Corrigés des exercices

Exercice 1

1. $a_0(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}x = 1.$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

   $$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\big[\sin(nx)\big]_0^{\pi} = 0$$

   De plus

   $$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi}\big[\cos(nx)\big]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{n\pi}\big(\cos(n\pi) - 1\big) \\ &= \frac{1}{n\pi}\big(1 - (-1)^n\big) \end{aligned}$$

   d'où $\begin{cases} b_{2p}(f) = 0 \\ b_{2p+1}(f) = \dfrac{2}{(2p+1)\pi} \end{cases}$

2. La série de Fourier de f est donc $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\dfrac{1}{2p+1}\sin\big((2p+1)x\big).$

Exercice 2

1. $a_0(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{d}x = 0.$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\mathrm{d}x = 0$ car la fonction $x \mapsto x\cos(nx)$ est impaire.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   $$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\big[x\cos(nx)\big]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

2. La série de Fourier de f est donc $2\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$

Exercice 3

1. Comme f est paire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$.

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos(nx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\overbrace{\left[x^2\sin(nx)\right]_0^{\pi}}^{0} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\mathrm{d}x\right) \\ &= -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{1}{n}\left[x\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

Donc

$$a_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

2. La série de Fourier de f est donc $\dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2}$.