Assignment 1 Solution

1. 教材 Chap 1 习题 1.1

1.1 表 1.1 中若只包含编号为 1 和 4 的两个样例, 试给出相应的版本空间.

表 1.1 西瓜数据集

编号	色泽	根蒂	敲声	好瓜
1	青绿	蜷缩	浊响	是
2	乌黑	蜷缩	浊响	是
3	青绿	硬挺	清脆	否
4	乌黑	稍蜷	沉闷	否

即我们的表格变为：

编号	色泽	根蒂	敲声	好瓜
1	青绿	蜷缩	浊响	是
2	乌黑	稍蜷	沉闷	否

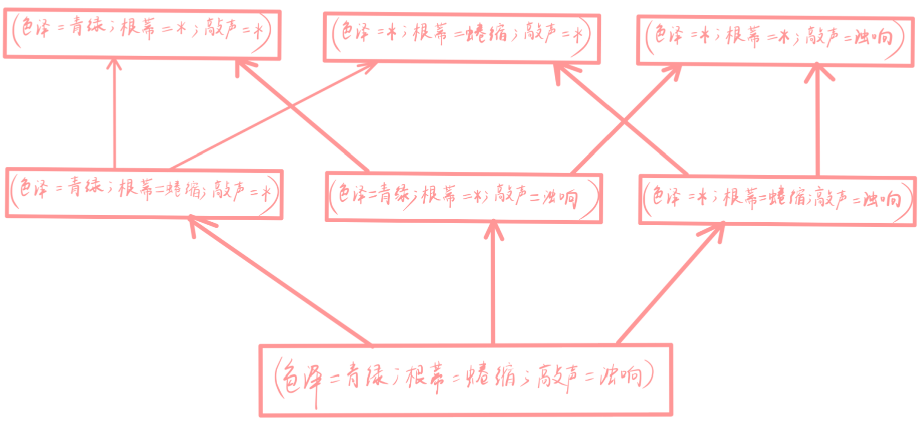
根据版本空间的定义，我们需要找出所有与给定训练数据一致的假设。这意味着假设应该正确地将第一个实例分类为“好瓜=是”，并将第二个实例分类为“好瓜=否”。

考虑到我们的特征和训练数据，我们的版本空间将包括所有满足以下条件的假设：

- 对于第一个实例，假设必须预测“是”（好瓜）。
- 对于第二个实例，假设必须预测“否”（不是好瓜）。

对于第一个示例（好瓜=是），假设需要预测为“是”。这意味着任何将此实例分类为好瓜的假设都应该被包括在版本空间内。考虑到我们仅有的一个正面示例，假设可以是：

1. <色泽=青绿，根蒂=*，敲声=*，好瓜=是>
2. <色泽=*，根蒂=蜷缩，敲声=*，好瓜=是>
3. <色泽=*，根蒂=*，敲声=浊响，好瓜=是>
4. <色泽=青绿，根蒂=蜷缩，敲声=*，好瓜=是>
5. <色泽=青绿，根蒂=*，敲声=浊响，好瓜=是
6. <色泽=*，根蒂=蜷缩，敲声=浊响，好瓜=是>
7. <色泽=青绿，根蒂=蜷缩，敲声=浊响，好瓜=是>



Credit to 李威豪

Problem 1: Basic Vector Operations

Let two vectors $\mathbf{a} = (1 \;\; 2 \;\; 3)^T$ and $\mathbf{b} = (-8 \;\; 1 \;\; 2)^T$, answer the following equations:

(1) Calculate the ℓ_2 norm of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$.

(2) Calculate the Euclidean distance between $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ (i.e. ℓ_2 norm of $\mathbf{a} - \mathbf{b}$).

(3) Are $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ orthogonal? State you reason.

$$\|a\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$
$$\|b\|_2 = \sqrt{(-8)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{69}$$
$$\|a - b\|_2 = \sqrt{(1+8)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{83}$$
$$a \cdot b = 1 \times (-8) + 2 \times 1 + 3 \times 2 = -8 + 2 + 6 = 2$$
$$a \cdot b = 0 \iff a \text{ and } b \text{ are orthogonal}$$

Problem 2: Basic Matrix Operations

Suppose $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$, answer the following questions:

(1) Calculate A^{-1} and $\det(A)$.

