MATHEMATIQUES FINANCIERES

FORMULAIRE

I. TAUX SIMPLES

Ici, les intérêts sont d'un calcul facile : ils sont proportionnels au temps.

I.1 Emprunt à court terme « Exact/360 »

La durée de l'emprunt est inférieure à 1 an. Il n'y a aucun versement entre le début de l'opération (date de l'emprunt) et la fin de l'opération (date du remboursement).

S : Somme empruntée
J_1 : Jour de l'emprunt
J_2 : Jour du remboursement
r : taux d'intérêt (attention $x\% = \frac{x}{100}$)
Le nombre de jours pour le calcul de l'emprunt est :

$$d = J_2 - J_1$$

Les intérêts :

Les intérêts valent I, où

$$I = \frac{d}{360}.r.S$$

Cas des intérêts postcomptés (on parle aussi de paiement à terme échu) :

Les intérêts sont payés en fin de période, au jour J_2.

La somme remboursée au jour J_2 vaut

$$S_{remb} = S.(1 + \frac{d}{360}r)$$

Cas des intérêts précomptés (on parle aussi de paiement à terme à échoir) :

Les intérêts sont payés en début de période, au jour J_1.

La somme reçus par l'emprunteur au jour J_1 vaut

$$S_{init} = S.(1 - \frac{d}{360}r).$$

La somme remboursée au jour J_2 vaut

$$S_{remb} = S$$

I.2 Escompte « Exact/360 »

Le principe de calcul est celui des intérêts précomptés.

I.3 Obligations « Exact/365 », calcul du « coupon »

N : Montant Nominal
n : durée en années

r : taux d'intérêt (attention $x\% = \frac{x}{100}$)

J : Date anniversaire de la date d'émission de l'obligation

Le coupon versé à chaque date anniversaire est :

$$C = r.N$$

A un autre moment dans l'année, soit d le nombre de jours depuis le dernier versement du coupon. Le « Coupon Couru » Cc, c'est à dire les intérêts déjà acquis à ce jour par celui qui détient l'obligation vaut (attention aux années bissextiles) :

$$Cc = r.\frac{d}{365}.N \quad où \quad r.\frac{d}{366}.N$$

Le dernier versement, au bout de n années vaut :

$$N + C = (1+r).N$$

II. TAUX COMPOSES

II.1 Somme remboursées en une fois

S : Somme empruntée
n : Durée de l'emprunt, en années ou fractions d'années. La fraction d'année est à prendre sur 365 où 366 jours suivant l'année.

i : taux d'intérêt (attention $x\% = \frac{x}{100}$)

La somme remboursée en fin de période vaut

$$S_{remb} = S.(1+i)^n$$

Les intérêts valent I, où

$$I = S.((1+i)^n - 1)$$

II.2 Emprunt avec remboursements constants

S : Somme empruntée
n : Durée de l'emprunt, en nombre de périodes correspondant aux remboursement effectués (souvent il s'agit de mois).
m : montant des versements effectués à chaque fin de période (exemple : les mensualités)

i : taux d'intérêt, sur la période (attention $x\% = \frac{x}{100}$)

On commence par calculer

$$v = \frac{1}{1+i}$$

Ainsi que

$$a_n = \frac{1}{i}(1 - v^n)$$

Alors

$$S = a_n.m.$$

II.3 Taux actuariel

Soit i ce taux et n une date (comptée à partir d'aujourd'hui en années ou fractions d'années).

