

РГР Ряды

Тарасов М. группа 26ПМ2

Вариант 10

№1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+5}; a_n = \frac{1}{3n+5}$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ($b_n = \frac{1}{n}$) - расходящийся:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{n} = 3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

\Rightarrow ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+5}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ведут себя одинаково

\Rightarrow по предельному признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+5}$ расходится

№2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^{10}+n^2}}; a_n = \frac{1}{\sqrt{n^{10}+n^2}}$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ ($b_n = \frac{1}{n^5}$) - сходящийся (ряд Дирихле, $5 > 1$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{10}+n^2}}{n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \sqrt{1+\frac{1}{n^8}}}{n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^8}} = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

\Rightarrow ряды ведут себя одинаково

\Rightarrow по предельному признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^{10}+n^2}}$ сходится

№3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}; a_n = \frac{1}{2^n+n}$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$; $b_n = \frac{1}{2^n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2} < 1$$

\Rightarrow по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится

$\forall n \hookrightarrow \frac{1}{2^n+n} < \frac{1}{2^n}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится

\Rightarrow по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$ сходится

№4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}; a_n = \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+1)(2n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+2)} = 0 < 1$$

\Rightarrow по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ сходится

№5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}; a_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Проверим ряд на абсолютную сходимость:

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{2n+1}} > \frac{1}{2n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ (Гармонический)}$$

\Rightarrow ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ расходится по предельному признаку сравнения

\Rightarrow по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ расходится

Исследуем ряд на условную сходимость:

$$1) \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \searrow$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{n}}{\sqrt{2+1/n}} = 0$$

\Rightarrow по признаку Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ сходится условно

№6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{e^n}; a_n = \frac{n!}{e^n}$$

Проверим ряд на абсолютную сходимость:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot e^n}{e^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1) \cdot e^n}{e^n \cdot e \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{e} = \infty$$

\Rightarrow по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$ расходится

Исследуем ряд на условную сходимость:

$$1) \frac{n!}{e^n} \nearrow$$

\Rightarrow по признаку Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{e^n}$ расходится

№7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n}; a_n = \frac{1}{n^2+n}$$

Проверим ряд на абсолютную сходимость:

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (b_n = \frac{1}{n^2})$ - сходящийся (ряд Дирихле, $2 > 1$)

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2} \text{ и ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится}$$

\Rightarrow по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ сходится

\Rightarrow ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n}$ сходится абсолютно

№8

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^3 n}; a_n = \frac{1}{n \ln^3 n}$$

Проверим ряд на абсолютную сходимость: