Transformasi Linear dari R^n ke R^m.

Kita akan memulai penelaahan fungsi berbentuk **w** = F(**x**), dimana peubah bebas **x** adalah suatu vektor dalam R^n dan peubah tak bebas **w** adalah suatu vektor dalam R^m.

FUNGSI-FUNGSI DARI R^n KE R.

Ingat bahwa sebuah fungsi adalah suatu aturan *f* yang menghubungkan setiap unsur dalam himpunan *A* ke satu dan hanya satu unsur dalam himpunan *B*. Jika *f* menghubungkan unsur *b* dengan unsur *a*, maka kita tulis *b = f(a)* dan kita akan katakan bahwa *b* adalah bayangan dari *a* di bawah *f* atau bahwa *f(a)* adalah nilai dari *f* di *a*. Himpunan *A* disebut disebut daerah asal dari *f* dan himpunan *B* disebut daerah kawan dari *f*. Himpunan bagian dari *B* yang terdiri dari semua nilai yang mungkin untuk *f* ketika a berubah-ubah dalam *A* disebut daerah hasil dari *f*. Untuk fungsi-fungsi yang paling umum, *A* dan *B* adalah himpunan bilangan real, di mana *f* disebut fungsi bernilai real dari suatu peubah real. Fungsi-fungsi umum lainnya terjadi ketika *B* adalah himpunan bilangan real dan *A* adalah himpunan vektor dalam R^2, R^3 atau secara lebih umum, dalam R^n. Beberapa contoh ditunjukkan dalam Tabel 1.

Table 1

Formula	Example	Classification	Description
$f(x)$	$f(x) = x^2$	Real-valued function of a real variable	Function from R to R
$f(x, y)$	$f(x, y) = x^2 + y^2$	Real-valued function of two real variables	Function from R^2 to R
$f(x, y, z)$	$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$	Real-valued function of three real variables	Function from R^3 to R
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$	Real-valued function of n real variables	Function from R^n to R

Dua fungsi f_1 an f_2 dianggap sama, ditulis $f_1 = f_2$ jika kedua fungsi tersebut mempunyai daerah asal yang sama dan $f_1(a) = f_2(a)$ untuk semua *a* dalam daerah asal tersebut.

FUNGSI-FUNGSI DARI R^n KE R^m.

Jika daerah asal suatu fungsi *f* adalah R^n dan daerah kawannya adalah R^m (*m* dan *n* mungkin sama), maka *f* disebut suatu peta atau transformasi dari R^n ke R^m, dan kita katakan bahwa *f* memetakan R^n ke R^m. Kita nyatakan ini dengan menuliskan $R^n \rightarrow R^m$. Fungsi-fungsi dalam Tabel 1 adalah transformasi dimana *m* = 1. Dalam kasus dimana *m = n* transfermasi f : $R^n \rightarrow R^n$ disebut operator pada R^n. Anggota pertama dari Tabel 1 merupakan suatu operator pada *R*.

Untuk mengilustrasikan suatu cara penting di mana transformasi bisa muncul, anggap $f_1, f_2, \ldots, f_n$ adalah fungsi-fungsi bernilai real dari *n* peubah real, katakan

$$
\begin{aligned}
w_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
w_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\vdots \\
w_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned} \tag{1}
$$

Persamaan-persamaan m di atas menempatkan suatu titik unik *(*$w_1, w_2, \ldots, w_m$*)* dalam R^m ke setiap titik *(*$x_1, x_2, \ldots, x_n$*)* dalam R^n dan dengan demikian mendefinisikan suatu transformasi dari R^n ke R^m. Jika kita menyatakan transformasi ini dengan *T*, maka $R^n \rightarrow R^m$ dan

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$$

Contoh 1.

Persamaan-persamaan

$$
\begin{aligned}
w_1 &= x_1 + x_2 \\
w_2 &= 3x_1x_2 \\
w_3 &= x_1^2 - x_2^2
\end{aligned}
$$

Mendefinisikan suatu transformasi $T: R^2 \rightarrow R^3$. Dengan transformasi ini bayangan dari titik (x_1, x_2) adalah

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1x_2, x_1^2 - x_2^2)$$

Jadi, misalnya

T(1, -2) = (-1, -6, -3)

TRANSFORMASI LINEAR DARI R^n KE R^m

Dalam kasus khusus di mana persamaan pada (1) adalah linear, transformasi $T: R^n \rightarrow R^m$ yang didefinisikan oleh persamaan-persamaan itu disebut suatu transformasi linear (atau suatu operator linear jika m = n). Jadi, suatu transformasi linear $T: R^n \rightarrow R^m$ didefinisikan oleh persamaan berbentuk

$$
\begin{aligned}
w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
w_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
w_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{aligned} \tag{2}
$$

Atau dalam notasi matriks

$$
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3}
$$

Atau secara lebih ringkas

$$\mathbf{w} = A\mathbf{x} \tag{4}$$

Matriks $A = [a_{ij}]$ disebut matriks standar untuk transformasi linear *T*, dan *T* disebut perkalian dengan *A*.

Contoh 2.

