1 Grundbegriffe

- Ein alphabet ist eine endliche, nichtleere Menge Σ von Buchstaben (oder Symbolen).
- Ein Wort über Σ ist eine endliche Folge von Elementen aus $\sum$.
- Die länge eines Wortes w (bezeichnet mit $|w|$) ist ide Anzahl der Symbole in w.
- Das leere Wort ist das eindeutig bestimmte Wort der Länge 0 und wird mit dem grieschichen Buchstaben λ bezeichnet.
- Die Menge aller Wörter über Σ bezeichnen wir mit Σ^*.
- Eine formale Sprache über Σ ist eine jede Teilmenge von Σ^*
- Die leere Sprache ist die Sprache die keine Wörter enthält, und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.
- die Kardinalität einer Sprache L ist die Anzahl der Wörter von L und wirt mit $\|L\|$ bezeichnet.

2 Operationen

- Vereinigung $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$.
- Durschnitt $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$.
- Differenz $A - B = \{x \in A \ und \ x \notin B\}$.
- Komplement $\overline{A} = \{x \in \Sigma^* | x \notin B\}$.
- Konkatenation von Wörtern
  - Ist $u = v = \lambda$, so ist $uv = vu = \lambda$.
  - Ist $v = \Lambda$, so ist $uv = u$.
  - Ist $u = \lambda$ so ist $uv = v$.
  - Ist $u = u_1 u_2 \dots u_n undv = v_1 v_2 \dots v_m$ mit $u_i, v_i \in \Sigma$, so ist

$$uv = u_1 u_2 \dots u_n v_1 v_2 \dots \varepsilon_m.$$

- Konkatenation von Sprachen: $AB = \{ab | a \in A \ und \ b \in B\}$.
- Iteration einer Sprache: $A^0 = \{\lambda\},\ A^n = AA^{n-1},\ A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$.
- Spiegelbildoperation von Wort $sp(u) = u_n \dot{u}_2 u_1$.
- Spiegelbildoperation von Sprache $sp(A) = \{sp(w) | w \in A\}$.
- Teilwortrelation auf Σ^*: $u \sqsupseteq v \leftrightarrow (\exists v_1, v_2 \in \Sigma^*)[v_1 u v_2 = v]$.
- Anfangswortrelation auf Σ^*: $u \sqsupseteq_a v \leftrightarrow (\exists w \in \Sigma^*)[uw = v]$.

3 Symbole

- Σ ein Alphabet von Terminalsymbolen
- N eine Endliche Menge von Nichtterminalen, $\Sigma \cap N = \emptyset$
- S Startsymbol, $S \in N$
- P Produktionsregeln, $P \subseteq (N \cup \Sigma)^+ \times (N \cup \Sigma)^*$

4 Grammatik

$G = (\Sigma, N, S, P)$

- Typ-0: Ohne Einschränkungen.
- Typ-1: $\forall p \to q \in P : |p| \leq |q|$
- Typ-2: $\forall p \to q \in P : p \in N$
- Typ-3: $\forall p \to q \in P : |p| \in N \ und \ q \in \Sigma \cup \Sigma N$

$REG \subseteq CF \subseteq CS \subseteq \mathcal{L}_0$

4.1 Sonderregelung für λ

Typ-i Grammatiken mit $i \in \{1, 2, 3\}$ sind nichtferkürzend, daher $\lambda \notin L(G)$. Daher folgende Sonderregelung:

1. Die Regel $S \to \lambda$ ist als einzige verkürzende Regel für Grammatiken vom Typ 1, 2, 3 zugelassen.
2. Tritt die Regel $S \to \lambda$ auf, so darf S auf keiner rechten Seite einer Regel vorkommen.

Dies kann für alle Fälle mit folgender Umwandlung erreicht werden:

1. In allen Regeln der Form $S \to u$ aus P mit $u \in (N \cup \Sigma)^*$ wird jedes Vorkommen von S in u durch ein neues Nichtterminal S' ersetzt.
2. Zusätzlich enthält P' alle Regeln aus P, mit S ersetzt durch S'.
3. Die Regel $S \to \lambda$ wird hinzugefügt.

