Kombinatorial 1

Bahan Kuliah

Matematika Diskrit

(diadopsi dari Bahan Kuliah Matematika Diskrit ITB – *Rinaldi Munir*)

Teknik Informatika - STMIK Akakom Yogyakarta

Materi

1. Pendahuluan & definisi kombinatorial
2. Kaidah dasar menghitung
3. Perluasan kaidah dasar menghitung
4. Prinsip inklusi-eksklusi
5. Permutasi
6. Permutasi r dari n elemen

Pendahuluan

- Sebuah sandi-lewat (*password*) panjangnya 6 sampai 8 karakter. Karakter boleh berupa huruf atau angka. Berapa banyak kemungkinan sandi-lewat yang dapat dibuat?

```
abcdef
aaaade
a123fr
…
erhtgahn
yutresik
…
```

????

Definisi

- **Kombinatorial** adalah cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi (mendaftar) semua kemungkinan susunannya.

Kaidah Dasar Menghitung

- Kaidah perkalian (*rule of product*)

  Percobaan 1: p hasil

  Percobaan 2: q hasil

  Percobaan 1 **dan** percobaan 2: $p \times q$ hasil

- Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

  Percobaan 1: p hasil

  Percobaan 2: q hasil

  Percobaan 1 **atau** percobaan 2: $p + q$ hasil

Kaidah Dasar Menghitung

- **Contoh 1.** Ketua kelas TI-9 hanya 1 orang (pria atau wanita). Jumlah pria kelas TI-9 = 65 orang dan jumlah wanita = 15 orang. Berapa banyak cara memilih ketua kelas?

  <u>Penyelesaian</u>: 65 + 15 = 80 cara.

- **Contoh 2.** Dua orang perwakilan kelas TI-1 mendatangai Bapak Dosen untuk protes nilai ujian. Wakil yang dipilih adalah 1 orang pria dan 1 orang wanita. Berapa banyak cara memilih 2 orang wakil tersebut?

  <u>Penyelesaian</u>: 65 × 15 = 975 cara.

Perluasan Kaidah Dasar Menghitung

Misalkan ada n percobaan, masing-masing dg p_i hasil

1. Kaidah perkalian (*rule of product*)

   $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ hasil

2. Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

   $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ hasil

Perluasan Kaidah Dasar Menghitung

- **Contoh 3.** Bit biner hanya 0 dan 1. Berapa banyak *string* biner yang dapat dibentuk jika:
  (a) panjang *string* 5 bit
  (b)panjang *string* 8 bit (= 1 *byte*)
  Penyelesaian:
  (a) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ buah
  (b) $2^8 = 256$ buah

- **Contoh 4.** Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itu sendiri) yang
  (a) semua angkanya berbeda
  (b) boleh ada angka yang berulang.

Penyelesaian:

(a) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (1, 3, 5, 7, 9)
posisi ribuan: 8 kemungkinan angka
posisi ratusan: 8 kemungkinan angka
posisi puluhan: 7 kemungkinan angka
Banyak bilangan ganjil seluruhnya = (5)(8)(8)(7) = 2240 buah.

(b)posisi satuan: 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9);
posisi ribuan: 9 kemungkinan angka (1 sampai 9)
posisi ratusan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)
posisi puluhan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)

Banyak bilangan ganjil seluruhnya = (5)(9)(10)(10) = 4500

- **Contoh 5.** Sandi-lewat (*password*) sistem komputer panjangnya 6 sampai 8 karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf atau angka; huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan. Berapa banyak sandi-lewat yang dapat dibuat?

<u>Penyelesaian</u>:

Jumlah karakter password = 26 (A-Z) + 10 (0-9) = 36 karakter.

Jumlah kemungkinan *password* dengan panjang 6 karakter:

$(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^6 = 2.176.782.336$

Jumlah kemungkinan *password* dengan panjang 7 karakter:

$(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^7 = 78.364.164.096$

umlah kemungkinan *password* dengan panjang 8 karakter:

$(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^8 = 2.821.109.907.456$

Jumlah seluruh sandi-lewat (kaidah penjumlahan) adalah

$2.176.782.336 + 78.364.164.096 + 2.821.109.907.456 =$ 2.901.650.833.888 buah.