Transformasi linear T: $R^4 \rightarrow R^3$ yang didefinisikan oleh persamaan-persamaan

$$
\begin{aligned}
w_1 &= 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 \\
w_2 &= 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \\
w_3 &= 5x_1 - x_2 + 4x_3
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Bisa dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai

$$
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{6}
$$

Sehingga matriks standar untuk *T* adalah

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}
$$

Bayangan dari suatu titik (x_1, x_2, x_3, x_4) bisa dihitung secara langsung dari persamaan yang mendefinisikannya (5) atau dari (6) dengan perkalian matriks. Misalnya, jika $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -3, 0, 2)$, maka dengan mensubstitusikannya ke (5) kita akan mendapatkan

$w_1 = 1$, $w_2 = 3$, $w_3 = 8$

atau dengan cara lain dari (6)

$$
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}
$$

BEBERAPA MASALAH NOTASI.

Jika $T: R^n \rightarrow R^m$ adalah perkalian dengan *A*, dan jika kita perlu menekankan bahwa *A* adalah matriks standar untuk *T*, kita akan menyatakan transformasi linear $T: R^n \rightarrow R^m$ dengan $T_A : R^n \rightarrow R^m$. Jadi,

$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ (7)

Dipahami dalam persamaan ini bahwa vektor **x** dalam R^n dinyatakan sebagai suatu matriks kolom.

Kadang-kadang terasa anek jika kita memperkenalkan suatu huruf baru untuk menyatakan matriks standar untuk suatu transformasi linear $T: R^n \rightarrow R^m$. Dalam kasus-kasus seperti itu kita akan menyatakan matriks standar untuk *T* dengan simbol [*T*]. Dengan notasi persamaan (7) akan menjadi

$T(\mathbf{x}) = [\,T\,]\mathbf{x}$ (8)

Kadangkala, dua notasi untuk matriks standar akan dicampur, dimana kita mempunyai hubungan

$[\,T_A\,] = A$ (9)

GEOMETRI TRANSFORMASI LINEAR.

Tergantung pada apakah ganda-n dipandang sebagai titik atau vektor, dampak geometris dari suatu operator T: $R^n \rightarrow R^n$ adalah mentransformasikan setiap titik (atau vektor) dalam R^n ke dalam beberapa titik (atau vektor) baru (Gambar 4.2.1.)

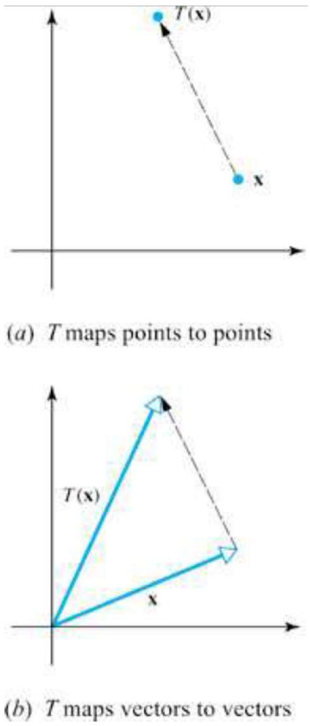


Figure 4.2.1

Contoh 3.

Jika 0 adalah matriks nol $m \times n$ dan $\mathbf{0}$ adalah vektor nol dalam R^n, maka untuk setiap vektor $\mathbf{x}$ dalam R^n

$T_0(\mathbf{x}) = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Sehingga perkalian dengan nol memetakan setiap vektor dalam R^n ke dalam vektor nol dalam R^m. Kita sebut T_0 sebagai transformasi nol dari R^n ke R^m. Kadang-kadang transformasi nol dinyatakan dengan 0. Meskipun ini adalah notasi yang sama dengan yang digunakan untuk matriks nol, interpretasi yang tepat biasanya akan jelas dari konteksnya.

Contoh 4.

Jika I adalah matriks identitas $n \times n$, maka untuk setiap vektor $\mathbf{x}$ dalam R^n

$T_1(\mathbf{x}) = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Sehingga perkalian dengan I memetakan setiap vektor dalam R^n ke dirinya sendiri. Kita sebut T_1 sebagai operator identitas pada R^n. Kadang-kadang operator identitas dinyatakan dengan I. Meskipun ini adalah notasi yang sama dengan yang digunakan untuk matriks identitas, interpretasi yang tepat biasanya akan jelas dari konteksnya.

Operasi-operasi linear yang paling penting pada R^2 dan R^3 di antaranya adalah operasi-operasi yang menghasilkan pencerminan, proyeksi, dan rotasi.

<u>OPERATOR-OPERATOR PENCERMINAN.</u>

Tinjau operator $T : R^2 \rightarrow R^3$ yang memetakan setiap vektor ke bayangan simetrisnya terhadap sumbu-*y* (Gambar 4.2.2.)

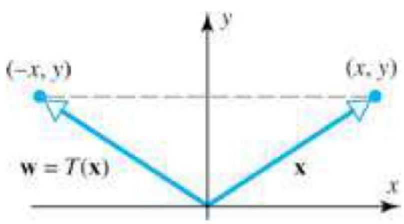
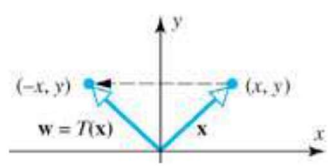
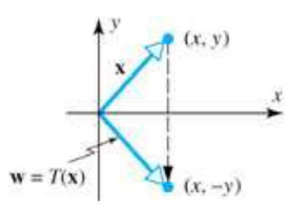
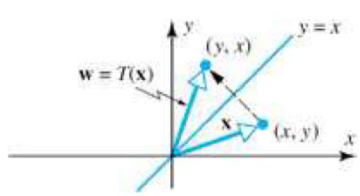


