FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Pontificia Universidad Católica de Chile

Obstrucciones homotópicas a la existencia de estructuras de grupo topológico

Benjamín Mateluna

Docente Guía: Mauricio Bustamante

1 de diciembre de 2025

ÍNDICE

Resumen.
En este trabajo estudiamos la noción de grupo topológico y analizamos obstrucciones topológicas para que un espacio admita esta estructura. Empleamos herramientas de la topología algebraica, entre ellas la cohomología, los espacios cubrientes y el grupo fundamental. Entre los resultados principales está la única superficie compacta y conexa que puede ser un grupo topológico es el $2-$toro, y que ninguna esfera de dimensión par admite una estructura de grupo topológico.

1. Introducción.

El objetivo de esta tesis es estudiar los grupos topológicos y las obstrucciones que impiden que un espacio lo sea. Un *grupo topológico* es un espacio topológico X equipado con una aplicación continua

$$m : X \times X \to X$$

y un elemento $e \in X$ que actúa como identidad, de modo que (X, m, e) es un grupo. Además exigimos que el mapa de inversión

$$\varphi : X \to X, \qquad \varphi(x) = x^{-1},$$

sea continuo. A continuación presentamos algunos ejemplos para introducir esta noción y mostrar que aparece de manera natural en distintos contextos.

EJEMPLO. Los primeros espacios que surgen como grupos topológicos son $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. Con la norma usual en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, la suma y multiplicar por -1 son aplicaciones continuas; además, $(\mathbb{R}, +, 0)$ y $(\mathbb{C}, +, 0)$ son grupos.

EJEMPLO. Consideremos $GL_n(\mathbb{R})$, el grupo general lineal de orden n, es decir, el subconjunto de las matrices $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ que son invertibles. Equipado con la norma euclidiana en $\mathbb{R}^{n^2}$, la multiplicación de matrices es continua porque cada entrada es un polinomio en las entradas de las matrices; de forma similar, la aplicación $A \mapsto A^{-1}$ es continua. Análogamente, $GL_n(\mathbb{C})$ es un grupo topológico.

Como mencionamos, los ejemplos anteriores surgen de forma natural y son fundamentales. No obstante, no es obvio qué estructura de grupo asignar a un espacio topológico dado; por ejemplo, más adelante se demostrará que $\mathbb{S}^2$ no admite tal estructura. Para caracterizar los espacios que pueden ser grupos topológicos estudiaremos obstrucciones para serlo: es decir, encontraremos condiciones necesarias que debe cumplir un espacio para poder ser un grupo topológico. El siguiente teorema proporciona una primera restricción.

TEOREMA 1.1. *Sea X un grupo topológico arcoconexo. Entonces $\pi_1(X, e)$ es abeliano.*

De este resultado se desprende que $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, el producto *wedge*, no admite estructura de grupo topológico, ya que $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, 1) \cong F_2$, el grupo libre en dos generadores. Este cálculo se obtiene mediante el teorema de Seifert–van Kampen. Combinando ambos resultados descartamos que espacios como $\#^n\mathbb{T}^2$ o $\#^n\mathbb{RP}^2$, para $n > 1$, sean grupos topológicos.

Por otro lado, $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \mathbb{Z}$ y $\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0) = 0$ para $n > 1$, de modo que estos espacios cumplen la primera restricción. En el caso de $\mathbb{S}^1$ se utiliza la multiplicación en $\mathbb{C}$: la multiplicación es continua y $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$ es un subgrupo multiplicativo, por lo que $\mathbb{S}^1$ es un grupo topológico. Como corolario, $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es un grupo topológico.

Para $n = 3$ consideramos los cuaterniones $\mathbb{H}$. El conjunto de cuaterniones unitarios se identifica con $\mathbb{S}^3$ y, bajo la multiplicación, forman un grupo topológico; por tanto $\mathbb{S}^3$ es un grupo topológico. Dado que $\mathbb{RP}^3 = \mathbb{S}^3/\{\pm 1\}$ y $\{\pm 1\}$ es un subgrupo central, la multiplicación desciende al cociente, de modo que $\mathbb{RP}^3$ también es un grupo topológico (de hecho, es isomorfo a $SO(3)$).

Las esferas $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^3$ aparecen como subconjuntos de álgebras de división que son, además, espacios topológicos; esto facilita la construcción de sus estructuras de grupo topológico. En cambio, $\mathbb{S}^2$ no admite tal estructura. Nos interesa entonces determinar para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ la esfera $\mathbb{S}^n$ puede ser grupo topológico. Existen restricciones fuertes sobre n, el siguiente teorema nos brinda una respuesta

TEOREMA 1.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathbb{S}^n$ es grupo topológico entonces n es impar.*

Es más, en la literatura clásica se conoce que los casos posibles son excepcionales (los casos de Hopf: $n = 1, 3$), y la tesis entra en las condiciones que conducen a dichas restricciones. Hasta ahora sabemos que el toro es un grupo topológico, que $\mathbb{S}^2$ no lo es, y que los espacios homeomorfos a $\#^n\mathbb{T}^2$ y $\#^n\mathbb{RP}^2$ con $n > 1$ tampoco lo son. El siguiente teorema permite además descartar a $\mathbb{RP}^2$ como grupo topológico.

TEOREMA 1.3. *El cubriente universal de un grupo topológico es grupo topológico.*

Como $\mathbb{S}^2$ es el cubriente universal de $\mathbb{RP}^2$, el teorema de clasificación de superficies permite concluir lo siguiente:

TEOREMA 1.4. *La única superficie compacta y conexa que es grupo topológico es $\mathbb{T}^2$.*

Veremos más adelante que estos resultados se pueden generalizar a una clase más amplia de espacios, los llamados H-espacios. Esto ocurre porque los invariantes que utilizaremos son invariantes homotópicos. En este sentido, un H-espacio puede verse como un grupo topológico "hasta homotopía". La definición formal es la siguiente:

DEFINICIÓN 1.5. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un H-espacio si existe una aplicación continua $\mu : X \times X \to X$ y un elemento $e \in X$ (identidad) tales que los mapeos

$$\phi(x) = \mu(x, e), \qquad \psi(x) = \mu(e, x)$$

son homotópicos a la identidad, relativos a $\{e\}$.

Observemos que la definición implica $\mu(e, e) = e$. También podemos añadir más estructura a un H-espacio:

1. Si μ es tal que $\mu(x, \mu(y, z))$ y $\mu(\mu(x, y), z)$ son homotópicas relativo a $\{e, e, e\}$, decimos que X es *homotópicamente asociativo*.
2. Si existe $\varphi : X \to X$ con $\varphi(e) = e$ tal que los mapas

$$x \longmapsto \mu(x, \varphi(x)) \qquad \text{y} \qquad x \longmapsto \mu(\varphi(x), x)$$

son homotópicos a la función constante e, relativos a $\{e\}$, entonces decimos que X tiene *inversa homotópica*.

Un H-grupo es un H-espacio que es homotópicamente asociativo y posee inversa homotópica. En particular, todo grupo topológico es un H-grupo.

Estas consideraciones motivan el presente trabajo. El objetivo es analizar, mediante herramientas de topología algebraica, las obstrucciones que impiden a un espacio admitir una estructura de grupo topológico. Para ello introduciremos los fundamentos algebraicos necesarios, en particular nociones básicas de álgebra homológica; a continuación estudiaremos con detalle los ejemplos mencionados, revisaremos el papel del grupo fundamental y construiremos los grupos de cohomología singulares. De manera central examinaremos el anillo de cohomología, que será la herramienta principal para descartar a las n-esferas como posibles grupos topológicos.

En esta tesis se asumen definiciones y resultados básicos de topología (entre ellos la construcción del grupo fundamental). También se emplearán nociones de álgebra conmutativa y teoría de grupos: grupos libres, presentaciones, productos libres y amalgamados, tensores y sumas directas. Algunos resultados se enunciarán sin demostración; en esos casos se remite al lector a la bibliografía indicada.

2. Preliminares: Álgebra Homológica.

Para dar comienzo a la búsqueda de nuestro objetivo necesitamos herramientas algebraicas para trabajar con las cuales tendremos una noción formal de las siguientes secciones. Comenzaremos con la homología y cohomología, para luego revisar resultados que serán importantes más adelante.

DEFINICIÓN 2.1. Un complejo de cadenas es una sucesión de grupos abelianos y homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

tal que $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ para todo i. Se denota por $(C_\bullet, \partial_\bullet)$.

OBSERVACIÓN. Notemos que $im\ \partial_{i+1} \subseteq ker\ \partial_i \subseteq C_i$. Dado que los grupos son abelianos, esta observación permite definir los siguientes grupos.

DEFINICIÓN 2.2. El $i-$ésimo grupo de homología de $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ se define por

$$H_i(C_\bullet) := \frac{ker\ \partial_i}{im\ \partial_{i+1}}$$

EJEMPLO. Veamos que

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es un complejo de cadenas, donde los grupos de homología asociados son $H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z}$, $H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_2$ y $H_k(C_\bullet) = 0$ para $k \neq 0, 1$.

Por otro lado, para la cohomología damos la siguiente definición

DEFINICIÓN 2.3. Un complejo de cocadenas es una secuencia de grupos de abelianos y homomorfismos

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\partial^0} C^1 \xrightarrow{\partial^1} C^2 \xrightarrow{\partial^2} C^3 \xrightarrow{\partial^3} \cdots$$

tales que $\partial^{i+1} \circ \partial^i = 0$. Se denota por $(C^\bullet, \partial^\bullet)$.

DEFINICIÓN 2.4. El $i-$ésimo grupo de cohomología de $(C^\bullet, \partial^\bullet)$ se define por

$$H^i(C^\bullet) := \frac{ker\ \partial^i}{im\ \partial^{i-1}}$$

Un elemento en $H^i(C^\bullet)$ se conoce como clase de cohomología.

EJEMPLO. Vimos el complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Donde $H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z}$, $H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_2$ y $H_k(C_\bullet) = 0$. Definimos $C^i := Hom(C_i, \mathbb{Z})$ y los diferenciales $\partial^i(\varphi) := \varphi \circ \partial_{i+1}$, notemos que $\partial^{i+1} \circ \partial^i(\varphi) = \varphi \circ \partial_{i+1} \circ \partial_{i+2} = 0$. Así, tenemos el complejo de cocadenas

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\cdot 0} C^1 \xrightarrow{\cdot 2} C^2 \xrightarrow{\cdot 0} 0 \longrightarrow \cdots$$

Como $C^i \cong \mathbb{Z}$ para $i = 0, 1, 2$, entonces $H^0(C^\bullet) = \mathbb{Z}$, $H^1(C^\bullet) = 0$ y $H^2(C^\bullet) = \mathbb{Z}_2$.