Latihan 1

1. (a) Berapa banyak bilangan genap 2-angka?
   (b) Berapa banyak bilangan ganjil 2-angka dengan setiap angka berbeda?
2. Dari 100.000 buah bilangan bulat positif pertama, berapa banyak bilangan yang mengandung tepat 1 buah angka 3, 1 buah angka 4, dan 1 buah angka 5? (Contoh : 543, 4523, 11543)
3. Tersedia 6 huruf: *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*. Berapa jumlah pengurutan 3 huruf jika:
   (a) tidak ada huruf yang diulang;
   (b) boleh ada huruf yang berulang;
   (c) tidak boleh ada huruf yang diulang, tetapi huruf *e* harus ada;
   (d) boleh ada huruf yang berulang, huruf *e* harus ada
4. Tentukan banyak cara pengaturan agar 3 orang mahasiswa Jurusan TI, 4 orang mahasiswa SI, 4 orang mahasiswa MI, dan 2 orang mahasiswa KA dapat duduk dalam satu baris sehingga mereka dari jurusan yang sama duduk berdampingan?

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Setiap *byte* disusun oleh 8-bit. Berapa banyak jumlah *byte* yang dimulai dengan '11' atau berakhir dengan '11'?

<u>Penyelesaian</u>:

Misalkan

A = himpunan *byte* yang dimulai dengan '11',

B = himpunan *byte* yang diakhiri dengan '11'

$A \cap B$ = himpunan *byte* yang berawal dan berakhir dengan '11'

maka

$A \cup B$ = himpunan *byte* yang berawal dengan '11' atau berakhir dengan '11'

$$|A| = 2^6 = 64, \quad |B| = 2^6 = 64, \quad |A \cap B| = 2^4 = 16.$$

maka

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$= 2^6 + 2^6 - 16 = 64 + 64 - 16 = 112.$$

