1 Théorèmes de convergence

1.1 Théorème de Parseval

Théorème 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. On a, alors, l'égalité suivante, dite *égalité de Parseval*,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{a_0^2(f)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2(f) + b_n^2(f)\right)$$

1.2 Fonctions de classe C^1 par morceaux

Définition 1

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit que $f : \left[a, b\right] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ *par morceaux*[1], s'il existe des points $x_0, \ldots, x_n$ dans $\left[a, b\right]$ tels que

- $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$
- pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle $\left]x_i, x_{i+1}\right[$
- pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, f' admet une limite finie à gauche[2] et à droite[3] en x_i.

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si la restriction de f à chaque segment de $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Remarque

En reprenant les notations de la définition ci-dessus, on peut montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$, alors nécessairement, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, f admet une limite finie à gauche[4] et à droite[5] en x_i. Ainsi une fonction de classe C^1 par morceaux est nécessairement continue par morceaux.

Proposition 1

Soit $T > 0$. Une fonction T-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si, et seulement si, sa restriction à un segment de longueur T l'est.

1.3 Théorème de Lejeune-Dirichlet

Théorème 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier $\sum\Big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\Big)$ est une série numérique convergente. De plus, en tout point x où f est continue, on a

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\Big) = f(x)$$

et sinon,

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\Big) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

1. cf. la remarque qui suit la définition.
2. sauf pour $i = 0$.
3. sauf pour $i = n$.
4. sauf pour $i = 0$.
5. sauf pour $i = n$.