Point de vue 1 : Le versement d'une somme F à la date n a une « valeur actuelle » de

$$V = \frac{F}{(1+i)^n}$$

Point de vue 2 : Si on emprunte aujourd'hui V au taux i, on rembourse F à la date n, avec

$$F = V.(1+i)^n$$

Plus généralement, pour un flux de monnaie de F_1, …, F_n aux dates D_1, …, D_n exprimées en années ou fraction d'années, (les sommes peuvent être positives ou négatives), la valeur de ce flux actualisé au taux i vaut :

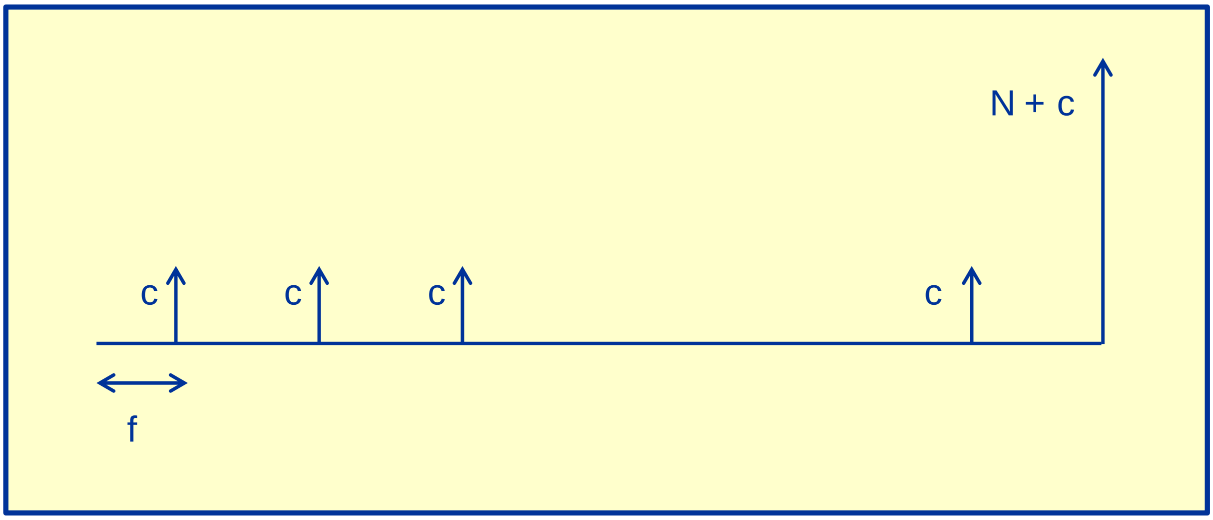
$$V = \frac{F_1}{(1+i)^{D_1}} + \ldots + \frac{F_n}{(1+i)^{D_n}}$$

II.4 Cas des obligations, valeur actuelle du flux à partir du taux actuariel

Les obligations sont cotées dans la presse économique. On a :

$$\textit{Valeur actuelle des flux futurs} = \textit{Cote} + \textit{Coupon Couru}$$

Pour valoriser les obligations, on examine les flux futurs :



Dans ce schéma, c représente les coupons, N le nominal et f la fraction d'année (d/365 ou d/366) entre l'instant 0 et la date de versement du premier coupon.

Le taux actuariel r dépend des taux pratiqués sur le marché au moment de l'évaluation. La valeur actuelle des flux futurs est la suivante (attention au nombre n, il y a n dates de versements du coupon + l'échéances, soit n+1 dates en tout) :

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c}{\left(1+r\right)^{f+k}} + \frac{N}{\left(1+r\right)^{f+n}}$$

La duration est une moyenne de l'échéance des flux, pondérée par les « valeurs actualisées à aujourd'hui » de ces flux. Elle vaut :

$$D = \frac{1}{V}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(f+k)\frac{c}{(1+r)^{f+k}} + (f+n)\frac{N}{(1+r)^{f+n}}\right\}.$$

La duration permet de mesurer la sensibilité de la valeur V à une modification du taux actuariel r :

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{D}{1+r}.$$

En pratique, dans le cas où f=0 (et où cette fois, il n'y a plus de versement de coupon à 0 – soit n dates en tout dans les formules au lieu de n+1), avec :

$$v = \frac{1}{1+r}$$
$$a_n = \frac{1}{r}\left(1-v^n\right)$$
$$b_n = \frac{1}{rv}\left(a_n - nv^{n+1}\right)$$

On a – dans ce cas où f = 0 et sans versement à 0 :

$$V = a_n c + v^n N$$
$$D = \frac{1}{V}\left(b_n c + nv^n N\right).$$