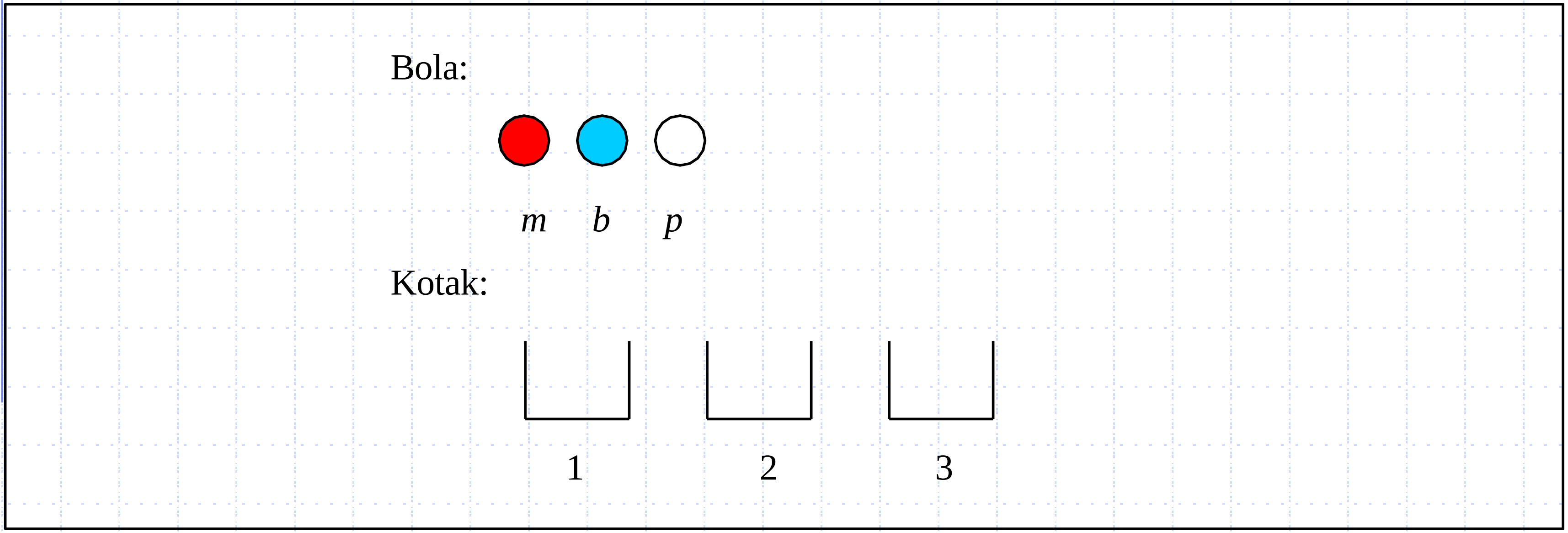
Prinsip Inklusi-Eksklusi

Latihan 2

1. Berapa banyak jumlah *byte* yg dimulai dg ‘101’ atau berakhir dg ’00’?

Ilham Rais Arvianto, M.Pd
(ir.arvianto@akakom.ac.id)

Permutasi



Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?

Kotak 1	Kotak 2	Kotak 3	Urutan
m	b	p	mbp
	p	b	mpb
b	m	p	bmp
	p	m	bpm
p	m	b	pmb
	b	m	pbm

Jumlah kemungkinan urutan berbeda dari penempatan bola ke dalam kotak adalah $(3)(2)(1) = 3! = 6$.

Permutasi

- **Definisi**: Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek.
- Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi kaidah perkalian.
- Misalkan jumlah objek adalah n, maka
  - ✓ urutan pertama dipilih dari n objek,
  - ✓ urutan kedua dipilih dari $n - 1$ objek,
  - ✓ urutan ketiga dipilih dari $n - 2$ objek,
  - ✓ …
  - ✓ urutan terakhir dipilih dari 1 objek yang tersisa.

Menurut kaidah perkalian, permutasi dari n objek adalah

$$n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1) = n!$$

Permutasi

- **Contoh 6.** Berapa banyak "kata" yang terbentuk dari kata "HAPUS"?

  Penyelesaian:

  Cara 1: (5)(4)(3)(2)(1) = 120 buah kata

  Cara 2: $P(5, 5) = 5! = 120$ buah kata

- **Contoh 7.** Berapa banyak cara mengurutkan nama 25 orang mahasiswa?

  Penyelesaian: $P(25, 25) = 25!$

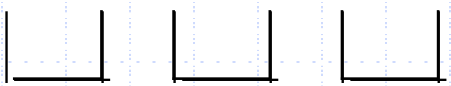
Permutasi *r* dari *n* elemen

- Ada enam buah bola yang berbeda warnanya dan 3 buah kotak. Masing-masing kotak hanya boleh diisi 1 buah bola. Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?

Bola:

$m \quad b \quad p \quad h \quad k \quad j$

Kotak:



1 2 3

Penyelesaian:

kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 6 bola (ada 6 pilihan);

kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (ada 5 pilihan);

kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (ada 4 pilihan).

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola = (6)(5)(4) = 120

Perampatan:

Ada n buah bola yang berbeda warnanya dan r buah kotak ($r \leq n$), maka

kotak ke-1 dapat diisi oleh salah satu dari n bola
→ (ada n pilihan) ;

kotak ke-2 dapat diisi oleh salah satu dari (n – 1) bola → (ada n – 1 pilihan);

kotak ke-3 dapat diisi oleh salah satu dari (n – 2) bola → (ada n – 2) pilihan;

…

kotak ke-r dapat diisi oleh salah satu dari (n – (r – 1) bola → (ada n – r + 1 pilihan)

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola adalah: $n(n - 1)(n - 2)\ldots(n - (r - 1))$

Definisi 2. Permutasi r dari n elemen adalah jumlah kemungkinan urutan r buah elemen yang dipilih dari n buah elemen, dengan $r \leq n$, yang dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada elemen yang sama.

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh 7. Berapakah jumlah kemungkinan membentuk 3 angka dari 5 angka berikut: 1, 2, 3, 4 , 5, jika:
(a) tidak boleh ada pengulangan angka, dan
(b) boleh ada pengulangan angka.

