

Mathehelfer Bruchrechnen

Ein Hackathon für Kinder und Jugendliche

Norbert Seulberger

September 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Thema und Planung	4
1.1 Die Aufgabenstellung	5
1.2 Technische Rahmenbedingungen	6
1.3 Zeitliche Planung	7
1.4 Vorkenntnisse	8
2 Zum Warmwerden: MathML	9
2.1 MathML	10
2.1.1 MathML: Anfang und Ende einer Formel	10
2.1.2 Brüche in MathML	10
2.1.3 Eine Formelzeile	11
2.1.4 Eine Anleitung zu MathML	11
2.2 Aufgabenblatt MathML	12
2.2.1 Aufgabe: Anzeige der HTML-Datei	12
2.2.2 Aufgabe: Ansicht der HTML-Datei im Editor	12
2.2.3 Aufgabe: Die Beschreibung der beiden Umrechnungen	13
3 Algorithmen und Funktionen	14
3.1 Algorithmen	15
3.1.1 Beispiel: Das Erweitern eines Bruches	15
3.1.2 Der Algorithmus für das Erweitern	15
3.2 Variablen	16
3.2.1 Einfache Variable	16
3.2.2 Strukturierte Variablen	16
3.3 Funktionen	18
3.3.1 Der Aufbau einer Funktion in Python	18
3.3.2 Eine Beispielfunktion: Das Erweitern eines Bruchs	18
3.3.3 Tipp: Datentypen angeben	19
3.3.4 Eine Funktion verwenden	19
3.4 Aufgabe: Der Kehrwert eines Bruches	20
3.4.1 Der Kehrwert eines Bruches	20
3.4.2 Der Algorithmus	20
3.4.3 Die Funktion zur Berechnung des Kehrwerts	20
3.4.4 Überprüfung des Ergebnisses	20

4	Zeichenketten	22
4.1	Zeichenketten	23
4.1.1	Was ist eine Zeichenkette?	23
4.1.2	Das Zusammenfügen von Zeichenketten	23
4.1.3	Der Algorithmus zur Darstellung eines Bruchs in MathML	23
4.1.4	Die Funktion zur Darstellung eines Bruchs in MathML	23
5	Das Beispiel	24
5.1	Beispiel: Das Erweitern eines Bruchs	25
5.1.1	Der Algorithmus zum Erweitern	25
5.1.2	Die Funktion zum Erweitern	25
5.1.3	Die Funktion zur Darstellung eines Bruchs in MathML	25
5.1.4	Die Funktion zur Darstellung der Formel in MathML	26
5.1.5	Überprüfung des Ergebnisses	27
6	Die Aufgaben	28
6.1	Aufgabe: Das Kürzen von Brüchen	29
6.1.1	Der Algorithmus	29
6.1.2	Die Funktion zum Kürzen von Brüchen	29
6.1.3	Die Funktion zur Darstellung der Rechnung zum Kürzen	29
6.1.4	Überprüfung des Ergebnisses	30
6.2	Aufgabenblatt: Umwandlung eines Bruchs in eine Dezimalzahl	31
6.3	Aufgabe: Umwandlung einer Dezimalzahl in einen Bruch	32
7	Aufgaben für Könner	33
7.1	Aufgabe: Programmiere die Grundrechenarten für Brüche	34
7.2	Aufgabe: Gemischte Zahlen	35
7.3	Aufgabe: Objektorientierte Programmierung	36
8	Lösungen	37
8.1	Beispiel: Der Kehrwert eines Bruches	38
8.1.1	Der Kehrwert eines Bruches	38
8.1.2	Der Algorithmus	38
8.1.3	Die Funktion zur Berechnung des Kehrwerts	38
8.1.4	Die Funktion zur Darstellung der Rechnung zum Kürzen	38
8.1.5	Überprüfung des Ergebnisses	39
8.2	Lösung: Das Kürzen von Brüchen	40
8.2.1	Der Algorithmus	40
8.2.2	Die Funktion zum Kürzen von Brüchen	40
8.2.3	Die Funktion zur Darstellung der Rechnung zum Kürzen	40
8.2.4	Überprüfung des Ergebnisses	41

1 Thema und Planung

1.1 Die Aufgabenstellung

Der Mathehelfer Bruchrechnen kann in der Grundversion Brüche und Kommazahlen ineinander umrechnen. Außerdem können Brüche gekürzt werden.

