Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Gregorio Moreno – Estudiante: Benjamín Mateluna

Teoría de Integración - MAT2534
Tarea 3
06 de junio de 2025

Problema 1

a) Sea $t > 0$, notemos que $e^{-tx^2} < e^{-tx}$ para $x > 1$, es positiva y continua, luego

$$I = \int_0^\infty e^{-tx^2}dx = \int_{(0,\infty)} e^{-tx^2}d\lambda(x)$$

entonces

$$I^2 = \left(\int_{(0,\infty)} e^{-tx^2}d\lambda(x)\right)\left(\int_{(0,\infty)} e^{-ty^2}d\lambda(y)\right) = \int_{(0,\infty)} e^{-ty^2}\left(\int_{(0,\infty)} e^{-tx^2}d\lambda(x)\right)d\lambda(y)$$
$$= \int_{(0,\infty)}\left(\int_{(0,\infty)} e^{-t(x^2+y^2)}d\lambda(x)\right)d\lambda(y)$$

Como la función $e^{-t(x^2+y^2)}$ es continua y positiva, por tonelli, vemos que

$$I^2 = \int_{(0,\infty)^2} e^{-t(x^2+y^2)}(\lambda \otimes \lambda)dxdy$$

Consideremos el cambio de variables $x = rcos(\theta)$ y $y = rsen(\theta)$ con $r \in (0, \infty)$ y $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ con determinante jacobiano igual a r, luego, por cambio de variables se sigue que

$$I^2 = \int_{(0,\infty)^2} e^{-t(x^2+y^2)}(\lambda \otimes \lambda)dxdy = \int_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\times(0,\infty)} re^{-tr^2}(\lambda \otimes \lambda)d\theta dr$$

por tonelli, vemos que

$$I^2 = \int_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}\left(\int_{(0,\infty)} re^{-tr^2}dr\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^\infty re^{-tr^2}dr\right)d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty re^{-tr^2}dr$$

donde la segunda igualdad se debe a la continuidad y positividad. Utlizando el cambio de variable $u = tr^2$, observamos que

$$\int_0^\infty re^{-tr^2}dr = \frac{1}{2t}\int_0^\infty e^{-u}du = \frac{1}{2t} - e^{-u}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2t} < \infty$$

De este modo,

$$I^2 = \frac{\pi}{4t}$$

concluimos que $g(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$.

b) Consideremos la función $F(x,t) = e^{-x^2} cos(tx)$. Dado $t_0 \in \mathbb{R}$ vemos que la función $F(x,t_0)$ es continua y por ende medible, además, $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Para $t = 0$ notamos que

$$f(0) = \int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

y por lo tanto $f(x,0)$ es integrable. Por otro lado,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| = \left|-xe^{-x^2} sen(tx)\right| \leq |x|\, e^{-x^2} =: g$$

es claro que g es una función integrable, basta notar que su integral impropia es finita. Luego, la función f es diferenciable y como $|F(x,t)| \leq e^{-x^2}$ se tiene que

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^\infty e^{-x^2} cos(tx)dx\right) = \frac{d}{dt}\left(\int_{(0,\infty)} e^{-x^2} cos(tx)d\lambda(x)\right) = \int_{(0,\infty)} \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-x^2} cos(tx)\right) d\lambda(x)$$

$$= \int_{(0,\infty)} -xe^2 sen(tx) d\lambda(x) = \int_0^\infty -xe^2 sen(tx)dx$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2} sen(tx)\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{t}{2}\int_0^\infty e^{-x^2} cos(tx)dx = \frac{t}{2} f(t)$$

Tenemos una EDO de variables separables $f' = -\frac{t}{2} f$ con condición inicial $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Luego

$$\int \frac{df}{f} = \int -\frac{t}{2}dt$$

se sigue que

$$log(f) = -\frac{t^2}{4} + C \quad \text{entonces} \quad f = e^{-\frac{t^2}{4}+C}$$

evaluando en la condición inicial vemos que

$$f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{t^2}{4}}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

c) Sean $0 < a < b < \infty$. Notemos que

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-tx} dt$$

La función e^{-tx} es continua y positiva, por tonelli vemos que

$$\int_{(0,\infty)\times(a,b)} e^{-tx} dtdx = \int_{(a,b)} \int_{(0,\infty)} e^{-tx} dxdt = \int_a^b \int_0^\infty e^{-tx} dxdt = \int_a^b \int_0^{-\infty} -\frac{e^u}{t} dudt$$

$$= \int_a^b -\frac{1}{t} e^u \Big|_0^{-\infty} dt = \int_a^b \frac{1}{t} dt = log\left(\frac{b}{a}\right)$$

la segunda igualdad se debe a la continuidad y que la función e^{-tx} es positiva. Por otro lado tenemos que

$$\int_{(0,\infty)\times(a,b)} e^{-tx} dtdx = \int_{(0,\infty)} \int_{(a,b)} e^{-tx} dtdx = \int_0^\infty \int_a^b e^{-tx} dtdx = h(a,b)$$

Por lo tanto $h(a,b) = log\left(\frac{b}{a}\right)$.