Los elementos en $ker\ \partial_i$ e $im\ \partial_i$ se llaman ciclos (resp. cociclos) y fronteras (resp. cofronteras) respectivamente. Un elemento en $H_i(C_\bullet)$ se dice clase de homología (resp. clase de cohomología). Los elementos en los grupos abelianos C_i se conocen como cadenas (resp. cocadenas) y los morfismos ∂_i como diferenciales.

Nos gustaría estudiar como interactúan estos objetos enter sí, buscamos una noción de morfismo de cadenas (resp. cocadenas) que además induzca uno entre los grupos de homología (resp. cohomología), esto motiva la siguiente definición

DEFINICIÓN 2.5. Sean $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ y $(D_\bullet, \partial_\bullet)$ dos complejos de cadenas. Un mapeo de cadenas es una colección de homomorfismos $f_n : C_n \to D_n$ tal que $\partial_n f_n = f_{n-1}\partial_n$ para todo n, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ D_n \arrow[r, "\partial_n"] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

y se denota por $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$.

PROPOSICIÓN 2.6. *Si $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ es un mapeo de cadenas, entonces la asignación $f_* : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$ dada por*

$$f_*([x]) = [f_n(x)]$$

esta bien definida y es un homomorfismo de grupos.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in ker\partial_n$ entonces $\partial_n f_n(x) = f_{n-1}\partial_n(x) = f_{n-1}(0) = 0$. Así, $f_n(x) \in ker\ \partial_n$ y por lo tanto la expresión tiene sentido.

Si $[x] = [y]$ entonces $x - y = \partial_{n+1}(z)$ para $z \in C_{n+1}$, se sigue que $f_n(x) - f_n(y) = f_n\partial_{n+1}(z) = \partial_{n+1}f_{n+1}(z)$. Concluimos que $[f_n(x)] = [f_n(y)]$. Que sea homomorfismo es directo de la definición. $\square$

EJEMPLO. Consideremos la siguiente situación

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "3"] \arrow[d, "id"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 & C_\bullet \arrow[d, "f_\bullet"] \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "3"] & \mathbb{Z}_3 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 & D_\bullet \end{tikzcd}$$

Con $f_\bullet$ un mapeo de cadenas. Entonces $f_* : H_2(C_\bullet) \to H_2(D_\bullet)$ es el morfismo trivial, ya que $H_2(C_\bullet) = 0$. Mientras que $\pi_* : H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_3 \to H_1(D_\bullet) = \mathbb{Z}_3$ es la identidad.

OBSERVACIÓN. Notemos que si $g_\bullet : D_\bullet \to G_\bullet$ es un mapeo de cadenas, entonces la colección de morfimos $(g \circ f)_\bullet : C_\bullet \to G_\bullet$ es un mapeo de cadenas y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} H_n(C_\bullet) \arrow[rr, "(g\circ f)_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & & H_n(G_\bullet) \\ & H_n(D_\bullet) \arrow[ur, "g_*"'] & \end{tikzcd}$$

En efecto, $\partial_n g_n f_n = g_{n-1}\partial_n f_n = g_{n-1}f_{n-1}\partial_n$. Por otro lado, tenemos que $(g \circ f)_*([x]) = [(g \circ f)(x)] = g_*([f(x)]) = (g_* \circ f_*)([x])$, lo que prueba la afirmación.

La definición de mapeo de cocadena para cohomología es análoga, es decir, se debe cumplir que $f^{n+1}\partial^n = \partial^n f^n$ y los resultados son similares.

Los resultados vistos en esta parte serán vitales para más adelante. A partir de este momento los índices para indicar los morfismos ∂_i entre complejos de cadenas no se escribirán, esto para mayor comodidad.

DEFINICIÓN 2.7. Sean $f_\bullet, g_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ mapeos de cadenas. Una homotopía de cadenas es una colección de morfismos

$$h_n : C_n \to C_{n+1} \quad \text{tales que}$$
$$f_n - g_n = \partial h_n + h_{n-1}\partial$$

Lo denotamos como $f_\bullet \sim g_\bullet$.

PROPOSICIÓN 2.8. *Sea $f_\bullet \sim g_\bullet$ entonces $f_* = g_*$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $[x] \in H_n(C_\bullet)$, por definición, sabemos que $\partial x = 0$, luego

$$(f_* - g_*)([x]) = [(f-g)(x)] = [(\partial h + h\partial)(x)] = [\partial h x] = 0$$

lo que prueba la afirmación. □

Para cohomología, una homotopía de cocadena se define como la colección de morfismos $h^n : C^n \to C^{n-1}$ tales que $f^n - g^n = \partial h^n + h^{n+1}\partial$, los resultados de homología se extienden a cohomología.

DEFINICIÓN 2.9. Sean $i_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ y $j_\bullet : B_\bullet \to C_\bullet$ dos mapeos de cadenas. Decimos que forman una secuencia exacta corta si la secuencia

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{i_n} B_n \xrightarrow{j_n} C_n \longrightarrow 0$$

es una secuencia exacta y corta de grupos abelianos libres para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo denotamos como $0 \to A_\bullet \xrightarrow{i_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{j_\bullet} C_\bullet \to 0$.

TEOREMA 2.10 (Lema de la serpiente). *Sea $0 \to A_\bullet \xrightarrow{i_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{j_\bullet} C_\bullet \to 0$ una secuencia exacta corta de complejos de cadenas, entonces existen morfismos*

$$\delta_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$$

tales que la siguiente secuencia es exacta

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(A_\bullet) \arrow[r, "i_*"] & H_n(B_\bullet) \arrow[r, "j_*"] & H_n(C_\bullet) \arrow[dll, rounded corners, "\delta_n"'] & \\
& H_{n-1}(A_\bullet) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-1}(B_\bullet) \arrow[r, "j_*"] & H_{n-1}(C_\bullet) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(B_\bullet) \longrightarrow H_0(C_\bullet) \longrightarrow 0$$

La demostración de este resultado se encuentra en [1] (*Hatcher, Teorema 2.16*) y la construcción del morfismo δ, el morfismo conector, se encuentra un poco antes. Se puede aplicar también para cocadenas.

3. Grupos topológicos y superficies.

3.1. Ejemplos.

Queremos familiarizarnos con la noción de grupo topológico, por lo que trabajaremos con algunos de los ejemplos mencionados durante la introducción. Comenzamos con el mas sencillo,

EJEMPLO. El espacio $\mathbb{S}^1$ es grupo topológico, pensamos el espacio en $\mathbb{C}$, luego la operación de grupo viene dada por la multiplicación en $\mathbb{C}$, recordemos que

$$|z \cdot \omega| = |z| \cdot |\omega| \quad \text{para todo } \ z, \omega \in \mathbb{C}$$

lo que implica que $z \cdot \omega \in \mathbb{S}^1$. Por otro lado, como $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la función que mapea z en $\frac{1}{z}$ es continua. Concluimos que $\mathbb{S}^1$ es grupo topológico.

A partir de este ejemplo daremos estructura de grupo topológico a $\mathbb{T}^2$, aprovechando el hecho de que $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

EJEMPLO. Definimos la operación de grupo en $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ como

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$$

que esta bien definida por el ejemplo anterior, tiene neutro (e, e), es asociativa y multiplicar es continuo por la topología producto. Además, el inverso, esta dado por

$$(z, \omega)^{-1} := \left(\frac{1}{z}, \frac{1}{\omega} \right)$$

nuevamente, el mapa es continuo por la topología producto. Por lo tanto, $\mathbb{T}^2$ es un grupo topológico.

Pasando a ejemplos mas sofisticados, en primer lugar, debemos definir los cuaterniones, un cuaternión es un elemento de la forma

$$q = a + bi + cj + dk \quad \text{con } \ a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

y i, j, k son unidades imaginarias tales que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, son una $\mathbb{R}-$álgebra de división no conmutativa, es decir, cada elemento tiene un inverso, la multiplicación es asociativa, pero no es conmutativa. El conjunto de los cuaterniones se denota como $\mathbb{H}$ y esta dotado de la norma

$$|q| = \sqrt{q \cdot \overline{q}} \quad \text{donde} \quad \overline{q} := a - bi - cj - dk$$

es un cálculo directo que $q \cdot \overline{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, que corresponde a la norma en $\mathbb{R}^4$, por lo que la identificación

$$(a, b, c, d) \mapsto q = a + bi + cj + dk$$

en realidad es una isometría.

EJEMPLO. Pensamos $\mathbb{S}^3$ en $\mathbb{H}$, se verifica facilmente que $\overline{q \cdot h} = \overline{q} \cdot \overline{h}$, lo que implica que

$$|q \cdot h| = |q| \cdot |h|$$

es decir, $q \cdot h \in \mathbb{S}^3$ para todo $q, h \in \mathbb{S}^3$, por lo que la operación de grupo esta bien definida, por otro lado, si multiplicamos dos cuaterniones, nos damos cuenta de que es polinomial en cada entrada, por ende, es continua. El inverso viene dado por

$$q^{-1} = 1 - bi - cj - dk$$

que nuevamente es continuo y esta bien definido. Concluimos que $\mathbb{S}^3$ es grupo topológico.

EJEMPLO. Por último, veamos que $\mathbb{RP}^3$ tambíen es grupo topológico, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \arrow[d, "\pi\times\pi"'] \arrow[dr, "\pi\circ m"] & \\ \mathbb{RP}^3 \times \mathbb{RP}^3 \arrow[r, dashed] & \mathbb{RP}^3 \end{tikzcd}$$

Donde $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{RP}^3$ es la proyección y m la multiplicación en $\mathbb{S}^3$. En primer lugar, notamos que $\pi \times \pi$ es cociente, luego, para definir un producto basta probar que $\pi \circ m$ es constante en las fibras de $\pi \times \pi$. En efecto,

$$[(\lambda q)(\mu h)] = [(\lambda\mu)(qh)] = [qh]$$

la multiplicación hereda las propiedades de la multiplicación en $\mathbb{S}^3$ y con lo anterior, es continua. De manera análoga, la función

$$[q] \mapsto [q]^{-1} := [q^{-1}]$$

esta bien definida y es continua.

OBSERVACIÓN. Los dos ejemplos en realidad se deben a que $\mathbb{H}$ es un álgebra de división y la multiplicación es continua bajo la norma euclideana, al igual que el mapa que manda un elemento a su inverso multiplicativo y que $\{\pm 1\}$ esta en el centro de $\mathbb{H}$.

3.2. Superficies.

Hablaremos un poco sobre superficies y las consecuencias a las que llegaremos durante el desarrollo de la tesis.

DEFINICIÓN 3.1. Sea X un espacio, decimos que es una superficie si es una $2-$variedad, es decir, un espacio Hausdorff, segundo contable y localmente euclideano de dimensión 2.

Hasta ahora, conocemos tres espacios que cumplen esta definición, que son $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{T}^2$ y $\mathbb{RP}^2$, todas compactas y conexas. Lo sorpresivo, es que estas superficies junto con las sumas conexas (que pronto definiremos) son las únicas superficies, salvo homeomorfismo.

TEOREMA 3.2 (Teorema de clasificación de superficies). *Toda superficie, no vacía, compacta y conexa es homeomorfa a una de las siguientes*

1. *La $2-$esfera, es decir,* $\mathbb{S}^2$
2. *La suma conexa de n copias de* $\mathbb{T}^2$.
3. *La suma conexa de n copias de* $\mathbb{RP}^2$.

La demostración se puede encontrar en [3] (*Lee, Teorema 6.15*). Como consecuencia inmediata del teorema, resulta que $\mathbb{T}^2$ es la única superficie, compacta y conexa que es $H-$espacio, porque como veremos más adelante, ninguna de las otras superficies cumplen lo necesario.

TEOREMA 3.3. *La única superficie compacta y conexa que es $H-$espacio es* $\mathbb{T}^2$.

La demostración se irá desmenuzando durante la tesis, pero en resumen, la $2-$esfera presenta una obstrucción en el anillo de cohomología, el plano proyectivo en el hecho de que su cubriente universal es $\mathbb{S}^2$ y por lo tanto no puede ser $H-$espacio y los espacios $\#^n\mathbb{T}^2$ (suma conexa de toros) y $\#^n\mathbb{RP}^2$ (suma conexa de planos proyectivos) tienen grupo fundamental no abeliano para $n > 1$.

La manera usual de definir la suma conexa de superficies es eliminando un abierto homeomorfo a una bola abierta de $\mathbb{R}^2$ a ambos espacios y "pegandolos" en la frontera que produce esta eliminación, sin embargo, daremos una definición equivalente que resultará más útil para calcular el grupo fundamental de estas superficies.

DEFINICIÓN 3.4. Sea $n > 1$. Consideremos el espacio obtenido de un $4n-$polígono regular con la siguiente identificación en sus aristas

$$(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})(a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}) \cdots (a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1})$$

Este espacio se conoce como la suma conexa de $n-$copias del toro y se denota por $\#^n \mathbb{T}^2$.

EJEMPLO. Para $n = 2$, se representa en la figura 1. Si trazamos el segmento indicado, que divide al polígono a la mitad, cada parte representa un espacio homeomorfo a un toro, si las "pegamos" a lo largo del segmento se obtiene la suma conexa usual de dos toros.

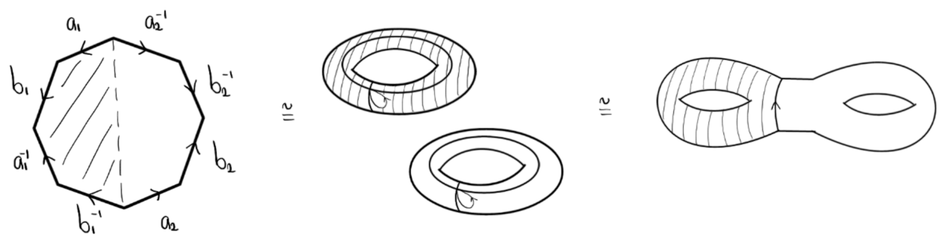

Figura 1. Suma conexa de dos toros.

La identificación siempre empieza desde el polo norte y la dirección positiva es en sentido antihorario y la dirección negativa en sentido horario. Siempre consideramos el interior del polígono.

DEFINICIÓN 3.5. Sea $n > 1$. Consideremos el espacio obtenido de un $2n-$polígono regular con la siguiente identificación en sus aristas

$$(a_1 a_1)(a_2 a_2) \cdots (a_n a_n)$$

Se conoce como la suma conexa de $n-$copias del plano proyectivo y se denota por $\#^n \mathbb{RP}^2$.

EJEMPLO. La suma conexa de dos planos proyectivos se representa en la figura 2, el argumento para visualizarlo es similar al toro y vemos que la definición coincide con la construcción mencionada al inicio, es decir, quitar un abierto y pegar los espacios en la frontera.

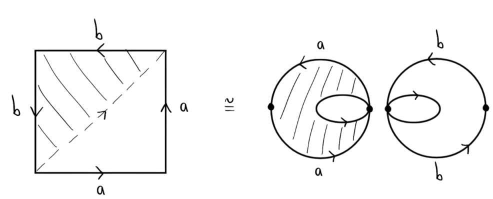

Figura 2. Suma conexa de dos planos proyectivos.

Los ejemplos, definiciones y argumentos para la suma conexa de toros y planos proyectivos fueron extraidos de [4] (*Munkres, sección 74*).

4. Grupo fundamental.

Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$, recordemos que el grupo fundamental, $\pi_1(X, x_0)$, consiste en las clases de equivalencias de lazos basados en x_0, donde la relación esta dada por los lazos que son homotópicos relativo a $\{0, 1\}$. La operación de grupo es la concatenación de caminos y el neutro, que consiste en el camino constante x_0, se denotan por $*$ y ct_{x_0}, respectivamente. Esta construcción resulta ser un invariante homotópico.

Comenzaremos con el resultado más accesible.

TEOREMA 4.1. *Sea X un $H-$espacio arcoconexo, entonces $\pi_1(X, e)$ es abeliano.*

DEMOSTRACIÓN. Sean α, β lazos basados en e, definimos el lazo

$$\alpha\beta(t) := \mu(\alpha(t), \beta(t))$$

que es un lazo basado en e, como los mapas $x \mapsto \mu(x, e), \mu(e, x)$, son homotópicos a la identidad relativo a e resulta que $[\alpha] = [ct_e\alpha] = [\alpha ct_e]$.

Además, si $\alpha \sim \hat{\alpha}$ y $\beta \sim \hat{\beta}$ entonces $\alpha\beta \sim \hat{\alpha}\hat{\beta}$. En efecto, sean H_α y H_β las homotopías respectivas, definimos la función continua

$$\begin{tikzcd} {[0,1] \times [0,1]} \arrow[r, "{(H_\alpha, H_\beta)}"] \arrow[rr, bend right, "H"'] & X \times X \arrow[r, "\mu"] & X \end{tikzcd}$$

que corresponde a una homotopía entre los caminos $\alpha\beta$ y $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ relativa a $\{0, 1\}$. Afirmamos que $(\alpha * \beta)(\gamma * \delta) = \alpha\gamma * \beta\delta$. Sea $t \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces

$$\begin{aligned} (\alpha * \beta)(\gamma * \delta)(t) &= \mu((\alpha * \beta)(t), (\gamma * \delta)(t)) \\ &= \mu(\alpha(2t), \gamma(2t)) = \alpha\gamma(2t) \end{aligned}$$

similarmente se tiene para $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Notemos lo siguiente

$$[\alpha] * [\beta] = [ct_e\alpha] * [\beta ct_e] = [ct_e\alpha * \beta ct_e] = [(ct_e * \beta)(\alpha * ct_e)] = [\beta\alpha]$$

y en el otro lado vemos que

$$[\beta] * [\alpha] = [\beta ct_e] * [ct_e\alpha] = [(\beta * ct_e)(ct_e * \alpha)] = [\beta\alpha]$$

lo que concluye la demostración. $\square$

Encontramos la primera obstrucción para ser $H-$espacio, para la siguiente necesitamos desarrollar la teoría de cubrientes y un resultado útil es el siguiente lema

LEMA 4.2. *Sean X e Y espacios, entonces $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\pi_X : X \times Y \to X$ y $\pi_Y : X \times Y \to Y$ las proyecciones, dado γ un lazo en $X \times Y$ denotamos por $\gamma_1 := \pi_X \circ \gamma$ y $\gamma_2 := \pi_Y \circ \gamma$, notar que $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$. Definimos el mapa

$$\phi([\gamma]) := ([\gamma_1], [\gamma_2])$$

que es morfismo y esta bien definido porque π_{X*} y π_{Y*} son morfismos y están bien definidos. Tiene inversa dada por $\psi([\alpha], [\beta]) := [(\alpha, \beta)]$.

El argumento para ver que la inversa esta bien definida es idéntico al usado en el teorema anterior cuando probamos que $\alpha\beta \sim \hat{\alpha}\hat{\beta}$. $\square$

COROLARIO 4.3. *El producto de espacios simplemente conexos es simplemente conexo.*

No hay nada que probar, es consecuencia inmediata del lema.

4.1. Espacios cubrientes.

El espacio cubriente, al igual que el teorema de Seifert-van Kampen, permite calcular el grupo fundamental de un espacio, sin embargo, esta no es la razón por la cual queremos estudiar espacios cubrientes, nuestro interés radica en un resultado en particular de la teoría que nos permitirá obtener más obstrucciones para ser $H-$espacio.

DEFINICIÓN 4.4. El par $(\hat{X}, p)$ es un espacio cubriente si $p: \hat{X} \to X$ es continua tal que para todo $x \in X$, existe una vecindad $U \subseteq X$ de x tal que

- $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\lambda \in A} V_\lambda$ con V_λ abiertos disjuntos.
- $p\big|_{V_\lambda} : V_\lambda \to U$ es homeomorfismo.

Dos consecuencias importantes de la teoría de espacios cubrientes, que también lo son para nuestro propósito, son el lema del levantamiento de homotopía y el teorema del levantamiento y los enunciamos a continuación

LEMA 4.5 (Levantamiento de Homotopía). *Sean W un espacio y $p: \hat{X} \to X$ un espacio cubriente. Sea $H: W \times [0,1] \to X$ una homotopía y $h: W \times \{0\} \to \hat{X}$ tal que $ph = H|_{W \times \{0\}}$. Entonces, existe una única homotopía $\hat{H}: W \times [0,1] \to \hat{X}$ de modo que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} W \times \{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & \hat{X} \arrow[d, "p"] \\ W \times [0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\hat{H}"] & X \end{tikzcd}$$

Más aún, si H es una homotopía relativa, también lo es $\hat{H}$.

TEOREMA 4.6 (Teorema del Levantamiento). *Supongamos que $p: \hat{X} \to X$ es un espacio cubriente con $p(\hat{x}_0) = x_0$. Dado W un espacio arcoconexo y localmente arcoconexo con una función $f: W \to X$ tal que $f(w_0) = x_0$. Entonces existe una única*

$$g: W \to \hat{X} \quad \text{continua de modo que} \quad g(w_0) = \hat{x}_0 \quad y \quad p \circ g = f$$

si y solo si $f_*(\pi_1(W, w_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0))$.