Die Darstellung der Umrechnungen erfolgt in einem Browser. Dabei werden die Brüche grafisch schön mit Zähler, Nenner und Bruchstrich dargestellt wie in einem Mathematikbuch.

Es sind also beispielsweise folgende Operationen möglich:

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = 0.75$$

$$0.8 = \frac{4}{5}$$

Dabei geben wir die linke Seite fest vor und berechnen die rechte Seite jeweils mit einem Programm. Wir schreiben jeweils eine eigene Funktion, also drei Funktionen, die

- einen Bruch kürzt,
- einen Bruch in eine Kommazahl umrechnet oder
- eine Kommazahl in einen Bruch umwandelt.

Als Programmiersprache verwenden wir Python.

Die Formelzeile tragen wir automatisch in eine kleine Web-Seite ein, die wir uns im Browser ansehen. Dabei beschreiben wir die Formel in einer speziellen HTML-Sprache für mathematische Formeln: MathML.

Die Sprache MathML ist sehr einfach. Allerdings muss man sehr viel Text eingeben, um eine Formel mit MathML zu beschreiben. Daher schreiben wir ein Programm, das die Formel automatisch in MathML ausdrückt.

1.2 Technische Rahmenbedingungen

1.3 Zeitliche Planung

1.4 Vorkenntnisse

2 Zum Warmwerden: MathML

2.1 MathML

MathML ist eine einfache Sprache, die in einem HTML-Dokument dazu verwendet werden kann, um mathematische Formeln darzustellen.

Genauso wie in HTML werden die Daten in sogenannte Tags eingeschlossen, d.h. ein Element beginnt mit einem Tag, dann stehen die Daten und ein schließendes Tag beendet den Ausdruck.

2.1.1 MathML: Anfang und Ende einer Formel

Eine Formeln beginnt mit `$` und endet mit `$`.

Für die verschiedenen Teile einer mathematischen Formel gibt es unterschiedliche Elemente.

- `<mn>42</mn>` stellt die Zahl 42 dar.
- `<mo>=</mo>` beschreibt ein Gleichheitszeichen.
- `<mo>+</mo>` schreibt ein Pluszeichen.

Die Formel $2 + 3 = 5$ lautet also in MathML:

```
<math>
  <mn>2</mn>
  <mo>+</mo>
  <mn>3</mn>
  <mo>=</mo>
  <mn>5</mn>
</math>
```

Tipp

Der Browser ignoriert die Zeilenumbrüche in MathML. Wir können die Formel also auch in eine Zeile schreiben.

```
<math><mn>2</mn><mo>+</mo><mn>3</mn><mo>=</mo><mn>5</mn></math>
```

2.1.2 Brüche in MathML

Ein Bruch beginnt mit `<mfrac>` und endet mit `</mfrac>`. Den Zähler und den Nenner schreiben wir zwischen `<mn>` und `</mn>`.

Der Bruch $\frac{2}{3}$ sieht also so aus:

```
<math>
  <mfrac>
    <mn>2</mn>
    <mn>3</mn>
  </mfrac>
</math>
```

2.1.3 Eine Formelzeile

Damit jede Formel in eine eigene Zeile geschrieben wird, verwenden wir das Absatz-Tag von HTML: `<p> ... </p>`

Also zusammen:

```
<p>
  <math><mn>2</mn><mo>+</mo><mn>3</mn><mo>=</mo><mn>5</mn></math>
</p>
```

2.1.4 Eine Anleitung zu MathML

Eine einfache, aber umfassende Anleitung zu MathML findest du auf folgender Internetseite: [MathML-Tutorial](#)

