1 Définitions

1.1 Produit scalaire sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

Définition 1

Soit E un $\mathbb{C}$-ev. Une application $\Phi : E \times E \to \mathbb{C}$ est un *produit scalaire* sur E si Φ est

- *linéaire à droite* : pour tout $(x, y, z) \in E^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$
$$\Phi(x, \lambda y + z) = \lambda \Phi(x, y) + \Phi(x, z)$$
- *anti-linéaire à gauche* : pour tout $(x, y, z) \in E^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$
$$\Phi(\lambda x + y, z) = \overline{\lambda}\Phi(x, z) + \Phi(y, z)$$
- *anti-symétrique* : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)}$
- *positive* : pour tout $x \in E$, $\Phi(x, x) \geqslant 0$
- *définie* : pour tout $x \in E$, $\big(\Phi(x, x) = 0\big) \Longrightarrow \big(x = 0\big)$.

1.2 Orthogonalité

Définition 2

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Deux vecteurs x et y de E sont dit *orthogonaux* pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si $\langle x, y \rangle = 0$.

Définition 3

Soient E un $\mathbb{C}$-ev muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille *orthogonale* si
$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \quad i \neq j \Longrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0$$
Elle est *orthonormée* si, de plus, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\langle v_i, v_i \rangle = 1$.

1.3 Espace $\mathcal{D}$

Notation

On note $\mathcal{D}$ le sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, composé des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

- continues par morceaux,
- qui satisfont, en tout point de discontinuité x, $f(x) = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$

Proposition 1

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ définie pour tout $(f, g) \in \mathcal{D}^2$ par
$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) \mathrm{d}x$$
est un produit scalaire sur $\mathcal{D}$.

Proposition 2

La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{D}$ où pour tout $n \in \mathbb{Z}$, e_n est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ donnée par $t \mapsto e^{int}$.

1.4 Série de Fourier complexe

Définition 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dans $\mathcal{D}$. On appelle *série de Fourier complexe* de f, la série de fonctions $F(f)$ définie pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$$

où

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

Les nombres complexes $c_n(f)$ sont appelés *coefficients de Fourier complexes* associés à f.