En otras palabras, la función $g: W \to \hat{X}$ es la única función que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} w_0 \arrow[r, "x_0"] \arrow[d, hook] & \hat{X} \arrow[d, "p"] \\ W \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "g"] & X \end{tikzcd}$$

Notar que si $W = \hat{X}$, $f = p$ y $w_0 = x_0$, entonces $id_{\hat{X}}$ hace que el diagrama conmute y por teorema del levantamiento es la única que lo hace. La demostración de ambos resultados se encuentra en [2] (*Bredon, Teorema 3.4*) y (*Bredon, Teorema 4.1*), respectivamente.

DEFINICIÓN 4.7. Sea $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ un espacio cubriente arcoconexo, localmente arcoconexo y simplemente conexo, decimos que $\tilde{X}$ es el cubriente universal de X.

El siguiente corolario nos asegura que el cubriente universal de un espacio está bien definido.

COROLARIO 4.8. *El cubriente universal de un espacio es único, salvo homeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean (Y,p) y (W,q) espacios cubrientes de X arcoconexos, localmente arcoconexos y simplemente conexos, por el teorema de levantamiento, existen $\hat{p}$ y $\hat{q}$ tales que los diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} y_0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & W \arrow[d, "q"] \\ Y \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, dashed, "\hat{p}"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} w_0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, "p"] \\ W \arrow[r, "q"'] \arrow[ur, dashed, "\hat{q}"'] & X \end{tikzcd}$$

Veamos que $\hat{p}\circ\hat{q} = id_W$. En efecto, notemos que $\hat{p}\circ\hat{q}(w_0) = w_0$ y que $q\circ\hat{p}\circ\hat{q} = p\circ\hat{q} = q$ y por unicidad del levantamiento se tiene la igualdad, la otra es análoga. $\square$

OBSERVACIÓN. Como ambos espacios son simplemente conexos, por definición se tiene que $\pi_1(Y,y_0) = 0$ y $\pi_1(W,w_0) = 0$, lo que permite utilizar el teorema del levantamiento. Por otro lado, el cubrimiento universal no siempre existe, pero en caso de hacerlo, es único.

TEOREMA 4.9. *El cubriente universal de un $H-$espacio es $H-$espacio.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un $H-$espacio y $(\hat{X},p)$ su cubrimiento universal. En primer lugar, notemos que el espacio $\hat{X}\times\hat{X}$ es simplemente conexo, por que el producto de espacios simplemente conexos es simplemente conexo y por la misma razón, también es arcoconexo y localmente arcoconexo.

Por teorema del levantamiento, existe una única función $\hat{\mu} : \hat{X}\times\hat{X} \to \hat{X}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} (\hat{e},\hat{e}) \arrow[r, "\hat{e}"] \arrow[d, hook] & \hat{X} \arrow[d, "p"] \\ \hat{X}\times\hat{X} \arrow[r, "\mu'"] \arrow[ur, dashed, "\hat{\mu}"] & X \end{tikzcd}$$

donde $p(\hat{e}) = e$ y $\mu' = \mu\circ p\times p$. Veamos que $\hat{\mu}$ y $\hat{e}$ le dan estructura de $H-$espacio a $\hat{X}$, para ello, debemos probar que los mapas $\hat{\mu}(\hat{x},\hat{e})$ y $\hat{\mu}(\hat{e},\hat{x})$ son homotópicos a la identidad relativo a $\hat{e}$. Demostraremos la homotopía para $\hat{\mu}(\hat{x},\hat{e})$ y la otra homotopía es análoga.

Sea H la homotopía relativa a e entre el mapa $\mu(x,e)$ y la identidad, definimos

$$H'(\hat{x},t) := H(p(\hat{x}),t) \quad \text{para todo } \hat{x}\in\hat{X}$$

que es una homotopía relativa a $\hat{e}$ entre $\mu'(\hat{x},\hat{e})$ y p. Como $p\hat{\mu} = \mu'$, por el lema del levantamiento de homotopía, existe $\hat{H} : \hat{X}\times[0,1] \to \hat{X}$ una homotopía relativa a $\hat{e}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \hat{X}\times\{0\} \arrow[r, "\hat{\mu}"] \arrow[d, hook] & \hat{X} \arrow[d, "p"] \\ \hat{X}\times[0,1] \arrow[r, "H'"] \arrow[ur, dashed, "\hat{H}"] & X \end{tikzcd}$$

Veamos que es la homotopía buscada, en efecto, por conmutatividad del diagrama se tiene que $\hat{H}(\hat{x},0) = \hat{\mu}(\hat{x},\hat{e})$ y por otro lado, la función $\hat{H}(\hat{x},1)$ cumple que $p\hat{H}(\hat{x},1) = p(\hat{x})$ y $\hat{H}(\hat{e},1) = \hat{\mu}(\hat{e},\hat{e}) = \hat{e}$, es decir, es un levantamiento de p y por ende es la identidad en $\hat{X}$. $\square$

LEMA 4.10. *El cubriente universal de $\mathbb{RP}^2$ es $\mathbb{S}^2$. Luego, $\mathbb{RP}^2$ no es $H-$espacio.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $\mathbb{S}^2$ es arcoconexo, localmente arcoconexo y simplemente conexo, afirmamos que $(\mathbb{S}^2,\pi)$ cubre a $\mathbb{RP}^2$, donde $\pi:\mathbb{S}^2\to\mathbb{RP}^2$ es la proyección. En $\mathbb{S}^2$ consideramos los abiertos

$$V_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{S}^3 : z>0\} \quad \text{y} \quad V_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{S}^3 : z<0\}$$

Además, el abierto $V_1\sqcup V_2$ es saturado, lo que implica que $U=\pi(V_1\sqcup V_2)$ es abierto en $\mathbb{RP}^2$ y además $\pi^{-1}(U)=\pi^{-1}(\pi(V_1\sqcup V_2))=V_1\sqcup V_2$.
Debemos probar que $\pi|_{V_i}:V_i\to U$ es homeomorfismo, en efecto, sea $O\subseteq V_i$ un abierto, consideramos el abierto $-O=\{-x : x\in O\}$, luego, el abierto $O\cup -O$ es saturado y por lo tanto $\pi(O\cup -O)=\pi(O)\cup\pi(-O)=\pi(O)$ es abierto, además se tiene que $\pi(x)=[x]$ tiene inversa $i([x])=x\in V_i$, es decir, $\pi|_{V_i}$ es homeomorfismo. Repitiendo el mismo argumento en las otras coordenadas se tiene el resultado. $\square$

4.2. Teorema de Seifert-van Kampen.

Un teorema importante de esta sección es el teorema de Seifert-van Kampen, con él, podemos calcular el grupo fundamental de un espacio topológico mediante presentaciones de grupos. Probaremos que el producto wedge y más espacios topológicos no admiten estructura de $H-$espacio usando este teorema para calcular su grupo fundamental y viendo que no es abeliano, lo que entra en contradicción con el teorema inicial de esta sección.

TEOREMA 4.11 (Teorema de Seifert-van Kampen). *Sea $X=A\cup B$ con A y B conjuntos abiertos tales que $A\cap B$ es arcoconexo. Sea $x_0\in A\cap B$ un punto base, se tienen las inclusiones*

$$\begin{tikzcd} A\cap B \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "i_B"] & A \arrow[d, "j_A"] \\ B \arrow[r, "j_B"] & X \end{tikzcd}$$

y el diagrama conmuta. Entonces estos mapas inducen un isomorfismo

$$\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(A,x_0)*_{\pi_1(A\cap B,x_0)}\pi_1(B,x_0)=\frac{\pi_1(A,x_0)*\pi_1(B,x_0)}{N}$$

donde $N=\langle\langle j_{A*}i_{A*}(\gamma)j_{B*}i_{B*}(\gamma^{-1}) : \gamma\in\pi_1(A\cap B,x_0)\rangle\rangle$.

La demostración se encuentra en [2] (*Bredon, Teorema 9.4*). La idea es probar que el morfismo inducido por el diagrama conmutativo y la propiedad universal del producto amalgamado es isomorfismo. Veamos los ejemplos.

EJEMPLO. El espacio $\mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1$, cumple lo siguiente

$$\pi_1(\mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1,1)=F_2=\langle a,b\mid\rangle$$

inductivamente se tiene que

$$\pi_1(\vee_{i=1}^n\mathbb{S}^1,1)=F_n=\langle a_1,\cdots,a_n\mid\rangle$$

Veamos que los grupos fundamentales no son abelianos, en efecto, los elementos a_1 y a_2 no conmutan, luego, el espacio $\vee_{i=1}^n\mathbb{S}^1$ no es $H-$espacio para todo $n>1$ por [4.1]. Haremos el calculo para $X=\mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1$, el paso inductivo es análogo. En $\mathbb{S}^1\sqcup\mathbb{S}^1$ consideramos los abiertos

$$A'=\mathbb{S}^1\sqcup\mathbb{S}^1\setminus\{-1\} \qquad y \qquad B'=\mathbb{S}^1\setminus\{-1\}\sqcup\mathbb{S}^1$$

que son abiertos saturados y por lo tanto $A=\pi(A')$, $B=\pi(B')$ son abiertos en X, por otro lado, notar que $A'\cap B'$ también es abierto saturado y por ende es abierto en X y en este caso se tiene que $\pi(A'\cap B')=\pi(A')\cap\pi(B')$, no es díficil ver que

$$A\simeq\mathbb{S}^1, \qquad B\simeq\mathbb{S}^1 \qquad y \qquad A\cap B\simeq\{*\}$$

donde $\{*\}$ es el espacio que consiste en un punto. Notemos que $A\cap B$ es arcoconexo, así, por Seifert-van Kampen

$$\pi_1(X,1)\cong\pi_1(A,1)*_{\pi_1(A\cap B,1)}\pi_1(B,1)$$

pero $\pi_1(A\cap B,1)=0$, por lo que $\pi_1(X,1)\cong\pi_1(A,1)*\pi_1(B,1)\cong F_1*F_1=F_2$, el grupo libre en dos elementos. Para $n>2$, tomamos los abiertos

$$A'=\bigsqcup_{i=1}^{n-1}\mathbb{S}^1\sqcup\mathbb{S}^1\setminus\{-1\} \qquad y \qquad B'=\bigsqcup_{i=1}^{n-1}(\mathbb{S}^1\setminus\{-1\})\sqcup\mathbb{S}^1$$

y usando inducción el argumento es el mismo.