2.2 Aufgabenblatt MathML

2.2.1 Aufgabe: Anzeige der HTML-Datei

Schau dir im Firefox-Browser die Datei manuell.html an. Die Anzeige sollte etwa so aussehen:

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

„Hier kannst du die Formeln für das Umrechnen eines Bruchs in eine Dezimalzahl und umgekehrt einfügen.“

2.2.2 Aufgabe: Ansicht der HTML-Datei im Editor

Schau dir jetzt dieselbe Datei im Editor der Entwicklungsumgebung an. Der Text sieht etwa so aus:

```
<!doctype html>
<html lang="de">
  <head>
    <meta charset="utf-8">
    <meta name="viewport" content="width=device-width, initial-scale=1.0">
    <title>Bruchrechnen</title>
  </head>
  <body>
    <p>
      <math>
        <mfrac>
          <mn>6</mn>
          <mn>8</mn>
        </mfrac>
        <mo>=</mo>
        <mfrac>
          <mn>3</mn>
          <mn>4</mn>
        </mfrac>
      </math>
    </p>
    <p>
      Hier kannst du die Formeln für das Umrechnen ...
    </p>
  </body>
</html>
```

Kannst du die Element entdecken, die für die Darstellung des Kürzens der beiden Brüche stehen?

2.2.3 Aufgabe: Die Beschreibung der beiden Umrechnungen

Füge in die Datei `manuell.html` den Text in der MathML-Sprache ein, so dass die beiden Umrechnungen dargestellt werden (zusätzlich zur Formel für das Kürzen). Der Text „Hier kannst du ...“ darf überschrieben werden.

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = 0.75$$

$$0.8 = \frac{4}{5}$$

Überprüfe das Ergebnis im Firefox-Browser.

3 Algorithmen und Funktionen

3.1 Algorithmen

Ein Algorithmus ist die eindeutige Beschreibung eines Verfahrens, um eine bestimmte Aufgabe zu lösen.

3.1.1 Beispiel: Das Erweitern eines Bruches

Ein Bruch wird erweitert, indem der Zähler und der Nenner mit demselben Faktor multipliziert werden. Wird beispielsweise der Bruch $\frac{2}{5}$ mit dem Faktor 3 erweitert, so ergibt sich diese Gleichung:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$$

3.1.2 Der Algorithmus für das Erweitern

- Nimm einen Bruch und den Faktor, mit dem du den Bruch erweitern willst.
- Merke dir den Zähler und den Nenner des Bruchs jeweils in einer Variablen.
- Multipliziere die Variable für den Zähler mit dem Erweiterungsfaktor.
- Verfahre genauso mit dem Nenner.
- Erstelle einen neuen Bruch mit dem neuen Zähler und dem neuen Nenner.

3.2 Variablen

3.2.1 Einfache Variable

Eine Variable dient dazu, sich einen Wert, einen Text oder das Ergebnis einer Rechnung zu merken. Wir geben einer Variablen einen sinnvollen Namen.

```
wichtige_zahl = 42  
summe = 2 + 3
```

Mit Variablen können wir auch rechnen.

```
summe = summe + 6
```

3.2.2 Strukturierte Variablen

Wir können Variablen auch komplizierter aufbauen und einen Wert in einer Variablen merken, der sich aus mehreren Teilwerten zusammensetzt. Ein Beispiel ist der Bruch:

```
class Bruch():  
    zaehler: int  
    nenner: int
```

Ein Bruch ist ein Wert, der sich aus zwei Teilwerten zusammensetzt, nämlich dem Zähler und dem Nenner. Den Bruchstrich müssen wir uns nicht merken, weil er immer da ist. Zähler und Nenner sind ganze Zahlen (int).

```
bruch_1 = Bruch(3,4)
```

Jetzt können wir die Variable, die ja einen Bruch enthält, nach dem Zähler und dem Nenner fragen. Wir schreiben die beiden Werte in eigene Variablen.

```
zaehler_1 = bruch_1.zaehler  
nenner_1 = bruch_1.nenner
```

Wir können auch zwei Ganzzahlen jeweils in eine Variable schreiben und damit eine Bruchvariable erzeugen.

```
zaehler_2 = 7  
nenner_2 = 8
```



```
bruch_2 = Bruch(zaehler_2, nenner_2)
```

3.3 Funktionen

Eine Funktion ist ein kleines Teilprogramm, das eine spezifische Aufgabe löst. Eine Funktion arbeitet mit folgenden Schritten:

- Die Funktion nimmt einen oder mehrere Eingabewerte entgegen.
- Die Funktion führt eine Berechnung oder andere Aktivität durch.
- Die Funktion gibt das Ergebnis der Berechnung zurück.

