



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: PEDRO GASPAR – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

Geometría Diferencial - MAT2860

Tarea I3 26 de junio de 2025

Problema 1

Probaremos un resultado previo sobre transporte paralelo y curvas geodésicas en la esfera.

Lema 0.1. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ una curva de la forma $\alpha(t) = u\sin(t) + v\cos(t)$ donde u, v son ortonormales, entonces $P_{\alpha, t_0, t_1}(w) = w + \langle w, \alpha'(t_0) \rangle (\alpha'(t_1) - \alpha'(t_0))$.

Demostración. Empezamos observando que α es una curva geodésica. Notemos que $\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle = 0$ para todo $t \in I$ y además $\alpha'' = -\alpha$. Sea $w \in T_p \mathbb{S}^2$ donde $p = \alpha(t_0)$ y sea $Y : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ el único campo paralelo a lo largo de α tal que $Y(t_0) = w$, como Y en particular es campo tangente se tiene que

$$Y(t) \in T_{\alpha(t)} \mathbb{S}^2 = (\alpha(t))^\perp$$

es decir, $\langle Y(t), \alpha(t) \rangle = 0$ para todo $t \in I$, lo que implica que $\langle Y, \alpha' \rangle = -\langle Y', \alpha \rangle$. Notemos que

$$0 = \nabla_{\alpha'} Y = Y' - \langle Y', \alpha \rangle \alpha$$

tomando producto interno con α' vemos que

$$\langle Y', \alpha' \rangle = \langle Y', \alpha \rangle \langle \alpha, \alpha' \rangle = 0$$

de este modo

$$\frac{d}{dt}(\langle Y, \alpha' \rangle) = \langle Y', \alpha' \rangle + \langle Y, \alpha'' \rangle = -\langle Y, \alpha \rangle = 0$$

luego la función $\langle Y, \alpha' \rangle$ es constante, evaluando en t_0 vemos que $\langle Y', \alpha \rangle = -\langle Y, \alpha' \rangle \equiv -\langle w, \alpha'(t_0) \rangle$. Tenemos que

$$Y'(t) = \langle w, \alpha'(t_0) \rangle \alpha''(t)$$

integrando a ambos lados vemos que

$$Y(t) - Y(t_0) = Y(t) - w = \langle w, \alpha'(t_0) \rangle (\alpha'(t) - \alpha'(t_0))$$

lo que concluye la demostración.

Sea $\{e_i\}_{i=1}^3$ la base canónica de \mathbb{R}^3 . Sea $w_0 \in T_p \mathbb{S}^2 = (0, 0, 1)^\perp$, digamos que $w_0 = ae_1 + be_2$.

a) Notemos que

$$\gamma_1 = \sin(s)e_1 + \cos(s)e_3 \quad \text{y} \quad \gamma_2 = \sin(s)w_1 + \cos(s)e_3$$

donde $w_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$. Claramente e_3 y w_1 son ortonormales, además

$$\gamma'_1 = (\cos(s), 0, -\sin(s)) \quad \text{y} \quad \gamma'_2 = (\cos(\theta)\cos(s), \sin(\theta)\cos(s), -\sin(s))$$

Como $P_{\gamma, t_0, t_1} : T_{\gamma(t_0)} \Sigma \rightarrow T_{\gamma(t_1)} \Sigma$ es una transformación lineal y $\{e_1, e_2\}$ es base de $T_p \mathbb{S}^2$, se sigue que

$$\begin{aligned} P_{\gamma_1, 0, \pi}(w_0) &= P_{\gamma_1, 0, \pi}(ae_1 + be_2) = aP_{\gamma_1, 0, \pi}(e_1) + bP_{\gamma_1, 0, \pi}(e_2) = aP_{\gamma_1, 0, \pi}(\gamma'_1(0)) + bP_{\gamma_1, 0, \pi}(e_2) \\ &= a\gamma'_1(\pi) + bP_{\gamma_1, 0, \pi}(e_2) = -ae_1 + bP_{\gamma_1, 0, \pi}(e_2) \end{aligned}$$

y usando el lema, notamos que

$$P_{\gamma_1,0,\pi}(e_2) = e_2 + \langle e_2, \gamma_1'(0) \rangle (\gamma_1'(\pi) - \gamma_1'(0)) = e_2 + 0(\gamma_1'(\pi) - \gamma_1'(0)) = e_2$$

entonces

$$w_1 = P_{\gamma_1,0,\pi}(w_o) = -ae_1 + be_2$$

Por otro lado, del mismo modo que antes, se tiene que

$$P_{\gamma_2,0,\pi}(w_o) = aP_{\gamma_2,0,\pi}(e_1) + bP_{\gamma_2,0,\pi}(e_2)$$