5 Reguläre Sprachen

5.1 DFA

5.1.1 Definition

$M = (\Sigma, Z, \delta, z_o, F)$

- Σ: Alphabet
- Z: endliche Menge von Zustäanden mit $\Sigma \cap Z = \emptyset$
- $\delta : Z \times \Sigma \to Z$ Überführungsfunktion
- $z_0 \in Z$ Startzustand
- $F \subseteq Z$ Endzustände

5.1.2 Beispiel

δ	z_o	z_1	z_2	z_3
0	z_1	z_3	z_2	z_3
1	z_3	z_2	z_2	z_3

5.1.3 $DFA \to Grammar$

- $N = Z$,
- $S = z_0$,
- P:
  - Gilt $\delta(z, a) = z'$, so ist $z \to az'$ in P.
  - Ist $z' \in F$, so ist zusätzlich $z \to a$ in P.
  - ist $\lambda \in A$ (d.h., $z_o \in F$), so ist auch $z_0 \to \lambda$ in P, und die bisher konstruierte Grammatik wird gemäß der Sonderregel für λ modifiziert.

5.2 NFA

$M = (\Sigma, Z, \delta, S, F)$

- Σ: Alphabet
- Z: endliche Menge von Zuständen mit $\Sigma \cap Z = \emptyset$
- $\delta : Z \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$: Überführungsfunktionen zur Potenzmenge von Z
- $S \subseteq Z$: Menge der Startzustände
- $F \subseteq Z$ Menge der Endzustände

5.2.1 $NFA \to DFA$ (Rabin und Scott)

NFA $M = (\Sigma, Z, \delta, S, E)$ und DFA $M' = (\Sigma, \mathcal{P}(Z), \delta', z_0', F)$

- zustandsmenge von M': $\mathcal{P}(Z)$,
- $\delta'(Z', a) = \cup_{z \in Z'} \delta(z, a) = \hat{\delta}(Z', a)$ für, all $Z' \subseteq Z$ und $a \in \Sigma$,
- $z_o' = S$,
- $F = \{Z' \subseteq Z | Z' \cap E \not\emptyset\}$

5.3 $Grammatik \to NFA$

- $Z = N \cup \{X\}$, wobei $X \notin N \cup \Sigma$ ein neues Symbol ist,
- $$F = \begin{cases} \{S, X\} & \text{falls } S \to \lambda \text{ in } P \\ \{X\} & \text{falls } S \to \lambda \text{ nicht in } P, \end{cases}$$
- $S' = \{S\}$ und
- für alle $A \in N$ und $a \in \Sigma$ sei
  $$\delta(A, a) = \left(\bigcup_{A \to aB \in P} \{B\} \right) \cup \bigcup_{A \to a \in P} \{X\}.$$

5.4 Regex

- *$\emptyset$ und λ sind reguläre Ausdrücke*
- *Jedes $a \in \Sigma$ ist ein regulärer Ausdruck.*
- *Sind α und β reguläre Ausdrücke, so sind auch*
  - $\alpha\beta$
  - $(\alpha + \beta)$ *und*
  - $(\alpha)^*$

  reguläreAusdrücke
- *Nichts sonst ist ein regulärer Ausdruck*

5.5 $NFA \rightarrow L(M)$ Gleichungssysteme

Bilde ein Gleichungssystem mit n Variablen und n Gleichungen:

1. Jedes $z_i \in Z, 1 \leq i \leq n$ ist Variable auf der linken Seite einer Gleichung
2. Gilt $z_j \in \delta(z_i, a)$ für $z_i, z_j \in Z$ und $a \in \Sigma$, so ist az_j Summand auf der rechten Seite der Gleichung „$z_i = \dots$"
3. Gilt $z_i \in F$, so ist $\emptyset^*$ Summand auf der rechten Seite der Gleichung „$z_i = \dots$".

Todo: Die z_i werden als reguläre Sprachen interpretiert und gemäß Lemma 2.24 und Satz 2.226 ausgerechnet. Es gilt dann: $L(M) = \bigcup_{z_i \in S} z_i$ bzw. $L(;) = L(\alpha)$ für den regulären Ausdruck $\alpha = \Sigma_{z_i \in S} z_i$.

