Truncation Error dan Deret Taylor

*membahas cara turunan persamaan dulu

Truncation Error (Error Pemotongan)

- Truncation error merupakan error yang terjadi karena pemotongan dari suatu deret tak hingga menjadi deret berhingga.
- Contoh : Pendekatan yang sering dipakai pada penyelesaian numeric adalah deret Taylor. Untuk menyederhanakan permasalahan biasanya perhatian hanya ditujukan pada beberapa suku dari deret Taylor tersebut, sedangkan suku lainnya diabaikan. Pengabaian suku inilah yang menyebabkan truncation error.

- Contoh

$$f(x)=\cos(x)=\underbrace{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}}_{\textit{\textbf{Nilai hampiran}}}\;\Big|\;\underbrace{+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\ldots\ldots}_{\textit{\textbf{Galat pemotongan}}}$$

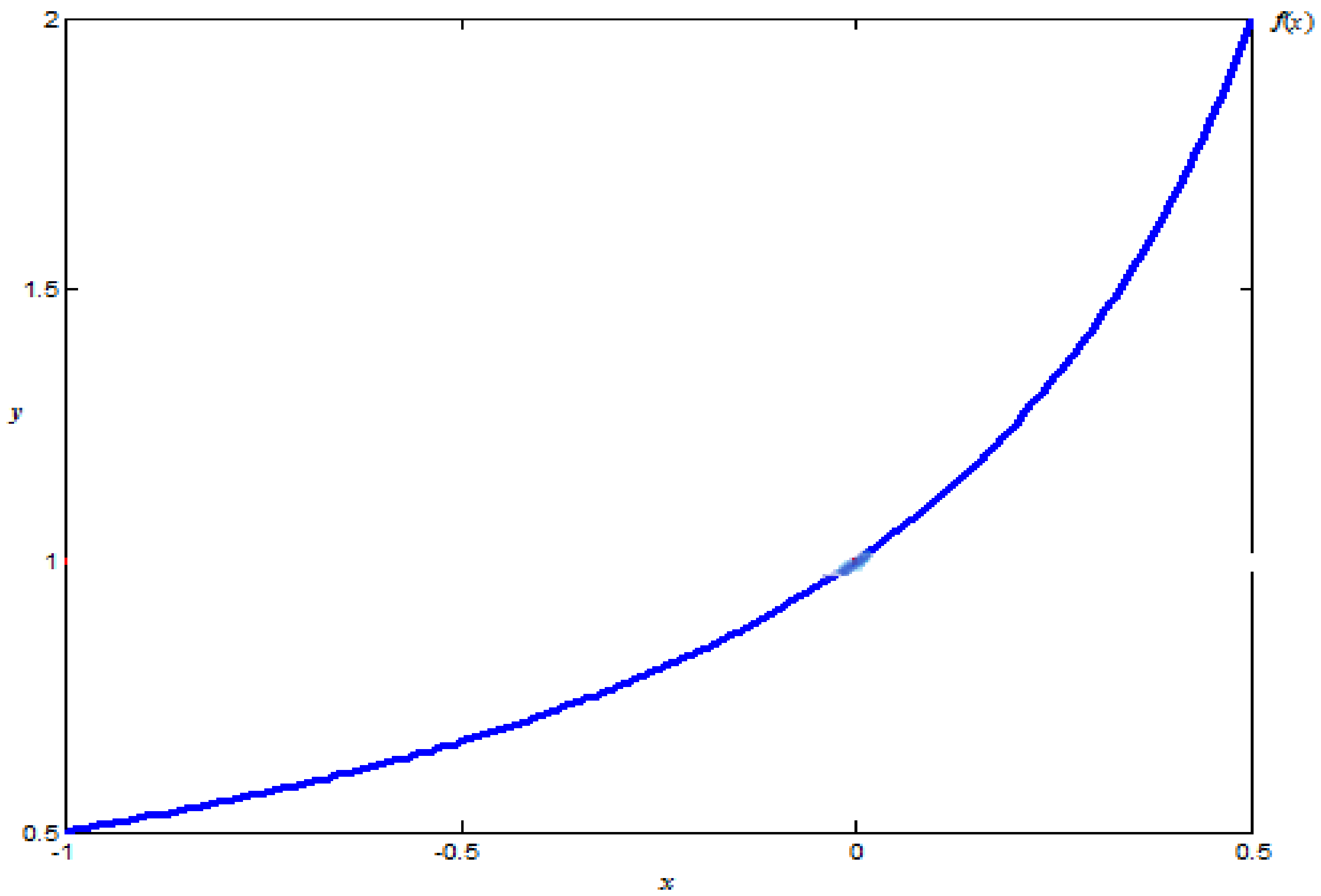
Galat Pemotongan (*truncation error*) timbul akibat penggunaan hampiran sebagai pengganti formula eksak. Maksudnya, ekspresi matematika yg lebih kompleks diganti dengan formula yg lebih sederhana.