Für bestimmte Eingabewerte erhält man immer dasselbe Ergebnis. Die Eingabewerte heißen Parameter. Die Anzahl und der Typ der Parameter ist festgelegt.

3.3.1 Der Aufbau einer Funktion in Python

Der Aufbau einer Funktion orientiert sich an den drei Schritten, die wir eben kennen gelernt haben:

- Die Signaturzeile nennt den Namen und beschreibt die Parameter.
- Der Rumpf der Funktion ist eingerückt. Hier wird die Berechnung durchgeführt.
- Die letzte Zeile im Rumpf gibt das Ergebnis zurück. Sie beginnt mit dem Wort `return`.

3.3.2 Eine Beispielfunktion: Das Erweitern eines Bruchs

In [3.1](#) haben wir den Algorithmus zum Erweitern eines Bruchs formuliert:

- Nimm einen Bruch und den Faktor, mit dem du den Bruch erweitern willst.
- Merke dir den Zähler und den Nenner des Bruchs jeweils in einer Variablen.
- Multipliziere die Variable für den Zähler mit dem Erweiterungsfaktor.
- Verfahre genauso mit dem Nenner.
- Erstelle einen neuen Bruch mit dem neuen Zähler und dem neuen Nenner.

In Python lautet die Funktion für das Erweitern:

```
def erweitereBruch(bruch, faktor):  
    alterZaehler = bruch.zaehler  
    alterNenner = bruch.nenner  
    neuerZaehler = alterZaehler * faktor  
    neuerNenner = alterNenner * faktor  
    neuerBruch = Bruch(neuerZaehler, neuerNenner)  
    return neuerBruch
```

3.3.3 Tipp: Datentypen angeben

Wer möchte, kann die Typen der Parameter und des Ergebnisses angeben. Es hilft, Fehler zu vermeiden. Programmierprofis tun das.

Die Signaturzeile für die Funktion zum Erweitern lautet dann:

```
def erweitereBruch(bruch: Bruch, faktor: int) -> Bruch:
```

Der Rumpf bleibt unverändert.

3.3.4 Eine Funktion verwenden

Eine Funktion kann beliebig oft verwendet werden. Oft benutzen wir anstatt „verwenden“ die Formulierung „die Funktion wird aufgerufen“. In der Regel lässt man sich für verschiedene Parameterwerte das jeweilige Ergebnis berechnen.

```
bruch_2 = Bruch(1,2)
bruch_3 = erweitereBruch(bruch_2, 5)
```

Wir können eine Funktion auch innerhalb einer anderen Funktion aufrufen. Das ist sehr hilfreich. Dann kann sich eine Funktion für die Berechnung von Zwischenschritten die Hilfe einer anderen Funktion holen.

3.4 Aufgabe: Der Kehrwert eines Bruches

3.4.1 Der Kehrwert eines Bruches

Der Kehrwert eines Bruches ist ein anderer Bruch, dessen Zähler der Nenner des ursprünglichen Bruchs und dessen Nenner der ursprüngliche Zähler ist. Beispielsweise lautet der Kehrwert des Bruchs $\frac{2}{3}$ demzufolge $\frac{3}{2}$.

Es gibt eine bekannte Rechenregel zum Dividieren von Brüchen: Ein Bruch wird durch einen anderen Bruch dividiert, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert:

$$\frac{2}{5} : \frac{1}{2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{5}$$

3.4.2 Der Algorithmus

Wie lautet der Algorithmus?

