Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Giancarlo Urzúa – Estudiante: Benjamín Mateluna

Geometría Algebraica - MAT2824
Apuntes
06 de Marzo de 2025

Índice

Introducción

Habrán tres evaluaciones (I1, I2, I3) cada una vale un 20 % y un examen (EX) que vale un 40 %. Las fechas son, 9 de abril, 14 de Mayo, 11 de Junio y 1 de Julio respectivamente.

1. Conjuntos Algebraicos afines

1.1. Preliminares algebraicos

Sea R un anillo conmutativo con $+, \cdot$ y con $1 \neq 0$. Si R, R' son anillos, un morfismo de anillos es una función $f : R \to R'$ que respeta $+, \cdot$ y $f(1_R) = 1_{R'}$. Un dominio R es un anillo en donde $xy = xz$ implica que $y = z$ para todo $x \neq 0$.

Ejemplo $\mathbb{Z}$ es dominio, pero $\mathbb{Z}/6$ no lo es.

Un cuerpo es un dominio donde todo $x \neq 0$ tiene un inverso. Dado R dominio, existe el cuerpo de fracciones K tal que $R \subseteq K$. Dado R anillo, sea $R[x]$ el anillo de polinomios con coeficientes en R, sus elementos tienen la forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d \ , \ a_d \neq 0$$

y decimos que f tiene grado d denotado por $gr(f)$. Se define de manera recursiva $R[x_1, \cdots, x_n] = R[x_1, \cdots, x_{n-1}][x_n]$ el anillo de polinomios en n variables. Dado $f = \alpha \cdot x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$ su grado se define como $gr(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, para f en general, definimos su grado como $gr(f) := max\{\text{grados de monomios}\}$. Dado $f \in R[x_1, \cdots, x_n]$ y $d = gr(f)$ entonces

$$f = F_0 + F_1 + \cdots + F_d \text{ , con } F_i \text{ homogeneos, esto es, } F_i(\lambda x_{x_1}, \cdots, \lambda x_n) = \lambda^i F(x_1, \cdots, x_n)$$

Si $f \in R[x]$ una raíz (cero) de f es un $r \in R$ tal que $f(r) = 0$.

Teorema 1. *Se tiene que r es cero si y solo si $f(x) = (x - r)g(x)$ para algún $g \in R[x]$.*

Un cero de $f(x_1, \cdots, x_n)$ es un $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$.

Decimos que $r \in R$ es irreductible si toda descomposición $r = ab$ con $a, b \in R$ se tiene que a o b es una unidad. Un anillo R se dice dominio de factorización unica si todo elemento no nulo se puede factorizar de manera esencialmente unica en producto de irreductibles.

Lema 1.1. *Si R es dominio de factorización unica entonces $R[x]$ es dominio de factorización unica.*

Lema 1.2. *Si R es un dominio de factorización unica y K su cuerpo de fracciones. Dado $f \in R[x]$ irreductible entonces f es irreductible en $K[x]$.*

Sea R un anillo. Un ideal $I \subset R$ es tal que si $a, b \in I$ entonces $a + b \in I$ y si $r \in R$ entonces $ra \in I$. Consideramos la función $\pi : R \to R/I$ donde R/I es el anillo cociente que es conmutativo. Un ideal es maximal si y solo si R/I es cuerpo.

Teorema 2. *Sea R un dominio euclideano (se cumple algoritmo de la división) y $a, b \in R$, consideremos $mcd(a, b) = d$. Entonces existen $c, e \in R$ tales que $ac + be = d$.*

Teorema 3. *Si F es un polinomio homogeneo de grado d, entonces*

$$dF = x_1 F_{x_1} + \cdots + x_n F_{x_n}$$

donde F_{x_i} es la derivada formal con respecto a x_i.

1.2. Espacio Afín y Conjuntos Algebraicos

Definición 3.1. *Sea k un cuerpo. El espacio afín de dim n es $\mathbb{A}_k^n := k^n$ (generalmente se supondra que $k = \overline{k}$).*

Definición 3.2. *Una hipersuperficie de $\mathbb{A}_k^n$ es $V(F) = \{p \in \mathbb{A}_k^n : F(p) = 0\}$ para un $F \in k[x_1, \cdots, x_n]$.*

Ejemplos:

- Sea $k = \mathbb{R}$ consideramos la hipersuperficie $V(y^2 - x^2(x+1)) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (foto)
  El punto $(0,0)$ se llama nodo.
- Veamos la hipersuperficie $V((x^3 - y^3)(y^3 - 1)(x^3 - 1)) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.
- La hipersuperficie $V(x^2 + y^2 - z^2) \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ es conocida como cono (foto)
  Como en el primer ejemplo, el punto $(0,0)$ se llama nodo
- Consideremos $V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (foto)
  En este caso, el punto $(0,0)$ no es un nodo, en este caso se llama cuspide.
- Veamos el caso de una hipersuperficie no parametrizable, esta es $V(y^2 - x(x+1)(x+\lambda))$.

Definición 3.3. *Sea $S \subseteq k[x_1, \cdots, x_n]$ un conjunto arbitrario, se define*

$$V(S) := \{p \in \mathbb{A}^n_k : F(p) = 0 \quad \forall F \in S\} = \bigcap_{F \in S} V(F)$$

y se dice que es un conjunto algebraico afín.

Propiedades de un conjunto algebraico afín:

a) Sea $I = \langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i s_i, a_i \in k \right\}$, entonces $V(I) = V(S)$.

   Demostración. *Veamos que $V(I) \subseteq V(S)$, si $p \in V(I)$, como $S \subseteq I$ se sigue que $p \in V(S)$. Para $V(S) \subseteq V(I)$ notemos que dado $f \in I$ se tiene que $f = \sum a_i s_i$, luego si $p \in V(S)$ vemos que $f(p) = \sum a_i s_i(p) = 0$.*

b) Sea $\{I_\alpha\}$ una colección de ideales, entonces $V(\bigcup_\alpha I_\alpha) = \bigcap_\alpha V(I_\alpha)$.

c) Si $I \subseteq J$ se sigue que $V(J) \subseteq V(I)$.

d) Sean $F, G \in k[x_1, \cdots, x_n]$, se tiene que $V(FG) = V(F) \cup V(G)$.

e) Tenemos las siguientes dos identidades $V(1) = \emptyset$ y $V(0) = \mathbb{A}^n_k$.
   observación: Lo anterior es valido si k es algebraicamente cerrado, de lo contrario, si consideramos $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ vemos que $V(x^2+1) = \emptyset$.

1.3. Ideal de un conjunto

Definición 3.4. *Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ un conjunto arbitrario. Se define el ideal de X como*

$$I(X) := \{F \in k[x_1, \cdots, x_n] : F(p) = 0 \quad \forall p \in X\}$$

observación: Notemos que si $F^m \in I(X)$ entonces $F \in I(X)$. Un ideal con esta propiedad se dice radical.

Propiedades del ideal de un conjunto:

a) Si $X \subseteq Y$ se tiene que $I(Y) \subseteq I(X)$.

b) Se tiene lo siguiente $I(\emptyset) = k[x_1, \cdots, x_n]$ y $I(\mathbb{A}^n_k) = \{0\}$. Además, si k es un cuerpo infinito, se tiene que $I(\{a_1, \cdots, a_n\}) = (x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$.

1.4. El Teorema de la Base de Hilbert

Teorema 4. *Todo conjunto algebraico corresponde a la intersección finita de hipersuperficies.*

Demostración. *Sea $V(I)$ el conjunto algebraico para algún ideal $I \subseteq k[x_1, \cdots, x_n]$. Basta con probar que I es finitamente generado, en tal caso $I = (F_1, \cdots, F_r)$, entonces $V(I) = V(F_1, \cdots, F_r) = V(F_1) \cap \cdots \cap V(F_r)$.*

Teorema 5. *Si R es un anillo Noetheriano, entonces $R[X]$ es un anillo Noetheriano.*

Demostración. *Sea $I \subseteq R[X]$ un ideal. Dado $F = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$ con $a_d \neq 0$ decimos que a_d es el término líder de F denotado por $l(F)$. Sea*

$$\mathcal{J} := \{r \in R : r \text{ es término líder de algún } F \in I\} \cup \{0\}$$