Figure 4.2.2

Table 2

Operator	Illustration	Equations	Standard Matrix
Reflection about the y-axis		$w_1 = -x$ $w_2 = y$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflection about the x-axis		$w_1 = x$ $w_2 = -y$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflection about the line $y = x$		$w_1 = y$ $w_2 = x$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Jika kita anggap **w** = T(**x**), maka persamaan yang menghubungkan komponen-komponen **x** dan **w** adalah

$$w_1 = -x = -x + 0y \tag{10}$$

$$w_2 = \; y = 0x + \; y$$

atau dalam bentuk matriks,

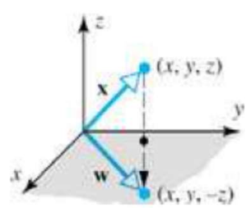
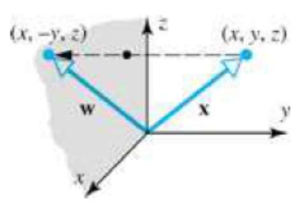
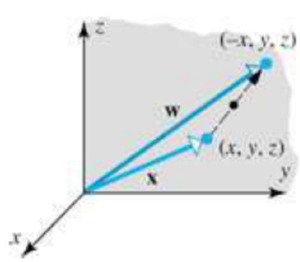
$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{11}$$

Karena persamaan dalam (10) adalah linear, maka T adalah suatu operator linear dan dari (11) matriks standar untuk T adalah

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Secara umum, operator pada R^2 dan R^3 yang memetakan setiap vektor ke bayangan simetrisnya terhadap suatu garis atau bidang disebut operator pencerminan. Operator-operator tersebut linear. Tabel 2 dan 3 mendaftarkan beberapa operator pencerminan yang umum.

Table 3

Operator	Illustration	Equations	Standard Matrix
Reflection about the xy-plane		$w_1 = x$ $w_2 = y$ $w_3 = -z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflection about the xz-plane		$w_1 = x$ $w_2 = -y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflection about the yz-plane		$w_1 = -x$ $w_2 = y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

<u>OPERATOR-OPERATOR PROYEKSI.</u>

Tinjau operator $T{:}R^2 \rightarrow R^3$ yang memetakan setiap vektor ke proyeksi ortogonalnya pada sumbu-x (Gambar 4.2.3)

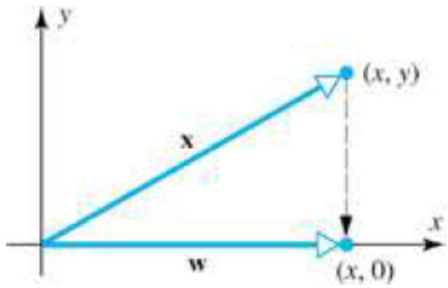


Figure 4.2.3

Persamaan-persamaan yang menghubungkan komponen-komponen **x** dan **w** = *T*(**x**) adalah

$$\begin{aligned} w_1 &= x = x + 0y \\ w_2 &= 0 = 0x + 0y \end{aligned} \tag{12}$$

Atau dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{13}$$

Persamaan dalam (12) adalah linear, jadi *T* adalah suatu operator linear dan dari (13) matriks standar untuk *T* adalah

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Secara umum, sebuah operator proyeksi (atau lebih tepatnya sebuah operator proyeksi ortogonal) pada R^2 atau R^3 adalah sebarang operator yang memetakan setiap vektor ke proyeksi ortogonalnya pada suatu garis atau bidang yang melalui titik asal. Bisa ditunjukkan bahwa operator-operator seperti itu adalah linear. Beberapa operator proyeksi dasar pada R^2 dan R^3 didaftarkan pada Tabel 4 dan 5.

Table 4

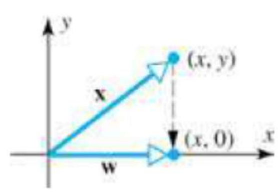
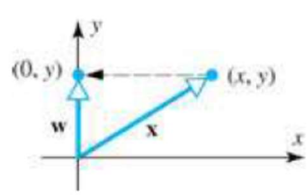
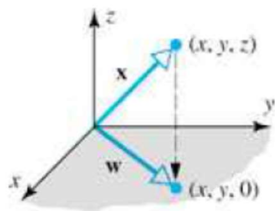
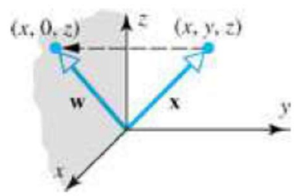
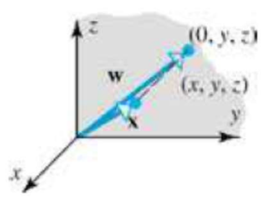
Operator	Illustration	Equations	Standard Matrix
Orthogonal projection on the x-axis		$w_1 = x$ $w_2 = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection on the y-axis		$w_1 = 0$ $w_2 = y$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

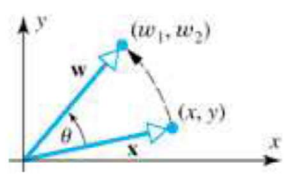
Table 5

Operator	Illustration	Equations	Standard Matrix
Orthogonal projection on the xy-plane		$w_1 = x$ $w_2 = y$ $w_3 = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection on the xz-plane		$w_1 = x$ $w_2 = 0$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection on the yz-plane		$w_1 = 0$ $w_2 = y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

OPERATOR-OPERATOR ROTASI.