Tipe galat pemotongan bergantung pd metode komputasi yg digunakan untuk penghampiran shg kadang-kadang disebut juga *galat metode*.

Deret Taylor
(Taylor Series)

Latar belakang masalah :

- Misalkan kita ingin tahu nilai dari grafik disekitar x=0 ?



Bagaimana Caranya ???

-
- Maka kita bisa menebak nilai grafik disekitar x=0 dengan Pendekatan Polynomial (Polynomial Approximation)

Polynomial Approximations

- Misalkan kita ingin membuat perkiraan untuk sebuah fungsi yang kompleks pada sekitar $x = 0$;
- Perkiraan paling simple adalah menentukan sebuah konstanta, sehingga:

$$p_0(x) = a_0$$

- Catatan: perkiraan di atas disebut sebagai zero'th order polynomial approximation;
- Lalu, nilai berapa yang harus kita berikan pada konstanta itu?

Polynomial Approximations

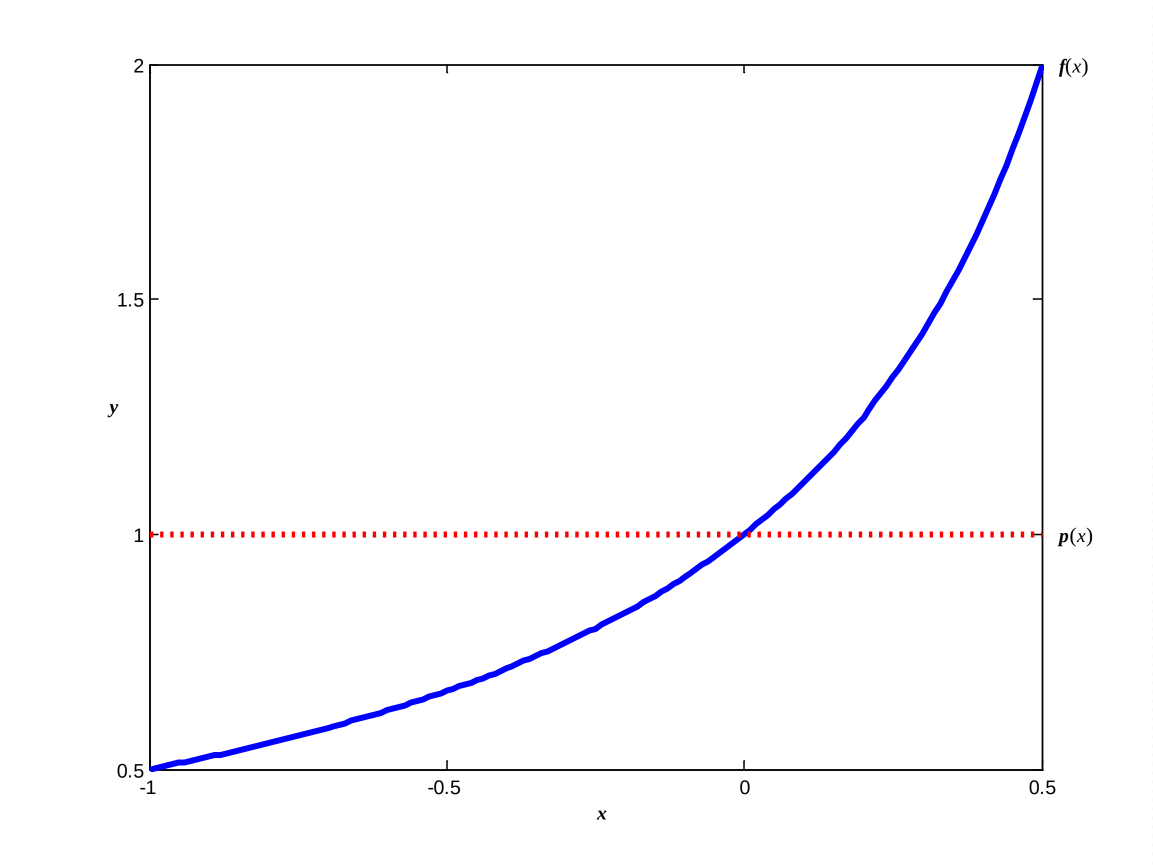
- Contoh

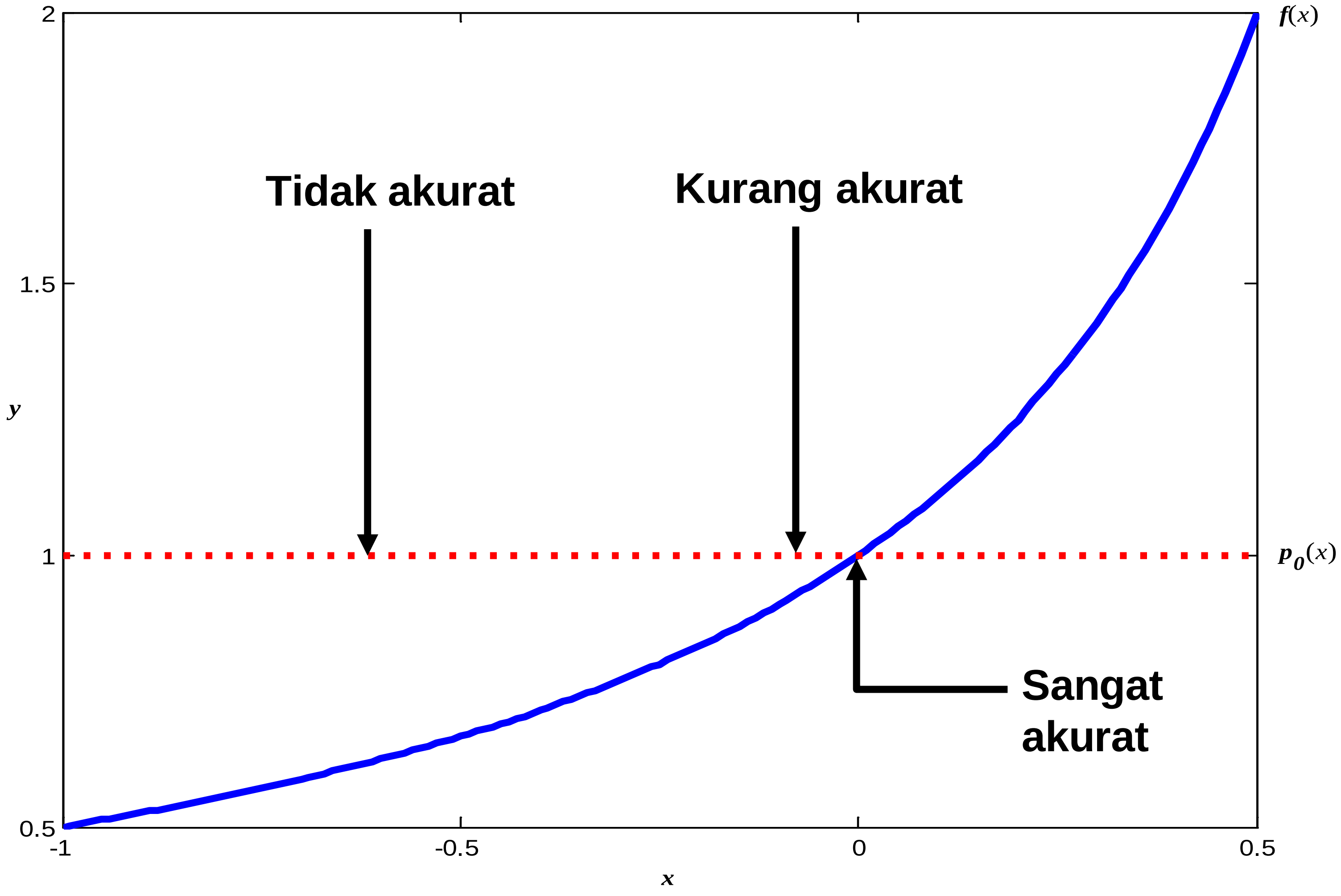
$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f(0) = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow p_0(x) = 1$$

Polynomial Approximations

- Kita inginkan angka paling akurat pada x = 0.
- Sehingga: $$p_0(x) = f(0)$$





f(x)
Tidak akurat
Kurang akurat
Sangat akurat
p0(x)
y
x
2
1.5
1
0.5
-1
-0.5
0
0.5

Polynomial Approximations

- Sekarang kita tingkatkan dengan perkiraan dengan menggunakan aproksimasi linier (1st order approximation);

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x$$

- dengan $a_1 = f'(x)$
- Sekarang kita pilih nilai sehingga perpotongan dan garis nya semirip mungkin dengan fungsi sebenarnya.