5.6 Pumping Lemma REG

Sei $L \in$ REG. Dann existiert eine (von L abhängige) Zahl $n \geq 1$, so dass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq n$ zerlegen lassen in $x = uvw$ wobei gilt:

1. $|uv| \leq n$,
2. $|v| \geq 1$,
3. $(\forall i \geq 0)[uv^i w \in L]$.

5.7 Mihill Nerode Minimalautomaten

5.7.1 Mihill Nerode Relation

xR_Ly zwischen x und y gild genau dann, wenn $(\forall z \in \Sigma^*)[xz \in L \leftrightarrow yz \in L]$. Dies induziert eine Zerlegung von Σ^* in Äquivalenzklassen:

$$[x] = \{y \in \Sigma^* | xR_Ly\}$$

Die Anzahl der Äquivalenzklassen ist $\text{Index}(R_L) = \|\{[x] | x \in \Sigma^*\}\|$.

$$L \in REG \leftrightarrow \text{Index}(R_L) < \infty$$

Algorithmus
Eingabe: DFA $M = (\Sigma, Z, \delta, z_0, F)$.
Ausgabe: Ein zu M äquivalenter Minimalautomat
Schritte:

1. Entferne alle von z_0 aus nicht erreichbaren Zustände aus Z.
2. Erstelle eine Tabelle aller (ungeordnneten) Zustandspaare $\{z, z'\}$ on M mit $z \neq z'$.
3. Markiere alle Paare $\{z, z'\}$ mit $z \in F \leftrightarrow z' \notin F$.
4. Seit $\{z, z'\}$ ein unmarkiertes paar. Prüfe für jedes $a \in \Sigma$, ob $\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}$ bereits markiert ist. Ist mindestens ein Test erfolgreich, so markiere auch $\{z, z'\}$.
5. Wiederhole Schritt 4, bis keine Änderung mehr eintritt.
6. Bilde maximale Mengen paarweise nicht disjunkter unmarkierter Zustandspaare und verschmelze jeweils alle Zustände einer Menge zu einem neuen Zustand.

5.8 Abschlusseigenschaften Definitionen

1. Vereinigung, falls $(\forall A, B \subseteq \Sigma^*)[(A \in \mathcal{C} \wedge B \in \mathcal{C}) \implies A \cup B \in \mathcal{C}]$;
2. Komplement, falls $(\forall A \subseteq \Sigma^*)[A \in \mathcal{C} \implies \overline{A} \in \mathcal{C}]$;
3. Schnitt, falls $(\forall A, B \subseteq \Sigma^*)[(A \in \mathcal{C} \wedge B \in \mathcal{C}) \implies A \cap B \in \mathcal{C}]$;
4. Differenz, falls $(\forall A, B \subseteq \Sigma^*)[(A \in \mathcal{C} \wedge B \in C) \implies A \cap B \in \mathcal{C}]$;
5. Konkatenation, falls $(\forall A, B \subseteq \Sigma^*)[(A \in \mathcal{C} \wedge B \in \mathcal{C}) \implies AB \in \mathcal{C}]$;
6. Iteration (Kleene-Hülle), falls $(\forall A \subseteq \Sigma^*)[A \in \mathcal{C} \implies A^* \in \mathcal{C}]$;
7. Spiegelung, falls $(\forall A \subseteq \Sigma^*)[A \in \mathcal{C} \implies sp(A) \in \mathcal{C}]$;

5.9 Characterisierung

1. Es gibt eine rechtslineare Grammatik G mit $L(G) = L$.
2. Es gbt eine linklineare Grammatik G mit $L(G) = L$.
3. Es gibt einen DFA M mit $L(M) = L$.
4. Es gibt einen NFA M mit $L(M) = L$.
5. Es gibt einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L$.
6. Für die Myhill-Nerode-Relation R_L gilt: $\text{Index}(R_L) < \infty$.

6 Kontextfreie Sprachen

bla