(2) The Rank of A is?

(3) The trace of A is?

(4) Calculate $A + A^T$.

1. 最好先计算$\det A$，因为如果$\det A = 0$ 那么说明 singular matrix，那么 inverse 不存在。

$$\begin{aligned}
&\det A \\
&= 1 \cdot \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} - (-3) \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \\
&= 1 \cdot \big(-5 \cdot 4 - (3 \cdot -6)\big) - (-3) \cdot (3 \cdot 4 - 3 \cdot 6) + 3 \cdot \big(3 \cdot (-6) - (-5 \cdot 6)\big) \\
&= 1(-20 + 18) - (-3)(12 - 18) + 3(-18 + 30) \\
&= -2 - 18 + 36 \\
&= 16
\end{aligned}$$

使用高斯消元法

增广矩阵 $[A|I]$ 是：

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\3 & -5 & 3\\6 & -6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{3rd r}\div 6]{2nd\ r\div 3}\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\1 & -5/3 & 1\\1 & -1 & 2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1/3 & 0\\0 & 0 & 1/6\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{3rd r- 1st r}]{2nd\ r - 1st\ r}\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\0 & 4/3 & -2\\0 & 2 & -7/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1/3 & 0\\-1 & 0 & 1/6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{3rd}\div 2]{2nd\ r\times 3/4}\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\0 & 1 & -3/2\\0 & 1 & -7/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-3/4 & 1/4 & 0\\-1 & 0 & 1/12\end{pmatrix}\xrightarrow{3rd\ r - \text{2nd}\ r}\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\0 & 1 & -3/2\\0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-3/4 & 1/4 & 0\\1/4 & -1/4 & 1/12\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3rd\ r\times 3}\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\0 & 1 & -3/2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-3/4 & 1/4 & 0\\3/4 & -3/4 & 1/4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{2nd}\ r + 3/2\times\text{3rd}\ r}\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\3/8 & -7/8 & 3/8\\3/4 & -3/4 & 1/4\end{pmatrix}$$

$$-3/4 + 3/2\times\ 3/4 = -6/8 + 9/8 = 3/8$$
$$1/4 + 3/2\times -3/4 = 1/4 - 9/8 = -7/8$$
$$0 + 3/2\times 1/4 = 3/8$$

$$\xrightarrow{\text{1st r + 3×2nd r}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17/8 & -21/8 & 9/8\\3/8 & -7/8 & 3/8\\3/4 & -3/4 & 1/4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{1st r - 3×3}rd\ r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/8 & -3/8 & 3/8\\3/8 & -7/8 & 3/8\\3/4 & -3/4 & 1/4\end{pmatrix}$$

$$1 + 3\times 3/8 = 8/8 + 9/8 = 17/8$$
$$0 + 3\times -7/8 = -21/8$$
$$0 + 3\times 3/8 = 9/8$$

$$17/8 - 3\times 3/4 = 17/8 - 18/8 = -1/8$$
$$-21/8 - 3\times -3/4 = -21/8 + 18/8 = -3/8$$
$$9/8\text{-}3\times 1/4 = 9/8\text{-}6/8 = 3/8$$

2. $rank(A) = 3$, 矩阵 invertible
3. 矩阵的迹（Trace）是主对角线上元素的和。

$$\text{Trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$\text{Trace}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 - 5 + 4 = 0$$

4.

$$A^{\top} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 6\\-3 & -5 & -6\\3 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$A + A^{\top} = \begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\3 & -5 & 3\\6 & -6 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 3 & 6\\-3 & -5 & -6\\3 & 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 9\\0 & -10 & -3\\9 & -3 & 8\end{pmatrix}$$