- Nimm einen Bruch.
- ...
- ...
- ...
- ...

3.4.3 Die Funktion zur Berechnung des Kehrwerts

Die Signatur der Funktion lautet:

```
def berechneKehrwert(bruch: Bruch) -> Bruch:
```

Wie geht es weiter?

3.4.4 Überprüfung des Ergebnisses

Erzeuge in der Datei `spielwiese.py` einen Bruch, z.B. $\frac{2}{5}$. Berechne den Kehrwertbruch und lasse diesen anzeigen.

```
bruch_1 = Bruch(2,5)
kehrwert = berechneKehrwert(bruch_1)
print(kehrwert)
```

4 Zeichenketten

4.1 Zeichenketten

4.1.1 Was ist eine Zeichenkette?

4.1.2 Das Zusammenfügen von Zeichenketten

4.1.3 Der Algorithmus zur Darstellung eines Bruchs in MathML

Einen Bruch in MathML zu schreiben, ist nicht schwierig, aber mühsam. Daher möchten wir eine Funktion ein Python programmieren, die das automatisch erledigt. Der Algorithmus lautet so:

- Nimm einen Bruch entgegen.
- Wandle den Zähler des Bruchs in eine Zeichenkette und speichere diese Zeichenkette in einer Variablen.
- Verfahre genauso mit dem Nenner.
- Baue die Zeichenkette für das Ergebnis aus Einzelteilen zusammen, wie in den nächsten Schritten beschrieben.
- Beginne die Zeichenkette mit `<mfrac>`.
- Rahme die Zeichenkette, die den Zähler beschreibt, mit den Tags `<mn>` und `</mn>` ein.
- Verfahre ebenso mit der Zeichenkette für den Nenner.
- Beende die Zeichenkette mit `</mfrac>`.
- Gib die Zeichenkette zurück.

4.1.4 Die Funktion zur Darstellung eines Bruchs in MathML

```
def schreibeBruch(bruch: Bruch) -> str:
    zaehlerAlsString = str(bruch.zaehler)
    nennerAlsString = str(bruch.nenner)
    ergebnis = "<mfrac>"
    ergebnis = ergebnis + "<mn>" + zaehlerAlsString + "</mn>"
    ergebnis = ergebnis + "<mn>" + nennerAlsString + "</mn>"
    ergebnis = ergebnis + "</mfrac>"
    return ergebnis
```

5 Das Beispiel

5.1 Beispiel: Das Erweitern eines Bruchs

Das folgende Beispiel fasst nochmals alle zusammen, was in den Kapitel über MathML, Algorithmen, Funktionen und Zeichenketten vorgestellt wurde. Lies dieses Beispiel sorgfältig durch. Es dient als Vorlage für die Aufgaben, die du danach selbstständig lösen sollst.

5.1.1 Der Algorithmus zum Erweitern

- Nimm einen Bruch und den Faktor, mit dem du den Bruch erweitern willst.
- Merke dir den Zähler und den Nenner des Bruchs jeweils in einer Variablen.
- Multipliziere diese Variablen jeweils mit dem Erweiterungsfaktor.
- Erstelle einen neuen Bruch aus dem neuen Zähler und dem neuen Nenner.

5.1.2 Die Funktion zum Erweitern

```
def erweitereBruch(bruch: Bruch, faktor: int) -> Bruch:
    alterZaehler = bruch.zaehler
    alterNenner = bruch.nenner
    neuerZaehler = alterZaehler * faktor
    neuerNenner = alterNenner * faktor
    neuerBruch = Bruch(neuerZaehler, neuerNenner)
    return neuerBruch
```

- Beende die Zeichenkette mit `</mfrac>`.
- Gib die Zeichenkette zurück.

```
def schreibeBruch(bruch: Bruch) -> str:
    zaehlerAlsString = str(bruch.zaehler)
    nennerAlsString = str(bruch.nenner)
    ergebnis = "<mfrac>"
    ergebnis = ergebnis + "<mn>" + zaehlerAlsString + "</mn>"
    ergebnis = ergebnis + "<mn>" + nennerAlsString + "</mn>"
    ergebnis = ergebnis + "</mfrac>"
    return ergebnis
```

