



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: MAURICIO BUSTAMANTE – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

Topología Algebraica - MAT2850
Apuntes
05 de agosto de 2025

Índice

Motivación	3
1. Homología Simplicial	5
1.1. Complejos de Cadenas	5
1.2. Complejos Simpliciales	8
1.3. Homología Simplicial	11

Definición: Decimos que $f : X \rightarrow Y$ es una **equivalencia homotópica**, si existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \sim id_X$ y $f \circ g \sim id_Y$. En tal caso, X e Y se dicen homotópicamente equivalentes o que tienen el mismo tipo de homotopía y se denota por $X \sim Y$.

Ejemplo:

- (1) Sea $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo, en particular, tomando $g = f^{-1}$, se sigue que es equivalencia homotópica.
- (2) Se tiene que $\{0\} \sim \mathbb{R}^n$, consideremos la inclusión $i : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, afirmamos que es equivalencia homotópica. En efecto, se verifica que $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\}$ es una inversa homotópica. Por un lado $\pi \circ i = id_{\{0\}}$ y por otro $i \circ \pi = 0$. Notamos que $H(x, t) = tx$ con $t \in [0, 1]$ es una homotopía entre 0 y $id_{\mathbb{R}^n}$.
- (3) Veamos que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim \mathbb{S}^{n-1}$. Probaremos que la función $i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es equivalencia homotópica. En efecto,

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ x &\rightarrow \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

es inversa homotópica. Es claro que $\pi \circ i = id_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Definimos

$$H(x, t) := t \frac{x}{|x|} + (1 - t)x$$

Notamos que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = \frac{x}{|x|}$, es decir, H es una homotopia entre $i \circ \pi$ e $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$. Además, se verifica que $im(H) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1. Homología Simplicial

Queremos asignarle a un espacio topológico X arbitrario, grupos abelianos $H_0(X), H_1(X), \dots$ tal que si $X \sim Y$, entonces $H_i(X) \cong H_i(Y)$ para todo i . Intuitivamente, $H_k(X)$ estará generado por ciertos subespacios de X de dimensión k .

Habrá una relación de equivalencia, $A, B \subseteq X$ de dimensión k serán equivalentes si hay un subespacio de X de dimensión $k + 1$ cuyo borde es $A \cup B$.

Hay que restringir la clase de espacios a una con nociones de dimensión, borde, etc. Estos serán los complejos simpliciales. Necesitamos, adicionalmente, un objeto algebraico que capture esas nociones, esto corresponde a los complejos de cadenas.

1.1. Complejos de Cadenas

Definición: Un **complejo de cadenas** es una sucesión de grupos abelianos y homomorfismos

$$\dots \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

tal que $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ para todo i . Se denota por $(C_\bullet, \partial_\bullet)$.

Observación: Notemos que $\text{im } \partial_{i+1} \subseteq \ker \partial_i \subseteq C_i$. Dado que los grupos son abelianos, esta observación permite definir el siguiente objeto.

Definición: El i -ésimo grupo de homología de $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ se define por

$$H_i(C_i) := \frac{\ker \partial_i}{\text{im } \partial_{i+1}}$$

Ejemplos:

- Si A un grupo abeliano, entonces

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0$$

es un complejo de cadenas donde $C_i = A$. Entonces

$$H_j(C_\bullet) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ A & \text{si } j = i \end{cases}$$

- Consideremos la cadena exacta

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

entonces $H_j(C_\bullet) = 0$ para todo i .

- Veamos que

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es un complejo de cadenas. La homología asociadas son $H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z}$, $H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_2$ y $H_k(C_\bullet) = 0$.

Definición: Sean $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ y $(D_\bullet, \partial_\bullet)$ dos complejos de cadenas. Un **mapeo de cadenas** es una colección de homomorfismos $f_n : C_n \rightarrow D_n$ tal que $\partial_n f_n = f_{n-1} \partial_n$ para todo n , es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ D_n & \xrightarrow{\partial_n} & D_{n-1} \end{array}$$

y se denota por $f : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$.

Lema 1.1: Si $f : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ es un mapeo de cadenas, entonces la asignación $f_* : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$ dada por

$$f_*([x]) = [f_n(x)]$$

esta bien definida y es un homomorfismo de grupos.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{3} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & C. \\
& & \downarrow & & \downarrow id & & \downarrow \pi & & \downarrow id & & & \downarrow f. \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{3} & \mathbb{Z}_3 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & D.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H_n(C_\bullet) & \xrightarrow{(g \circ f)_*} & H_n(G_\bullet) \\ & \searrow f_* \quad \nearrow g_* & \\ & H_n(D_\bullet) & \end{array}$$

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{i_n} B_n \xrightarrow{j_n} C_n \longrightarrow 0$$

Teorema 1.2 (Lema de la serpiente): Sea $0 \rightarrow A_{\bullet} \rightarrow B_{\bullet} \rightarrow C_{\bullet} \rightarrow 0$ una secuencia de complejos de cadenas, entonces existen morfismos

$$\delta_n : H_n(C_{\bullet}) \rightarrow H_{n-1}(A_{\bullet})$$

tal que

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\delta_{n+1}} & H_n(A_{\bullet}) & \xrightarrow{i_*} & H_n(B_{\bullet}) & \xrightarrow{j_*} & H_n(C_{\bullet}) & \searrow \\ & & & \delta_n & & & \\ \nearrow & H_{n-1}(A_{\bullet}) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(B_{\bullet}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(C_{\bullet}) & \longrightarrow \cdots \\ & & & & & & \\ & \cdots & \longrightarrow & H_0(B_{\bullet}) & \longrightarrow & H_0(C_{\bullet}) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\delta_n : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(A_\bullet)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \xrightarrow{\delta_{n+1}} & H_n(A_\bullet) & \xrightarrow{i_*} & H_n(B_\bullet) & \xrightarrow{j_*} & H_n(C_\bullet) & \\
 & & & \delta_n & & \searrow & \\
 & & & & & & \\
 \nearrow & H_{n-1}(A_\bullet) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(B_\bullet) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(C_\bullet) & \longrightarrow \dots \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & \dots & \longrightarrow & H_0(B_\bullet) & \longrightarrow & H_0(C_\bullet) & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{i} & B_{n+1} & \xrightarrow{j} & C_{n+1} & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & \\
0 \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{i} & B_n & \xrightarrow{j} & C_n & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & \\
0 \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{i} & B_{n-1} & \xrightarrow{j} & C_{n-1} & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Primero debemos definir $\delta_n : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(A_\bullet)$. Sea $[c] \in H_n(C_\bullet)$ entonces $c \in \ker \partial \subseteq C_n$. Como j es sobre, existe $b \in B_n$ tal que $j(b) = c$. Consideramos ∂b y notamos que

$$j\partial(b) = \partial j(b) = \partial c = 0$$

entonces existe un único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b$. Verificamos que $i\partial(a) = \partial i(a) = \partial^2 b = 0$ y como i es inyectiva vemos que $\partial a = 0$. Afirmamos que $\delta_n : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(A_\bullet)$ por

$$\delta_n([c]) = [a]$$

cumple lo buscado. Debemos demostrar lo siguiente

- (1) No depende de la elección de b . Sea b' tal que $j(b') = c$ entonces $j(b' - b) = c - c = 0$, existe único a_0 tal que $i(a_0) = b' - b$. Por otro lado, existe a' tal que

$$i(a') = \partial b' = \partial b + \partial i(a_0) = \partial b + i\partial(a_0)$$

entonces $i(a' - \partial a_0) = \partial b = i(a)$, por inyectividad, $a' - \partial a_0 = a$, lo que implica que $[a] = [a']$.

- (2) No depende de la elección del representante de $[c]$. Sea $c' = c + \partial c'' = j(b) + \partial j(b'') = j(b) + j\partial(b'')$, diremos $b' = b + \partial b''$, notemos que $\partial b' = \partial b + \partial^2 b'' = \partial b$. El mismo $a \in A_{n-1}$ satisface $i(a) = \partial b'$. Entonces $\delta_n[c] = [a] = \delta_n[c']$.