Polynomial Approximations

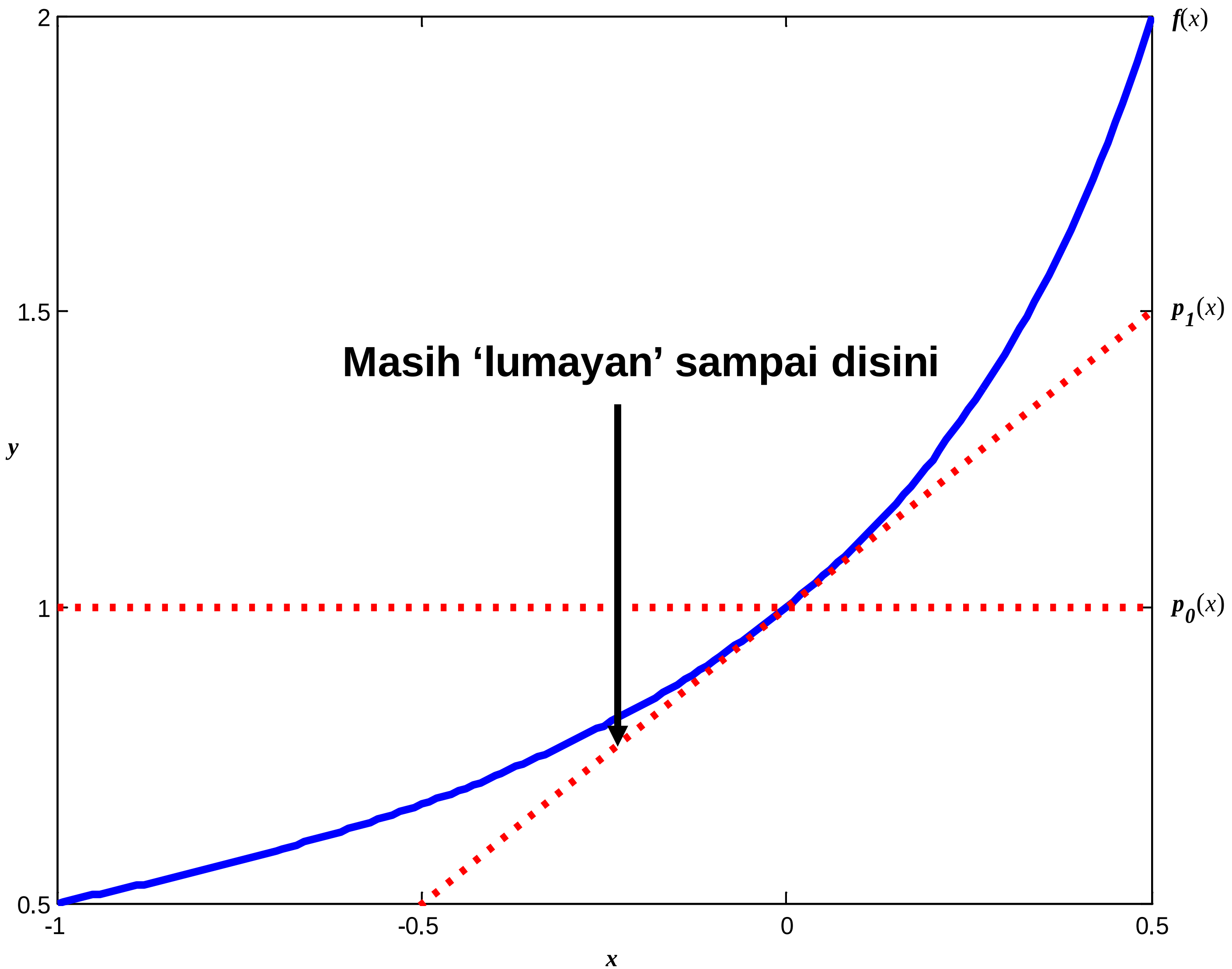
- Contoh $$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x$$

$$f(0) = \frac{1}{1-0} = 1 \Rightarrow a_0 = f(0) = 1$$

$$f'(0) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 \Rightarrow a_1 = f'(0) = 1$$

$$\Rightarrow p_1(x) = 1 + x$$



Masih 'lumayan' sampai disini
f(x)
p1(x)
p0(x)
y
x
2
1.5
1
0.5
-1
-0.5
0
0.5

Polynomial Approximations

- Sekarang coba dengan perkiraan kuadratik:

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

- Dengan $\mathbf{a_2=f''(x)}$
- Kita inginkan perpotongan, gradient dan kurva (turunan kedua) dari perkiraan kita dapat *match* dengan fungsi sebenarnya pada $x = 0$.