Operator yang merotasikan setiap vektor dalam R^2 melalui sudut tetap θ disebut operator rotasi pada R^2. Tabel 6 memberikan rumus-rumus untuk operator-operator rotasi pada R^2. Untuk menunjukkan bagaimana hasil-hasil inii diturunkan, tinjau operasi rotasi yang merotasikan setiap vektor berlawanan arah dengan jarum jam pada suatu sudut tetap θ. Untuk mencari persamaan yang menghubungkan **x** dan **w** = *T*(**x**), anggap ∅ adalah sudut dari sumbu-*x* positif ke **x**, dan anggap panjang **x** dan **w** masing-masing adalah *r* (Gambar 4.2.4).

Table 6

Operator	Illustration	Equations	Standard Matrix
Rotation through an angle θ		$w_1 = x\cos\theta - y\sin\theta$ $w_2 = x\sin\theta + y\cos\theta$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

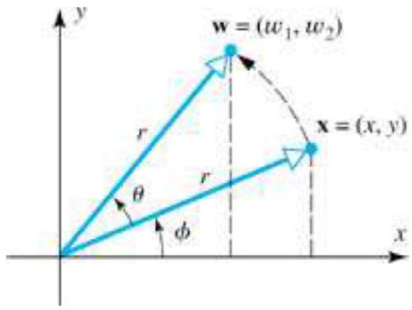


Figure 4.2.4

Maka dari trigonometri dasar

$$x = r\cos\emptyset, \quad y = r\sin\emptyset \tag{14}$$

dan

$$w_1 = r\cos(\theta + \emptyset), \quad w_2 = r\sin(\theta + \emptyset) \tag{15}$$

Dengan menggunakan identitas trigonometri pada (15) kita dapatkan

$$\begin{aligned} w_1 &= r\cos\theta\cos\phi - r\sin\theta\sin\phi \\ w_2 &= r\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\sin\phi \end{aligned}$$

Dan mensubstitusikan (14) menghasilkan

$$\begin{aligned} w_1 &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ w_2 &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{16}$$

Persamaan-persamaan dalam (16) adalah linear, sehingga *T* adalah sebuah operator linear; lebih jauh, dari persamaan ini kita dapati bahwa matriks standar utuk *T* adalah

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Contoh 5.

Jika setiap vektor pada R^2 dirotasikan dengan sudut π/6 = (30^0), maka bayangan **w** dari suatu vektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

adalah

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \cos\pi/6 & -\sin\pi/6 \\ \sin\pi/6 & \cos\pi/6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{bmatrix}$$

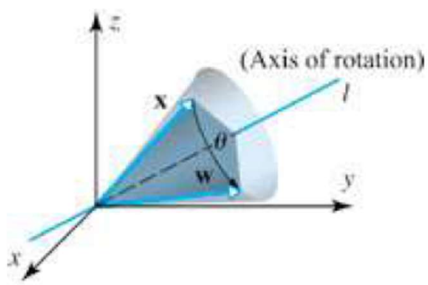
Misalnya, bayangan vektor

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

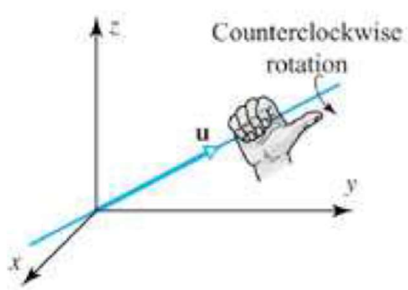
adalah

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

Suatu rotasi vektor-vektor pada R^3 biasanya diuraikan dalam hubungannya dengan sinar yang berasal dari titik asal, yang disebut sumbu rotasi. Ketika suatu vektor berputar mengelilingi sumbu rotasi maka vektor tersebut menyapu beberapa bagian dari sebuah kerucut (Gambar 4.2.5a). Sudut rotasi, yang diukur di dasar kerucut, dijabarkan sebagai "searah jarum jam" atau "berlawanan arah dengan jarum jam" dalam hubungannya dengan suatu sudut pandang yang sejajar dengan sumbu rotasi dengan melihat ke arah titik asal. Misalnya, pada Gambar 4.2.5a vektor **w** dihasilkan dengan memutar (merotasikan) vektor **x** berlawanan arah dengan jarum jam terhadap sumbu *l* dengan sudut θ. Sebagaimana dalam R^2, sudutnya positif jika sudut-sudut tersebut dibangkitkan oleh rotasi berlawanan dengan jarum jam dan negatif jika searah dengan jarum jam.



(*a*) Angle of rotation



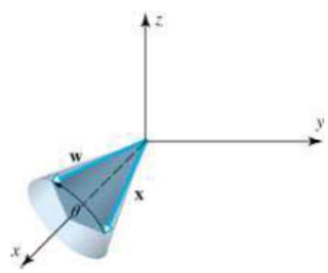
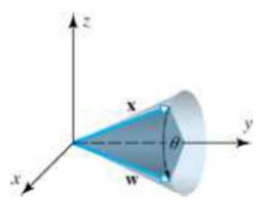
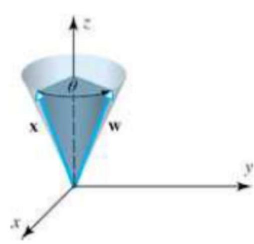
(*b*) Right-hand rule

Figure 4.2.5

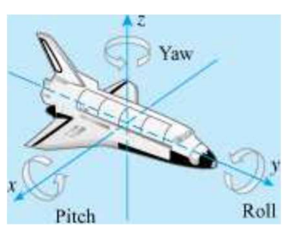
Cara paling umum untuk menjabarkan sebuah sumbu rotasi yang umum adalah dengan menentukan suatu vektor tak-nol **u** yang berada pada sumbu rotasi dan mempunyai titik pangkal di titik asal. Selanjutnya =, arah yang berlawanan dengan jarum jam untuk suatu rotasi terhadap sumbunya bisa ditentukan dengan suatu "aturan tangan kanan" (Gambar 4.2.5b). Jika ibu jari kanan menunjuk pada arah **u**, maka jari-jari yang menggenggam menunjuk pada suatu arah berlawanan dengan jarum jam.