- (3) La función δ_n es morfismo, es decir

$$\delta_n([c] + [c']) = \delta_n[c] + \delta_n[c']$$

Notar que si $j(b) = c$ y $j(b') = c'$ entonces $j(b + b') = c + c'$, existen únicos $a, a' \in A_{n-1}$ tales que $i(a + a') = \partial(b + b')$ y así

$$\partial_n([c + c']) = [a + a'] = [a] + [a']$$

- (4) Exactitud en $H_n(C_\bullet)$ y $H_n(A_\bullet)$. Veamos que $\text{im } j_* \subseteq \ker \delta_n$. Sea $j_*[b]$ con $\partial b = 0$. Entonces

$$\delta_n j_*[b] = \delta_n[j(b)]$$

Existe único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b = 0$, entonces $a = 0$ y por lo tanto $\delta_n j_*[b] = [a] = 0$. Queda ver que $\ker \delta_n \subseteq \text{im } j_*$. Sea $[c] \in \ker \delta_n$ con $\partial c = 0$. Por definición de δ_n , para cada b tal que $j(b) = c$ hay un único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b$.

Como $\delta_n[c] = [a] = 0$ se sigue que $a = \partial a'$ y entonces $\partial b = i(a) = i\partial(a') = \partial i(a')$, así $b - i(a') \in \ker \partial$, es decir $b - i(a')$ representa una clase de homología.

Ahora $j(b - i(a')) = j(b) = c$, por ende, $j_*[b - i(a')] = [c]$. Para $H_n(A_\bullet)$ la demostración es similar.

- (5) Exactitud en $H_n(B_\bullet)$. Sea $[a] \in \text{im } i_*$ con $\partial a = 0$, entonces

$$j_* i_*[a] = [j_* i_n(a)] = 0$$

y por lo tanto $\text{im } i_* \subseteq \ker j_*$. Sea $[b] \in \ker j_*$ con $\partial b = 0$, entonces $j_*[b] = [j(b)] = 0$, lo que implica que $j(b) = \partial c' = \partial j(b') = j\partial(b')$, existe único $a \in A_{n-1}$ tal que $b - \partial b' = i(a)$, además

$$i\partial(a) = \partial i(a) = \partial b + \partial^2 b' = 0$$

entonces $\partial a = 0$. Luego $i_*[a] = [b]$. Concluimos que $\text{im } i_* = \ker j_*$.

Lo que concluye el teorema. □

Nuestro objetivo será asociar un complejo de cadenas a un espacio topológico X arbitrario, lo que nos dará un grupo de homología para cada dimensión, además dada $f : X \rightarrow Y$ una función continua, nos gustaría obtener un mapeo de cadenas y por tanto un homomorfismo entre los grupos de homología de cada espacio.

1.2. Complejos Simpliciales

Definición: Dados $n + 1$ puntos $\{v_0, \dots, v_n\} \in \mathbb{R}^w$ son **afínmente independientes**, si generan un n -plano afín, es decir, $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ es un conjunto linealmente independiente, esto es

$$\sum_{i=0}^n t_i v_i = 0 \quad y \quad \sum_{i=0}^n t_i = 0 \quad \text{entonces} \quad t_i = 0 \quad \text{para todo } i$$

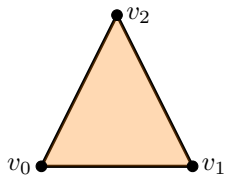
Ejemplo: Dos puntos son afínmente independientes. Tres puntos son afínmente independientes si y solo si no son colineales.

Definición: Si $\{v_0, \dots, v_n\}$ son afínmente independientes, ellos definen el **n -simplejo**

$$\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle = \left\{ x = \sum_{i=0}^n t_i v_i, \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1 \quad y \quad t_i \geq 0 \right\}$$

Decimos que σ es el n -simplejo generado por v_0, \dots, v_n . Los puntos v_i se llaman **vértices** de σ . Una **cara** de un simplejo σ es un simplejo τ generado por un subconjunto de $\{v_0, \dots, v_n\}$ y lo denotamos por $\tau \leq \sigma$. Si el subconjunto es propio, se dice que τ es una **cara propia**.

La **frontera** de un n -simplejo σ es la unión de todas sus caras propias, se denota por $\partial\sigma$, el **interior** de σ es $\text{int}(\sigma) := \sigma \setminus \partial\sigma$.

