n & \text{¿} & b_2 \\
a_{31} & x_1 & + & a_{32} & x_2 & + & a_{33} & x_3 & + & \ldots & + & a_{3n} & x_n & \text{¿} & b_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & x_1 & + & a_{n2} & x_2 & + & a_{n3} & x_3 & + & \ldots & + & a_{nn} & x_n & \text{¿} & b_n
\end{array}
$$

Metode Iterasi Gauss-Seidel

- Berikan nilai awal dari setiap x_i (i=1 s/d n) kemudian persamaan linier simultan diatas dituliskan menjadi:
- $$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n\right)$$

....

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}\right)$$

Metode Iterasi Gauss-Seidel

- Dengan menghitung nilai-nilai x_i (i=1 s/d n) menggunakan persamaan-persamaan di atas secara terus-menerus hingga nilai untuk setiap *xi* (i=1 s/d n) sudah sama dengan nilai x_i pada iterasi sebelumnya maka diperoleh penyelesaian dari persamaan linier simultan tersebut.
- Atau dengan kata lain proses iterasi dihentikan bila selisih nilai x_i (i=1 s/d n) dengan nilai x_i pada iterasi sebelumnya kurang dari nilai toleransi error yang ditentukan.
- Untuk mengecek kekonvergenan

$$\varepsilon_{a,i} = \left| \frac{x_i^k - x_i^{k-1}}{x_i^k} \right| \times 100\%$$

Contoh 1:

$$x_1 + x_2 = 5$$
$$2x_1 + 4x_2 = 14$$

Jawab :

$$x_1 = 5 - x_2$$
$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2x_1\right)$$

nilai awal : x1 = 0 dan x2 = 0

iterasi 1 :

$$x_1 = 5 - 0 = 5$$
$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.5\right) = 1$$

iterasi 2 :

$$x_1 = 5 - 1 = 4$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(14 - 2.4) = \frac{3}{2}$$

iterasi 3 :

$$x_1 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{4}$$

Contoh 1

iterasi 4 :

$$x_1 = 5 - \frac{7}{4} = \frac{13}{4}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{13}{4}\right) = \frac{15}{8}$$

iterasi 5 :

$$x_1 = 5 - \frac{15}{8} = \frac{25}{5}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{25}{8}\right) = \frac{31}{16}$$

iterasi 6 :

$$x_1 = 5 - \frac{31}{16} = \frac{49}{16}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{49}{16}\right) = \frac{63}{32}$$

iterasi 7 :

$$x_1 = 5 - \frac{63}{32} = \frac{97}{32}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{97}{32}\right) = \frac{127}{64}$$

Algoritma Eliminasi Gauss Seidell

1. Masukkan matrik **A**, dan vektor **B** beserta ukurannya *n*
2. Tentukan batas maksimum iterasi *max_iter*
3. Tentukan toleransi error ε
4. Tentukan nilai awal dari x_i, untuk i=1 s/d n
5. Simpan x_i dalam s_i, untuk i=1 s/d n
6. Untuk i=1 s/d n hitung :

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j\right) \qquad e_i = \left| x_i - s_i \right|$$

Alogoritma Eliminasi Gauss Seidell

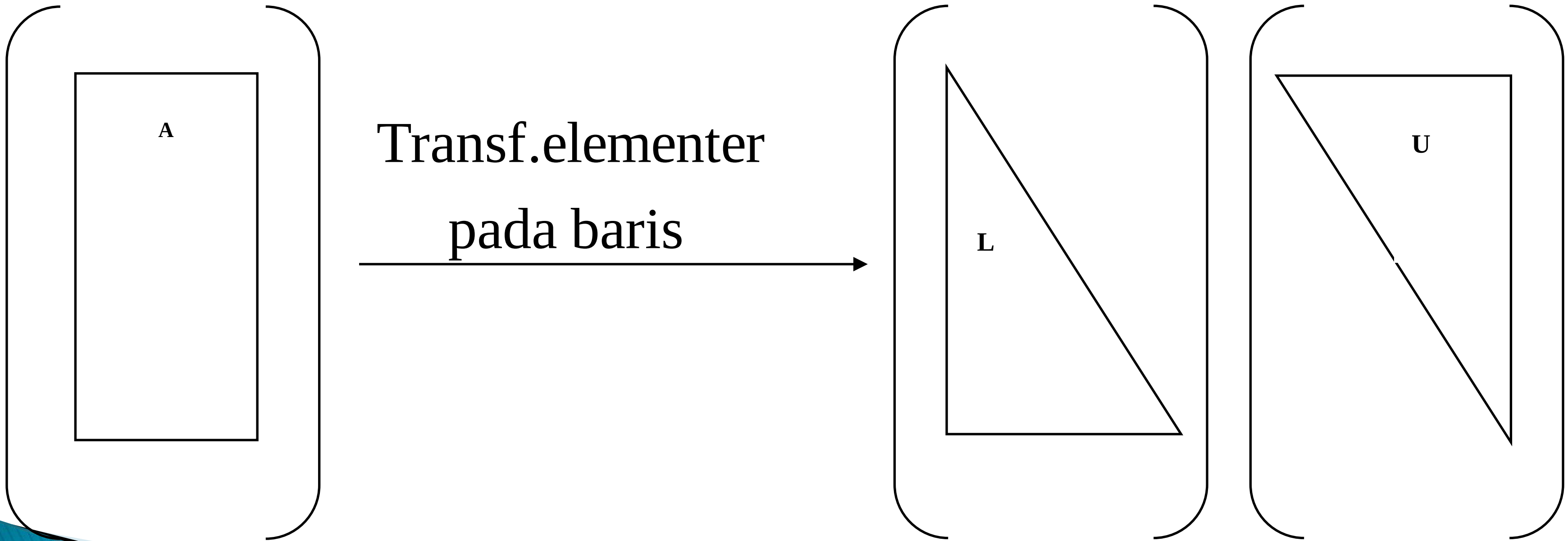
7. iterasi ← iterasi+1
8. Bila iterasi lebih dari max_iter atau tidak terdapat $e_i < \varepsilon$ untuk i=1 s/d n maka proses dihentikan dari penyelesaiannya adalah x_i untuk i=1 s/d n. Bila tidak maka ulangi langkah (5)