Sebuah operator rotasi pada R^3 merupakan operator linear yang merotasikan setiap vektor dalam R^3 terhadap beberapa sumbu rotasi dengan suatu sudut tetap θ. Pada Tabel 7 kami telah menguraikan operator rotasi pada R^3 yang sumbu-sumbu rotasinya adalah sumbu-sumbu koordinat positif. Untuk masing-masing rotasi ini salah satu komponennya tidak diubah oleh rotasi, dan hubungan antara komponen-komponen yang lain bisa diturunkan dengan prosedur yang sama yang digunakan untuk menurunkan (16). Misalnya, dalam rotasi terhadap sumbu-z, komponen-komponen z dari **x** dan **w** = T(**x**) adalah sama, dan komponen-komponen-x dan y dihubungkan sebagaimana dalam (16). Hal ini menghasilkan persamaan rotasi yang ditunjukkan pada baris terakhir Tabel 7.

Table 7

Operator	Illustration	Equations	Standard Matrix
Counterclockwise rotation about the positive x-axis through an angle θ		$w_1 = x$ $w_2 = y\cos\theta - z\sin\theta$ $w_3 = y\sin\theta + z\cos\theta$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
Counterclockwise rotation about the positive y-axis through an angle θ		$w_1 = x\cos\theta + z\sin\theta$ $w_2 = y$ $w_3 = -x\sin\theta + z\cos\theta$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$
Counterclockwise rotation about the positive z-axis through an angle θ		$w_1 = x\cos\theta - y\sin\theta$ $w_2 = x\sin\theta + y\cos\theta$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Yaw, Pitch, and Roll



Dalam aeronautika dan astronautika, orientasi pesawat atau pesawat ulang-alik relatif terhadap sistem koordinat xyz sering dijelaskan dalam istilah sudut yang disebut yaw, pitch, dan roll. Jika, misalnya, sebuah pesawat terbang di sepanjang sumbu *y* dan bidang *xy* menentukan horizontal, maka sudut rotasi pesawat terhadap sumbu z disebut yaw, sudut rotasi terhadap sumbu x disebut pitch, dan sudut rotasinya di sekitar sumbu y disebut roll. Kombinasi yaw, pitch, dan roll dapat dicapai dengan satu rotasi pada beberapa sumbu melalui titik asal. Inilah, sebenarnya, bagaimana pesawat ulang-alik membuat penyesuaian sikap — ia tidak melakukan setiap rotasi secara terpisah; itu menghitung satu sumbu, dan berputar tentang sumbu itu untuk mendapatkan orientasi yang benar. Manuver rotasi seperti itu digunakan untuk mengarahkan antena, mengarahkan hidung ke benda langit, atau memposisikan tempat muatan untuk dipasang ke dok.

Untuk lengkapnya, kita perhatikan bahwa standar matriks untuk suatu rotasi yang berlawanan degan jarum jam dengan sudut terhadap suatu sumbu pada R^3, yang ditentukan oleh suatu vektor satuan sebarang **u** = (*a, b, c*) yang mempunyai titik pangkal di pusat, adalah

$$\begin{bmatrix} a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\sin\theta & ac(1-\cos\theta)+b\sin\theta \\ ab(1-\cos\theta)+c\sin\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\sin\theta \\ ac(1-\cos\theta)-b\sin\theta & bc(1-\cos\theta)+a\sin\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix} \tag{17}$$

OPERATOR-OPERATOR PELEBARAN DAN PENYEMPITAN.

Jika k adalah suatu skalar non-negatif, maka operator $T(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ pada R^2 atau R^3 disebut suatu penyempitan dengan faktor k jika $0 \leq k \leq 1$ dan suatu pelebaran dengan faktor k jika $k \geq 1$. Dampak geometris dari suatu penyempitan adalah memampatkan setiap vektor dengan suatu faktor k (Gambar 4.2.6a), dan dampak suatu pelebaran adalah meregang setiap vektor dengan suatu faktor k (Gambar 4.2.6b). Suatu penyempitan memampatkan R^2 atau R^3 secara seragam menuju titik asal dari semua arah, dan suatu pelebaran meregang R^2 dan R^3 secara seragam menjauh dari titik asal pada semua arah.

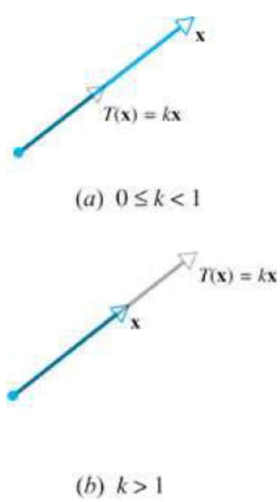


Figure 4.2.6

Penyempitan yang paling ekstrim terjadi jika $k = 0$, di mana $T(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ berubah menjadi operator nol $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, yang memampatkan setiap vektor menjadi suatu titik tunggal (asal). Jika $k = 1$, maka $T(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ berubah menjadi operator identitas $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, yang membuat setiap vektor tidak berubah; ini bisa dipandang baik sebagai penyempitan ataupun suatu pelebaran. Tabel 8 dan 9 mendaftarkan operator-operator pelebaran dan penyempitan pada R^2 dan R^3.