Problema 2

a) El cambio de variables a coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$, denotado por φ_n esta dado por

$$\begin{aligned} x_n &= rsen(\theta_{n-1}) \\ x_{n-1} &= rcos(\theta_{n-1})sen(\theta_{n-2}) \\ &\vdots \\ x_2 &= rcos(\theta_{n-1})cos(\theta_{n-2})\cdots cos(\theta_2)sen(\theta_1) \\ x_1 &= rcos(\theta_{n-1})cos(\theta_{n-2})\cdots cos(\theta_2)cos(\theta_1) \end{aligned}$$

Afirmamos que el determinante jacobiano del cambio de variables es

$$J_{\varphi_n}(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) = r^{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}(cos^{i-1}(\theta_i))$$

Procederemos por inducción sobre la dimensión. Para $n = 1$ el resultado es inmediato, supongamos que se tiene para n. Debemos probar el resultado para $n+1$. Expandiendo por cofactores notamos que

$$J_{\varphi_n} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial r} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial r} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial r} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_n} \\ sen(\theta_n) & 0 & \cdots & 0 & rcos(\theta_n) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n sen(\theta_n) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_n} \end{vmatrix} + rcos(\theta_n) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial r} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} \end{vmatrix}$$

Vamos a identificar $(x_1, \cdots, x_n)$ con $(y_1, \cdots, y_n)$ y consideramos el cambio de variable φ_n. Notemos que $\frac{\partial x_i}{\partial \theta_j} = cos(\theta_n)\frac{\partial y_i}{\partial \theta_j}$ donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n-1$. Además, $\frac{\partial x_i}{\partial \theta_n} = -sen(\theta_n)r\frac{\partial y_i}{\partial r}$ con $1 \leq i \leq n$ y también $\frac{\partial x_i}{\partial r} = cos(\theta_n)\frac{\partial y_i}{\partial r}$ para $1 \leq i \leq n$. Luego,

$$J_{\varphi_{n+1}} = (-1)^{n+1}rsen^2(\theta_n)cos^{n-1}(\theta_n) \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial y_1}{\partial r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial y_n}{\partial r} \end{vmatrix} + rcos^{n+1}(\theta_n) \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial r} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial r} & \frac{\partial y_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial \theta_{n-1}} \end{vmatrix}$$

Si permutamos $n-1$ columnas en la primer submatriz corresponde al jacobiano de φ_n, adicionalmente, la segunda submatriz es exactamente igual al jacobiano de φ_n. Entonces

$$\begin{aligned} J_{\varphi_{n+1}} &= (-1)^{n+1}rsen^2(\theta_n)cos^{n-1}(\theta_n)(-1)^{n-1}J_{\varphi_n} + rcos^{n+1}(\theta_n)J_{\varphi_n} \\ &= rcos^{n-1}(\theta_n)J_{\varphi_n}(sen^2(\theta_n) + cos^2(\theta_n)) = rcos^{n-1}(\theta_n)J_{\varphi_n} \end{aligned}$$

Usando la hipotesis inductiva, nos queda

$$J_{\varphi_{n+1}} = r^n\prod_{i=2}^{n}(cos^{i-1}(\theta_i))$$

b) De la parte anterior consideramos el cambio de variable a coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$. Tenemos lo siguiente

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} g(|x|)d\lambda(x) = \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})^{n-2}} g(r)\,|J_{\varphi_n}|\,drd\theta_1 d\theta_2\cdots d\theta_{n-1}$$

como la función sigue siendo positiva despues de aplicar el cambio de variable, por tonelli se sigue que

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{(0,\infty)} \int_{(0,2\pi)} \int_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \cdots \int_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} g(r)\,|J_{\varphi_n}|\, d\theta_{n-1} \cdots d\theta_2 d\theta_1 dr \\
&= 2\pi \prod_{i=2}^{n-1} \left(\int_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} cos^{i-1}(\theta) d\lambda(\theta) \right) \int_{(0,\infty)} g(r) r^{n-1} d\lambda(r) \\
&= 2\pi \prod_{i=2}^{n-1} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^{i-1}(\theta)\ d\theta \right) \int_{(0,\infty)} g(r) r^{n-1} d\lambda(r) \\
&= 2\pi \prod_{i=2}^{n-1} \left(\int_{0}^{\pi} sen^{i-1}(\theta)\ d\theta \right) \int_{(0,\infty)} g(r) r^{n-1} d\lambda(r)
\end{aligned}
$$

en la última igualdad utilizamos que las variables son independientes entre sí, además, para ahorrar notación eliminamos los índices de las varaibles θ. Definimos

$$
I(m) = \int_0^{\pi} sen^m(\theta)\ d\theta
$$

para $m \in \mathbb{N}_0$. Afirmamos que

$$
I(2m) = \pi \prod_{k=1}^{m} \frac{2k-1}{2k} \quad \text{y} \quad I(2m+1) = 2 \prod_{k=1}^{m} \frac{2k}{2k+1}
$$