por el lema, observamos lo siguiente

$$P_{\gamma_2,0,\pi}(e_1) = e_1 + \langle e_1, \gamma_2'(0) \rangle (\gamma_2'(\pi) - \gamma_2'(0)) = \begin{pmatrix} 1 - 2\cos^2(\theta) \\ -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \cos(2\theta) \\ \sin(2\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$P_{\gamma_2,0,\pi}(e_2) = e_2 + \langle e_2, \gamma_2'(0) \rangle (\gamma_2'(\pi) - \gamma_2'(0)) = \begin{pmatrix} -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 1 - 2\sin^2(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2\theta) \\ \cos(2\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$w_2 = P_{\gamma_2,0,\pi}(w_o) = -a \begin{pmatrix} \cos(2\theta) \\ \sin(2\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\sin(2\theta) \\ \cos(2\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) & 0 \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} w_1$$

luego el ángulo entre w_1 y w_2 es de 2θ .

b) Notemos que

$$\widehat{\gamma}_2 = (\cos(\theta)\sin(\pi - s), \sin(\theta)\sin(\pi - s), \cos(\pi - s)) = (\cos(\theta)\sin(s), \sin(\theta)\sin(s), -\cos(s))$$

y entonces $\widehat{\gamma}_2' = (\cos(\theta)\cos(s), \sin(\theta)\cos(s), \sin(s))$, además $\beta' = (-\sin(s), \cos(s), 0)$.

Debemos calcular

$$v_0 = P_{\widehat{\gamma}_2, \pi/2, \pi}(P_{\beta, 0, \theta}(P_{\gamma_1, 0, \pi/2}(w_0)))$$

Por el mismo argumento que antes, notamos que

$$v_0^1 := P_{\gamma_1, 0, \pi/2}(w_0) = aP_{\gamma_1, 0, \pi/2}(e_1) + bP_{\gamma_1, 0, \pi/2}(e_2) = a\gamma_1'(\pi/2) + be_2 = -ae_3 + be_2$$

luego

$$v_0^2 := P_{\beta, 0, \theta}(v_0^1) = -aP_{\beta, 0, \theta}(e_3) + bP_{\beta, 0, \theta}(e_2)$$

usando el lema tenemos que $P_{\beta, 0, \theta}(e_3) = e_3$ y además

$$P_{\beta, 0, \theta}(e_2) = e_2 + \langle e_2, \beta'(0) \rangle (\beta'(\theta) - \beta'(0)) = e_2 + \beta'(\theta) - e_2 = \beta'(\theta)$$

entonces $v_0^2 = -ae_3 + b\beta'(\theta)$. Queda ver

$$v_0 = P_{\widehat{\gamma}_2, \pi/2, \pi}(v_0^2) = -aP_{\widehat{\gamma}_2, \pi/2, \pi}(e_3) + bP_{\widehat{\gamma}_2, \pi/2, \pi}(\beta'(\theta))$$

usando nuevamente el lema, tenemos que

$$P_{\widehat{\gamma}_2, \pi/2, \pi}(e_3) = e_3 + \langle e_3, \widehat{\gamma}_2'(\pi/2) \rangle (\widehat{\gamma}_2'(0) - \widehat{\gamma}_2'(\pi/2)) = e_3 + \widehat{\gamma}_2'(0) - e_3 = \widehat{\gamma}_2'(0)$$

y

$$P_{\widehat{\gamma}_2, \pi/2, \pi}(\beta'(\theta)) = \beta'(\theta) + \langle \beta'(\theta), \widehat{\gamma}_2'(\pi/2) \rangle (\widehat{\gamma}_2'(0) - \widehat{\gamma}_2'(\pi/2)) = \beta'(\theta)$$

de este modo

$$v_0 = -a\widehat{\gamma}_2'(0) + b\beta'(\theta) = -a \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} w_0$$

y por lo tanto el ángulo entre w_0 y v_0 es θ .

