

Himpunan

Ilham Rais Arvianto

F. Wiwiek Nurwiyati

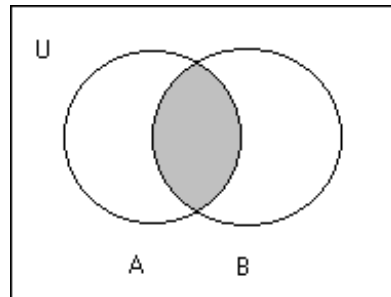
(diadopsi dari Bahan Kuliah Matematika Diskrit ITB – *Rinaldi Munir*)

Pertemuan 3

Operasi Terhadap Himpunan

1. Irisan (*intersection*)

- Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$

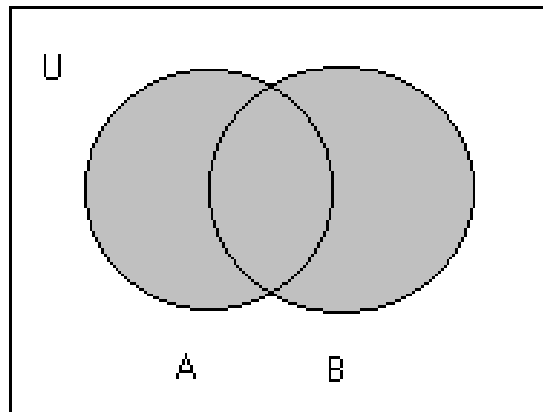


Contoh 14.

- (i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$, maka $A \cap B = \{4, 10\}$
- (ii) Jika $A = \{3, 5, 9\}$ dan $B = \{-2, 6\}$, maka $A \cap B = \emptyset$. Artinya: $A \parallel B$

2. Gabungan (*union*)

- Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



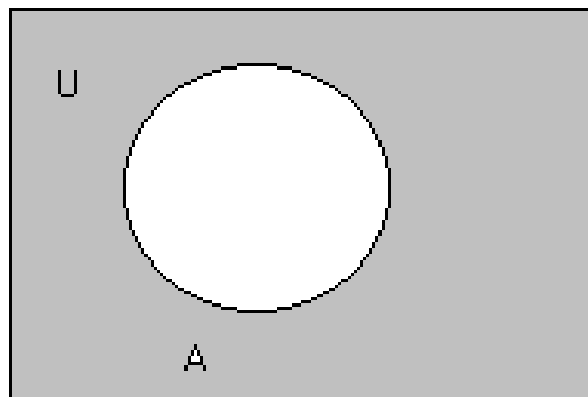
Contoh 15.

(i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$

(ii) $A \cup \emptyset = A$

3. Komplemen (*complement*)

- Notasi : $\bar{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



Contoh 16.

Misalkan $U = \{ 1, 2, 3, \dots, 9 \}$, __

(i) jika $A = \{ 1, 3, 7, 9 \}$, maka $\bar{A} = \{ 2, 4, 6, 8 \}$

(ii) jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x \leq 9 \}$, maka $\bar{A} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

Contoh 17. Misalkan:

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri

B = himpunan semua mobil impor

C = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990

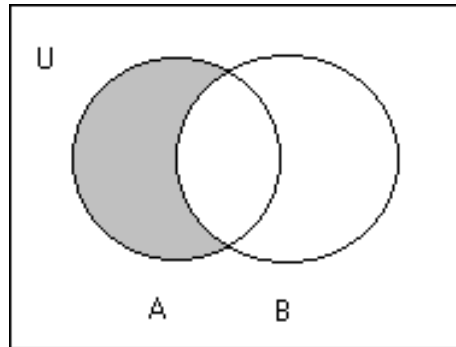
D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta

E = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

- (i) “mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri” $\rightarrow (E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$
- (ii) “semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta” $\rightarrow A \cap C \cap D$
- (iii) “semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta” $\rightarrow \overline{C} \cap D \cap B$

4. Selisih (*difference*)

- Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$

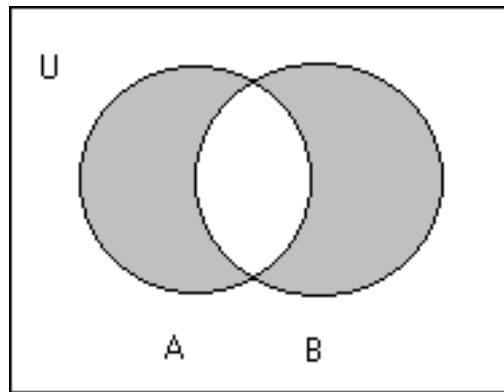


Contoh 18.

- (i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, \dots, 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \emptyset$
- (ii) $\{ 1, 3, 5 \} - \{ 1, 2, 3 \} = \{ 5 \}$, tetapi $\{ 1, 2, 3 \} - \{ 1, 3, 5 \} = \{ 2 \}$

5. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

- Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$



Contoh 19.

Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

Contoh 20. Misalkan

U = himpunan mahasiswa

P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80

Q = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

- (i) “Semua mahasiswa yang mendapat nilai A” : $P \cap Q$
- (ii) “Semua mahasiswa yang mendapat nilai B” : $P \oplus Q$
- (iii) “Semua mahasiswa yang mendapat nilai C” : $U - (P \cup Q)$

6. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

- Notasi: $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B \}$

Contoh 20.

- (i) Misalkan $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka
$$C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}$$
- (ii) Misalkan $A = B =$ himpunan semua bilangan riil, maka
 $A \times B =$ himpunan semua titik di bidang datar

Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka:
 $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
2. $(a, b) \neq (b, a)$.
3. $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.

Pada Contoh 20(i) di atas, $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$,
 $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$
 $C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}$
 $D \times C \neq C \times D$.

4. Jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$, maka $A \times B = B \times A = \emptyset$

Contoh 21. Misalkan

$A = \text{himpunan makanan} = \{ s = \text{soto}, g = \text{gado-gado}, n = \text{nasi goreng}, m = \text{mie rebus} \}$

$B = \text{himpunan minuman} = \{ c = \text{coca-cola}, t = \text{teh}, d = \text{es dawet} \}$

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

Jawab:

$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$ kombinasi dan minuman, yaitu $\{(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)\}$.

Perampatan Operasi Himpunan

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^n A_i$$

Contoh 22.

$$(i) A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$

$$A \cap \left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \cap B_i)$$

(ii) Misalkan $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, dan $C = \{\alpha, \beta\}$, maka

$$A \times B \times C = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), (2, a, \alpha), (2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta)\}$$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Untuk dua himpunan A dan B :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Contoh 24. Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Penyelesaian:

A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,

B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,

$A \cap B$ = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK – Kelipatan Persekutuan Terkecil – dari 3 dan 5, yaitu 15),

Yang ditanyakan adalah $|A \cup B|$.

$$|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33,$$

$$|B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20,$$

$$|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 20 - 6 = 47$$

Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5.

Untuk tiga buah himpunan A , B , dan C , berlaku

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = & |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \\ & |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

Untuk himpunan A_1, A_2, \dots, A_r , berlaku:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r| = & \sum_i |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq r} |A_i \cap A_j| + \\ & \sum_{1 \leq i < j < k \leq r} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + \\ & (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r| \end{aligned}$$

Latihan

1. Di antara bilangan bulat antara 1 – 600 (termasuk 1 dan 600 itu sendiri)
 - a. berapa banyak bilangan yang habis dibagi 3 atau 7
 - b. berapa banyak bilangan yang **tidak** habis dibagi 3 atau 7
2. Di antara bilangan bulat antara 101 – 600 (termasuk 101 dan 600 itu sendiri),
 - a. berapa banyak bilangan yang habis dibagi 3 atau 7
 - b. berapa banyak bilangan yang habis dibagi 3 atau 7, tetapi **tidak** habis dibagi oleh keduanya
3. Diantara bilangan bulat 501 sampai dengan 950 (termasuk 501 dan 950 itu sendiri), berapa banyak bilangan yang tidak habis dibagi 3, 5 atau 7

Contoh 30. Buktikan bahwa untuk sembarang himpunan A dan B , bahwa

$$(i) \quad A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B \quad \text{dan}$$

$$(ii) \quad A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$$

Bukti:

$$\begin{aligned} (i) \quad A \cup (\bar{A} \cap B) &= (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) && \text{(H. distributif)} \\ &= U \cap (A \cup B) && \text{(H. komplemen)} \\ &= A \cup B && \text{(H. identitas)} \end{aligned}$$

(ii) adalah dual dari (i)

$$\begin{aligned} A \cap (\bar{A} \cup B) &= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) && \text{(H. distributif)} \\ &= \emptyset \cup (A \cap B) && \text{(H. komplemen)} \\ &= A \cap B && \text{(H. identitas)} \end{aligned}$$

2. (Kuis IF2091 2012) Hitunglah banyak bilangan genap diantara 1 sampai 2000 yang habis dibagi 7 tetapi tidak habis dibagi 9.

- **Jawaban:** Banyak bilangan tersebut adalah banyak bilangan yang habis dibagi 2 dan 7 dikurangi banyak bilangan yang habis dibagi 2,7, dan 9.

Banyak bilangan habis dibagi 2 dan 7 = $\left\lfloor \frac{2000}{14} \right\rfloor = 142$

Banyak bilangan habis dibagi 2,7, dan 9 ada $\left\lfloor \frac{2000}{126} \right\rfloor = 15$

Jadi, banyak bilangan tersebut adalah $142 - 15 = 127$.