Table 8

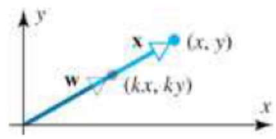
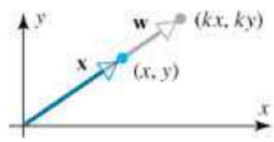
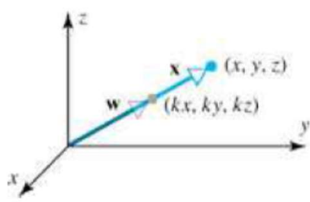
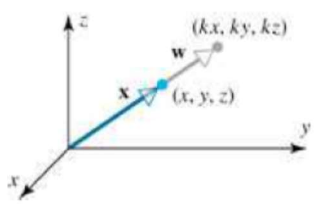
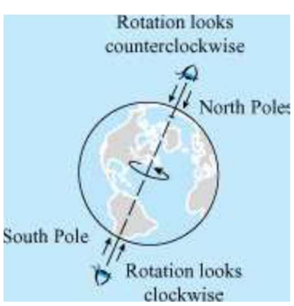
Operator	Illustration	Equations	Standard Matrix
Contraction with factor k on R^2 $(0 \le k \le 1)$		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Dilation with factor k on R^2 $(k \ge 1)$		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$	

Table 9

Operator	Illustration	Equations	Standard Matrix
Contraction with factor k on R^3 $(0 \le k \le 1)$		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$ $w_3 = kz$	$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$
Dilation with factor k on R^3 $(k \ge 1)$		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$ $w_3 = kz$	

Rotations in R^3



Contoh umum dari rotasi di R^3 adalah rotasi Bumi pada porosnya melalui Kutub Utara dan Selatan. Untuk sederhananya, kita akan berasumsi bahwa Bumi itu bulat. Karena Matahari terbit di timur dan terbenam di barat, kita tahu bahwa bumi berputar dari barat ke timur. Namun, bagi pengamat di atas Kutub Utara, rotasi akan tampak berlawanan arah jarum jam, dan bagi pengamat di bawah Kutub Selatan, rotasi akan tampak searah jarum jam. Jadi, jika rotasi di R^3 digambarkan searah jarum jam atau berlawanan arah jarum jam, arah pandang di sepanjang sumbu rotasi juga harus dinyatakan.

Ada beberapa fakta lain tentang rotasi Bumi yang berguna untuk memahami rotasi umum di R^3. Misalnya, saat Bumi berputar pada porosnya, Kutub Utara dan Selatan tetap diam, seperti halnya semua titik lain yang terletak pada sumbu rotasi. . Dengan demikian, sumbu rotasi dapat dianggap sebagai garis titik-titik tetap dalam rotasi bumi. Selain itu, semua titik di bumi yang tidak berada pada sumbu rotasi bergerak dalam jalur melingkar yang berpusat pada sumbu dan terletak pada bidang yang tegak lurus terhadap sumbu. Misalnya, titik-titik di Bidang Khatulistiwa bergerak di dalam Bidang Khatulistiwa dalam lingkaran di sekitar pusat Bumi.

KOMPOSISI TRANSFORMASI LINEAR.

Jika $T_A : R^n \rightarrow R^k$ dan $T_B : R^k \rightarrow R^m$ adalah transformasi-transformasi linear, maka untuk setiap **x** dalam R^n kita pertama-tama bisa menghitung $T_A(\mathbf{x})$ yang merupakan suatu vektor dalam R^k, dan kemudian kita bisa menghitung $T_B(T_A(\mathbf{x}))$, yang merupakan suatu vektor dalam R^m. Jadi, penerapan T_A yang diikuti oleh T_B menghasilkan suatu transformasi dari R^n ke R^m. Transformasi ini disebut komposisi T_B dengan T_A dan dinyatakan oleh $T_B \circ T_A$ (dibaca T_B lingkaran T_A). Jadi,

$$(T_B \circ T_A)(\mathbf{x}) = T_B(T_A(\mathbf{x})) \tag{18}$$

Komposisi $T_B \circ T_A$ adalah linear karena

$$(T_B \circ T_A)(\mathbf{x}) = T_B(T_A(\mathbf{x})) = B(A\mathbf{x}) = (BA)\,\mathbf{x} \tag{19}$$

Sehingga $T_B \circ T_A$ adalah perkalian dengan BA, yang merupakan suatu transformasi linear. Rumus (19)juga menyatakan kepada kita bahwa matriks standar untuk $T_B \circ T_A$ adalah BA. Hal ini dinyatakan dengan rumus

$$T_B \circ T_A = T_{BA} \tag{20}$$

(Mengalikan matriks-matriks setara dengan mengkomposisikan transformasi linear yang berpadanan dalam urutan faktor dari-kanan-ke-kiri).

