Pertemuan 3

Ilham R. Arvianto, M.Pd

Metode Penghitungan Determinan

- Ekspansi Kofaktor
- **Reduksi Baris Menggunakan OBE** ☜

Penghitungan Determinan dengan Reduksi Baris Menggunakan OBE

- Penggunaan metode ini tidak lepas dari metode ekspansi kofaktor.
- Reduksi baris dilakukan dengan mengubah baris ataupun kolom sehingga banyak memuat elemen 0.
- Matriks yang berbentuk eselon baris (EB), eselon baris tereduksi (EBT), atau matriks segitiga akan lebih mudah untuk dihitung nilai determinannya **karena hanya merupakan perkalian dari elemen diagonalnya**.

Penghitungan Determinan dengan Reduksi Baris Menggunakan OBE

Misalkan A adalah matriks persegi, berikut ini adalah hal-hal yang perlu diperhatikan dalam perhitungan determinan dengan OBE.

- Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari perkalian suatu baris atau kolom dengan skalar $k \neq 0$ maka

$$\det(B) = k \det(A)$$

- Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari pertukaran dua baris atau kolom dari A maka

$$\det(B) = -\det(A)$$

- Jika B adalah matriks yang dihasilkan ketika suatu baris ditambahkan dengan kelipatan baris lain dari A, maka

$$\det(B) = \det(A)$$

Penghitungan Determinan dengan Reduksi Baris Menggunakan OBE

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

det(B) = *k* det(A)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

det(B) = –det(A)

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{31} & a_{12} + ka_{32} & a_{13} + ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

det(B) = det(A)

Contoh 1

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}\rightarrow \det(A)=?$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}\overset{\substack{-2B_1+B_2\\ -4B_1+B_3}}{=}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & -5\\ 0 & -5 & -11\end{vmatrix}\overset{-\frac{1}{2}B_2}{=}(-2)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & \frac{5}{2}\\ 0 & -5 & -11\end{vmatrix}$$

$$\overset{5B_2+B_3}{=}(-2)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & \frac{5}{2}\\ 0 & 0 & \frac{3}{2}\end{vmatrix}=(-2)(1)(1)\left(\frac{3}{2}\right)=-3$$

Contoh 2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \det(B) = ?$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -5 \end{vmatrix} \overset{-3B_1 + B_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -26 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(7)(3)(-26) = -546$$

Latihan 1

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(F) = \cdots$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \det(G) = \cdots$$

Sifat-Sifat Determinan

Sifat 1

Jika A adalah matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah atau diagonal), maka $\det(A)$ adalah perkalian entri-entri pada diagonal utamanya.

$$\det(A) = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \det(P) = \cdots$$

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(Q) = \cdots$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \det(R) = \cdots$$

Sifat-Sifat Determinan

Sifat 2

Misalkan A adalah matriks persegi. Jika A memiliki satu baris nol atau kolom nol, maka

$$\det(A) = 0$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \\ 8 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \det(S) = \cdots$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 5 \\ 3 & 9 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \det(T) = \cdots$$

Sifat-Sifat Determinan

Sifat 3

Misal $\boldsymbol{E}$ **adalah matriks elementer** berukuran $n \times n$,

- Jika E dihasilkan dari suatu baris I_n dikali k, maka

$$\det(E) = k$$

- Jika E dihasilkan dari pertukaran dua baris pada I_n, maka

$$\det(E) = -1$$

- Jika E dihasilkan dari suatu baris ditambah kelipatan baris lain di I_n, maka

$$\det(E) = 1$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \det(E_1) = \cdots$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det(E_2) = \cdots$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(E_3) = \cdots$$

Sifat-Sifat Determinan

Sifat 4

Jika A adalah matriks persegi dimana terdapat dua baris atau dua kolom yang saling berkelipatan, maka

$\det(A) = 0$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \det(U) = \cdots$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & 15 & 10 \\ 10 & 5 & 5 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \det(T) = \cdots$$

Sifat-Sifat Determinan

Sifat 5

Jika A dan B matriks persegi dengan ordo yang sama, maka

det(A.B) = det(A).det (B)

det(A+B) ≠ det(A) + det(B)

$$W=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{pmatrix}\rightarrow \det(W)=\cdots$$

$$X=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\rightarrow \det(X)=\cdots$$

$$W\cdot X=\begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix}\rightarrow \det(W\cdot X)=\cdots$$

$$W+X=\begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix}\rightarrow \det(W+X)=\cdots$$

Latihan 2

Menggunakan sifat determinan, carilah nilai determinan dari matriks-matriks berikut!

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -17 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \cdots$$

$$|C| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -7 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \cdots$$

$$|B| = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -8 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \cdots$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & -8 & 1 \end{vmatrix} = \cdots$$

Latihan 3

Menggunakan sifat determinan, carilah nilai determinan dari matriks-matriks elementer berikut!

$$|E_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cdots \qquad |E_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cdots$$

$$|E_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cdots$$

Pengayaan

Menggunakan sifat determinan, carilah nilai determinan dari matriks elemeter berikut!

$$|E_5| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \cdots$$

$$|E_6| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \cdots$$

Selesaikan persamaan berikut!

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & x+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0$$

Terima Kasih