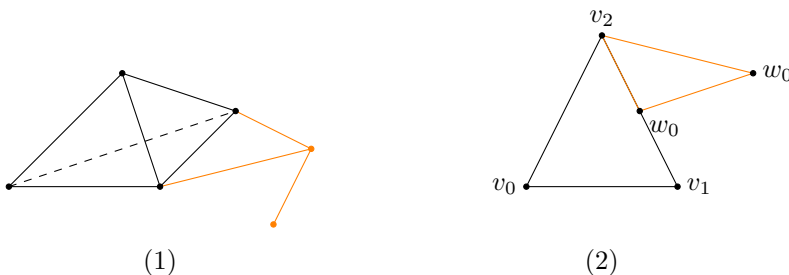


Definición: Un **complejo simplicial** (geométrico) K es un conjunto de simplejos tales que

- (1) Si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau \in K$.
- (2) Si $\sigma, \tau \in K$ entonces $\sigma \cap \tau = \emptyset$ ó $\sigma \cap \tau$ es una cara de σ y de τ .

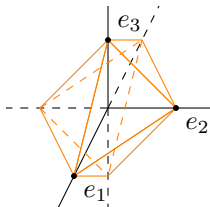
El **poliedro** asociado a un complejo simplicial K es $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$. Un espacio topológico X se llama un poliedro si existe un complejo simplicial K y un homeomorfismo $f : |K| \rightarrow X$. Al par (K, f) se le llama una **triangulación** de X . Denotamos por V_K al conjunto de vértices de los simplices.

Observación: Si X es triangulable, entonces es Hausdorff por que $|K|$ lo es.



La figura (1) corresponde a un complejo simplicial, mientras que la figura (2) no es un complejo simplicial ya que los simplices que la componen no se pegan bien.

Ejemplo: Consideremos el complejo simplicial K formado por los simplices $\sigma = \langle \pm e_1, \pm e_2, \pm e_3 \rangle$ y sus respectivas caras. Consideremos $f : |K| \rightarrow \mathbb{S}^2$ por $f(x) := x/|x|$, entonces (K, f) es una triangulación de la 2-esfera.



Definición: Sean K y L complejos simpliciales. Un **mapeo simplicial** de K a L es una función $f : V_K \rightarrow V_L$ tal que si $\sigma = \langle v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle$ es un simplejo en K entonces

$$\{f(v_{\alpha_0}), \dots, f(v_{\alpha_n})\}$$

genera un simplejo en L , al cual llamamos $f(\sigma)$. Notación $f : K \rightarrow L$.

Ejemplo: Sea $\Delta^n = \langle e_1, \dots, e_{n+1} \rangle \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^\infty$. Entonces las funciones $f : \Delta^1 \rightarrow \Delta^2$ y $g : \Delta^2 \rightarrow \Delta^1$ dadas por $f(e_i) = e_i$ y $g(e_1) = g(e_3) = e_1$, $g(e_2) = e_2$ son mapeos simpliciales.

Lema 1.3: Sea $f : K \rightarrow L$ un mapeo simplicial. Entonces induce una función continua $|f| : |K| \rightarrow |L|$.

Demostración. Sea $\sigma \in K$, digamos que $\sigma = \langle v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle$ y Definimos

$$f_\sigma : \sigma \rightarrow |L|$$

$$\sum_{i=0}^k t_i v_i \rightarrow \sum_{i=0}^k t_i f(v_i)$$

que es continua por que es lineal en los t_i . Se observa que si $\tau \leq \sigma$ entonces $f_\tau = f_\sigma|_\tau$. Ahora tomamos σ y σ' , entonces

$$f_\sigma|_{\sigma \cap \sigma'} = f_{\sigma \cap \sigma'} = f_{\sigma'}|_{\sigma \cap \sigma'}$$

entonces $|f| := \bigcup_{\sigma \in K} f_\sigma$ es una función continua de $|K|$ en $|L|$. □

Sea $g : L \rightarrow J$ un mapeo simplicial, entonces $g \circ f$ es mapeo simplicial, ya que f mapea vértices de un simplejo a vértices de un simplejo y del mismo modo lo hace g , además se tiene lo siguiente

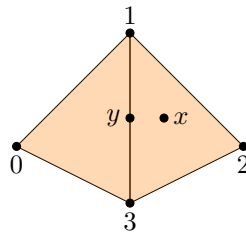
$$|g \circ f|(x) = |g \circ f|\left(\sum t_i v_{\alpha_i}\right) = \sum t_i (g \circ f)(v_{\alpha_i}) = \sum t_i g(f(v_{\alpha_i})) = (|g| \circ |f|)(x)$$

es decir, $|g \circ f| = |g| \circ |f|$. Un mapeo simplicial puede ser definido también como una función continua $f : |K| \rightarrow |L|$ que manda vértices en vértices y es lineal en sus caras.