5.1.4 Die Funktion zur Darstellung der Formel in MathML

Der Algorithmus lautet:

- Nimm einen Bruch.
- Erzeuge aus diesem Bruch einen erweiterten Bruch. Verwende dazu die Funktion [5.1.2](#), die du eben gesehen hast.
- Erzeuge aus dem ursprünglichen Bruch die Beschreibung in MathML. Verwende dazu die Funktion [5.1.3](#) von oben.
- Erzeuge aus dem erweiterten Bruch die Beschreibung in MathML. Verwende dazu ebenfalls die Funktion [5.1.3](#).
- Setze jetzt den MathML-Text aus den einzelnen Angaben zusammen wie in den folgenden Schritten angegeben:
- Es beginnt mit dem MathML-Text für den ungekürzten Bruch.
- Dann kommt das Gleichheitszeichen.
- Es folgt der MathML-Text für den gekürzten Bruch.

Die Funktion lautet dann:

```
def schreibeErweitern(bruch: Bruch, faktor: int) -> str:
    bruchErweitert = erweitereBruch(bruch, faktor)
    textAlterBruch = schreibeBruch(bruch)
    textNeuerBruch = schreibeBruch(bruchErweitert)
    ergebnis = textAlterBruch + "<mo>=</mo>" + textNeuerBruch
    return ergebnis
```

5.1.5 Überprüfung des Ergebnisses

Wir überprüfen das Ergebnis, indem wir in der Funktion `schreibeMathML()` folgende Zeilen ergänzen:

```
inhalt = inhalt + "\n\t\t<p><math>"
inhalt = inhalt + schreibeErweitern(Bruch(3,4), 3)
inhalt = inhalt + "</math></p>"
```

Jetzt führen wir die Datei `htmlErzeugung.py` aus.

Prüfe im Firefox-Browser, wie die Datei `index.html` aussieht. Dort sollte eine Zeile stehen, die so aussieht:

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

6 Die Aufgaben

6.1 Aufgabe: Das Kürzen von Brüchen

Lies dieses Beispiel sorgfältig durch. Es dient als Vorlage für die Aufgaben, die du danach selbstständig lösen sollst.

6.1.1 Der Algorithmus

Das Kürzen eines Bruches funktioniert so:

- Nimm einen Bruch.
- Merke dir den Zähler und den Nenner des Bruchs.
- Berechne den größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Bruch. (Es gibt dafür eine fertige Funktion.)
- Berechne den gekürzten Zähler.
- Berechne den gekürzten Nenner.
- Erstelle einen neuen Bruch aus dem gekürzten Zähler und dem gekürzten Nenner.

6.1.2 Die Funktion zum Kürzen von Brüchen

Die Funktion lautet dann:

```
def kuerzeBruch(bruch: Bruch) -> Bruch:
    alterZaehler = bruch.zaehler
    alterNenner = bruch.nenner
    kuerzungsfaktor = ggT(alterZaehler, alterNenner)
    neuerZaehler = alterZaehler // kuerzungsfaktor
    neuerNenner = alterNenner // kuerzungsfaktor
    neuerBruch = Bruch(neuerZaehler, neuerNenner)
    return neuerBruch
```

6.1.3 Die Funktion zur Darstellung der Rechnung zum Kürzen

Der Algorithmus lautet:

- Nimm einen Bruch.
- Erzeuge aus diesem Bruch einen gekürzten Bruch. Verwende dazu die Funktion, die du eben gesehen hast.
- Erzeuge aus dem ursprünglichen Bruch die Beschreibung in MathML. Verwende dazu die Funktion, die du im vorherigen Beispiel gesehen hast.