<u>Penyelesaian</u>:

(a) Dengan kaidah perkalian: (5)(4)(3) = 120 buah
Dengan rumus permutasi $P(5, 3) = 5!/(5 – 3)! = 120$

(b) Tidak dapat diselesaikan dengan rumus permutasi.
Dengan kiadah perkalian: $(5)(5)(5) = 5^3 = 125$.

Contoh 8. Kode buku di sebuah perpustakaan panjangnya 7 karakter, terdiri dari 4 huruf berbeda dan diikuti dengan 3 angka yang berbeda pula?

<u>Penyelesaian</u>: $P(26, 4) \times P(10,3) = 258.336.000$

Latihan 3

1. Sebuah mobil mempunyai 4 tempat duduk. Berapa banyak cara 3 orang didudukkan jika diandaikan satu orang harus duduk di kursi sopir?

Kombinatorial 2

Bahan Kuliah

Matematika Diskrit

(diadopsi dari Bahan Kuliah Matematika Diskrit ITB – *Rinaldi Munir*)

Teknik Informatika - STMIK Akakom Yogyakarta

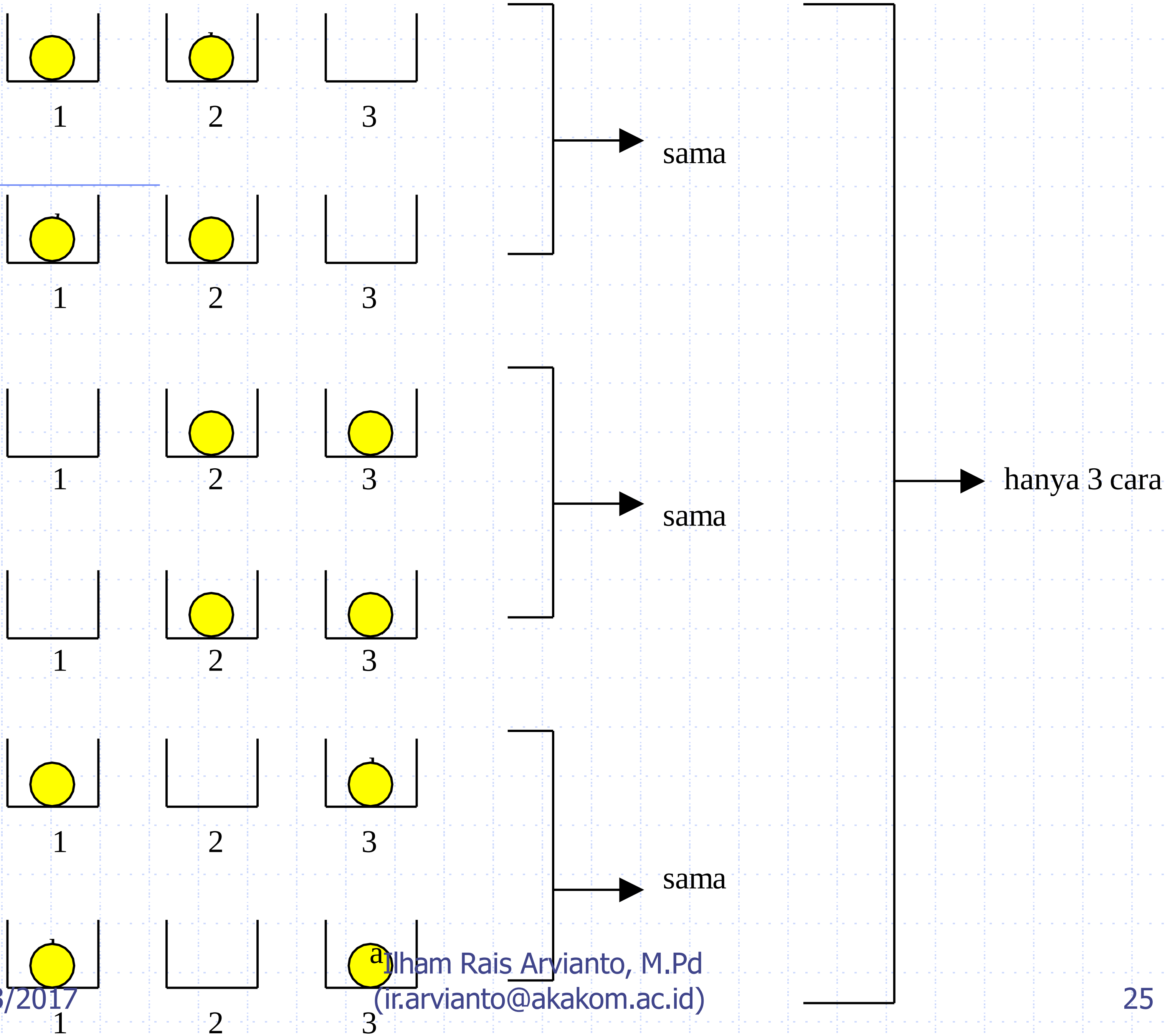
Kombinasi

- Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi, urutan kemunculan diabaikan.

- Misalkan ada 2 buah bola yang warnanya sama 3 buah kotak. Setiap kotak hanya boleh berisi paling banyak 1 bola.

Jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak $=$

$$\frac{P(3,2)}{2} = \frac{P(3,2)}{2!} = \frac{\frac{3!}{1!}}{2!} = \frac{(3)(2)}{2} = 3.$$


1
2
3
sama
1
2
3
1
2
3
hanya 3 cara
sama
1
2
3
1
2
3
sama
1
2
3
a

- Bila sekarang jumlah bola 3 dan jumlah kotak 10, maka jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak adalah

$$\frac{P(10,3)}{3!} = \frac{\frac{10!}{7!}}{3!} = \frac{(10)(9)(8)}{3!}$$

karena ada 3! cara memasukkan bola yang warnanya sama.

- Secara umum, jumlah cara memasukkan *r* buah bola yang berwarna sama ke dalam *n* buah kotak adalah

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = C(n, r)$$

- $C(n, r)$ sering dibaca "n diambil r", artinya r objek diambil dari n buah objek.

- **Definisi 3.** Kombinasi r elemen dari n elemen, atau $C(n, r)$, adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen.