Polynomial Approximations

- Contoh

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

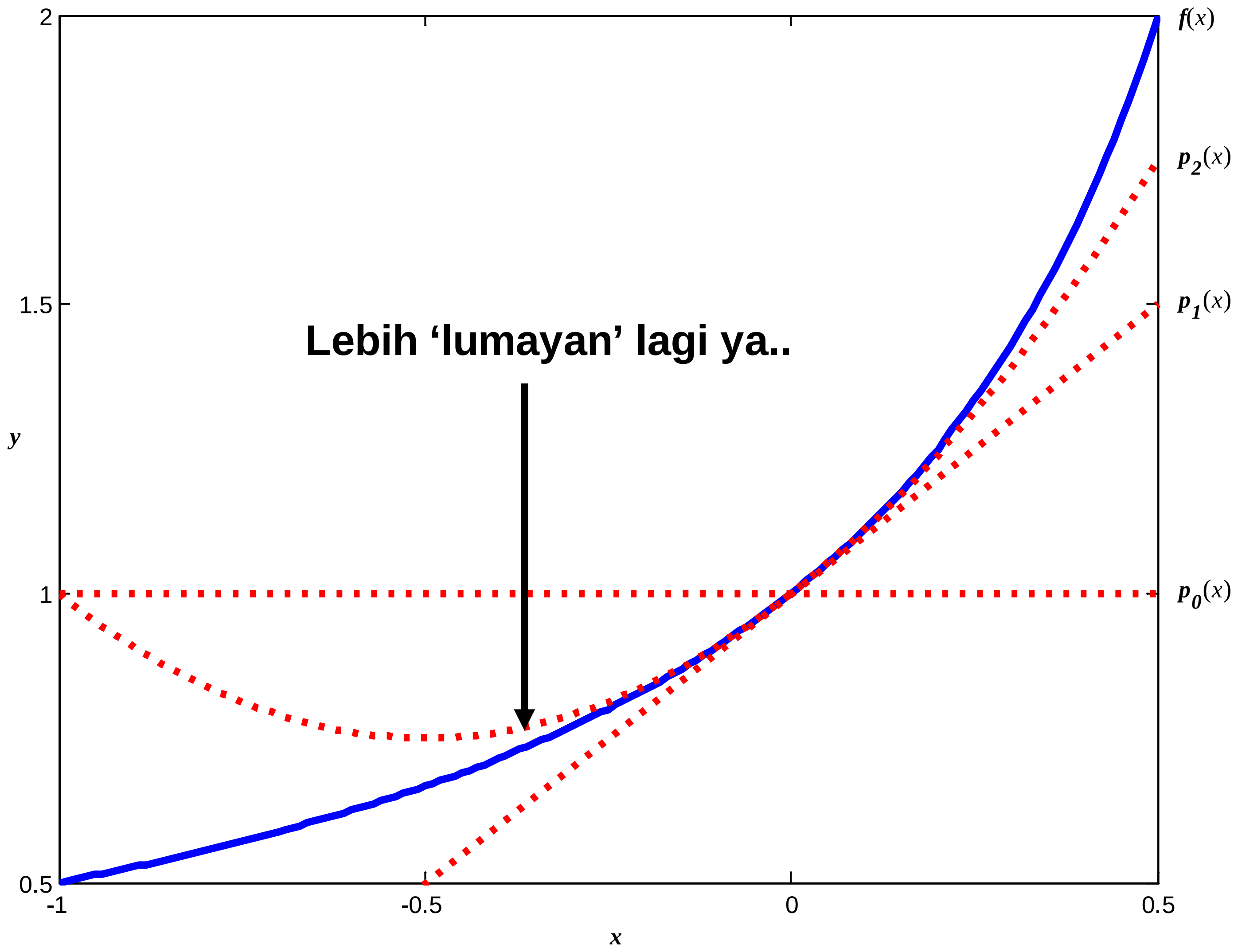
- Dari sebelumnya:

$$a_0 = 1, a_1 = 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow 2a_2 = f'(0) = 2$$

