Pertemuan 2

Ilham R. Arvianto, M.Pd

Materi

1. OBE (Operasi Baris Elementer)
2. Determinan Matriks

OBE

(Operasi Baris Elementer)

OBE

1) Mengalikan sebuah baris dengan k (konstanta tidak nol).

Operasi

$\boldsymbol{k.B_i}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \boxed{2 \quad 4 \quad -2} \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}\cdot B_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \boxed{1 \quad 2 \quad -1} \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

OBE

2) Menukarkan baris ke-i dengan baris ke-j

<u>Operasi</u>

$\boldsymbol{B_i}$

$\boldsymbol{B_j}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \boxed{2 \quad 4 \quad -2} \\ \boxed{3 \quad 6 \quad -5} \end{pmatrix} \overset{B_2 \atop B_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \boxed{3 \quad 6 \quad -5} \\ \boxed{2 \quad 4 \quad -2} \end{pmatrix}$$

OBE

3) Menjumlahkan kelipatan baris ke-i dengan baris ke-j

<u>Operasi</u>

$k.B_i + B_j$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 2} \\ \boxed{2 \quad 4 \quad -2} \\ 3 \quad 6 \quad -5 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{2}B_2 + B_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \boxed{0 \quad -1 \quad 3} \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Ingat : Bentuk Matriks EB dan EBT

Syarat Matriks EB (1-3) dan EBT (1-4)

1. Untuk semua baris yang elemen-elemennya tidak nol, maka bilangan pertama pada baris tersebut haruslah 1 (disebut **elemen kunci**).
2. Untuk sembarang dua baris yang berurutan, maka elemen kunci yang terletak pada baris yang lebih bawah harus terletak lebih ke kanan dari pada elemen kunci pada baris yang lebih atas.
3. Jika suatu baris semua elemennya adalah nol, maka baris tersebut diletakkan pada bagian bawah matriks.
4. Kolom yang memiliki elemen kunci, harus memiliki elemen nol di tempat lainnya.

Contoh EBT

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Contoh Bukan EBT

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Penggunaan OBE untuk Mengubah Matriks Biasa Menjadi Matriks EB

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{-\frac{1}{2}B_2+B_1 \\ -\frac{1}{3}B_3+B_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-1\cdot B_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \end{pmatrix} \overset{1B_3+B_2}{\sim} \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}_{\textbf{Matriks EB}}$$

Penggunaan OBE untuk Mengubah Matriks Biasa Menjadi Matriks EBT

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{-1B_1+B_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 & -17 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-1B_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 17 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{-\frac{1}{6}B_1+B_3 \\ \frac{1}{4}B_2+B_3}}{\sim} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{11}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{-6B_1 \\ 4B_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks EBT

Latihan

Ubahlah matriks berikut ini menjadi bentuk EBT!

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinan Matriks

Definisi

- Misalkan A matriks persegi, determinan A (disingkat **det(A)** atau $|A|$) didefinisikan sebagai ***jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A*** .
- Jika A berukuran $n \times n$, maka hasil kali elementer dari matriks A berbentuk

$$\boldsymbol{a_{1P1} \cdot a_{2P2} \cdot \ldots \cdot a_{nPn}}$$

dimana $P1$, $P2$, …, Pn merupakan permutasi dari bilangan-bilangan 1, 2, …, n. Tanda dari $a_{1P1} \cdot a_{2P2} \cdot \ldots \cdot a_{nP_n}$ ditentukan dari banyaknya bilangan lebih besar yang mendahului bilangan lebih kecil (**banyaknya invers**) pada bilangan $P1$, $P2$, …, Pn.
- Jika banyaknya invers adalah ganjil maka tandanya negatif (-) dan jika genap tandanya positif (+).

Contoh 1

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \det(A)=?$$

Jawab

- Banyaknya permutasi 1 dan 2 adalah 2 yaitu 12 dan 21 (karena A berordo 2 × 2).

Permutasi	Hasil Kali Elementer	Banyak Invers	Hasil Kali Elementer Bertanda
12	$a_{11}.a_{22}$	0	$+\ a_{11}.a_{22}$
21	$a_{12}.a_{21}$	1	$-\ a_{12}.a_{21}$

- Jadi $\boldsymbol{\det(A) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}}$.