Interpretasi Kombinasi

1. $C(n, r)$ = banyaknya himpunan bagian yang terdiri dari r elemen yang dapat dibentuk dari himpunan dengan n elemen.

   Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$

   Jumlah Himpunan bagian dengan 2 elemen:

$$\left.\begin{array}{l}\{1, 2\} = \{2, 1\} \\ \{1, 3\} = \{3, 1\} \\ \{2, 3\} = \{3, 2\}\end{array}\right\rangle \quad 3 \text{ buah}$$

   atau $\binom{3}{2} = \dfrac{3!}{(3-2)!2!} = \dfrac{3!}{1!2!} = 3$ buah

2. $C(n, r)$ = cara memilih *r* buah elemen dari *n* buah elemen yang ada, tetapi urutan elemen di dalam susunan hasil pemilihan tidak penting.

Contoh: Berapa banyak cara membentuk panitia yang beranggotakan 5 orang orang dari sebuah fraksi di DPR yang beranggotakan 25 orang?

Penyelesaian:

Panitia atau komite adalah kelompok yang tidak terurut, artinya setiap anggota di dalam panitia kedudukannya sama.

Misal lima orang yang dipilih, A, B, C, D, dan E, maka urutan penempatan masing-masingnya di dalam panitia tidak penting (ABCDE sama saja dengan BACED, ADCEB, dan seterusnya). Banyaknya cara memilih anggota panitia yang terdiri dari 5 orang anggota adalah $C(25,5) = 53\,130$ cara.

Contoh 9. Di antara 10 orang mahasiswa Teknik Informatika Angkatan 2002, berapa banyak cara membentuk sebuah perwakilan beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga:

(a) mahasiswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya;

(b) mahasiswa bernama *A* tidak termasuk di dalamnya;

(c) mahasiswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *B* tidak;

(d) mahasiswa bernama *B* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *A* tidak;

(e) mahasiswa bernama *A* dan *B* termasuk di dalamnya;

Penyelesaian:

(*a*) $C(9, 4) = 126$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakn 5 orang sedemikian sehingga *A* selalu termasuk di dalamnya.