$$\Rightarrow a_2 = 1$$

$$\Rightarrow p_2(x) = 1 + x + x^2$$



Lebih 'lumayan' lagi ya..
f(x)
p2(x)
p1(x)
p0(x)
y
x
2
1.5
1
0.5
-1
-0.5
0
0.5

Polynomial Approximations

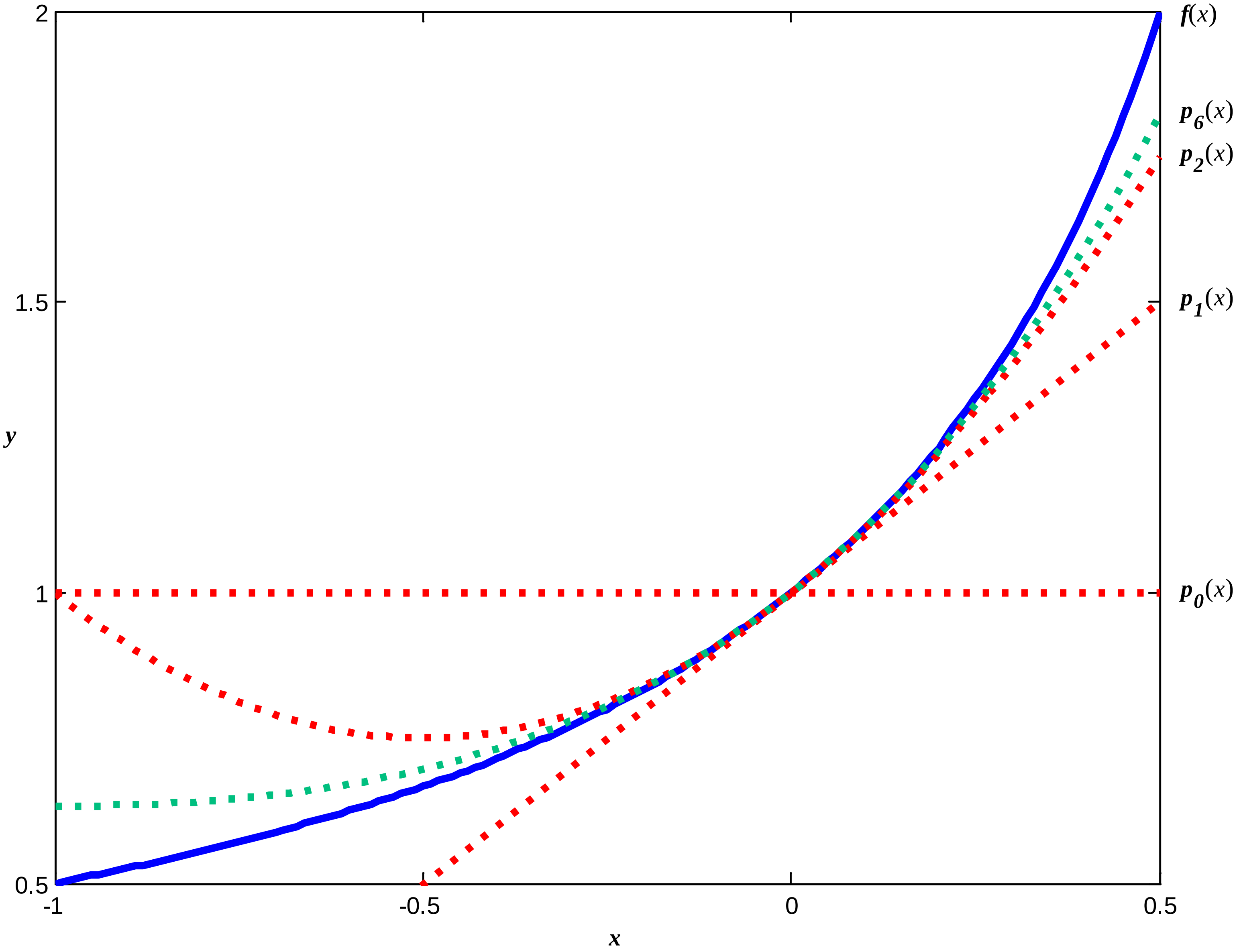
- Kita bisa teruskan penaksiran secara polinom hingga *n* derajad.
- Kalau kita teruskan, kita akan mendapatkan rumus:

$$f(x) \approx p_n(x) = f(0) + f'(0)x$$

$$+ f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

Polynomial Approximations

- Akurasi perkiraan akan bertambah seiring dengan penambahan polinom;
- Kita lihat polinom derajad 0, 1, 2 dan 6 (warna hijau), dibanding fungsi asli nya f(x) (warna biru).



2
1.5
1
0.5
-1
-0.5
0
0.5
x
y
f(x)
p6(x)
p2(x)
p1(x)
p0(x)

Maclaurin (Power) Series

- Deret Maclaurin adalah penaksiran polinom derajad tak hingga

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \ldots$$

- Notice: Deret infinite (tak hingga) menyatakan bahwa akhirnya deret ini sama dengan fungsi sebenarnya, bukan penaksiran lagi!

Taylor Series

- Dari awal kita selalu memulai perkiraan pada nilai $x = 0$
- Sesungguhnya, kita bisa membuat deret polinom yang berasal dari titik manapun. $x = x_0$
- Ini disebut ***Taylor Series.***
- **Jadi, Deret MacLaurin** merupakan Deret Taylor yang berpusat pada $x_0=0$

Taylor Series

- Rumus umum Deret Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!}$$

$$+ \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

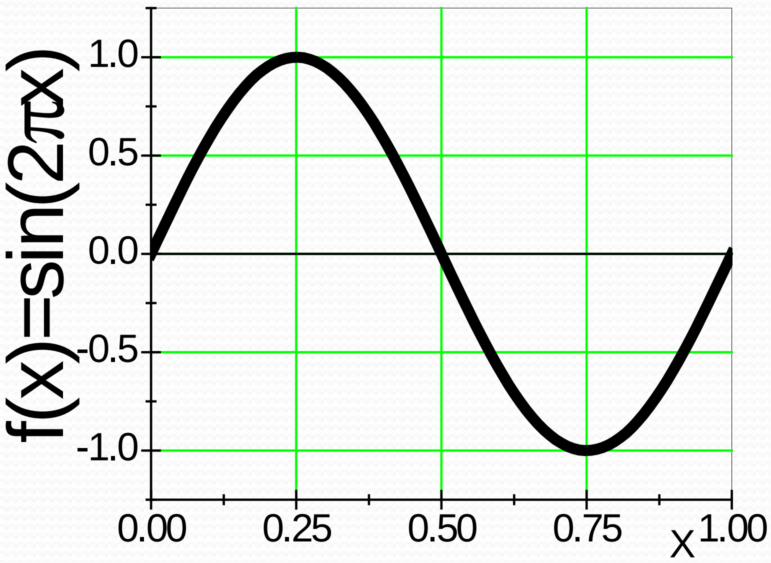
Rumus Turunan dan contoh

$$y = Cx^n$$

$$\frac{dy}{dx} = Cnx^{n-1}$$

Jika dengan C dan n konstanta real, maka :

Taylor Series



What is f(x) near x=0.35 ?