Problema 2

El toro, puede ser parametrizado por $X : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = ((R + r\cos(u))\cos(v), (R + r\cos(u))\sin(v), r\sin(u))$$

con derivadas parciales

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (-r\sin(u)\cos(v), -r\sin(u)\sin(v), r\cos(u)) \\ X_v(u, v) &= (-(R + r\cos(u))\sin(v), (R + r\cos(u))\cos(v), 0) \end{aligned}$$

entonces el campo normal definido por la parametrización es

$$(X_u \times X_v)(u, v) = (-(R + r\cos(u))r\cos(u)\cos(v), -(R + r\cos(u))r\cos(u)\sin(v), -(R + r\cos(u))r\sin(v))$$

y además $|X_u \times X_v| = r(R + r\cos(u))$. Sea $u_0 \in [0, 2\pi]$ tal que $r\sin(u_0) = c$, que existe pues $c \in [-r, r]$. Consideramos $\eta := (R + r\cos(u_0))$, definimos la curva p.p.a $\alpha : (0, 2\pi\eta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) := X\left(u_0, \frac{t}{\eta}\right) = \left(\eta\cos\left(\frac{t}{\eta}\right), \eta\sin\left(\frac{t}{\eta}\right), r\sin(u_0)\right)$$

entonces, suponiendo que la parametrización es positiva

$$(N \circ \alpha)(t) = (N^x \circ X^{-1} \circ \alpha)(t) = N^x\left(u_0, \frac{t}{\eta}\right) = \left(\cos(u_0)\cos\left(\frac{t}{\eta}\right), \cos(u_0)\sin\left(\frac{t}{\eta}\right), \sin(u_0)\right)$$

Por otro lado vemos que

$$\alpha' = \left(-\sin\left(\frac{t}{\eta}\right), \cos\left(\frac{t}{\eta}\right), 0\right) \quad \text{y entonces} \quad \alpha''(t) = -\frac{1}{\eta} \left(\cos\left(\frac{t}{\eta}\right), \sin\left(\frac{t}{\eta}\right), 0\right)$$

Nuestro objetivo ahora es determinar $\nabla_{\alpha'}\alpha'(t)$, para ello observemos que

$$\langle \alpha'', N \circ \alpha \rangle = \frac{1}{\eta} \begin{pmatrix} \cos(t/\eta) \\ \sin(t/\eta) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(u_0)\cos(t/\eta) \\ \cos(u_0)\sin(t/\eta) \\ \sin(u_0) \end{pmatrix} = \frac{\cos(u_0)}{\eta}$$

de este modo

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha'}\alpha' &= \alpha'' - \langle \alpha'', N \circ \alpha \rangle N \circ \alpha = -\frac{1}{\eta} \begin{pmatrix} \cos(t/\eta) \\ \sin(t/\eta) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\cos(u_0)}{\eta} \begin{pmatrix} \cos(u_0)\cos(t/\eta) \\ \cos(u_0)\sin(t/\eta) \\ \sin(u_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\eta} \begin{pmatrix} \cos(t/\eta)(\cos^2(u_0) - 1) \\ \sin(t/\eta)(\cos^2(u_0) - 1) \\ \cos(u_0)\sin(u_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

adicionalmente tenemos que

$$N \circ \alpha \times \alpha' = \begin{pmatrix} \cos(t/\eta)\sin(u_0) \\ \sin(t/\eta)\sin(u_0) \\ -\cos(u_0) \end{pmatrix}$$

por último, se tiene que

$$\begin{aligned} K_g &= [\nabla_{\alpha'}\alpha'] = \frac{1}{\eta} \begin{pmatrix} \cos(t/\eta)(\cos^2(u_0) - 1) \\ \sin(t/\eta)(\cos^2(u_0) - 1) \\ \cos(u_0)\sin(u_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t/\eta)\sin(u_0) \\ \sin(t/\eta)\sin(u_0) \\ -\cos(u_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\eta} ((\cos^2(u_0) - 1)\sin(u_0) - \cos^2(u_0)\sin(u_0)) = \frac{-\sin(u_0)}{R + r\cos(u_0)} \end{aligned}$$

Problema 3

Proponemos la siguiente definición para un polígono geodésico.

Definición 0.1. Decimos que $P \subseteq \Sigma$ es un n -polígono geodésico si P es homeomorfo a $D = \overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^2$ y ∂P esta parametrizada por $\gamma : I \rightarrow \Sigma$ una curva diferenciable a trozos tal que

$$\partial P = \gamma(I) = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i([a_i, b_i])$$

donde $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \Sigma$ es una curva geodésica tal que $\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$ y $\gamma'_i(b_i^-) \neq \pm \gamma'_{i+1}(a_{i+1}^+)$ para $i = 1, \dots, n$ con la convención de que $i + 1 = 1$ si $i = n$.

Sea $P \subseteq S^2(r)$ un n -polígono geodésico. Como D no es homeomorfo a la \mathbb{S}^2 , pues esta última es una variedad sin borde, se tiene que $P \neq S^2(r)$, así, existe $p \in S^2(r) \setminus P$.