(*b*) $C(9, 5) = 126$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakn 5 orang sedemikian sehingga *A* tidak termasuk di dalamnya.

(*c*) $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *A* termasuk di dalamnya, tetapi *B* tidak.

(*d*) $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *B* termasuk di dalamnya, tetapi *A* tidak.

(*e*) $C(8, 3) = 56$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *A* dan *B* selalu termasuk di dalamnya.

Latihan 4

1. Ada 5 orang mahasiswa jurusan Matematika dan 7 orang mahasiswa jurusan Informatika. Berapa banyak cara membentuk panitia yang terdiri dari 4 orang jika:
   (a) tidak ada batasan jurusan
   (b) semua anggota panitia harus dari jurusan Matematika
   (c) semua anggota panitia harus dari jurusan Informatika
   (d) semua anggota panitia harus dari jurusan yang sama
   (e) 2 orang mahasiswa per jurusan harus mewakili.

Kombinasi dengan Pengulangan

Misalkan terdapat r buah bola yang semua warnanya sama dan n buah kotak.

(i) Masing-masing kotak hanya boleh diisi paling banyak satu buah bola.

Jumlah cara memasukkan bola: $C(n, r)$.

(ii) Masing-masing kotak boleh lebih dari satu buah bola (tidak ada pembatasan jumlah bola)

Jumlah cara memasukkan bola: $C(n + r - 1, r)$.

Contoh 14. 20 buah apel dan 15 buah jeruk dibagikan kepada 5 orang anak, tiap anak boleh mendapat lebih dari 1 buah apel atau jeruk, atau tidak sama sekali. Berapa jumlah cara pembagian yang dapat dilakukan?

Penyelesaian:

$n = 5$, $r_1 = 20$ (apel) dan $r_2 = 15$ (jeruk)

Membagi 20 apel kepada 5 anak: $C(5 + 20 - 1, 20)$ cara,

Membagi 15 jeruk kepada 5 anak: $C(5 + 15 - 1, 15)$ cara.

Jumlah cara pembagian kedua buah itu adalah

$$C(5 + 20 - 1, 20) \times C(5 + 15 - 1, 15) = C(24, 20) \times C(19, 15)$$

Latihan 6

1. Pada persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, x_i adalah bilangan bulat ≥ 0. Berapa jumlah kemungkinan solusinya?

Ilham Rais Arvianto, M.Pd
(ir.arvianto@akakom.ac.id)

Koefisien Binomial

$(x + y)^0 = 1$	1
$(x + y)^1 = x + y$	1 1
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	1 2 1
$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	1 3 3 1
$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$	1 4 6 4 1
$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$	1 5 10 10 5 1

$$(x + y)^n = C(n, 0)\, x^n + C(n, 1)\, x^{n-1} y^1 + \ldots + C(n, k)\, x^{n-k} y^k + \ldots + C(n, n)\, y^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^{n-k} y^k$$

Koefisien untuk $x^{n-k}y^k$ adalah $C(n, k)$. Bilangan $C(n, k)$ disebut **koefisien binomial**.

Contoh 15. Jabarkan $(3x - 2)^3$.

Penyelesaian:

Misalkan $a = 3x$ dan $b = -2$,

$$(a + b)^3 = C(3, 0)\, a^3 + C(3, 1)\, a^2b^1 + C(3, 2)\, a^1b^2 + C(3, 3)\, b^3$$
$$= 1\,(3x)^3 + 3\,(3x)^2\,(-2) + 3\,(3x)\,(-2)^2 + 1\,(-2)^3$$
$$= 27\,x^3 - 54x^2 + 36x - 8$$

Contoh 16. Tentukan suku keempat dari penjabaran perpangkatan $(x - y)^5$.

Penyelesaian:

$(x - y)^5 = (x + (-y))^5$.

Suku keempat adalah: $C(5, 3)\, x^{5-3} (-y)^3 = -10x^2y^3$.

Contoh 17. Buktikan bahwa $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$.

Penyelesaian:

Dari persamaan (6.6), ambil $x = y = 1$, sehingga

$$\Leftrightarrow (x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^{n-k} y^k$$

$$\Leftrightarrow (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)\, 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$$

$$\Leftrightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$$