Rumus Turunan :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

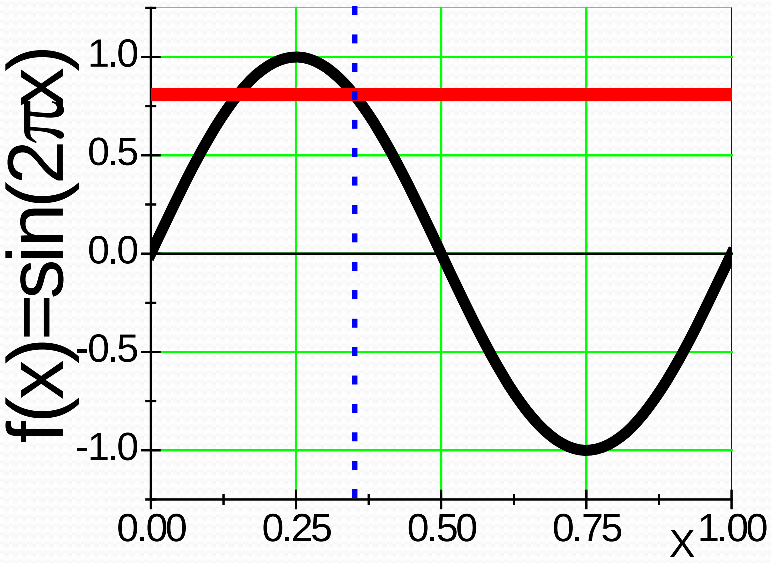
$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

Taylor Series

- Approximate function? Copy derivatives!

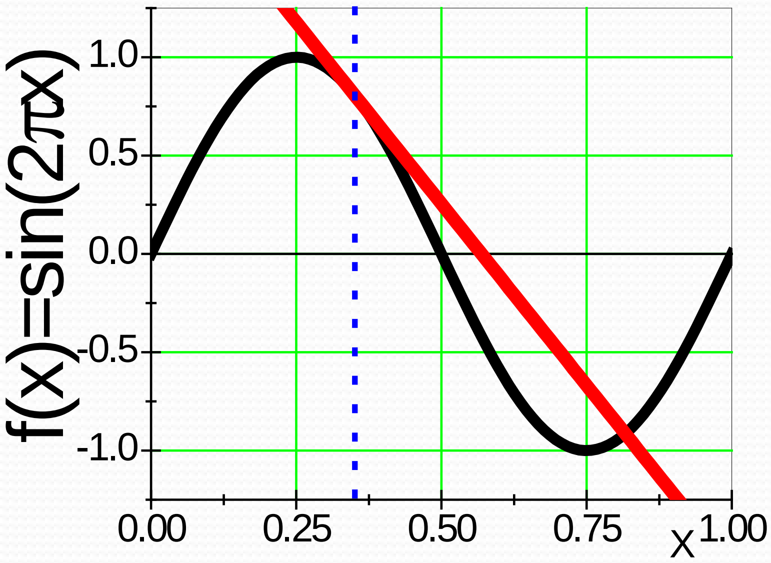


What is f(x) near x=0.35 ?

$$T_0(x) = f(0.35)$$

- Approximate function? Copy derivatives!

Taylor Series

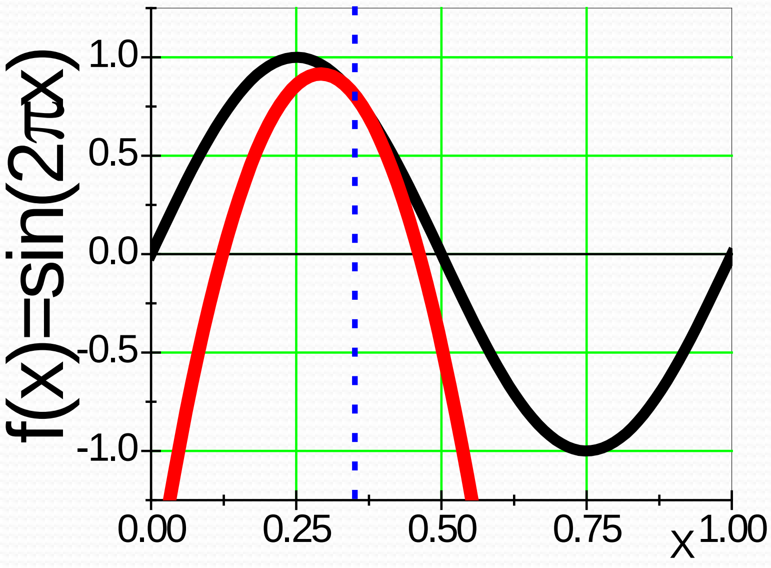


What is f(x) near x=0.35?

$$T_1(x) = f(0.35)$$
$$+ f'(0.35)\left(x - 0.35\right)$$

- Approximate function? Copy derivatives!