Probaremos lo anterior para el caso par, el otro caso es análogo. Sea $m = 0$, el resultado es directo. Supongamos que el resultado se tiene para m. Utilizando integración por partes se obtiene la recursión

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} sen^{2m+2}(\theta)\ d\theta &= -\frac{cos(\theta) sen^{2m-1}(\theta)}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{2m+1}{2m+2} \int_0^{\pi} sen^{2m}(\theta)\ d\theta = \frac{2m+1}{2m+2} \int_0^{\pi} sen^{2m}(\theta)\ d\theta \\
&= \frac{2m+1}{2m+2} \cdot \pi \prod_{k=1}^{m} \frac{2k-1}{2k} = \pi \prod_{k=1}^{m+1} \frac{2k-1}{2k}
\end{aligned}
$$

Además observamos que

$$
I(2m-1)I(2m) = 2 \prod_{k=1}^{m-1} \frac{2k}{2k+1} \cdot \pi \prod_{k=1}^{m} \frac{2k-1}{2k} = 2\pi \cdot \frac{2m-1}{2m} \cdot \prod_{k=1}^{m-1} \frac{2k-1}{2k+1} = 2\pi \cdot \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{1}{2m-1} = \frac{\pi}{m}
$$

Regresando al problema original, tenemos dos casos, $n-1$ es impar, es decir, $n-1 = 2k-1$, entonces

$$
2\pi \prod_{i=2}^{n-1} \left(\int_0^{\pi} sen^{i-1}(\theta)\ d\theta \right) = 2\pi \prod_{i=2}^{2k-1} I(i-1) = 2\pi \prod_{j=1}^{k-1} I(2j-1)I(2j) = 2\pi \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\pi}{j} = \frac{2\pi^k}{(k-1)!}
$$

Supongamos que $n-1$ es par, lo que implica que $n-1 = 2k$, así

$$
\begin{aligned}
2\pi \prod_{i=2}^{n-1} \left(\int_0^{\pi} sen^{i-1}(\theta)\ d\theta \right) &= 2\pi \prod_{i=2}^{2k} I(i-1) = 2\pi \cdot I(2k-1) \prod_{i=2}^{2k-1} I(i-1) = 2\pi \cdot \frac{\pi^{k-1}}{(k-1)!} \cdot 2 \prod_{j=1}^{k-1} \frac{2j}{2j+1} \\
&= 4\pi^k \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \frac{2j}{2j+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k-1)!!}
\end{aligned}
$$

Concluimos que

$$
I = S_{n-1} \int_{(0,\infty)} g(r) r^{n-1} d\lambda(r)
$$

Problema 3

En primer lugar, notemos que

$$I=\int_{[0,1]^2}\frac{1}{1-xy}(\lambda\otimes\lambda)(dxdy)=\int_{[0,1]^2}\sum_{n\geq 1}(xy)^{n-1}(\lambda\otimes\lambda)(dxdy)$$

como xy es positiva en $[0,1]^2$, por convergencia monótona y tonelli se sigue que

$$I=\sum_{n\geq 1}\int_{[0,1]^2}(xy)^{n-1}(\lambda\otimes\lambda)(dxdy)=\sum_{n\geq 1}\int_{[0,1]}\int_{[0,1]}x^{n-1}y^{n-1}dxdy=\sum_{n\geq 1}\left(\int_{[0,1]}x^{n-1}dx\right)\left(\int_{[0,1]}y^{n-1}dy\right)$$

la última igualdad se debe a la independencia entre las variables. Por continuidad, vemos que

$$I=\sum_{n\geq 1}\left(\int_0^1 x^{n-1}dx\right)\left(\int_0^1 y^{n-1}dy\right)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$$

Por otro lado, consideramos el cambio de variable $x=u+v$ e $y=u-v$ con determinante jacobiano igual a 2, luego la nueva región de integración $\mathcal{R}$ esta determinado por

$$\mathcal{R}:=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:0\leq u\leq\frac{1}{2},-u\leq v\leq u\right\}\cup\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\frac{1}{2}\leq u\leq 1,1+u\leq v\leq 1-u\right\}$$

Así,

$$I=\int_{\mathcal{R}}\frac{2}{1-(u+v)(u-v)}(\lambda\otimes\lambda)(dxdy)=2\int_{\mathcal{R}}\frac{1}{1-u^2+v^2}(\lambda\otimes\lambda)(dxdy)$$

