Théorème de Cantor-Bernstein

Réalisé par :
Tartox

2024

Sommaire

Énoncé

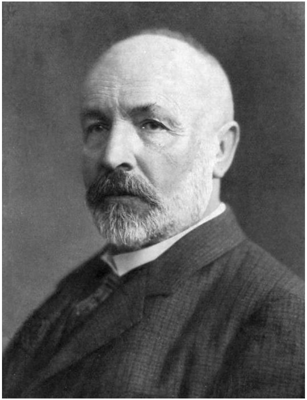
Théorème de Cantor-Bernstein (1887) :

Soient A et B deux ensembles.
Supposons qu'il existe une injection de A vers B et une injection de B vers A.

Il existe alors une bijection de A sur B.

Histoire

- **Georg Cantor** énonce initialement ce théorème sans démonstration en 1887.
- En 1895, Cantor note dans son livre *"Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis"* que ce théorème peut être déduit de la trichotomie pour les cardinaux (et donc de l'axiome du choix).
- Il envera plus tard dans une publication ultérieure une démonstration de ce théorème.



Georg Cantor (1845-1918)

Histoire

- **Felix Bernstein**, qui était un élève de Cantor, trouva une démonstration ne dépendant pas de l'axiome du choix dès 1896 à l'âge de 18 ans.
- **Ernst Schröder** publie lui aussi une démonstration de ce théorème en 1898. D'où l'appellation parfois de ce théorème "*Cantor-Schröder-Bernstein*".
- La démonstration de **Schröder** s'avère erronée. Il reconnaîtra plus tard la paternité de sa démonstration à **Bernstein**.

Felix Bernstein (1878-1956)

Principe

- Imaginez un hôtel (fictif), contenant une infinité de chambres, toutes numérotés : chambre 0, chambre 1, chambre 2, etc...
- Chaque chambre ne peut accueillir qu'un seul client.
- Imaginons maintenant que cet hôtel soit plein. Un nouveau client vient à la réception, et souhaite être logé dans une chambre de l'hôtel.

Énigme

Est-il possible de faire loger ce nouveau client dans l'hôtel, sachant qu'il est plein, ce, sans jeter dehors les clients qui y sont déjà logés ?

Résolution

1. Oui ! Il suffit de demander à chaque client de l'hôtel qui est dans une chambre n à aller à la chambre $n+1$!
2. Dans ce cas, celui qui est à la chambre 0 va à la chambre 1, celui à la chambre 1 va à la chambre 2, etc...
3. Ainsi tout les clients sont bien relogés, et on voit bien que la chambre 0 est libre maintenant ! Il suffit d'y faire loger le nouveau client.
4. Ce que l'on a fait, c'est juste trouver une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$, en effet, on a exactement considéré la bijection suivante :

$$\gamma : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$$

Illustation dans Logicomix

Une autre énigme

Maintenant, une infinité de nouveaux clients viennent à la réception pour être logés dans l'hôtel de Hilbert.
Est-il possible de tous les faire loger ?

Résolution

1. Oui ! Il suffit de demander à chaque client de l'hôtel qui est dans une chambre n à aller à la chambre $2n$!
2. Dans ce cas, celui qui est à la chambre 0 y reste, celui à la chambre 1 va à la chambre 2, et laisse sa chambre initiale vide, celui à la chambre 2 va à la chambre 4 etc...
3. Ainsi tout les clients sont bien relogés, et on voit bien que toutes les chambres impaires sont libres maintenant ! Il suffit d'y faire loger l'infinité de nouveaux clients.

Analogie importante

Une analogie intéressante à faire, c'est de voir qu'avec ce procédé, on peut trouver une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$, en effet, on a considéré dans un autre contexte la bijection suivante :

$$\gamma : \begin{array}{|lcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} -\dfrac{n}{2} & ; n \text{ est pair} \\ \dfrac{n+1}{2} & ; n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

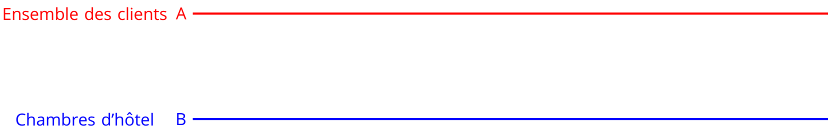
Puisque, si l'on voit les anciens clients comme des entiers négatif commençant par 0, et les nouveau clients comme des entiers positifs commençant par 1, alors γ associe à chaque chambre de l'hôtel, le client qui lui correspond.

Cadre

- Soient A et B deux ensembles.
- Supposons qu'il existe $f : A \longrightarrow B$ injective, et $g : B \longrightarrow A$ injective.
- Essayons de démontrer le **théorème de Cantor-Bernstein** en utilisant une analogie inverse à l'hôtel de Hilbert.