Contoh 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \det(P) = ad - bc$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \det(Q) = ?$$

$$\det\begin{pmatrix} -2x & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = 6 \rightarrow x = ?$$

Contoh 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = ?$$

Jawab

Permutasi	Hasil Kali Elementer	Banyak Invers	Hasil Kali Elementer Bertanda
123	$a_{11}.a_{22}.a_{33}$	0	$+\ a_{11}.a_{22}.a_{33}$
132	$a_{11}.a_{23}.a_{32}$	1	$-\ a_{11}.a_{23}.a_{32}$
213	$a_{12}.a_{21}.a_{33}$	1	$-\ a_{12}.a_{21}.a_{33}$
231	$a_{12}.a_{23}.a_{31}$	2	$+\ a_{12}.a_{23}.a_{31}$
312	$a_{13}.a_{21}.a_{32}$	2	$+\ a_{13}.a_{21}.a_{32}$
321	$a_{13}.a_{22}.a_{31}$	3	$-\ a_{13}.a_{22}.a_{31}$

Jadi $\det(A) = a_{11}.a_{22}.a_{33} - a_{12}.a_{21}.a_{33} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{23}.a_{31} - a_{13}.a_{22}.a_{31}$

Metode Penghitungan Determinan

- Ekspansi Kofaktor ☜
- Reduksi Baris Menggunakan OBE (Operasi Baris Elementer)

Ekspansi Kofaktor

Pada metode ini dikenal beberapa istilah:

- **Minor elemen a_{ij} (M_{ij})** yaitu determinan yang didapatkan dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j pada matriks awalnya.
- **Kofaktor elemen a_{ij} (C_{ij}) = $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$**

Jika A matriks persegi berordo $n \times n$, maka dengan menggunakan metode ini perhitungan determinan dapat dilakukan dengan dua cara yang semuanya menghasilkan hasil yang sama yaitu :

- Ekspansi sepanjang baris ke-i

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

- Ekspansi sepanjang kolom ke-j

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

Contoh 4

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 2 \quad 2 \quad 1 \\ 4 \quad 3 \quad 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = ?$$

Jawab

Dihitung menggunakan **ekspansi baris 1**.

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(2-4) = 2$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2$$

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = 1(-1) + 2 \cdot 2 + 3(-2) = -3$$

Contoh 5

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(B) = ?$$

Jawab

- Jika melihat sifat dari metode ini, maka **perhitungan akan lebih cepat jika ada elemen a_{ij} yang bernilai 0**. Jadi pemilihan baris atau kolom akan sangat menetukan kecepatan perhitungan.
- Dalam contoh ini terlihat bahwa baris/kolom yang mengandung banyak nilai 0 adalah kolom 2. Jadi det(B) akan dapat dihitung secara cepat menggunakan **ekspansi kolom 2**.

$$\det(B) = b_{12}C_{12} + b_{22}C_{22} + b_{32}C_{32} = b_{22}C_{22}$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2$$

$$\det(B) = b_{22}C_{22} = 2(-2) = -4$$

Latihan di Rumah

Ubahlah matriks B berikut ini menjadi bentuk **matriks EB** dan **matriks EBT**

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Carilah determinan dari matriks C berikut dengan metode ekspansi kofaktor!

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Pembahasan 1

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}B_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{3}B_2+B_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\frac{3}{4}B_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-1B_3+B_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{-1B_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx EBT$$

Pembahasan 2

(Ekspasi Baris ke-2)

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = a_{21}C_{21} + \cancel{a_{22}C_{22}} + a_{23}C_{23} + \cancel{a_{24}C_{24}} \begin{aligned} &= (2)(3) + (1)(4) \\ &= 6 + 4 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$C_{21} = (-1)^3 M_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 1^{+} & 0^{-} & 1^{+} \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\{(1(-6)) - (0(1)) + (1(3))\} = (-1)(-3) = 3$$

$$C_{23} = (-1)^5 M_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 1^{+} & 1^{-} & 1^{+} \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\{(1(1)) - (1(6)) + (1(1))\} = (-1)(-4) = 4$$

Terima Kasih