Ada suatu bentuk alternatif dari Rumus (20) : Jika $T_1 : R^n \rightarrow R^k$ dan $T_2 : R^k \rightarrow R^m$ adalah transformasi-transformasi linear, maka karena matriks standar untuk komposisi $T_2 \circ T_1$ adalah hasil kali matriks-matriks standar dari T_2 dan T_1 kita dapatkan

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2]\,[T_1] \tag{21}$$

Contoh 6. Composition of Two Rotations

Anggap $T_1 : R^2 \rightarrow R^2$ dan $T_2 : R^2 \rightarrow R^2$ adalah operator-operator linear yang merotasikan vektor masing-masing dengan sudut θ_1 dan θ_2. Jadi, operasi

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{x}) = T_2(T_1(\mathbf{x}))$$

pertama merotasikan **x** dengan sudut θ_1, kemudian merotasikan $T_1(\mathbf{x})$ dengan sudut θ_1. Oleh karena itu, dampak bersih dari $T_2 \circ T_1$ adalah merotasikan setiap vektor dalam R^2 dengan sudut $\theta_1 + \theta_2$ (Gambar 4.2.7)

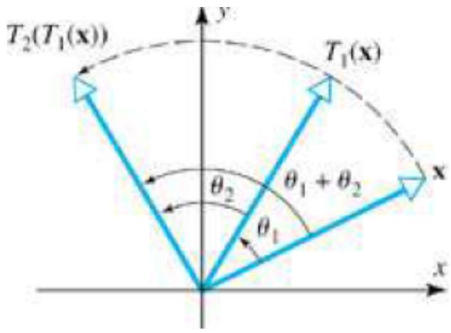


Figure 4.2.7

Jadi, matriks-matriks standar untuk operator-operator linear ini adalah

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \quad [T_2] = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix},$$

$$[T_2 \circ T_1] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

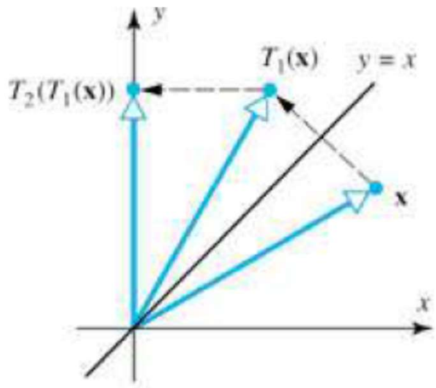
Matriks-matriks ini seharusnya memenuhi (21). Dengan bantuan beberapa identitas trigonometri dasar, kita bisa menunjukkan bahwa matriks-matriks tersebut memang memenuhi (21) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
[T_2][T_1] &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta_1 & -(\cos\theta_2\sin\theta_1 + \sin\theta_2\cos\theta_1 \\ \sin\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\sin\theta_1 & -\sin\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_2\cos\theta_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \\
&= [T_2 \circ T_1]
\end{aligned}$$

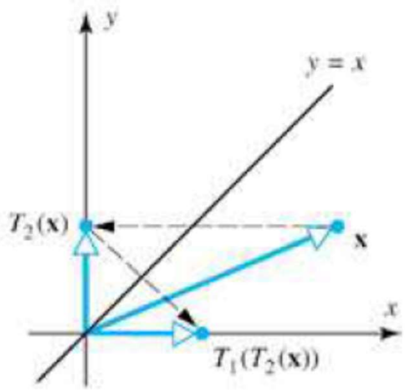
(Secara umum, masalahnya adalah bagaimana urutan komposisi transformasi linear. Hal ini sudah diperkirakan, karena komposisi dua transformasi linear berpadanan dengan perkalian matriks-matriks standarnya, dan kita tahu bahwa urutan perkalian matriks yang berbeda bisa memberikan hasil yang berbeda.)

Contoh 7. Composition Is Not Commutative

Anggap $T_1 : R^2 \rightarrow R^2$ adalah operator pencerminan terhadap garis $y = x$, dan anggap $T_2 : R^2 \rightarrow R^2$ adalah proyeksi ortogonal terhadap sumbu-y. Gambar 4.2.8 mengilustrasikan secara grafis bahwa $T_1 \circ T_2$ dan $T_2 \circ T_1$ mempunyai dampak yang berbeda pada suatu vektor **x**. Kesimpulan yang sama bisa didapatkan dengan menunjukkan bahwa matriks-matriks standar untuk T_1 dan T_2 tidaklah komutatif.



(a) $T_2 \circ T_1$



(b) $T_1 \circ T_2$

Figure 4.2.8

$$[T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 8.

Anggap $T_1 : R^2 \rightarrow R^2$ adalah pencerminan terhadap sumbu-*y* dan anggap $T_2 : R^2 \rightarrow R^2$ adalah pencerminan terhadap sumbu-*x*. Dalam kasus ini $T_1 \circ T_2$ dan $T_2 \circ T_1$ sama; keduanya memetakan setiap vektor **x** = (*x,y*) menjadi negatifnya **–x** = (-*x*, -*y*) (Gambar 4.2.9):

$$(T_1 \circ T_2)(x, y) = T_1(x, -y) = (-x, -y)$$
$$(T_2 \circ T_1)(x, y) = T_2(-x, y) = (-x, -y)$$

