РГР Ряды

Тарасов М. группа 2бПМ2

Вариант 10

№1

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+5}$; $a_n = \frac{1}{3n+5}$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $(b_n = \frac{1}{n})$ - расходящийся:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+5}{n} = 3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+5}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ведут себя одинакого

$\Rightarrow$ по предельному признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+5}$ расходится

№2

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^{10}+n^2}}$; $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^{10}+n^2}}$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ $(b_n = \frac{1}{n^5})$ - сходящийся (ряд Дирихле, 5>1):

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^{10}+n^2}}{n^5} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5\sqrt{1+\frac{1}{n^8}}}{n^5} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^8}} = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ ряды ведут себя одинакого

$\Rightarrow$ по предельному признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^{10}+n^2}}$ сходится

№3

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$; $a_n = \frac{1}{2^n+n}$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$; $b_n = \frac{1}{2^n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{2\cdot 2^n} = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$ по признаку Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится

$\forall n \hookrightarrow \frac{1}{2^n+n} < \frac{1}{2^n}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится

$\Rightarrow$ по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$ сходится

№4

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$; $a_n = \frac{1}{(2n+1)!}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+1)(2n+3)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+2)} = 0 < 1$

$\Rightarrow$ по признаку Даламбера ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ сходится

№5

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$; $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Проверим ряд на абсолютную сходимость:

$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{2n+1}} > \frac{1}{2n+1}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (Гармонический)

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ расходится по предельному признаку сравнения

$\Rightarrow$ по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ расходится

Исследуем ряд на условную сходимость:

1) $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \searrow$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n}}{\sqrt{2+1/n}} = 0$

$\Rightarrow$ по признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ сходится условно

№6

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{e^n}$; $a_n = \frac{n!}{e^n}$

Проверим ряд на абсолютную сходимость:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\cdot e^n}{e^{n+1}\cdot n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)\cdot e^n}{e^n\cdot e\cdot n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{e} = \infty$

$\Rightarrow$ по признаку Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$ расходится

Исследуем ряд на условную сходимость:

1) $\frac{n!}{e^n} \nearrow$

$\Rightarrow$ по признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{e^n}$ расходится

№7

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n}$; $a_n = \frac{1}{n^2+n}$

Проверим ряд на абсолютную сходимость:

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(b_n = \frac{1}{n^2})$ - сходящийся (ряд Дирихле, 2>1)

$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится

$\Rightarrow$ по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ сходится

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n}$ сходится абсолютно

№8

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nln^3n}$; $a_n = \frac{1}{nln^3n}$

Проверим ряд на абсолютную сходимость:

$\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{xln^3x}dx = \int\limits_2^{\infty} \frac{d(lnx)}{ln^3x} = \lim\limits_{b\to\infty} \frac{ln^{-2}x}{-2}\Big|_2^b = -\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to\infty} \frac{1}{ln^2x}\Big|_2^b = -\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to\infty}(\frac{1}{ln^2b} - \frac{1}{ln^2 2}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{ln^2 2} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ по интегральному признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nln^3n}$ сходится абсолютно