Exercices

Exercice 1

Soit f la fonction 2π-périodique définie pour tout $x \in [-\pi, \pi[$ par $\begin{cases} f(x) = -1 & \text{si } x \in [-\pi, 0[\\ f(x) = 1 & \text{si } x \in [0, \pi[\end{cases}$

1. Déterminer les coefficients de Fourier a_n et b_n associés à f et écrire la série de Fourier associée à f.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)}$.
3. En utilisant l'égalité de Parseval, déterminer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.
4. En déduire $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$.

Exercice 2

Soit f la fonction 2π-périodique définie pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ par $f(x) = |x|$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ associés à f.
2. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
4. En utilisant le théorème de Parseval, déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.
5. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.