Consideremos $O \in O(3)$ tal que $O(0, 0, r) = p$ y la proyección estereográfica $\bar{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2(r) \setminus \{(0, 0, r)\}$. Definimos $X := O \circ \bar{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2(r)$, notemos que X es parametrización ortogonal de $S^2(r)$, pues \bar{X} es parametrización ortogonal de $S^2(r)$ y O es una transformación lineal ortogonal, luego, por gauss bonnet, vemos que

$$2\pi = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} K_g ds + \iint_P (K_{S^2(r)} \circ X) \sqrt{EG} dudv + \sum_{i=1}^n \theta_i$$

donde $\theta_i \in [-\pi, \pi]$ es el ángulo orientado de $\gamma'_i(b_i) \in T_{\gamma_i(b_i)} S^2(r)$ a $\gamma'_{i+1}(a_{i+1}^+) \in T_{\gamma_{i+1}} S^2(r)$. Como la curvatura gaussiana es independiente de la parametrización, sabemos que $K_{S^2(r)} \circ X = 1/r^2$, además, por lo visto en clases, obtenemos que

$$2\pi = \iint_P \frac{1}{r^2} \sqrt{EG} dudv + \sum_{i=1}^n \theta_i = \frac{1}{r^2} \text{Area}(P) + \sum_{i=1}^n \pi - \alpha_i$$

donde α_i son los ángulos interiores del n -polígono geodesico, así

$$2\pi + \sum_{i=1}^n \alpha_i = \frac{1}{r^2} \text{Area}(P) + n\pi$$

Problema 4

a) Como el producto interno es lineal en la primera entrada entonces ω es una 1-forma. Notemos que

$$\begin{aligned} \omega_p(v) &= \left\langle v, \frac{Jp}{|p|^2} \right\rangle = \frac{1}{|p|^2} \left\langle v, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{|p|^2} (-v_1 y + v_2 x) \\ &= \frac{1}{|p|^2} (-dx(v)y + dy(v)x) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx(v) + \frac{x}{x^2 + y^2} dy(v) \end{aligned}$$

concluimos que

$$\omega_p = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

además, para $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ las funciones

$$\omega_1 := \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \omega_2 := \frac{x}{x^2 + y^2}$$

son diferenciables, y por lo tanto la 1-forma ω es diferenciable.

b) Veamos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} dy \right) \wedge dy = \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x} dx - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} dy \right) dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

c) Para finalizar, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt &= \int_0^1 -\frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t)} \cdot \gamma_1'(t) + \frac{\gamma_1(t)}{\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t)} \cdot \gamma_2'(t) dt = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_{\gamma} F(x, y) ds\end{aligned}$$

es decir, la integral corresponde a la integral de línea del campo vectorial $F(x, y) = (\omega_1, \omega_2)(x, y)$ sobre la curva γ .

Problema 5

a) Veamos que ω_{ij} es una 1-forma, sea $p \in W$, sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}(\omega_{ij})_p(u + \alpha v) &= \langle DE_i(p)(u + \alpha v), E_j(p) \rangle = \langle DE_i(p)u + \alpha DE_i(p)v, E_j(p) \rangle \\ &= \langle DE_i(p)u, E_j(p) \rangle + \alpha \langle DE_i(p)v, E_j(p) \rangle = (\omega_{ij})_p(u) + \alpha(\omega_{ij})_p(v)\end{aligned}$$

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned}(\omega_{ij})_p(v) &= \langle DE_i(p)v, E_j(p) \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^3 \frac{\partial E_i}{\partial x_k}(p)v_k, E_j(p) \right\rangle = \sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial x_k}, E_j(p) \right\rangle v_k \\ &= \sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial x_k}, E_j \right\rangle (p)(dx_k)_p(v)\end{aligned}$$

es decir,

$$\omega_{ij} = \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial x}, E_j \right\rangle dx + \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial y}, E_j \right\rangle dy + \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial z}, E_j \right\rangle dz$$

como las funciones E_i y el producto interno son diferenciables, concluimos que ω_{ij} es una 1-forma diferenciable. Queda chequear que $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, en efecto, sea $p \in W$ y $v \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$0 = D \langle E_i, E_j \rangle (p)v = \langle DE_i(p)v, E_j(p) \rangle + \langle E_i, DE_j(p)v \rangle = (\omega_{ij})_p(v) + (\omega_{ji})_p(v)$$

lo que prueba lo pedido.

