Corrigés des exercices

Exercice 1

φ est clairement antilinéaire à gauche et linéaire à droite car la trace est linéaire.

φ est hermitienne. En effet, soit $(A, B) \in E^2$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(A,B) &= \operatorname{tr}\left({}^t\overline{A}B\right) \\ &= \operatorname{tr}\left({}^t\left({}^t\overline{A}B\right)\right) \\ &= \operatorname{tr}\left({}^tB\overline{A}\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(\overline{{}^tBA}\right) \\ &= \overline{\varphi(B,A)} \end{aligned}$$

φ est positive. En effet soit $A = (a_{ij}) \in E$. Montrons que $\varphi(A, A) = \operatorname{tr}\left({}^t\overline{A}A\right) \geqslant 0$.

On a ${}^t\overline{A}A = (b_{ij})$ où $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ki}}\, a_{kj}$ donc $\operatorname{tr}\left({}^t\overline{A}A\right) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ki}}\, a_{ki}$

d'où $\varphi(A, A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ki}|^2 \geqslant 0$

φ est définie car étant donnée A dans E, $\varphi(A, A) = 0 \Longrightarrow \forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2,\ |a_{ki}|^2 = 0$

$$\Longrightarrow A = 0$$

Exercice 2

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right) \qquad (*)$$

En intégrant cette égalité entre 0 et 2π, on a

$$\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi c_0 + \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right)\right)\mathrm{d}x$$

Or comme $\sum_{n\geqslant 1}\left(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(c_n\int_0^{2\pi} e^{inx}\mathrm{d}x + c_{-n}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\mathrm{d}x\right)$$

Mais $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{inx}\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-inx}\mathrm{d}x = 0$ donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi c_0$ soit encore

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En multipliant l'équation $(*)$ par e^{-ikx}, on a

$$f(x)e^{-ikx} = c_0 e^{-ikx} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right)e^{-ikx}$$

Donc, via à nouveau l'hypothèse de convergence uniforme, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} c_0 e^{-ikx}\mathrm{d}x \\ &\quad + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(c_n\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x}\mathrm{d}x + c_{-n}\int_0^{2\pi} e^{-i(n+k)x}\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\int_0^{2\pi} c_0 e^{-ikx}\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-i(n+k)x}\mathrm{d}x = 0$ (car $k \in \mathbb{N}$).

De plus

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq k \\ 2\pi & \text{sinon}\end{cases}$$

Finalement, on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x = 2\pi c_k$ soit encore

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x$$

Exercice 3

Soit $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$. Montrons que $< e_n, e_m >= \delta_{nm}$ où les nombres δ_{nm} valent 1 si $n = m$ et 0 sinon.

On a

$$< e_n, e_m >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{e_n(x)}\,e_m(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}e^{imx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}\mathrm{d}x$$

Si $m \neq n$ alors

$$< e_n, e_m >= \frac{1}{2\pi i(m-n)}\left[e^{i(m-n)x}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi i(m-n)}\left(e^{2i(m-n)\pi} - 1\right)$$

Donc $< e_n, e_m >= 0$.

Si $m = n$ alors $< e_n, e_m >= \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x = 1$.

Ainsi $< e_n, e_m >= \delta_{nm}$ donc la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée dans $\left(\mathscr{D}, <,>\right)$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. Via une intégration par parties, on a

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{in}\overbrace{\left[f(x)\, e^{-inx}\right]_0^{2\pi}}^{0} + \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(x)\, e^{-inx} \mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{in}\, c_n(f')$$