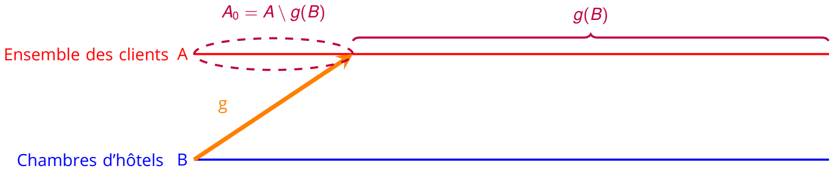
L'analogie

Si l'on voit A comme l'ensemble des clients (anciens et nouveaux) de l'hôtel et B comme l'ensemble des chambres de l'hôtel.
On les représente alors comme deux droites horizontales (éventuellement infinies) comme suit :



L'analogie

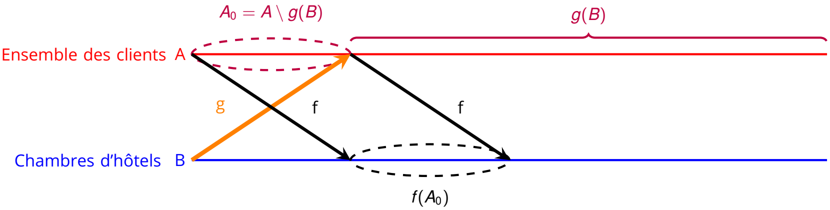
On interprète maintenant $g : B \longrightarrow A$ comme étant l'application qui associe une chambre d'hôtel à l'unique client qui l'occupe. Elle est donc bien injective. On la représente par une flèche orange dans le schéma, en isolant les nouveaux clients à gauche de celle-ci (L'ensemble A_0). On a $g(B)$ est l'ensemble des anciens clients :



g : Associe une chambre d'hôtel à l'unique client qui l'occupe.

L'analogie

Désignons maintenant par $f : A \longrightarrow B$ l'application qui associe un client (nouveau ou ancien) à sa nouvelle et unique chambre. f est bien injective. f envoie alors les nouveau clients (l'ensemble A_0) vers $f(A_0)$ (qui est l'ensemble de leur nouvelles chambres). Le problèmes c'est qu'il faudra reloger les anciens clients qui habitaient dans $f(A_0)$... :

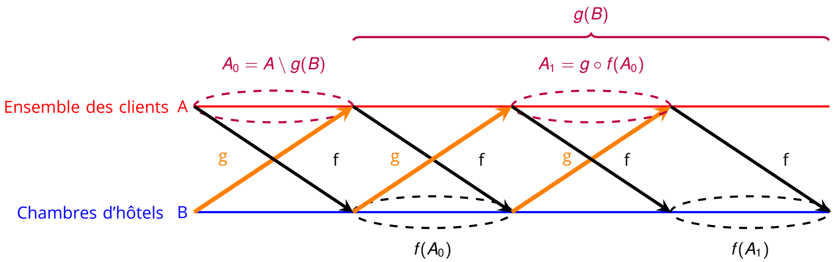


f : Associe un client à une chambre d'hôtel souhaitée.

g : Associe une chambre d'hôtel à l'unique client qui l'occupe.

L'analogie

Avant de pouvoir reloger les anciens habitants de $f(A_0)$, il faut d'abords les identifier... C'est exactement ce que permet notre injection g, ainsi $A_1 = g \circ f(A_0)$ désigne les anciens habitants de $f(A_0)$, et pour les reloger, on leurs applique f, donc on les envoie dans $f(A_1)$, et on doit à nouveau reloger ses anciens habitants, etc...



f : Associe un client à une chambre d'hôtel souhaitée.

g : Associe une chambre d'hôtel à l'unique client qui l'occupe.

On avance...

Ainsi, il est naturel de définir par réccurence, la suite d'ensemble :

$$A_0 = A \setminus g(B) \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad A_{n+1} = g \circ f(A_n)$$

On pose alors : $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ que l'on interprète comme l'ensemble des clients qui doivent être relogés !

On y est presque...

Ainsi, pour reloger l'ensemble des clients de l'hôtel, et donc déterminer la nouvelle chambre d'hôtel d'un client quelconque dans A :

1. Nous avons envoyé les clients à reloger (Y) dans leurs nouvelles chambres, ce en utilisant f.
2. alors que pour déterminer la nouvelle chambre de ceux qui y sont restés, il suffit de leur appliquer l'opération "inverse" qu'effectue g.
3. Notons h la corestriction de g à $g(B)$, alors h est bijective, car elle est trivialement surjective, et que g est injective.

Eurêka !

Finalement, pour connaître le nouvel état de l'hôtel, on a effectué l'opération (bijection de A dans B) suivante :

$$\gamma : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & ; \text{si } x \in Y \\ h^{-1}(x) & ; \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

On vous laisse le soin de démontrer que c'est bien une bijection...

Sources

1. *Logicomix.*
2. Hilbert, David (2013), Ewald, William; Sieg, Wilfried (eds.), *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetics and Logic 1917-1933, Heidelberg: Springer-Verlag*.
3. Wikipédia, *Théorème de Cantor-Bernstein*.
4. Youtube, *The infinite Hotel paradox - Jeff Dekofsky*.