Daremos un par de definiciones útiles para mas adelante, que están relacionadas con la noción de aproximar una función continua por un mapeo simplicial.

Definición: Sea $x \in |K|$. El **portador** de x es el simplejo de K mas pequeño (en términos de inclusión) que contiene a x . Se denota por $\text{carr}(x)$.

Ejemplo: Veamos el siguiente complejo



Entonces $\text{carr}(y) = \langle 1, 3 \rangle$, $\text{carr}(x) = \langle 1, 2, 3 \rangle$ y $\text{carr}(4) = \langle 4 \rangle$.

Observación: Notemos que $y \in \text{carr}(x)$ si y solo si $\text{carr}(y) \subseteq \text{carr}(x)$.

Definición: Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una función continua. Una **aproximación simplicial** a f es un mapeo simplicial $g : K \rightarrow L$ tal que

$$g(x) \in \text{carr}(f(x)) \text{ para todo } x \in |K|$$

Ejemplo:



El poliedro asociado a cada complejo es \mathbb{S}^1 , consideramos la función continua $f(z) = z^2$, una aproximación simplicial es $g(v_i) = g(v_{i+4}) = w_i$ para $0 \leq i \leq 3$.

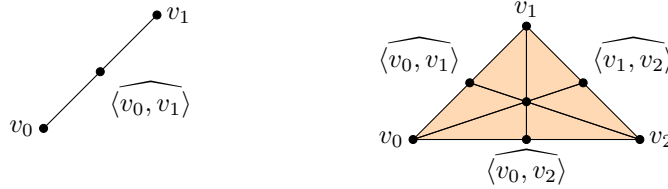
Definición: Sea K un complejo simplicial. La primera subdivisión baricéntrica K' de K es el complejo simplicial K' cuyos

- Vértices son los baricentros $\hat{\sigma}$ de los simpleces σ de K .
- Un n -simplex de K' es $\langle \hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n \rangle$ si $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n$ (Son caras propias).

Una r -ésima división baricéntrica se define recursivamente $K^{(r)} := (K^{(r-1)})'$. Recordemos que si $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ entonces $\hat{\sigma} = \frac{1}{n+1} \sum v_i$.

Proposición 1.4: Sea K un complejo simplicial entonces $|K'| = |K|$.

Ejemplo: Algunos ejemplos de división baricéntrica de dos simpleces.



donde el punto central del segundo ejemplo es $\widehat{\langle v_0, v_1, v_2 \rangle}$.

1.3. Homología Simplicial

Dado K un complejo simplicial finito, esto es, que tiene un número finito de vértices. Elegimos un orden total en el conjunto de vértices, digamos $v_0 < v_1 < \dots < v_n$.

Definición: (*Complejo de cadenas simplicial*) Consideremos los grupos abelianos

$$C_n(K) := \left\{ \sum n_\sigma \sigma : \sigma = \langle v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle \text{ tal que } v_{\alpha_0} < \dots < v_{\alpha_n} \text{ y } n_\sigma \in \mathbb{Z} \text{ nulo salvo finitos casos} \right\}$$

y los diferenciales $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ se define en la base por

$$\partial_n \langle v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle = \sum_{i=0}^n (-1)^i \langle v_{\alpha_0}, \dots, \widehat{v_{\alpha_i}}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle$$

donde $\langle v_{\alpha_0}, \dots, \widehat{v_{\alpha_i}}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle := \langle v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_{i-1}}, v_{\alpha_{i+1}}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle$. Se extiende linealmente al resto del grupo.