EJEMPLO. Diremos que $X=\#^n\mathbb{T}^2$ y sea $x_0\in X$. Afirmamos que

$$\pi_1(X,x_0)=\langle a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n\mid[a_1,b_1]\cdots[a_n,b_n]=1\rangle$$

donde $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$ y se le dice el conmutador entre a y b. Nuevamente, al igual que en el ejemplo anterior, el grupo fundamental no es abeliano para $n>1$, pero esto no es obvio, definimos el morfismo $\phi:F_{2n}\to F_2$ por

$$\phi(a_1)=a \qquad \phi(b_1)=a^{-1} \qquad \phi(a_2)=b \qquad \phi(b_2)=b^{-1}$$

y $\phi(a_i)=\phi(b_i)=e$ para $i>2$. Este morfismo, por la propiedad fundamental de presentaciones, desciende a un morfismo $\phi:\pi_1(X,x_0)\to F_2$ que claramente es sobreyectivo, se sigue que $\pi_1(X,x_0)$ es no abeliano, en caso contrario, como el morfismo ϕ es sobreyectivo, se tendría que F_2 es abeliano. Por lo tanto $\#^n\mathbb{T}^2$ no puede ser $H-$espacio [4.1].

Sea $n>1$, recordemos la definición de suma conexa de toros 1, podemos pensar el polígono en $\mathbb{R}^2$ y cada vértice corresponde a una raíz $4n$-ésima de la unidad.

Sea P el polígono en $\mathbb{R}^2$. Consideremos los abiertos $A=B_{2\varepsilon}(0)$ y $B=P\setminus B_\varepsilon(0)$ con $\varepsilon>0$ tal que $B_{2\varepsilon}(0)\subseteq P$. Notemos que $A\cap B$ es arcoconexo. Además, se verifica que

$$A\simeq\{*\}, \qquad B\simeq\partial P/\sim\ \cong\ \vee_{i=1}^n\mathbb{S}^1 \qquad y \qquad A\cap B\simeq\mathbb{S}^1$$

donde $\sim$ es la realción establecida por las identificaciones. Sean $x_0\in A\cap B$ y c el lazo generador en $\pi_1(A\cap B,x_0)$, este lazo es homotópico a ∂P en B, que en $\pi_1(B,x_0)=F_n$ corresponde al elemento

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$$

ver 1. Luego, por Seifert-van Kampen, tenemos que

$$\begin{aligned}\pi_1(X,x_0)&\cong\pi_1(A,x_0)*_{\pi_1(A\cap B,x_0)}\pi_1(B,x_0)=0*_{F_1}F_n\\&=\langle a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n\mid[a_1,b_1]\cdots[a_n,b_n]=1\rangle\end{aligned}$$

Haciendo un proceso análogo, podemos ver que

$$\pi_1(\#^n\mathbb{RP}^2,x_0)=\left\langle a_1,\cdots,a_n\mid a_1^2\cdots a_n^2=1\right\rangle$$

lo que implica que $\#^n\mathbb{RP}^2$ no es $H-$espacio para ningún $n>1$ [4.1], el argumento para ver que el grupo fundamental no es abeliano es similar al ejemplo anterior. Cuando $n=1$ sabemos que $\mathbb{S}^2$ es el cubrimiento universal de $\mathbb{RP}^2$, y por ende, si este último es $H-$espacio, se tendría que $\mathbb{S}^2$ es $H-$espacio, veremos que esto no es así.

5. Cohomología singular.

Antes de cohomología viene homología y una de las principales razones para estudiar homología, es que de cierto modo podemos medir o contar los "agujeros" $n-$dimensionales de un espacio topológico, dicho de manera informal, ya que después de todo ¿Qué es un agujero $n-$dimensional? Por ejemplo, un loop no será homotópico a un punto en $\mathbb{S}^1$.

Sin embargo, para esta tesis, no nos interesan los grupos de homología, más bien son relevantes los grupos de cohomología, que se pueden pensar en cierta medida como el dual de los grupos de homología, con ellos podemos construir el anillo de cohomología que planteará otra restricción para ser $H-$espacio.

5.1. Grupos de cohomología.

DEFINICIÓN 5.1. Un $n-$simplice estándar es

$$\Delta^n = \left\{(t_0, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0,\ \sum t_i = 1\right\}$$

OBSERVACIÓN. La $i-$ésima cara de Δ^n es $\Delta_i^n = \{(t_0, \cdots, t_n) \in \Delta^n : t_i = 0\}$. Notamos que un $n-$simplice estándar tiene $n+1$ caras, donde cada una se parece a un $(n-1)-$simplice estándar. De hecho, mediante el mapeo

$$\delta_i : \Delta^{n-1} \to \Delta_i^n$$
$$(t_0, \cdots, t_{n-1}) \to (t_0, \cdots, t_{i-1}, 0, t_i, \cdots, t_{n-1})$$

resulta ser homeomorfa a Δ^{n-1}.

DEFINICIÓN 5.2. Sea X un espacio topológico. Un $n-$simplice singular en X es una función continua $\sigma : \Delta^n \to X$.

La aplicación $\sigma \circ \delta_i$ usualmente la denotamos como

$$\sigma \circ \delta_i =: \sigma\Big|_{[v_0, \cdots, \hat{v_i}, \cdots, v_n]}$$

Podemos restringirnos a más puntos, esto correspondería a la composición de múltiples mapas δ_i y en este caso se omiten las entradas correspondientes, por ejemplo,

$$\sigma\Big|_{[\hat{v_0}, \cdots, \hat{v_{k-1}}, v_k, \cdots, v_n]} = \sigma \circ \delta_0^{k-1} =: \sigma\Big|_{[v_k, \cdots, v_n]} \quad \text{con } k \leq n$$

que corresponde a una función continua entre Δ^{n-k} hacia X, es decir, un $(n-k)-$ simplice singular.

Dado un espacio X, tenemos una colección de $n-$simplices singulares, vamos a considerar el grupo abeliano libre generado por este conjunto para construir un complejo de cadenas y así los grupos de homología.

DEFINICIÓN 5.3. Definimos los grupos

$$C_n(X) := \left\{\sum n_\sigma \sigma \mid \sigma : \Delta^n \to X \text{ simplice singular y } n_\sigma \in \mathbb{Z} \text{ nulo salvo finitos casos}\right\}$$

junto con los diferenciales $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ dados por

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \delta_i$$

que se extiende linealmente.

Al complejo $(C_{\bullet}(X), \partial_{\bullet})$ lo llamamos complejo de cadenas singular. Para ver que el complejo esta bien definido debemos verificar que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, lo que se muestra en el siguiente lema.

LEMA 5.4. *El morfismo $\partial_{n-1} \circ \partial_n : C_n(X) \to C_{n-2}(X)$ es trivial.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar para cada elemento en la base, es decir, para $\sigma : \Delta^n \to X$. Tenemos lo siguiente

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i$$

Usando que $\delta_j \circ \delta_i = \delta_i \circ \delta_{j-1}$ si $i < j$, vemos que

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i \\ &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_i \circ \delta_{j-1} + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i \end{aligned}$$

haciendo un cambio de índice en la primera expresión, resulta que

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j+1} \sigma \circ \delta_i \circ \delta_j + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i = 0$$

La última igualdad se debe a que los términos se cancelan de a pares, puesto que cada término en la expresión de la izquierda corresponde a uno de la expresión de la derecha, pero con el signo opuesto. □

El grupo de cohomología singular, se obtiene a partir de dualizar el complejo de cadenas $(C_{\bullet}(X), \partial_{\bullet})$, como se vio en el ejemplo de preliminares, esto induce un complejo de cocadenas con sus respectivos grupos de cohomología.

DEFINICIÓN 5.5. Sea G un grupo abeliano y X un espacio topológico, definimos los grupos

$$C^i(X; G) = Hom(C_i(X); G)$$

con el diferencial $\partial : C^i(X; G) \to C^{i+1}(X; G)$ dado por $\partial^i(\varphi) = \varphi \circ \partial_{i+1}$. Esto define un complejo de cocadenas con cohomología asociada

$$H^i(X; G) := H^i(C^{\bullet}(X; G)) = \frac{ker\ \partial^i}{im\ \partial^{i-1}}$$

y se dice cohomología de X con coeficientes en G.

Hemos cumplido con una parte del objetivo inicial de esta sección, ahora nos gustaría obtener un morfismo entre los grupos de cohomología de espacios dada una función continua entre ellos. Para tal fin tenemos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 5.6. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos, entonces las funciones*

$$f_n : C_n(X) \to C_n(Y) \quad \textit{dadas en la base por} \quad f_n(\sigma) = f \circ \sigma$$

forman un mapeo de cadenas $f_{\bullet} : C_{\bullet}(X) \to C_{\bullet}(Y)$.

DEMOSTRACIÓN. Es directo de la definición que para todo $n \in \mathbb{N}$ la función f_n es morfismo de grupos abelianos, por otro lado

$$\partial_n f_n(\sigma) = \partial_n(f \circ \sigma) = \sum_i (-1)^i f \circ \sigma \circ \delta_i = \sum_i (-1)^i f_{n-1}(\sigma \circ \delta_i) = f_{n-1}\partial_n(\sigma)$$

□

Esto define morfismos de cadenas, para cocadenas, definimos lo siguiente

$$f^n(\varphi) = \varphi \circ f_n \quad \text{donde } \varphi \in C^n(Y;G)$$

notemos que en este caso $f^\bullet : C^n(Y;G) \to C^n(X;G)$, que resulta ser un mapa de cocadenas, puesto que $f_\bullet$ es un mapeo de cadenas. Juntando resultados previos se tiene el morfismo

$$f^* : H^n(Y;G) \to H^n(X;G)$$

Es directo de la definición verficar que

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

Además, si $f : X \to Y$ es homeomorfismo, entonces el mapa f^* es isomorfismo, es decir, tenemos que $H^*(X;G)$ es invariante topológico.

Lo bueno de esta construcción, a diferencia de otras, es que las definiciones dependen únicamente de la topología del espacio, es decir, de los abiertos. Pero esto viene con un costo asociado, es prácticamente imposible calcular los grupos de cohomología usando solo la definición, a pesar de ello, se puede trabajar con ejemplos particulares que serán vitales para más adelante.