Taylor Series

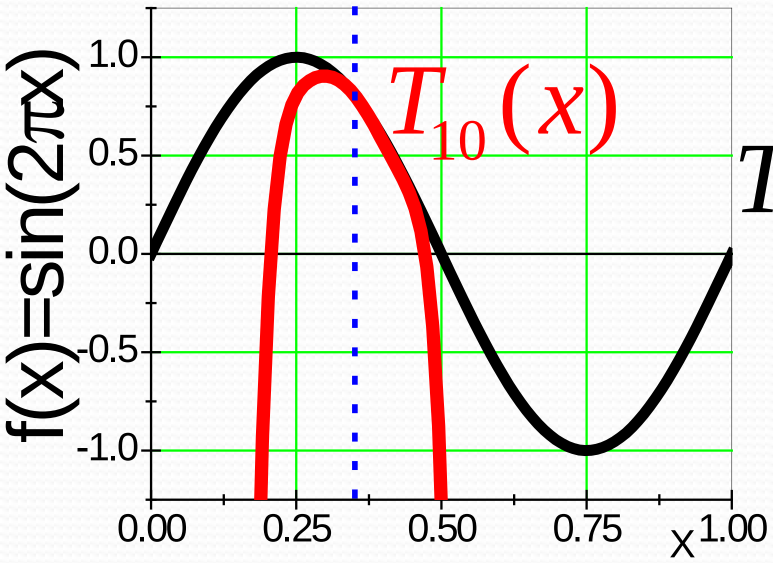


What is f(x) near x=0.35?

$$T_2(x) = f(0.35) + f'(0.35)\left(x-0.35\right) + \frac{1}{2}f''(0.35)\left(x-0.35\right)^2$$

- Approximate function? Copy derivatives!

Taylor Series

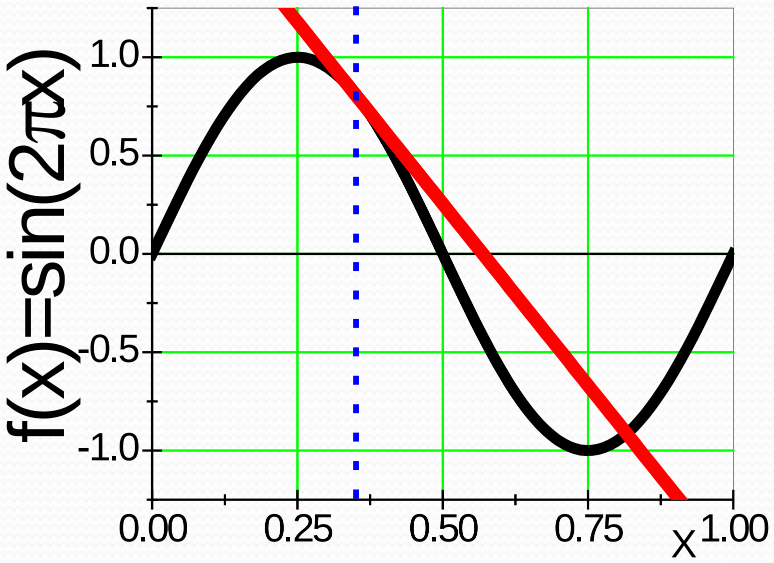


What is f(x) near x=0.35?

$$T_2(x) = f(0.35) + f'(0.35)\left(x-0.35\right) + \tfrac{1}{2} f''(0.35)\left(x-0.35\right)^2 \ldots$$

Taylor Series

- Approximate function? Copy derivatives!



Most Common: 1st Order

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)\left(x - a\right)$$

- Look out for "approximate" or "when x is small" or "small angle" or "close to" …

Contoh – Taylor Series

- Bentuklah Deret Taylor untuk:

$$f(x) = \ln(x), \qquad x_0 = 1$$

- Cari nilai fungsi dan turunannya untuk fungsi pada x_0=1

Contoh – Taylor Series

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow f(x_0) = \ln(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow f''(x_0) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow f'''(x_0) = \frac{2}{1^3} = 2$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{x^n}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x_0) = \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{1^n} = (n-1)!(-1)^{n-1}$$

Contoh – Taylor Series

- Gunakan Rumus Umum Deret Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!}$$

$$+ \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + \ldots$$

$$\Rightarrow \ln(x) = 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2!(x-1)^3}{3!}$$

$$+ \ldots + (n-1)!(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n!} + \ldots$$

$$\Rightarrow \ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + \ldots$$

Soal 1:

Gunakan uraian deret Taylor orde-nol sampai orde-ketiga untuk mengaproksimasi fungsi

$$f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$$

mulai dari $x_i = 2$. Ramalkan nilai fungsinya pada $x_{i+1} = 3$!

Tugas

- Silahkan kerjakan soal 1, dikumpulkan via email ke merarinta@yahoo.com dg judul Metnumti3p3-NIM
- Dikerjakan tulis tangan, paling lambat besok jumat 24/9/21 pukul 12.00 wib