Teorema 1.5: La tupla $(C_\bullet(K), \partial_\bullet)$ es un complejo de cadenas, además, la homología del complejo no depende del orden en el conjunto de vértices.

Definición: Sea K un complejo simplicial finito. El *i-ésimo grupo de homología simplicial* de K es

$$H_i(K) := H_i(C_\bullet(K)) = \frac{\ker \partial_i}{\operatorname{im} \partial_{i+1}}$$

Ejemplos:

- (1) Sea $K = \{\langle v_0, v_1 \rangle, \{v_0\}, \{v_1\}\}$ y consideramos el orden $v_0 < v_1$. El complejo corresponde a un segmento de recta, notemos que $3v_0 - 5v_1 \in C_0(K)$, con la identificación $v_0 = (1, 0)$ y $v_1 = (0, 1)$ vemos que $C_0(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, esta identificación no es canónica, es decir, depende de la base que escojamos y sus imágenes correspondientes.

Por otro lado, $C_1(K) \cong \mathbb{Z}$ con la identificación $\langle v_0, v_1 \rangle = 1$. Adicionalmente, se tiene que $C_i(K) = 0$ para $i > 1$. Luego,

$$0 \longrightarrow C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{0} 0$$

donde $\partial_1 \langle v_0, v_1 \rangle = v_1 - v_0 \in C_0(K)$. Con las identificaciones que hicimos resulta que $\partial_1(1) = (-1, 1)$. De este modo queda la cadena

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

Así $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(K) = 0$, $H_i(K) = 0$ para $i > 0$.

- (2) Sean v_0, v_1, v_2 puntos no colineales. Consideramos $\sigma = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ y $K := \{\tau \leq \sigma\}$ definimos el orden $v_0 < v_1 < v_2$. Notemos que

$$\begin{aligned} C_0(K) &= \mathbb{Z}\{v_0, v_1, v_2\} \\ C_1(K) &= \mathbb{Z}\{\langle v_0, v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_0, v_2 \rangle\} \\ C_2(K) &= \mathbb{Z}\{\langle v_0, v_1, v_2 \rangle\} \end{aligned}$$

Entonces $\partial_0 = 0$,

$$\partial_1 = \begin{cases} \partial \langle v_0, v_1 \rangle = v_1 - v_0 \\ \partial \langle v_1, v_2 \rangle = v_2 - v_1 \\ \partial \langle v_0, v_2 \rangle = v_2 - v_0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \partial_2 \langle v_0, v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle - \langle v_0, v_2 \rangle + \langle v_0, v_1 \rangle$$

Realizando las identificaciones $v_i = e_{i+1}$ para $i = 0, 1, 2$, $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle = 1$, $\langle v_0, v_1 \rangle = e_1$, $\langle v_1, v_2 \rangle = e_2$ y $\langle v_0, v_2 \rangle = e_3$ resulta que $C_0(K) \cong \mathbb{Z}^3$, $C_1(K) \cong \mathbb{Z}^3$ y $C_2(K) \cong \mathbb{Z}$. Tenemos

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \longrightarrow 0$$

donde

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Claramente $H_i(K) = 0$ para $i > 2$. Además, $\ker \partial_2$, entonces $H_2(K) = 0$. Notemos que $\operatorname{im} \partial_2 \cong \mathbb{Z}$ y $\ker \partial_1 \cong \mathbb{Z}$, luego $H_1(K) = 0$. Por otro lado, $\operatorname{im} \partial_1 \cong \mathbb{Z}^2$. Por ende $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

Comentario: Se invita a calcular la homología de un n -simplejo. Hasta ahora hemos definido todo respecto a \mathbb{Z} , pero se puede definir homología simplicial de manera análoga para cualquier anillo R .

Lema 1.6: Sea $f : K \rightarrow L$ un mapeo simplicial, entonces las funciones

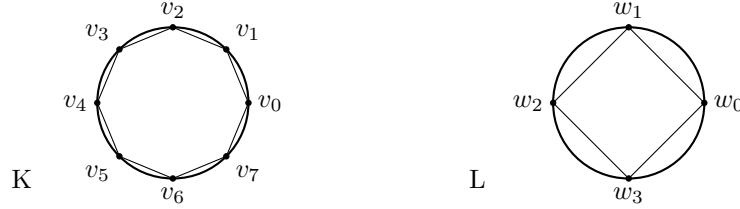
$$f_n : C_n(K) \rightarrow C_n(L)$$

$$\langle v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle \rightarrow \begin{cases} \langle f(v_{\alpha_0}), \dots, f(v_{\alpha_n}) \rangle & \text{si son distintos} \\ 0 & \text{si no lo son} \end{cases}$$

forman un mapeo de cadena.