EJEMPLO. Sea $X = pt = \{*\}$, el espacio que consiste de un punto. Entonces, existe un único $n-$simplice singular, digamos, $\sigma_n : \Delta^n \to pt$, lo que implica que $\sigma_n \circ \delta_i = \sigma_{n-1}$, luego

$$\partial_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_n \circ \delta_i = \begin{cases} \sigma_{n-1} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

dualizando, vemos que

$$\partial^n(\varphi)(\sigma_{n+1}) = \varphi(\partial_{n+1}(\sigma_{n+1})) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \varphi(\sigma_n) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

para $i > 1$ tenemos que

$$\cdots \xleftarrow{\partial^{i+1}} C^{i+1}(pt;G) \xleftarrow{\partial^i} C^i(pt;G) \xleftarrow{\partial^{i-1}} C^{i-1}(pt;G) \longleftarrow \cdots$$

entonces si i es impar $H^i(pt;G) = 0$ por que ∂^i es inyectivo. Por otro lado, si n es par, vemos que

$$H^i(pt;G) = \frac{ker\ \partial^i}{im\ \partial^{i-1}} \cong \frac{G}{G} = 0$$

esto por que $C^i(pt;G) \cong Hom(\mathbb{Z}, G) \cong G$ y el morfismo ∂^{i-1} es isomorfismo. Para $i = 0$, vemos que $H^0(pt;G) = ker\ \partial^0 = C^0(pt;G) \cong G$. Así,

$$H^n(pt;G) = \begin{cases} G & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

con G un grupo abeliano cualquiera.

LEMA 5.7. *Sea X un espacio arcoconexo no vacío, entonces $H^0(X;G) = G$.*

DEMOSTRACIÓN. Nuevamente, por definición, tenemos que $H^0(X;G) = ker\ \partial^0$, sea $\varphi \in ker\ \partial^0$, entonces para todo $\tau \in C_1(X)$ vemos que

$$0 = \partial^0(\varphi)(\tau) = \varphi(\partial_1(\tau)) = \varphi(\tau \circ \delta_0) - \varphi(\tau \circ \delta_1)$$

Sea $x_0 \in X$, lo vemos como un $0-$simplice singular, dado $\sigma : \Delta^0 \to X$, como el espacio es arcoconexo, existe $\tau_\sigma : \Delta^1 \to X$ tal que $\tau_\sigma \circ \delta_0 = \sigma$ y $\tau_\sigma \circ \delta_1 = x_0$, así usando la observación inicial, notamos que

$$\varphi(\sigma) = \varphi(x_0) \quad \text{para todo } \sigma \in C_0(pt)$$

entonces el morfismo φ queda únicamente determinado por la imagen de x_0 y por lo tanto $H^0(X;G) = ker\ \partial^0 \cong G$. □

Lo anterior da pie a la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 5.8. *Sea $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ la unión disjunta de componentes arcoconexas, entonces si A es finito se tiene el isomorfismo*

$$H^n(X;G) \cong \bigoplus_{\alpha \in A} H^n(X_\alpha;G)$$

DEMOSTRACIÓN. La inclusión $i_\alpha : X_\alpha \to X$ es continua para todo $\alpha \in A$, denotamos por $i_{\alpha,n}$ el mapa inducido a nivel de cadenas. Como Δ^n es arcoconexo, la imagen de σ esta en X_α para algún $\alpha \in A$, lo que prueba que el mapa

$$i_n : \bigoplus_{\alpha \in A} C_n(X_\alpha) \to C_n(X)$$

es isomorfismo, con $i_n = \bigoplus_{\alpha \in A} i_{\alpha,n}$, la colección de morfismos $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es mapeo de cadenas, ya que para todo $\alpha \in A$ la colección $(i_{\alpha,n})_{n \in \mathbb{N}}$ es mapeo de cadena, dualizando y usando que $i_\alpha^\bullet$ es mapeo de cocadena se obtiene el resultado buscado. □

5.2. Herramientas y aplicaciones.

Veremos dos resultados importantes sobre grupos de cohomología singular de un espacio, ellos son invarianza homotópica y la secuencia de Mayer-Vietoris, para luego aplicar estas herramientas a ejemplos.

TEOREMA 5.9 (Invarianza homotópica). *Sean $f, g : X \to Y$ funciones homotópicas. Entonces, inducen el mismo morfismo en cohomología, es decir,*

$$f^* = g^* : H^*(Y;G) \to H^*(X;G)$$

La demostración de este resultado para homología se encuentra en [1] (*Hatcher, Teorema 2.10*). La idea es construir una homotopía de cadena entre los mapas de cadena inducidos por f y g a partir de la homotopía entre ambas. Para cohomología basta dualizar la homotopía de cadenas y así obtener una homotopía de cocadena, lo que concluye el resultado.

COROLARIO 5.10. *Sea $f : X \to Y$ una equivalencia homotópica, entonces*

$$f^* : H^*(Y;G) \to H^*(X;G)$$

es isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $g : Y \to X$ una inversa homotópica, entonces

$$g^* \circ f^* = (f \circ g)_* = (id_Y)^* = id_{H^*(Y)}$$

Igualmente, tenemos que $f^* \circ g^* = id_{H^*(X;G)}$. Entonces f^* es isomorfismo con inversa g^*. $\square$

EJEMPLO. Como $\mathbb{R}^n$ es convexo, entonces es homotópico a un punto, se sigue de un ejemplo anterior que

$$H^n(\mathbb{R}^n; G) = \begin{cases} G & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

TEOREMA 5.11 (Mayer-Vietoris). *Sea $X = A \cup B$ con A y B conjuntos abiertos. Se tienen las inclusiones*

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "i_B"] & A \arrow[d, "j_A"] \\ B \arrow[r, "j_B"] & X \end{tikzcd}$$

Entonces, existen homomorfismos $\delta : H^n(A \cap B; G) \to H^{n+1}(X; G)$ tales que la siguiente secuencia es exacta

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^n(X;G) \arrow[r, "j_A^* \oplus j_B^*"] & H^n(A;G) \oplus H^n(B;G) \arrow[r, "i_A^* - i_B^*"] & H^n(A \cap B;G) \arrow[dlll, "\delta"] \\ & H^{n+1}(X;G) \arrow[r, "j_A^* \oplus j_B^*"] & H^{n+1}(A;G) \oplus H^{n+1}(B;G) \arrow[r, "i_A^* - i_B^*"] & H^{n+1}(A \cap B;G) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

La demostración de este teorema se encuentra en [1] (*Hatcher, sección 3.1*) y requiere de un resultado previo, el teorema de los simplices pequeños, que se encuentra en [1] (*Hatcher, Proposición 2.21*).

Nuestra intención ahora es utilizar las herramientas vistas para calcular los grupos de cohomología singular con coeficientes en $\mathbb{Z}$ de las $n-$esferas.

Denotaremos por $H^i(X)$ al grupo de cohomología singular de X con coeficientes en $\mathbb{Z}$.

EJEMPLO. En $\mathbb{S}^1$, consideremos los abiertos $A = \mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ y $B = \mathbb{S}^1 \setminus \{S\}$, donde N y S son el polo norte y sur respectivamente. Notemos que $A \cong \mathbb{R} \simeq pt$ y del mismo modo $B \simeq pt$, por otro lado, $A \cap B \cong \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \simeq pt \sqcup pt$. Por la secuencia de Mayer-Vietoris, para $i > 1$, tenemos la secuencia exacta

$$H^{i-1}(A \cap B) \longrightarrow H^i(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^i(A) \oplus H^i(B) \longrightarrow H^i(A \cap B)$$

por lo mencionado anteriormente, vemos que $H^{i-1}(A \cap B) = 0$, $H^i(A) \oplus H^i(B) = 0$ y $H^i(A \cap B) = 0$ cuando $i > 1$, lo que implica que $H^i(\mathbb{S}^1) = 0$ con $i > 1$.

Sabemos que $\mathbb{S}^1$ es arcoconexo, entonces $H^0(\mathbb{S}^1) = G$. Queda el caso cuando $i = 1$, tenemos la secuencia exacta

$$H^0(A) \oplus H^0(B) \xrightarrow{i_A^* - i_B^*} H^0(A \cap B) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0$$

Por primer teorema de isomorfismo basta encontrar $ker\ \delta = im\ i_A^* - i_B^*$. Sea $\varphi \in H^0(A)$, como A es arcoconexo, sabemos que φ queda únicamente determinado por la imagen de un único $0-$simplice, como $G = \mathbb{Z}$, el morfismo $\varphi(\sigma) = 1$ genera a $H^0(A)$, así

$$i_A^*(\varphi)(\sigma) = \varphi(i_A \circ \sigma) = 1 \quad \text{para todo } \ \sigma \in C_0(A \cap B)$$

Similarmente $i_B^*(\psi)(\sigma) = 1$ con ψ el generador de $H^0(B)$. Como $A \cap B$ tiene dos componentes arcoconexas, el grupo $H^0(A \cap B)$ está generado por dos elementos, uno de ellos mapea todos los puntos de una componente a 1 y mapea a 0 los puntos de la otra componente, mientras que el otro generador hace lo contrario. Así, el morfismo $im\ i_A^* - i_B^*$ esta representado por

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

lo que implica que $H^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$. En resumen, tenemos lo siguiente

$$H^i(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, 1 \\ 0 & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

EJEMPLO. Afirmamos que

$$H^i(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, n \\ 0 & \text{si } i \neq 0, n \end{cases}$$

Procederemos por inducción, el caso base fue el ejemplo anterior, supongamos que se cumple para $n-1$. Consideramos los mismos abiertos que antes y se tiene que $A \cong \mathbb{R}^n \simeq pt$ y $B \simeq pt$, sin embargo, para la intersección observamos que $A \cap B \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$. Así, para $i > 1$, tenemos la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow H^{i-1}(A \cap B) \longrightarrow H^i(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0$$

Si $i \neq n$, entonces $H^i(\mathbb{S}^n) = 0$, de lo contrario, $H^n(\mathbb{S}^n) \cong H^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{S}^n$ es arcoconexo resulta que $H^0(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, queda el caso cuando $i = 1$, tenemos la secuencia exacta

$$H^0(A) \oplus H^0(B) \xrightarrow{i_A^* - i_B^*} H^0(A \cap B) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0$$

nuevamente, por primer teorema de isomorfismo, basta estudiar $ker\ \delta$, para ello, vemos la imagen del morfismo $i_A^* - i_B^*$ que, por el mismo argumento que antes, esta representado por

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pero esta vez hay un generador en $H^0(A \cap B)$, pues es arcoconexo. Por lo tanto $H^1(\mathbb{S}^n) = 0$, lo que concluye la afirmación.

5.3. Anillo de cohomología.

Introduciremos el anillo de cohomología, que nos permitirá rescatar mayor información sobre un espacio topológico. La idea es asignarle un anillo a un espacio, en realidad una $R-$álgebra graduada cuando R es un anillo conmutativo, de modo que una función continua induzca un morfismo de algebras graduadas. De ahora en adelante supondremos que R es un anillo conmutativo.

