Exercices

Exercice 1

Soient $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow \mathbb{C} \\ (A, B) & \longmapsto \operatorname{tr}\left({}^t\overline{A}B\right) \end{cases}$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 2

Cet exercice vise à montrer que la définition des coefficients de Fourier $c_n(f)$ (d'une fonction f continue par morceaux et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$) est naturelle.

Soit $c_0 + \sum_{n \geqslant 1} \left(c_n\, e^{inx} + c_{-n}\, e^{-inx}\right)$ une série de fonctions [1] convergeant uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$ où les c_k sont des complexes.

En particulier, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right) \qquad (*)$$

1. En intégrant l'équation $(*)$ entre 0 et 2π, montrer que

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{d}x$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En multipliant l'équation $(*)$ par e^{-ikx} puis en l'intégrant entre 0 et 2π, montrer que

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, \mathrm{d}x$$

Exercice 3

Montrer que la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée dans $\left(\mathscr{D}, <,>\right)$ où pour tout $(f, g) \in \mathscr{D}^2$,

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x)\, \mathrm{d}x$$

Exercice 4

Soit f une fonction de classe C^1 et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$c_n(f) = \frac{1}{in}\, c_n(f')$$

1. On utilise ici l'abus classique consistant à identifier, dans le cadre des séries trigonométriques, une série de fonctions avec sa série numérique associée.