Por lo tanto, f induce un morfismo entre los grupos de homología de los complejos simpliciales

Ejemplo: Definimos los siguientes complejos simpliciales



Para cada complejo se da el orden que sigue $v_0 < v_1 < \dots < v_7$ y $w_0 < w_1 < w_2 < w_3$ y definimos $f : K \rightarrow L$ por $f(v_i) = f(v_{i+4}) = w_i$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Veamos quien es $f_* : H_1(K) \rightarrow H_1(L)$. En primer lugar, sabemos que

$$H_1(K) = \ker(C_1(K) \rightarrow C_0(K)) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathbb{Z}$$

Similarmente $H_1(L) \cong \mathbb{Z}$. Entonces

$$f_*(\langle v_0, v_1 \rangle + \dots + \langle v_6, v_7 \rangle - \langle v_0, v_7 \rangle) = 2(\langle w_0, w_1 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle + \langle w_2, w_3 \rangle - \langle w_0, w_3 \rangle)$$

luego $f_* : H_1(K) \xrightarrow{2} H_1(L)$. Por otro lado, notemos que $H_0(K) \cong H_0(L) \cong \mathbb{Z}$, ya que todo par de vértices en el complejo esta conectado por una secuencia de aristas, luego $f_*([v_0]) = [w_0]$, entonces $f_* : H_0(K) \rightarrow H_0(L)$ es isomorfismo.

Teorema 1.7 (Mayer-Vietoris): Sea K un complejo simplicial y M, N subcomplejos de K que cubren a K , es decir, $M \cup N = K$. Se tienen los mapeos

$$\begin{array}{ccc} M \cap N & \xrightarrow{i_N} & N \\ \downarrow i_M & & \downarrow j_N \\ M & \xrightarrow{j_M} & K \end{array}$$

Existen morfismos $\delta_n : H_n(K) \rightarrow H_{n-1}(K)$ tales que la secuencia

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\delta_{n+1}} & H_n(M \cap N) & \xrightarrow{i_{M*} \oplus i_{N*}} & H_n(M) \oplus H_n(N) & \xrightarrow{j_{M*} - j_{N*}} & H_n(K) & \\ & & & \delta_n & & & \\ \xrightarrow{\quad} & H_{n-1}(M \cap N) & \xrightarrow{i_{M*} \oplus i_{N*}} & H_{n-1}(M) \oplus H_{n-1}(N) & \xrightarrow{j_{M*} - j_{N*}} & H_{n-1}(K) & \longrightarrow \dots \\ & & & & & & \\ \dots & \longrightarrow & H_0(M) \oplus H_0(N) & \xrightarrow{j_{M*} - j_{N*}} & H_0(K) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

es exacta.

Demostración. Verificaremos que

$$0 \longrightarrow C_n(M \cap N) \xrightarrow{i_{M*} \oplus i_{N*}} C_n(M) \oplus C_n(N) \xrightarrow{j_{M*} - j_{N*}} C_n(K) \longrightarrow 0$$

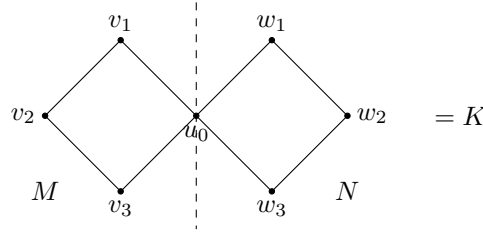
es una secuencia exacta corta de grupos abelianos para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, como C_n es libremente generado por los n -simplices e i es inyectiva, entonces $i_{M*} \oplus i_{N*}$ es inyectiva. Además, $j_{M*} - j_{N*}$ es sobreyectiva por hipótesis y es directo

que $\text{im } i_{M*} \oplus i_{N*} \subseteq \ker j_{M*} - j_{N*}$. Resta ver que

$$\ker j_{M*} - j_{N*} \subseteq \text{im } i_{M*} \oplus i_{N*}$$

Sea $(x, y) \in \ker j_{M*} - j_{N*}$ entonces $j_{M*}(x) = j_{N*}(y)$, es decir, x e y se escriben como suma de simplices en N y M respectivamente, entonces $(x, y) \in \text{im } i_{M*} \oplus i_{N*}$. Así, usando el lema de la serpiente, concluimos. \square