DEFINICIÓN 5.12. Sea X un espacio topológico. Sean $\phi \in C^k(X; R)$ y $\psi \in C^l(X; R)$. Definimos el producto cup $\phi \smile \psi \in C^{k+l}(X; R)$, por

$$(\phi \smile \psi)(\sigma) = \phi(\sigma|_{[v_0, \cdots, v_k]})\psi(\sigma|_{[v_k, \cdots, v_{k+l}]})$$

donde $\sigma \in C_{k+l}(X)$ un simplice singular. Este morfismo se extiende linealmente.

Es directo de la definición, que el producto cup es bilineal y asociativo, pues la multiplicación en R lo es. Además, cumple la siguiente relación con el diferencial.

LEMA 5.13. *Sean $\phi \in C^k(X;R)$ y $\psi \in C^l(X;R)$, entonces*

$$d(\phi \smile \psi) = d\phi \smile \psi + (-1)^k \phi \smile d\psi$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sigma : \Delta^{k+l+1} \to X$ un simplice singular. Entonces

$$\begin{aligned}
(d\phi \smile \psi)(\sigma) &= (d\phi)(\sigma\big|_{[v_0,\cdots,v_{k+1}]}) \cdot \psi(\sigma\big|_{[v_{k+1},\cdots,v_{k+l+1}]}) \\
&= \phi\left(\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i \sigma\big|_{[v_0,\cdots,\hat{v_i},\cdots,v_{k+1}]}\right) \cdot \psi(\sigma\big|_{[v_{k+1},\cdots,v_{k+l+1}]})
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
(\phi \smile d\psi)(\sigma) &= \phi(\sigma\big|_{[v_0,\cdots,v_k]}) \cdot (d\psi)(\sigma\big|_{[v_k,\cdots,v_{k+l+1}]}) \\
&= \phi(\sigma\big|_{[v_0,\cdots,v_k]}) \cdot \psi\left(\sum_{i=k}^{k+l+1}(-1)^{i-k}\sigma\big|_{[v_k,\cdots,\hat{v_i},\cdots,v_{k+l+1}]}\right) \\
&= (-1)^k \phi(\sigma\big|_{[v_0,\cdots,v_k]}) \cdot \psi\left(\sum_{i=k}^{k+l+1}(-1)^{i}\sigma\big|_{[v_k,\cdots,\hat{v_i},\cdots,v_{k+l+1}]}\right)
\end{aligned}$$

notamos que el último término de la primera expresión se cancela con el primer término de la segunda expresión. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
d(\phi \smile \psi)(\sigma) &= (\phi \smile \psi)\left(\sum_{i=0}^{k+l+1}(-1)^i \sigma\big|_{[v_0,\cdots,\hat{v_i},\cdots,v_{k+l+1}]}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k+l+1}(-1)^i(\phi \smile \psi)(\sigma\big|_{[v_0,\cdots,\hat{v_i},\cdots,v_{k+l+1}]})
\end{aligned}$$

vemos que esta última expresión es igual a la primera más la segunda por $(-1)^k$, lo que prueba la afirmación. □

COROLARIO 5.14. *El producto cup induce un morfismo*

$$\smile : H^k(X;R) \times H^l(X;R) \to H^{k+l}(X;R)$$

dado por $[\phi] \smile [\psi] = [\phi \smile \psi]$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\phi \in C^k(X;R)$ y $\psi \in C^l(X;R)$ cociclos y dado $\phi' \in C^k(X;R)$ un cociclo tal que $[\phi] = [\phi']$, entonces $\phi' = \phi + d\phi''$. Luego,

$$\begin{aligned}
\phi' \smile \psi = (\phi + d\phi'') \smile \psi &= \phi \smile \psi + d\phi'' \smile \psi \\
&= \phi \smile \psi + d(\phi'' \smile \psi) - (-1)^{k+1}\phi'' \smile d\psi \\
&= \phi \smile \psi + d(\phi'' \smile \psi)
\end{aligned}$$

el otro caso es análogo. □

Definimos el mapa $1 : C_0(X) \to R$ tal que $1(\sigma) = 1$ para toda $0-$cadena, entonces

$$[1] \smile [\phi] = [\phi]$$

De este modo, definimos $H^*(X;R) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^n(X;R)$ que junto con el producto cup y el elemento $[1]$ forman un anillo con unidad. Aquí el producto cup se extiende linealmente. Este anillo se conoce como el anillo de cohomología de X con coeficientes en R.

El producto cup es natural, lo que se expresa en la proposición que sigue.

LEMA 5.15. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre espacios y $\alpha, \beta \in H^*(Y;R)$ entonces $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\phi \in C^k(Y;R)$, $\psi \in C^l(Y;R)$ y $\sigma \in C_{k+l}(Y)$, entonces

$$\begin{aligned}(f^*(\phi) \smile f^*(\psi))(\sigma) &= f^*(\phi)(\sigma\big|_{[v_0,\cdots,v_k]})f^*(\psi)(\sigma\big|_{[v_k,\cdots,v_{k+l}]}) \\ &= \phi(f\circ\sigma\big|_{[v_0,\cdots,v_k]})\psi(f\circ\sigma\big|_{[v_k,\cdots,v_{k+l}]}) \\ &= (\phi \smile \psi)(f\circ\sigma) = f^*(\phi\smile\psi)(\sigma)\end{aligned}$$

bajando al cociente y por linealidad, concluimos. □

El anillo de cohomología no es necesariamente conmutativo, pero el siguiente lema nos entrega una expresión para intercambiar los términos.

LEMA 5.16. *Sean $\alpha \in H^k(X;R)$ y $\beta \in H^l(X;R)$ entonces*

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{kl}\beta \smile \alpha$$

La demostración de este lema se encuentra en [1] (*Hatcher, Teorema 3.11*). La discusión anterior le da estructura de anillo graduado a $H^*(X;R)$, más aún, el anillo de cohomología es un $R-$módulo graduado donde la multiplicación es bilineal, en resumen, diremos que es un álgebra graduada. Definimos formalmente estos conceptos a continuación.

DEFINICIÓN 5.17. Sea A un anillo, decimos que es un anillo graduado si $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ con A_n subgrupos aditivos tales que

$$A_nA_m \subseteq A_{n+m} \quad \text{para todo } \ n,m \in \mathbb{N}$$

DEFINICIÓN 5.18. Sea A un $R-$módulo, decimos que es un $R-$módulo graduado si $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ con A_n submódulos para todo $n \in \mathbb{N}$.

OBSERVACIÓN. Es directo de la definición que $R \cdot A_n \subseteq A_n$.

Un morfismo de anillos graduados (resp. $R-$módulos graduados) $f : A \to B$ es un morfismo de anillos ($R-$módulos) tal que $f(A_n) \subseteq B_n$. Un morfismo de álgebras graduadas es un morfismo de anillos y $R-$módulos graduados. En ambos casos, dado $\alpha \in A_n$, decimos que su grado es $|\alpha| = n$.

Es directo de las definiciones y resultados que un mapa continuo induce un morfismo de algebras graduadas en el anillo de cohomología. En conclusión, el anillo de cohomología es un funtor contravariante en la categoría de algebras graduadas.

EJEMPLO. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$H^*(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/(x^2) \quad \text{con } |x| = n$$

En efecto, como $\mathbb{S}^n$ es arcoconexo, tenemos que $H^0(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, es decir, $[1]$ es generador. Por otro lado, sea $x \in H^n(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z})$ un generador del subgrupo, que es el único subgrupo de dimensión positiva no trivial. Entonces

$$x \smile x \in H^{2n}(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}) = 0$$

lo que prueba la afirmación.

Ahora, dados dos espacios X e Y, nos gustaría calcular el anillo de cohomología de $X \times Y$ wn función de los anillos de cohomología de X e Y, para esto vamos a definir un morfismo desde el producto tensorial de los anillos de cohomología de X e Y hacia el anillo de cohomología buscado, que será un isomorfismo bajo ciertas condiciones. Primero, debemos dotar de estructura de anillo graduado al $R-$módulo $A \otimes B$, donde A, B son algebras graduadas.

DEFINICIÓN 5.19. Sean $\pi_X : X \times Y \to X$ y $\pi_Y : X \times Y \to Y$ los mapas de proyección. Se define el producto cruz como

$$\begin{aligned} \times : H^k(X;R) \times H^l(Y;R) &\to H^{k+l}(X \times Y;R) \\ a \times b := \times(a,b) &\to \pi_X^*(a) \smile \pi_Y^*(b) \end{aligned}$$

Notemos que el producto cruz es bilineal, por que el producto cup es bilineal y los mapas π_X^* y π_Y^* son morfismos de algebras. Luego, por la propiedad fundamental del producto tensorial, induce un morfismo

$$\begin{aligned} \times : H^k(X;R) \otimes_R H^l(Y;R) &\to H^{k+l}(X \times Y;R) \\ a \otimes_R b &\mapsto \pi_X^*(a) \smile \pi_Y^*(b) \end{aligned}$$

Nos gustaría que $\times$ fuese un morfismo de álgebras graduadas, para ello en primer lugar debemos definir un produco en $A \otimes B$ con A, B álgebras graduadas. Notemos que

$$\begin{aligned} \times(a \otimes b) \cdot \times(c \otimes d) &= \pi_X^*(a)\pi_Y^*(b)\pi_X^*(c)\pi_Y^*(d) \\ &= (-1)^{|b||c|}\pi_X^*(a)\pi_X^*(c)\pi_Y^*(b)\pi_Y^*(d) \\ &= (-1)^{|b||c|}\pi_X^*(ac)\pi_Y^*(bd) = (-1)^{|b||c|} \times (ac \otimes bd) \end{aligned}$$

Así, el producto en $A \otimes B$ se define por $(a \otimes b)(c \otimes d) = (-1)^{|b||c|} ac \otimes bd$ y se extiende linealmente. Con esta multiplicación, el producto cruz es morfismo de algebras graduadas, es más, el siguiente teorema nos dice bajo que hipotesis es isomorfismo.

TEOREMA 5.20 (Fórmula de Künneth). *Sean X e Y espacios topológicos. Sea R un dominio de ideales principales y $H^n(Y;R)$ un $R-$módulo libre finitamente generado para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\times : \bigoplus_{i=0}^{n} H^i(X;R) \otimes_R H^{n-i}(Y;R) \to H^n(X \times Y;R)$$

es isomorfismo.

La demostración de este resultado se encuentra en [1] (*Hatcher, Teorema 3.15*).