- Erzeuge aus dem gekürzten Bruch die Beschreibung in MathML. Verwende dazu ebenfalls die Funktion aus dem vorherigen Beispiel.
- Setze jetzt den MathML-Text aus den einzelnen Angaben zusammen.
- Die Zeichenkette beginnt mit `<math>`.
- Es folgt der MathML-Text für den ungekürzten Bruch.
- Dann kommt das Gleichheitszeichen.
- Es folge der MathML-Text für den gekürzten Bruch.
- Die Zeichenkette beginnt mit `</math>`

Die Funktion lautet dann:

```
def schreibeKuerzen(bruch: Bruch) -> str:
    bruchGekuerzt = kuerzeBruch(bruch)
    textUngekuerzt = schreibeBruch(bruch)
    textGekuerzt = schreibeBruch(bruchGekuerzt)
    return "<math>" + textUngekuerzt + "<mo>=</mo>" + textGekuerzt + "
           </math>"
```

6.1.4 Überprüfung des Ergebnisses

Wir überprüfen das Ergebnis analog zum Vorgehen im Beispiel für die Darstellung eines Bruchs. Dazu ergänzen wir in der Funktion `schreibeMathML()` die Zeilen

```
bruchUngekuerzt: Bruch = Bruch(6,8)
inhalt += "\n\t\t<p>"
inhalt += schreibeKuerzen(bruchUngekuerzt)
inhalt += "</p>"
```

6.2 Aufgabenblatt: Umwandlung eines Bruchs in eine Dezimalzahl

6.3 Aufgabe: Umwandlung einer Dezimalzahl in einen Bruch

7 Aufgaben für Könner

7.1 Aufgabe: Programmieren die Grundrechenarten für Brüche

Diese Aufgabe ist etwas schwieriger.

7.2 Aufgabe: Gemischte Zahlen

Diese Aufgabe ist schwierig.

7.3 Aufgabe: Objektorientierte Programmierung

Diese Aufgabe ist sehr schwierig. Es werden gute Kenntnisse der Programmierung in Python vorausgesetzt.

8 Lösungen

8.1 Beispiel: Der Kehrwert eines Bruches

Lies dieses Beispiel sorgfältig durch. Es dient als Vorlage für die Aufgaben, die du danach selbstständig lösen sollst.

8.1.1 Der Kehrwert eines Bruches

Der Kehrwert eines Bruches ist ein anderer Bruch, dessen Zähler der Nenner des ursprünglichen Bruchs und dessen Nenner der ursprüngliche Zähler ist. Beispielsweise lautet der Kehrwert des Bruchs $\frac{2}{3}$ demzufolge $\frac{3}{2}$.

Es gibt eine bekannte Rechenregel zum Dividieren von Brüchen: Ein Bruch wird durch einen anderen Bruch dividiert, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert:

$$\frac{2}{5} : \frac{1}{2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{5}$$

8.1.2 Der Algorithmus

Das Bilden des Kehrwerts funktioniert so:

- Nimm einen Bruch.
- Benenne eine Variable mit dem Namen `neuerZaehler` und weise dieser Variablen den Nenner des übergebenen Bruchs zu.
- Verfahre genauso mit dem neuen Nenner.
- Erstelle einen neuen Bruch aus dem neuen Zähler und dem neuen Nenner.

8.1.3 Die Funktion zur Berechnung des Kehrwerts

8.1.4 Die Funktion zur Darstellung der Rechnung zum Kürzen

Der Algorithmus lautet:

- Nimm einen Bruch.
- Erzeuge aus diesem Bruch einen gekürzten Bruch. Verwende dazu die Funktion, die du eben gesehen hast.

- Erzeuge aus dem ursprünglichen Bruch die Beschreibung in MathML. Verwende dazu die Funktion, die du im vorherigen Beispiel gesehen hast.
- Erzeuge aus dem gekürzten Bruch die Beschreibung in MathML. Verwende dazu ebenfalls die Funktion aus dem vorherigen Beispiel.
- Setze jetzt den MathML-Text aus den einzelnen Angaben zusammen.
- Die Zeichenkette beginnt mit `<math>`.
- Es folgt der MathML-Text für den ungekürzten Bruch.
- Dann kommt das Gleichheitszeichen.
- Es folge der MathML-Text für den gekürzten Bruch.
- Die Zeichenkette beginnt mit `</math>`

