1 Grundbegriffe

- Ein alphabet ist eine endliche, nichtleere Menge Σ von Buchstaben (oder Symbolen).
- Ein Wort über Σ ist eine endliche Folge von Elementen aus $\sum$.
- Die länge eines Wortes w (bezeichnet mit $|w|$) ist ide Anzahl der Symbole in w.
- Das leere Wort ist das eindeutig bestimmte Wort der Länge 0 und wird mit dem grieschichen Buchstaben λ bezeichnet.
- Die Menge aller Wörter über Σ bezeichnen wir mit Σ^*.
- Eine formale Sprache über Σ ist eine jede Teilmenge von Σ^*
- Die leere Sprache ist die Sprache die keine Wörter enthält, und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.
- die Kardinalität einer Sprache L ist die Anzahl der Wörter von L und wirt mit $\|L\|$ bezeichnet.

2 Operationen

- Vereinigung $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$.
- Durschnitt $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$.
- Differenz $A - B = \{x \in A \ und \ x \notin B\}$.
- Komplement $\overline{A} = \{x \in \Sigma^* | x \notin B\}$.
- Konkatenation von Wörtern
  - Ist $u = v = \lambda$, so ist $uv = vu = \lambda$.
  - Ist $v = \Lambda$, so ist $uv = u$.
  - Ist $u = \lambda$ so ist $uv = v$.
  - Ist $u = u_1 u_2 \ldots u_n undv = v_1 v_2 \ldots v_m$ mit $u_i, v_i \in \Sigma$, so ist

$$uv = u_1 u_2 \ldots u_n v_1 v_2 \ldots \varepsilon_m.$$

- Konkatenation von Sprachen: $AB = \{ab|a \in A \ und \ b \in B\}$.
- Iteration einer Sprache: $A^0 = \{\lambda\}$, $A^n = AA^{n-1}$, $A^* = \bigcup_{n\geq 0} A^n$.
- Spiegelbildoperation von Wort $sp(u) = u_n \dot{u}_2 u_1$.
- Spiegelbildoperation von Sprache $sp(A) = \{sp(w)|w \in A\}$.
- Teilwortrelation auf Σ^*: $u \sqsupseteq v \leftrightarrow (\exists v_1, v_2 \in \Sigma^*)[v_1 u v_2 = v]$.
- Anfangswortrelation auf Σ^*: $u \sqsupseteq_a v \leftrightarrow (\exists w \in \Sigma^*)[uw = v]$.

3 Symbole

- Σ ein Alphabet von Terminalsymbolen
- N eine Endliche Menge von Nichtterminalen, $\Sigma \cap N = \emptyset$
- S Startsymbol, $S \in N$
- P Produktionsregeln, $P \subseteq (N \cup \Sigma)^+ \times (N \cup \Sigma)^*$

4 Grammatik

$G = (\Sigma, N, S, P)$

- Typ-0: Ohne Einschränkungen.
- Typ-1: $\forall p \to q \in P : |p| \leq |q|$
- Typ-2: $\forall p \to q \in P : p \in N$
- Typ-3: $\forall p \to q \in P : |p| \in N \ und \ q \in \Sigma \cup \Sigma N$

$REG \subseteq CF \subseteq CS \subseteq \mathcal{L}_0$

4.1 Sonderregelung für λ

Typ-i Grammatiken mit $i \in \{1, 2, 3\}$ sind nichtferkürzend, daher $\lambda \notin L(G)$. Daher folgende Sonderregelung:

1. Die Regel $S \to \lambda$ ist als einzige verkürzende Regel für Grammatiken vom Typ 1, 2, 3 zugelassen.

2. Tritt die Regel $S \to \lambda$ auf, so darf S auf keiner rechten Seite einer Regel vorkommen.

Dies kann für alle Fälle mit folgender Umwandlung erreicht werden:

1. In allen Regeln der Form $S \to u$ aus P mit $u \in (N \cup \Sigma)^*$ wird jedes Vorkommen von S in u durch ein neues Nichtterminal S' ersetzt.

2. Zusätzlich enthält P' alle Regeln aus P, mit S ersetzt durch S'.

3. Die Regel $S \to \lambda$ wird hinzugefügt.

5 Reguläre Sprachen

5.1 DFA

5.1.1 Definition

$M = (\Sigma, Z, \delta, z_o, F)$

- Σ: Alphabet
- Z: endliche Menge von Zustäanden mit $\Sigma \cap Z = \emptyset$
- $\delta : Z \times \Sigma \to Z$ Überführungsfunktion
- $z_0 \in Z$ Startzustand
- $F \subseteq Z$ Endzustände

5.1.2 Beispiel

δ	z_o	z_1	z_2	z_3
0	z_1	z_3	z_2	z_3
1	z_3	z_2	z_2	z_3

5.1.3 $DFA \rightarrow Grammar$

- $N = Z$,
- $S = z_0$,
- P:
  - Gilt $\delta(z, a) = z'$, so ist $z \rightarrow az'$ in P.
  - Ist $z' \in F$, so ist zusätzlich $z \rightarrow a$ in P.
  - ist $\lambda \in A$ (d.h., $z_o \in F$), so ist auch $z_0 \rightarrow \lambda$ in P, und die bisher konstruierte Grammatik wird gemäß der Sonderregel für λ modifiziert.

5.2 NFA

$M = (\Sigma, Z, \delta, S, F)$

- Σ: Alphabet
- Z: endliche Menge von Zuständen mit $\Sigma \cap Z = \emptyset$
- $\delta : Z \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Z)$: Überführungsfunktionen zur Potenzmenge von Z
- $S \subseteq Z$: Menge der Startzustände
- $F \subseteq Z$ Menge der Endzustände

5.2.1 $NFA \rightarrow DFA$ (Rabin und Scott)

NFA $M = (\Sigma, Z, \delta, S, E)$ und DFA $M' = (\Sigma, \mathcal{P}(Z), \delta', z'_0, F)$

- zustandsmenge von M': $\mathcal{P}(Z)$,
- $\delta'(Z', a) = \cup_{z'} \delta(z, a) = \hat{\delta}(Z', a)$ für, all $Z' \subseteq Z$ und $a \in \Sigma$,
- $z'_o = S$,
- $F = \{Z' \subseteq Z | Z' \cap E \not\emptyset$