Corrigés des exercices

Exercice 1

1. f étant impaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n(f) = 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\mathrm{d}x = -\frac{2}{n\pi}\left[\cos(nx)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi}\big(1-(-1)^n\big) \end{aligned}$$

   Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$, $b_{2p}(f) = 0$ et $b_{2p+1}(f) = \dfrac{4}{(2p+1)\pi}\cdot$

   La série de Fourier de f est donc $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p\geq 0}\frac{\sin\big((2p+1)x\big)}{(2p+1)}\cdot$

2. La fonction f étant C^1 par morceaux, via le théorème de Dirichlet, on a en particulier en tout point x où f est continue :

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin\big((2p+1)x\big)}{(2p+1)}$$

   En particulier pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on a

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)}$$

   d'où

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)} = \frac{\pi}{4}$$

3. Via le théorème de Parseval, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$$

   Or f étant impaire, f^2 est paire donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x = 1$$

   Ainsi

$$1 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$$

   d'où

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

4.
$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

Or
$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$$

donc
$$\frac{3}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

d'où
$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 2

1. f est paire donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$.
$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \mathrm{d}x = \pi$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) \mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} \underbrace{\left[x \sin(nx)\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) \mathrm{d}x \right) &= -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \left[\cos(nx)\right]_0^{\pi} &= \frac{2}{n^2\pi} \left((-1)^n - 1\right) \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p}(f) = 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$a_{2p+1}(f) = -\frac{4}{(2p+1)^2\pi}$$

La série de Fourier de f est donc
$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos\left((2p+1)x\right)$$

2. La fonction f est C^1 par morceaux (et de plus continue sur $\mathbb{R}$) donc via le théorème de Dirichlet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos\left((2p+1)x\right) = |x|$$

En particulier pour $x = 0$, on a $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = 0$ soit
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

3.
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$$

Or
$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

donc $\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

d'où
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

4. Via le théorème de Parseval, on a
$$\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x$$

or
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{3}$$

donc
$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{\pi^2}{3}-\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{12}$$

donc
$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

5.
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^4}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}$$

Or
$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^4}=\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

donc
$$\frac{15}{16}\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n^4}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

d'où
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$