5. 正交矩阵（Orthogonal matrix）是一个方阵，它的行向量和列向量都是单位向量，且互相正交。这意味着正交矩阵的转置等于其逆矩阵：

$$A^T = A^{-1}$$

对于正交矩阵A，满足以下性质：

$$A^T A = AA^T = I$$

简单地说，正交矩阵代表了一个不涉及伸缩的刚体变换。

6. Solve $|A - \lambda I| = 0$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda)[(-5-\lambda)(4-\lambda) - 3\times(-6)] - (-3)[3(4-\lambda) - 3\times 6] + 3[3(-6)\text{-}6(-5-\lambda)] \\
&= (1-\lambda)[-20 - 4\lambda + 5\lambda + \lambda^2 + 18] + 3[-3\lambda - 6] + 3[-18 + 30 + 6\lambda] \\
&= (1-\lambda)[-2 + \lambda + \lambda^2] - 9\lambda - 18 + 36 + 18\lambda \\
&= -2 + \lambda + \cancel{\lambda^2} + 2\lambda \cancel{- \lambda^2} - \lambda^3 - 18 - 9\lambda + 36 + 18\lambda \\
&= -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = 0
\end{aligned}$$

解得：$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -2$

解方程组$(A - \lambda I)v = 0$

对于$\lambda_1 = 4$ 我们有：

$$\begin{pmatrix} 1-4 & -3 & 3 \\ 3 & -5-4 & 3 \\ 6 & -6 & 4-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -3x - 3y + 3z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \\ 6x - 6y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} -x - y + z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{matrix}$$

$$x - y = 0 \longrightarrow x = y$$

$$-x - y + z = 0 \longrightarrow -2x + z = 0 \longrightarrow z = 2x$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

因此对应的 eigenvalue 是 $(1 \quad 1 \quad 2)^T$

对于$\lambda_1 =$ -2 我们有：

$$\begin{pmatrix} 1+2 & -3 & 3 \\ 3 & -5+2 & 3 \\ 6 & -6 & 4+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 3x - 3y + 3z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ 6x - 6y + 6z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{matrix}$$

$$z = -x + y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此对应的 eigenvalue 是 $(1 \quad 0 \quad -1)^T$ 或者 $(0 \quad 1 \quad 1)^T$

或者，

$$y = x + z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eigenvalue 是 $(1 \quad 1 \quad 0)^T$ 或者 $(0 \quad 1 \quad 1)^T$

$$x = y - z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eigenvalue 是 $(1 \quad 1 \quad 0)^T$ 或者 $(-1 \quad 0 \quad 1)^T$

7. 根据第 6 小题的分解结果：

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

P 可以有三个结果：

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

它们都满足：

$$A = P \Lambda P^{-1}$$

```
import numpy as np

L = np.array([
    [4, 0, 0],
    [0, -2, 0],
    [0, 0, -2]
])
```

```
P1 = np.array([
    [1, 1, 0],
    [1, 0, 1],
    [2, -1, 1]
])

P2 = np.array([
    [1, 1, 0],
    [1, 1, 1],
    [2, 0, 1]
])

P3 = np.array([
    [1, 1, -1],
    [1, 1, 0],
    [2, 0, 1]
])
```

```
P1.dot(L).dot(np.linalg.inv(P1))
```

```
array([[ 1., -3.,  3.],
       [ 3., -5.,  3.],
       [ 6., -6.,  4.]])
```

```
P2.dot(L).dot(np.linalg.inv(P2))
```

```
array([[ 1., -3.,  3.],
       [ 3., -5.,  3.],
       [ 6., -6.,  4.]])
```

```
P3.dot(L).dot(np.linalg.inv(P3))
```

```
array([[ 1., -3.,  3.],
       [ 3., -5.,  3.],
       [ 6., -6.,  4.]])
```

8. The $\ell_{2,1}$ of matrix is given by:

$$|A|_{2,1} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|^2 = [1^2+3^2+6^2 \quad (-3)^2+(-5)^2+(-6)^2 \quad 3^2+3^2+4^2] = [46 \quad 70 \quad 34]$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2} = ([46 \quad 70 \quad 34])^{1/2} = [\sqrt{46} \quad \sqrt{70} \quad \sqrt{34}]$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2} = \sqrt{46}+\sqrt{70}+\sqrt{34} \approx 20.98$$

Frobenius 范数：

$$|A|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2}$$

$$\begin{aligned} |A|_F &= \sqrt{1^2+(-3)^2+3^2+3^2+(-5)^2+3^2+6^2+(-6)^2+4^2} \\ &= \sqrt{1+9+9+9+25+9+36+36+16} = \sqrt{150} = 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

9. 核范数（nuclear norm），又称为迹范数（trace norm），是矩阵范数的一种，通常用于机器学习和优化中，尤其在低秩矩阵逼近和压缩感知领域。对于一个给定的矩阵 \(A \)，其核范数是该矩阵奇异值的和。