5.4. Algebras de Hopf.

En esta parte vamos a probar el resultado que permite concluir el teorema principal de la tesis. Para ello, buscamos una estructura algebraica que restrinja la posibilidad de ser $H-$espacio, necesitaremos una definición previa. Sea R un anillo conmutativo.

DEFINICIÓN 5.21. Sea A un álgebra graduada, se dice álgebra de Hopf si cumple,

1. Existe una identidad $1 \in A_0$ tal que el morfismo $R \to A_0$ dado por $r \to r \cdot 1$ es isomorfismo.
2. Existe un morfismo de álgebras graduadas $\triangle : A \to A \otimes_R A$ llamado coproducto que satisface
$$\triangle(\alpha) = \alpha \otimes_R 1 + 1 \otimes_R \alpha + \sum_i \alpha'_i \otimes_R \alpha''_{n-i}$$
donde $|\alpha'_i|, \left|\alpha''_{n-i}\right| > 0$ para todo $\alpha \in A_n$ con $n > 0$.

Veremos ejemplos de álgebras de Hopf y luego pasaremos al resultado principal. Sea A un álgebra graduada y $\alpha \in A$.

EJEMPLO. Consideramos $R[\alpha]$, la primera condición para ser álgebra de Hopf se cumple trivialmente. Supongamos que también se cumple la segunda, es decir, existe un coproducto, luego
$$\triangle(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha + \sum_i \alpha'_i \otimes \alpha''_{n-i}$$
notemos que $|\alpha'_i|, \left|\alpha''_{n-i}\right| < |\alpha|$. Como en $R[\alpha]$ los únicos elementos de menor grado que $|\alpha|$ son los elementos en R de grado cero, se sigue que $\triangle(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$.

Nos gustaría determinar $\triangle$ explícitamente, tenemos dos casos:

1. El grado de α es par, entonces
$$\begin{aligned}\triangle(\alpha^2) &= (\triangle(\alpha))^2 = (\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha)^2 \\ &= (\alpha \otimes 1)^2 + (\alpha \otimes 1)(1 \otimes \alpha) + (1 \otimes \alpha)(\alpha \otimes 1) + (1 \otimes \alpha)^2 \\ &= \alpha^2 \otimes 1 + 2\alpha \otimes \alpha + 1 \otimes \alpha^2\end{aligned}$$
inductivamente obtenemos que $\triangle(\alpha^n) = \sum_i \binom{n}{i} \alpha^i \otimes \alpha^{n-i}$.
2. Si $|\alpha|$ es impar, del caso anterior tenemos que
$$\triangle(\alpha^2) = \alpha^2 \otimes 1 + 1 \otimes \alpha^2$$
Buscamos reducir este caso al anterior, digamos que $\beta = \alpha^2$, entonces
$$\triangle(\alpha^{2n}) = \triangle(\beta^n) = \sum_i \binom{n}{i} \beta^i \otimes \beta^{n-i} = \sum_i \binom{n}{i} \alpha^{2i} \otimes \alpha^{2(n-i)}$$
y por otro lado,
$$\triangle(\alpha^{2n+1}) = \triangle(\beta^n)\triangle(\alpha) = \sum_i \binom{n}{i} \alpha\beta^i \otimes \beta^{n-i} + \sum_i \binom{n}{i} \beta^i \otimes \alpha\beta^{n-1}$$

EJEMPLO. Tomamos el álgebra exterior $\Lambda_R[\alpha] = R[\alpha]/(\alpha^2)$, al igual que antes la primera condición para ser álgebra de Hopf se cumple facilmente. Si $\Lambda_R[\alpha]$ tiene un coproducto, entonces por la misma razón que antes

$$\triangle(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$$

sin embargo, hay algo adicional que chequear, esto es $0 = \triangle(\alpha^2) = (\triangle(\alpha))^2$. Si $|\alpha|$ es impar entonces se verifica, en cambio, si es par vemos que

$$\triangle(\alpha^2) = \alpha^2 \otimes 1 + 2\alpha \otimes \alpha + 1 \otimes \alpha^2 = 2\alpha \otimes \alpha$$

lo que implica que $2 = 0$ en R.

Dado X un espacio topológico, el anillo $H^*(X;R)$ tiene estructura de álgebra graduada sobre R. Todo lo anterior da pie al siguiente teorema.

TEOREMA 5.22. *Sea X un $H-$espacio arcoconexo tal que $H^n(X;R)$ es un $R-$módulo libre finitamente generado para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $H^*(X;R)$ es un álgebra de Hopf.*

DEMOSTRACIÓN. Como X es arcoconexo, se sigue que $H^0(X;R) \cong R$, además, se verifican las condiciones de Künneth lo que implica que

$$H^*(X;R) \otimes H^*(X;R) \xrightarrow{\times} H^*(X \times X;R)$$

es isomorfismo. La multiplicación μ induce un morfismo $\mu^* : H^*(X;R) \to H^*(X \times X;R)$ y junto con el producto cruz, definimos el coproducto

$$\begin{tikzcd} H^*(X;R) \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[rr, bend right, "\triangle"'] & H^*(X \times X;R) \arrow[r, "\times^{-1}"] & H^*(X;R) \otimes H^*(X;R) \end{tikzcd}$$

El mapa $\triangle$ es morfismo de algebras graduadas por que es composición de morfismos de algebras graduadas. Por otro lado, debemos probar que satisface la condición para ser coproducto. Sea $i : X \to X \times X$ el mapa dado por $i(x) = (x,e)$ y $j : \{e\} \to X$ el mapa $j(e) = e$, notar que i se puede restringir en la segunda coordenada a $\{e\}$. Afirmamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} H^*(X;R) \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[dr, "\triangle"] & H^*(X \times X;R) \arrow[rr, "i^*"] & & H^*(X;R) \\ & H^*(X;R) \otimes H^*(X;R) \arrow[u, "\times", "\cong"'] \arrow[urr, "P"] \arrow[rr, "id \otimes j^*"] & & H^*(X;R) \otimes H^*(e;R) \arrow[u, "i^* \circ \times", "\cong"'] \end{tikzcd}$$

y P es tal que el diagrama conmuta. En efecto, por definición se tiene que $\mu^* = \times \circ \triangle$ y como $P = i^* \times$ resulta que $i^*\mu^* = P\triangle$. Falta probar que $i^* \times = i^* \times \circ (id \otimes j^*)$.

Sea $a \otimes b \in H^*(X;R) \otimes H^*(X;R)$, entonces

$$\begin{aligned} i^* \times (a \otimes b) &= i^*(\pi_X^*(a) \smile \pi_X^*(b)) = i^*\pi_X^*(a) \smile i^*\pi_X^*(b) \\ &= (\pi_X i)^*(a) \smile (\pi_X i)^*(b) = a \smile ct_e^*(b) \end{aligned}$$

y por otra parte, observamos que

$$i^* \times \circ (id \otimes j^*)(a \otimes b) = i^* \times (a \otimes j^* b) = (\pi_X i)^*(a) \smile (j\pi_e i)^*(b) = a \smile ct_e^*(b)$$

Sea $\alpha \in H^n(X;R)$, luego usando que $r \to r \cdot 1$ es isomorfismo

$$\triangle(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \alpha'_i \otimes \alpha''_{n-i} = \alpha'_n \otimes \alpha''_0 + \sum_{i<n} \alpha'_i \otimes \alpha''_{n-i} = r\alpha'_n \otimes 1 + \sum_{i<n} \alpha'_i \otimes \alpha''_{n-i}$$

Como $H^n(e;R) = 0$ para todo $n > 0$ y $\mu \circ i \sim id_X$, vemos que

$$\alpha = i^*\mu^*(\alpha) = P\triangle(\alpha) = r\alpha'_n \smile 1 = r\alpha'_n$$

es decir, $\triangle(\alpha) = \alpha \otimes 1 + \sum_{i<n} \alpha'_i \otimes \alpha''_{n-i}$. Repitiendo un argumento similar tenemos el mismo resultado para $1 \otimes \alpha$. □

Con esto podemos demostrar finalmente el Teorema 1.2, el cual enunciamos nuevamente a continuación.

COROLARIO 5.23. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathbb{S}^n$ es $H-$espacio entonces n es impar.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $H^*(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/(x^2)$ con $|x| = n$. Por el teorema anterior sabemos que $H^*(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z})$ es álgebra de Hopf, si n es par entonces por el segundo ejemplo $2 = 0$ en $\mathbb{Z}$, lo que es absurdo. Concluimos que n es impar. □

6. Conclusiones.

Retomando la discusión inicial y sintetizando todo lo visto, en la sección 3, revisamos a profundidad los ejemplos de grupos topológicos, vimos que $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{T}^2$, $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{RP}^3$ son grupos topológicos y su construcción resulto relativamente sencilla porque vivían en espacios con buenas propiedades, sin embargo, dar una estructura de grupo topológico a un espacio dado no es una tarea sencilla, en esa misma sección hablamos un poco de superficies y las consecuencias de las obstrucciones que se presentan para ser $H-$espacio, una noción mas general de grupo topológico. Luego, en la sección 4, se presentan las primeras dos obstrucciones: la primera de ellas es que el grupo fundamental debe ser abeliano, y la segunda es que el cubriente universal de un $H-$espacio es $H-$espacio. Con la restricción del grupo fundamental logramos descartar las superficies que son homeomorfas a sumas conexas de toros y planos proyectivos, también probamos que $\mathbb{S}^2$ es el cubriente universal de $\mathbb{RP}^2$ y juntando el segundo resultado de la sección 4 con el resultado de la sección 5, que bajo ciertas hipotesis el anillo de cohomología de un $H-$espacio es un álgebra de Hopf, llegamos a la conclusión de que $\mathbb{RP}^2$ no es un $H-$espacio por que $\mathbb{S}^2$ no lo es, más aún, demostramos que ninguna esfera de dimensión par lo es, este resultado se generalizo en la literatura a que las únicas esferas que son $H-$espacios corresponden a $\mathbb{S}^0$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{S}^7$, en un futuro sería ideal apuntar en esta dirección. Como resultado extra, usando el teorema de clasificación de superficies, logramos concluir que $\mathbb{T}^2$ es la única superficie compacta y conexa que es grupo topológico.

REFERENCIAS

[1] HATCHER, A. (2001). *Algebraic Topology*, 1st ed. Cambridge University Press.
[2] BREDON, GLEN E. (1993). *Topology and Geometry*, 1st ed. Springer.
[3] LEE, JOHN M. (2011). *Introduction to Topological Manifolds*, 2nd ed. Springer.
[4] MUNKRES, JAMES R. (2000) *Topology*, 2nd ed. Pearson