Metode Dekomposisi LU

Jika matriks A non singular (matriks yang mempunyai invers), maka ia dapat difaktorkan

(diuraikan atau dikekomposisi) menjadi matriks segitiga bawah, L (Lower) dan matriks segitiga atas, U (Upper) dengan cara melakukan sejumlah transformasi elementer pada baris seperti contoh sebelumnya, A = LU.

Perubahan tersebut dapat digambarkan sebagai berikut



Pada matriks segitiga bawah, L, semua elemen diagonal utamanya berharga 1, sedangkan pada matriks segitiga atas, U tidak ada aturan khusus pada elemen diagonal utamanya. Setelah pemfaktoran matriks A menjadi matriks L dan matriks U, maka kedua matriks tersebut dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier AX = B, yaitu sebagai berikut. Tinjau SPL AX = B, kemudian faktorkan A menjadi L dan U, sehingga A = LU, sehingga LUX = B. Misalkan UX = y, maka Ly = B. Untuk memperoleh , kita gunakan teknik substitusi maju (forward substitution), sbb,

$$\mathrm{L}y = \mathrm{B} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\ \mathrm{L}_{21} & 1 & 0\ldots & 0 \\ \mathrm{L}_{31} & \mathrm{L}_{32} & 1\ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{L}_{n1} & \mathrm{L}_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ diperoleh } y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$$

Dan untuk memperoleh solusi SPL, , kita gunakan teknik substitusi mundur (back substitution) sbb,

$$\mathrm{UX} = y \Rightarrow \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13}\ldots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & U_{23}\ldots & U_{2n} \\ 0 & 0 & U_{33}\ldots & U_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & U_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ diperoleh } x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

Contoh 1

Tentukan X1,X2,X3 dan X4 dari sistem persamaan linier di bawah ini dengan metode dekomposisi LU

$$x_1 - 2x_3 + 7x_4 = 11$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9$$
$$3x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 8$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 10$$

CONTOH 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$, dengan A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$,

X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

CONTOH 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} H_{21}^{(-2)} \\ H_{31}^{(-3)} \\ H_{41}^{(-2)} \end{matrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & -10 \\ 0 & -3 & 7 & -16 \\ 0 & 1 & 8 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} H_{32}^{(-3)} \\ H_{42}^{(1)} \end{matrix} \propto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \\ 0 & 0 & 15 & -20 \end{pmatrix} H_{43}^{(\frac{15}{14})} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

CONTOH 1

$$\text{Jadi } U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \text{dan } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -\frac{15}{14} & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ly = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -\frac{15}{14} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \text{ maka } y = \begin{pmatrix} 11 \\ -13 \\ 14 \\ -10 \end{pmatrix} \text{dan}$$

$$UX = y \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -13 \\ 14 \\ -10 \end{pmatrix}, \text{maka}$$

CONTOH 1

$-5x_4 = -10$ $\qquad x_4 = \dfrac{-10}{-5} = 2$

$$-14x_3 + 14x_4 = 14 \rightarrow x_3 = \frac{14 - 14\times 2}{-14} = \frac{-14}{-14} = 1$$

$$-x_2 + 7x_3 - 10x_4 = -13 \rightarrow x_2 = \frac{(-13 - 7\times 1 + 10\times 2)}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$x_1 - 2x_3 + 7x_4 = 11 \rightarrow x_2 = 11 + 2\times 1 - 7\times 2 = -1$$

Jadi $\quad x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$

Algoritma Metode Dekomposisi LU

1. Mendapatkan matriks [L] dan [U].
2. Menyelesaikan [L]{z} = (b).
3. Menyelesaikan [U]{x} = {z}

Soal :

1. Selesaikan persamaan berikut dengan metode Eliminasi Gauss

$$27 x_1 + 6 x_2 - x_3 = 85 \quad \text{.....(1a)}$$
$$6 x_1 + 15 x_2 + 2 x_3 = 72 \quad \text{.....(1b)}$$
$$x_1 + x_2 + 54 x_3 = 110 \quad \text{.....(1c)}$$

Soal :

2. Selesaikan persamaan berikut dengan metode Eliminasi Gauss Seidell

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

Soal :

3. Selesaikan matriks berikut dengan metode Dekomposisi LU

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 10 \\ 2 & 4 & 17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 28 \\ 31 \end{bmatrix}$$