b) Sea $\{e_j\}_{j=1}^3$ la base canónica de \mathbb{R}^3 . En primer lugar, tenemos que

$$E_i = \sum_{j=1}^3 \beta_{ij} e_j \quad \text{donde } \beta_{ij}(p) = e_j^*(E_i(p))$$

además, se tiene que $D\beta_{ij} = d\beta_{ij}$, en efecto, dado $p \in W$ y $v \in \mathbb{R}^3$

$$(d\beta_{ij})_p(v) = \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x}(p)v_1 + \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial y}(p)v_2 + \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial z}(p)v_3 = D\beta_{ij}(p)v$$

lo que implica que

$$DE_i = D \left(\sum_{j=1}^3 \beta_{ij} e_j \right) = \sum_{j=1}^3 D\beta_{ij} e_j = \sum_{j=1}^3 d\beta_{ij} e_j$$

Por otro lado, como $(E_j(p))_{j=1}^3$ es base ortonormal de \mathbb{R}^3 , dado $p \in W$ y $v \in \mathbb{R}^3$ se obtiene que

$$DE_i(p)v = \sum_{k=1}^3 \langle DE_i(p)v, E_k(p) \rangle E_k(p) = \sum_{k=1}^3 (\omega_{ik})_p(v) E_k(p) \quad \text{es decir, } DE_i = \sum_{k=1}^3 \omega_{ik} E_k$$

de este modo,

$$DE_i = \sum_{k=1}^3 \omega_{ik} E_k = \sum_{k=1}^3 \omega_{ik} \left(\sum_{j=1}^3 \beta_{kj} e_j \right) = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \omega_{ik} \beta_{kj} \right) e_j$$

comparando las dos expresiones para DE_i y usando que $\{e_j\}_{j=1}^3$ es base, concluimos que

$$d\beta_{ij} = \sum_{k=1}^3 \omega_{ik} \beta_{kj}$$

Además, por la expresión para E_i , vemos que

$$\omega_i = \sum_{j=1}^3 \beta_{ij} dx_j$$

derivando se sigue que

$$\begin{aligned} d\omega_i &= d \left(\sum_{j=1}^3 \beta_{ij} dx_j \right) = \sum_{j=1}^3 d\beta_{ij} \wedge dx_j + \beta_{ij} d(dx_j) = \sum_{j=1}^3 d\beta_{ij} \wedge dx_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \omega_{ik} \beta_{kj} \right) \wedge dx_j = \sum_{k=1}^3 \omega_{ik} \wedge \left(\sum_{j=1}^3 \beta_{kj} dx_j \right) = \sum_{k=1}^3 \omega_{ik} \wedge \omega_k = \sum_{k=1}^3 \omega_k \wedge \omega_{ki} \end{aligned}$$

c) Notemos lo siguiente

$$0 = d(d\beta_{ij}) = \sum_{k=1}^3 d(\omega_{ik} \beta_{kj}) = \sum_{k=1}^3 d\beta_{kj} \wedge \omega_{ik} + \sum_{k=1}^3 d\omega_{ik} \beta_{kj}$$

entonces

$$\sum_{k=1}^3 d\omega_{ik} \beta_{kj} = \sum_{k=1}^3 \omega_{ik} \wedge d\beta_{kj} = \sum_{k=1}^3 \omega_{ik} \wedge \sum_{s=1}^3 \omega_{ks} \beta_{sj} = \sum_{s=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \omega_{ik} \wedge \omega_{ks} \right) \beta_{sj} \quad (*)$$

Sea $p \in W$ y $v \in \mathbb{R}^3$, definimos las matrices $d\Omega := ((d\omega_{ik})_p(v))_{i,k=1}^3$ y $B := (\beta_{rj}(p))_{r,j=1}^3$, como $\{E_r\}_{r=1}^3$ forma una base ortonormal para todo $p \in W$, la matriz B es ortogonal para todo $p \in W$, en particular tenemos que es invertible. Consideremos además la matriz

$$\Omega = \left(\sum_{k=1}^3 (\omega_{ik})_p(v) \wedge (\omega_{ks})_p(v) \right)_{i,s=1}^3$$

luego el producto en $(*)$ puede ser resumido como $(d\Omega B)_{ij} = (\Omega B)_{ij}$, y por ende tenemos la igualdad de matrices $d\Omega B = \Omega B$, lo que implica que $d\Omega = \Omega$ y dado que p y v son arbitrarios concluimos que

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^3 \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$$

y se tiene lo pedido.

Colaboradores: Sergio Peña, Ricardo Larraín y Felipe Inostroza. Quería dar especiales agradecimientos a Felipe Inostroza por el Lema 0.1.