Ejemplo: Consideremos la siguiente situación



Notemos que $H_1(M) \cong \mathbb{Z}$ y $H_1(N) \cong \mathbb{Z}$, además $M \cap N = \{u_0\}$, entonces usando mayer vietoris nos queda que

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & H_1(K) \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} H_0(K) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Para $i > 2$ notamos que $H_i(K) = 0$, por otro lado el morfismo $\varphi(1) = (1, 1)$ ya que manda generador en generador, esto por que todo par de puntos en M y N estan relacionados por un camino de aristas. De este modo,

$$H_0(K) \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\ker \phi} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\text{im } \varphi} \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

donde el último isomorfismo se da por que φ es inyectiva, es decir, el morfismo $H_1(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ es trivial.

Teorema 1.8: Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una función continua. Entonces f induce un homomorfismo

$$f_* : H_*(K) \rightarrow H_*(L)$$

tal que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ e $\text{id}_* = \text{id}_{H_*(K)}$, donde $g : |L| \rightarrow |M|$ es continua.

Observación: Con esto se tendría que $H_*(K)$ es invariante topológico. Se probara en dos pasos. Veremos que toda función f continua se puede aproximar a una función g simplicial, también hay que comprobar que $f_* := g_*$ es independiente de la función simplicial escogida.

Teorema 1.9 (Aproximación Simplicial): Sean K, L complejos simpliciales finitos y $f : |K| \rightarrow |L|$ una función continua. Entonces existe $r \in \mathbb{N}$ y una aproximación simplicial a f

$$g : K^{(r)} \rightarrow L$$

A partir de esta aproximación simplicial, se cumplen dos propiedades importantes, que son

- (1) f es homotópica a g . Notemos que $g(x), f(x) \in \text{carr}(f(x))$, entonces el segmento entre $g(x)$ y $f(x)$ está en $\text{carr}(f(x))$ porque es un conjunto convexo. Definimos

$$\begin{aligned} |K| \times [0, 1] &\rightarrow |L| \\ (x, t) &\rightarrow tg(x) + (1 - t)f(x) \end{aligned}$$

- (2) Sean $f_1 : |K| \rightarrow |L|$, $f_2 : |L| \rightarrow |M|$ continuas y $g_1 : K \rightarrow L$, $g_2 : L \rightarrow M$ aproximaciones simpliciales de f_i , entonces $g_2 \circ g_1$ es aproximación simplicial de $f_2 \circ f_1$.

Se tiene que

$$g_2 g_1(x) \in g_2(\text{carr}(f_1(x))) = \text{carr}(g_2 f_1(x)) \subseteq \text{carr}(f_2 f_1(x))$$

Proposición 1.10: Sea $\text{id} : |K'| \rightarrow |K|$, la función $a : V_{K'} \rightarrow V_K$ dada por $a(\hat{\sigma}) = v \in V_\sigma$ cumple que

- (1) Define una aproximación simplicial de la identidad.
- (2) Toda aproximación simplicial $g : K' \rightarrow K$ de la identidad es de esta forma.

Demostración. Veamos que a es un mapeo simplicial. Sea $\sigma = \langle \hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_n \rangle \in K'$, entonces $a(\hat{\sigma}_i) = v_i \in V_{\sigma_i}$. Sabemos que $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ para $0 \leq i \leq n-1$, lo que implica que $V_i \subset V_{i+1}$, en particular, $V = \{v_0, \dots, v_n\} \subseteq V_{\sigma_n}$, luego, V genera una cara de σ_n , es decir, un simplex en $|K|$.

Sea $x \in |K'|$, debemos probar que $a(x) \in \text{carr}(id(x))$. En efecto, □