具体来说，如果矩阵 A 有奇异值分解（SVD），那么 A 可以表示为：

$$A = U\Sigma V^T$$

其中 U 和 V是正交矩阵，Σ 是对角矩阵，对角线上的元素是奇异值 σ_i。那么 A 的核范数 $|A|_*$ 就定义为其奇异值 σ_i 的和：

$$|A|_* = \sum_i \sigma_i$$

也可以用正交分解，求$A^TA = P\Lambda P^{-1}$，然后求$\sum_i \sqrt{\lambda_i}$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & -5 & -6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & -54 & 36 \\ -54 & 70 & -48 \\ 36 & -48 & 34 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 73 + 9\sqrt{65},\ \lambda_3 = \frac{64}{73+9\sqrt{65}}$$

$$\|A\|_* = 2 + \sqrt{73+9\sqrt{65}} + \frac{8}{\sqrt{73+9\sqrt{65}}} \approx 14.73,\ \|A\|_2 = \sqrt{73+9\sqrt{65}} \approx 12.06.$$

Problem 3: Linear Equations

Please give some proper steps to show how you get the answer.

Let $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ and

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Answer the following questions:

(1) Solve the linear equations

(2) Write it into matrix form(i.e. $Ax = b$) and we will use the same A and b in the following questions.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3rd r+2nd r}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1st r-2×2nd r}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{1st r-4×3}rd\text{ r}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3rd r + 1st r}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2nd r + 3rd r}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$$

3. 不是 singular，有唯一解，因此 rank 是 3.

4.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1-0) - 2(1+1) + 3(2-1) = -2 - 2 + 3 = -1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3rd r + 2nd r}]{\text{1st r - 2×2nd r}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{1st r - 4×3rd r}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{3rd r + 1st r}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2nd r + 3rd r}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{re\text{organize}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{-1×3rd r}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

因此，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

5. 直接用$x = A^{-1}b$求解，验证第一题答案。

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. 内积就是点乘

$$\langle x, b\rangle = [-1,0,1] \cdot [1,-1,2] = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 1$$

外积 3x1 1x3 = 3x3：

$$x \otimes b = xb^{\top} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

7.

$$|b|_1 = |1| + |-1| + |2| = 4$$
$$|b|_2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6} \approx 2.449$$
$$|b|_{\max} = \max\{1, -1, 2\} = 2$$

8. 注意，这里是矢量运算

检查一下维度：

$$y^{\top}Ay=(3\times 1)^{\top}\times(3\times 3)\times(3\times 1)=1\times 1$$

因此，得到的$y^{\top}Ay$应该是一个标量：

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2y_1+y_2-\ y_3 & 2y_1-y_2+y_3 & 3y_1+y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2y_1+y_2-\ y_3 & 2y_1-y_2+y_3 & 3y_1+y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$=(2y_1^2+y_2y_1-y_3y_1)+\left(2y_1y_2-y_2^2+y_{2y_3}\right)+(3y_1y_3+y_3^2)\parallel 1$$

$$=2y_1^2-y_2^2+y_3^2+3y_1y_2+2y_1y_3+2y_2y_3$$

注意，$(y^{\top}A)y=y^{\top}(Ay)$，这个性质可以用于验算。

对y求导时要注意，由于y是一个矢量，因此导数应该与y的维度一致：

$$\frac{d}{d\mathrm{y}_1}(y^{\top}Ay)=4y_1+3y_2+2y_3$$

$$\frac{d}{d\mathrm{y}_2}(y^{\top}Ay)=-2y_2+3y_1+2y_3$$

$$\frac{d}{dy_3}(y^{\top}Ay)=2y_3+2y_1+2y_2$$

$$\frac{d}{d\mathrm{y}}(y^{\top}Ay)=\begin{pmatrix} 4y_1+3y_2+2y_3 \\ -2y_2+3y_1+2y_3 \\ 2y_3+2y_1+2y_2 \end{pmatrix}$$

9. 放入新的线性方程：

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \text{and } b=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

10. Rank 是 3；

11. 不影响的，高斯消元法可以直接消除掉。依然 rank 等于变量的数量，还是只有唯一解。