Die Funktion lautet dann:

```
def schreibeKuerzen(bruch: Bruch) -> str:
    bruchGekuerzt = kuerzeBruch(bruch)
    textUngekuerzt = schreibeBruch(bruch)
    textGekuerzt = schreibeBruch(bruchGekuerzt)
    return "<math>" + textUngekuerzt + "<mo>=</mo>" + textGekuerzt + "
        </math>"
```

8.1.5 Überprüfung des Ergebnisses

Wir überprüfen das Ergebnis analog zum Vorgehen im Beispiel für die Darstellung eines Bruchs. Dazu ergänzen wir in der Funktion `schreibeMathML()` die Zeilen

```
bruchUngekuerzt: Bruch = Bruch(6,8)
inhalt += "\n\t\t<p>"
inhalt += schreibeKuerzen(bruchUngekuerzt)
inhalt += "</p>"
```

8.2 Lösung: Das Kürzen von Brüchen

Lies dieses Beispiel sorgfältig durch. Es dient als Vorlage für die Aufgaben, die du danach selbstständig lösen sollst.

8.2.1 Der Algorithmus

Das Kürzen eines Bruches funktioniert so:

- Nimm einen Bruch.
- Merke dir den Zähler und den Nenner des Bruchs.
- Berechne den größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Bruch. (Es gibt dafür eine fertige Funktion.)
- Berechne den gekürzten Zähler.
- Berechne den gekürzten Nenner.
- Erstelle einen neuen Bruch aus dem gekürzten Zähler und dem gekürzten Nenner.

8.2.2 Die Funktion zum Kürzen von Brüchen

Die Funktion lautet dann:

```
def kuerzeBruch(bruch: Bruch) -> Bruch:
    alterZaehler = bruch.zaehler
    alterNenner = bruch.nenner
    kuerzungsfaktor = ggT(alterZaehler, alterNenner)
    neuerZaehler = alterZaehler // kuerzungsfaktor
    neuerNenner = alterNenner // kuerzungsfaktor
    neuerBruch = Bruch(neuerZaehler, neuerNenner)
    return neuerBruch
```

8.2.3 Die Funktion zur Darstellung der Rechnung zum Kürzen

Der Algorithmus lautet:

- Nimm einen Bruch.
- Erzeuge aus diesem Bruch einen gekürzten Bruch. Verwende dazu die Funktion, die du eben gesehen hast.
- Erzeuge aus dem ursprünglichen Bruch die Beschreibung in MathML. Verwende dazu die Funktion, die du im vorherigen Beispiel gesehen hast.

- Erzeuge aus dem gekürzten Bruch die Beschreibung in MathML. Verwende dazu ebenfalls die Funktion aus dem vorherigen Beispiel.
- Setze jetzt den MathML-Text aus den einzelnen Angaben zusammen.
- Die Zeichenkette beginnt mit `<math>`.
- Es folgt der MathML-Text für den ungekürzten Bruch.
- Dann kommt das Gleichheitszeichen.
- Es folge der MathML-Text für den gekürzten Bruch.
- Die Zeichenkette beginnt mit `</math>`

Die Funktion lautet dann:

```
def schreibeKuerzen(bruch: Bruch) -> str:
    bruchGekuerzt = kuerzeBruch(bruch)
    textUngekuerzt = schreibeBruch(bruch)
    textGekuerzt = schreibeBruch(bruchGekuerzt)
    return "<math>" + textUngekuerzt + "<mo>=</mo>" + textGekuerzt + "
        </math>"
```

8.2.4 Überprüfung des Ergebnisses

Wir überprüfen das Ergebnis analog zum Vorgehen im Beispiel für die Darstellung eines Bruchs. Dazu ergänzen wir in der Funktion `schreibeMathML()` die Zeilen

```
bruchUngekuerzt: Bruch = Bruch(6,8)
inhalt += "\n\t\t<p>"
inhalt += schreibeKuerzen(bruchUngekuerzt)
inhalt += "</p>"
```