Diremos que $\mathcal{R}_+:=\mathcal{R}\cap\{v\geq 0\}$. Por simetría respecto a v, vemos que

$$I=4\int_{\mathcal{R}_+}\frac{1}{1-u^2+v^2}(\lambda\otimes\lambda)(dxdy)=4\int_{[0,1]\times(R_+)^2(u)}\frac{1}{1-u^2+v^2}(\lambda\otimes\lambda)(dxdy)$$

donde $(R_+)^2(u)$ es la sección de R_+ respecto de u. Notemos que en la última igualdad se utilizo que la función es continua y positiva. Así, por tonelli se sigue que

$$I=4\int_{[0,1]}\int_{(R_+)^2(u)}\frac{1}{1-u^2+v^2}d\lambda(v)d\lambda(u)=4\int_0^1\int_0^{f(u)}\frac{1}{1-u^2+v^2}dvdu$$

con f función que describe el contorno superior de $\mathcal{R}_+$ en función de u. Luego

$$I=4\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^u\frac{1}{1-u^2+v^2}dvdu+\int_{\frac{1}{2}}^1\int_0^{1-u}\frac{1}{1-u^2+v^2}dvdu\right)$$

consideramos $a=\sqrt{1-u^2}$ que esta bien definido pues $0\leq u\leq 1$, así

$$\begin{aligned}I&=4\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^u\frac{1}{a^2+v^2}dvdu+\int_{\frac{1}{2}}^1\int_0^{1-u}\frac{1}{a^2+v^2}dvdu\right)\\&=4\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{a}arctan\left(\frac{v}{a}\right)\Big|_0^u du+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{a}arctan\left(\frac{v}{a}\right)\Big|_0^{1-u}du\right)\\&=4\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du\right)=4(I_1+I_2)\end{aligned}$$

Para I_1 integramos por partes, en efecto

$$\begin{aligned}I_1&=arcsen(u)arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}arcsen(u)\frac{1}{1+\frac{u^2}{1-u^2}}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{1}{1-u^2}du\\&=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{6}-\int_0^{\frac{1}{2}}arcsen(u)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\frac{\pi^2}{36}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}t\ dt=\frac{\pi^2}{36}-\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi^2}{72}\end{aligned}$$

donde realizamos el cambio de variable $t = arcsen(u)$. Por otra parte, para I_2 consideramos el cambio de variable $u = cos(\theta)$ y entonces

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{1}{sen(\theta)} arctan\left(\frac{1-cos(\theta)}{sen(\theta)}\right) sen(\theta)\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} arctan\left(tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\ d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} arctan(tan(w))\ dw = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} w\ dw = w^2\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{36} \end{aligned}$$

Luego

$$I = 4(I_1 + I_2) = \left(\frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi^2}{36}\right) = 4 \cdot \frac{3\pi^2}{72} = \frac{\pi^2}{6}$$

Problema 4

Problema 5

Sea $I = (c, d) \subseteq [a, b]$ un intervalo, como g es absolutamente continua, por TFC se sigue que

$$\lambda(g(I)) = \lambda((g(c), g(d))) = g(d) - g(c) = \int_{(c,d)} g' d\lambda$$

además utilizamos el hecho de que g es creciente y $g(I)$ un intervalo. Sea $(I_n)_n$ intervalos disjuntos de a pares contenidos en $[a, b]$, entonces como g es estrictamente creciente, en particular es inyectiva, se sigue que $g(I_n)$ son disjuntos de a pares. Notemos que

$$\lambda\left(g\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right)\right) = \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} g(I_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(g(I_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{I_n} g' d\lambda = \int \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_n g' d\lambda = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} g' d\lambda$$

en donde para intercambiar la suma con la integral usamos teorema de convergencia dominada. Como todo abierto se puede escribir como unión numerable de intervalos abiertos disjuntos de a pares, lo anterior prueba el argumento para abiertos $U \subseteq [a, b]$.

Sea $G \in G_\delta$, existen $(U_n)_n$ abiertos de $[a, b]$ tales que

$$G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

sin perdida de generalidad podemos suponer que estos abiertos estan encajonados. Como $[a, b]$ es compacto entonces $g([a, b])$ es compacto, así

$$\lambda(g(G)) = \lambda\left(g\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right)\right) = \lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} g(U_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(g(U_n)) = \lim_{n\to\infty} \int_{U_n} g' d\lambda = \int_G g' d\lambda$$

donde la última igualdad se debe al teorema de convergencia dominada, notando que $\mathbb{1}_{U_n}$ converge a $\mathbb{1}_G$. Sea $E \subseteq [a, b]$ medible, existe $G \in G_\delta$ tal que $\lambda(G \setminus E) = 0$ lo que implica que