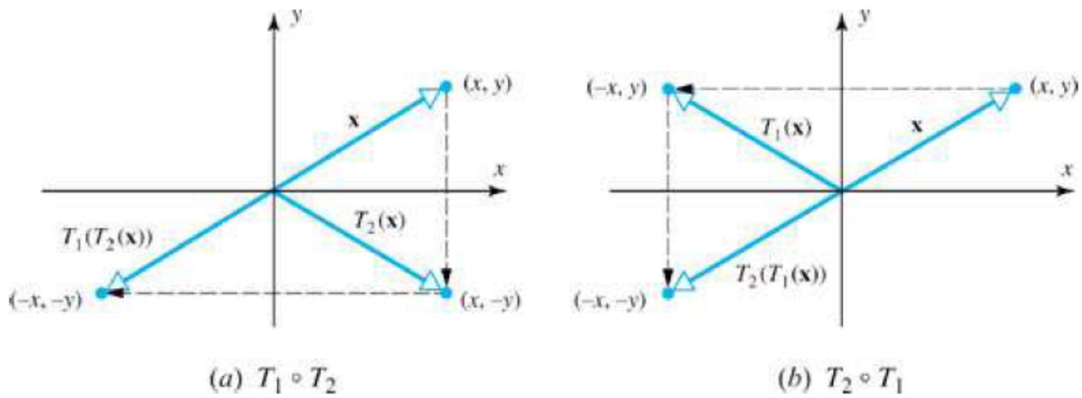


Figure 4.2.9

Kesamaan $T_1 \circ T_2$ dan $T_2 \circ T_1$ bisa juga didapatkan dengan menunjukkan bahwa matriks-matriks standar untuk T_1 dan T_2 komutatif:

$$[T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Operator $T(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ pada R^2 atau R^3 disebut pencerminan terhadap titik asal. Sebagaimana yang ditunjukkan oleh perhitungan di atas, matriks standar untuk operator ini pada R^2 adalah

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

KOMPOSISI TIGA ATAU LEBIH TRANSFORMASI LINEAR.

Komposisi bisa didefinisikan untuk tiga atau lebih transformasi linear. Misalnya, tinjau transformasi-transformasi linear

$$T_1: R^n \longrightarrow R^k, \quad T_2: R^k \longrightarrow R^l, \quad T_3: R^l \longrightarrow R^m$$

Kita definisikan komposisi $T_3 \circ T_2 \circ T_1 : R^n \rightarrow R^m$ dengan

$(T_3 \circ T_2 \circ T_1)(\mathbf{x}) = T_3(T_2(T_1(\mathbf{x})))$

Bisa ditunjukkan bahwa komposisi ini merupakan suatu transformasi linear dan bahwa matriks standar untuk $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ dinyatakan masing-masing dengan *A, B, C,* maka kita juga mempunyai perampatan dari (20) sebagai berikut:

$$T_C \circ T_B \circ T_A = T_{CBA} \qquad (23)$$

Contoh 9. Composition of Three Transformations

Cari matriks standar untuk operator linear $T : R^3 \rightarrow R^3$ yang pertama-tama merotasikan suatu vektor berlawanan arah jarum jam terhadap sumbu-*z* dengan sudut θ, kemudian mencerminkan vektor yang dihasilkan terhadap sumbu-*yz*, dan kemudian memproyeksikan vektor ini secara ortogonal pada bidang-*xy*.

Penyelesaian.

Transformasi linear *T* bisa dinyatakan sebagai komposisi

$T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$

Dimana T_1 adalah rotasi terhadap sumbu-*z*, T_2 adalah pencerminan terhadap bidang-*yz*, dan T_3 adalah proyeksi ortogonal pada bidang-*xy*. Dari Tabel 3, 5 dan 7 matriks-matriks standar untuk transformasi-transformasi linear ini adalah

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, dari (22) matriks standar untuk *T* adalah $[T] = [T_3]\,[T_2]\,[T_1]$, yaitu

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

LATIHAN

1. Cari daerah asal dan daerah kawan dari transformasi yang didefinisikan oleh persamaan-persamaan dibawah ini, dan tentukan apakah transformasi-transformasi tersebut linear.

(a)
$$\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ w_2 &= 5x_1 - 8x_2 + x_3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1x_2 - x_2 \\ w_2 &= x_1 + 3x_1x_2 \\ w_3 &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} w_1 &= 5x_1 - x_2 + x_3 \\ w_2 &= -x_1 + x_2 + 7x_3 \\ w_3 &= 2x_1 - 4x_2 - x_3 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} w_1 &= x_1^2 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \\ w_2 &= 3x_1 - 4x_2 - x_3^2 + x_4 \end{aligned}$$

2. Cari matriks standar untuk transformasi linear yang didefinisikan oleh persamaan-persamaan berikut ini

(a) $w_1 = 2x_1 - 3x_2 + x_4$
$w_2 = 3x_1 + 5x_2 - x_4$

(b) $w_1 = 7x_1 + 2x_2 - 8x_3$
$w_2 = \quad - x_2 + 5x_3$
$w_3 = 4x_1 + 7x_2 - x_3$

(c) $w_1 = -x_1 + x_2$
$w_2 = 3x_1 - 2x_2$
$w_3 = 5x_1 - 7x_2$

(d) $w_1 = x_1$
$w_2 = x_1 + x_2$
$w_3 = x_1 + x_2 + x_3$
$w_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

3. Cari matriks standar untuk transformasi linear $T : R^3 \rightarrow R^3$ yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 + 5x_2 - x_3 \\ w_2 &= 4x_1 - x_2 + x_3 \\ w_3 &= 3x_1 + 2x_2 - x_3 \end{aligned}$$

Kemudian hitung $T(-1, 2, 4)$ dengan secara langsung mensubstitusikan pada persamaan-persamaan tersebut dan dengan perkalian matriks.

4. Cari matriks standar untuk operator linear T yang didefinisikan oleh rumus berikut

(a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$

(b) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

(c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$

(d) $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, 7x_2, -8x_3)$

Referensi

1. Howard Anton and Chris Rorres, Elementary Linear Algebra with Application, John Wiley and Sons, 2005
2. Howard Anton (alih bahasa : Ir. Hari Suminto), Dasar-dasar Aljabar Linear, Jilid 1, Interaksara, 2000