Afirmamos que $\mathcal{J}$ es ideal, en efecto, sean $l(F), l(G) \in \mathcal{J}$, supongamos sin perdida de generalidad que $gr(F) \leq gr(G)$, luego

$$Fx^{gr(G)-deg(F)} + G = H$$

donde $l(H) = l(F) + l(G)$. Es claro que $r \cdot l(F) \in \mathcal{J}$ con $r \in R$. Por hipotesis existen $F_1, \cdots, F_r \in I$ tales que $\mathcal{J} = (l(F_1), \cdots, l(F_r))$. Sea $N > gr(F_i)$ para todo $1 \leq i \leq r$. Para cada $m \leq N$ definimos

$$\mathcal{J}_m := \{r \in R : r \text{ es término líder de } F \in I \text{ y } gr(F) \leq m\}$$

Notemos que los $\mathcal{J}_m$ son ideales en R, por ende, son finitamente generados, es decir $\mathcal{J}_m = (l(F_{m,j}))$. Consideremos el ideal $I' = \langle F_{m,j}, F_i \rangle$, afirmamos que $I' = I$. Claramente se tiene que $I' \subset I$. Supongamos, por contradicción, que $I' \neq I$, sea $G \in I' \setminus I$ de menor grado. Tenemos dos consideramos

a) Veamos cuando $gr(G) > N$, existen polinomios $Q_i \in R[X]$ tal que G y $\sum Q_iF_i$ tienen el mismo coeficiente líder. Luego $G - \sum Q_iF_i \in I'$ pues tiene menor grado que G, se sigue que $G \in I'$.

b) El resultado para $gr(G) \leq N$ se obtiene del mismo modo, usando esta vez los $F_{m,j}$.

Ejemplo: Sea $(0,0) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, entonces $\{(0,0)\} = V(x^2 + y^2)$. Pero en $\mathbb{C}$ tenemos que $\{(0,0)\} \neq V(F)$ para ningún $F \in k[x,y]$.

1.5. Componentes Irreducibles en un Conjunto Algebraico

Definición 5.1. *Un conjunto algebraico V se dice reducible si $V = V_1 \cup V_2$ con V_i conjunto conjunto algebraico y distinto de V.*

Observación: Un punto es un conjunto algebraico irreducible, lo que implica que cualquier conjunto finito es algebraico y reducible.
Ejemplos:

- Notemos que $V(xy) = V(x) \cup V(y)$, es decir $V(xy)$ es reducible.
- Consideremos el espacio afín $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$, entonces el conjunto algebraico $V((x^2+1)x) = \{0\}$ es irrducible.

Proposición 5.1. *Un conjunto algebraico V es irrducible si y solo si el ideal $I(V)$ es primo.*

Demostración.

- $\Rightarrow$ | *Supongamos que $I(V)$ no es primo, entonces existen F_1, F_2 polinomios tales que $F_1 \cdot F_2 \in I(V)$ y $F_1, F_2 \notin I(V)$. Afirmamos que $V = (V \cap V(F_1)) \cup (V \cap V(F_2))$. Sea $p \in V$, entonces $F_1(p) \cdot F_2(p) = 0$ lo que implica que $p \in (V \cap V(F_1)) \cup (V \cap V(F_2))$, además $V \cap V(F_i) \neq V$ ya que existe q_i tal que $F_i(q_i) \neq 0$.*
- $\Leftarrow$ | *Supongamos que V es reducible. Luego $V = V_1 \cup V_2$ con $V_i \neq V$. Entonces existe un polinomio F_i tal que $F_i(p) = 0$ para todo $p \in V_i$, pero no para todo punto en V. Notemos que $F_1 \cdot F_2 \in I(V)$, sin embargo, $F_i \notin I(V)$.*

Definición 5.2. *Una variedad afín V es un conjunto algebraico afín irreducible.*

Lema 5.1. *Sea R un anillo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) R es Noetheriano.

b) Si $\mathcal{C}$ es una colección no vacía de ideales en R, entonces $\mathcal{C}$ tiene un elemento maximal, es decir, existe $I \in \mathcal{C}$ que no está contenido en otro ideal de $\mathcal{C}$.

c) Toda cadena ascendente de ideales en R se estabiliza.

Demostración.

- *(a) $\Rightarrow$(b) | Necesitamos usar el axioma de elección. Sea $\mathcal{C}$ una colección de ideales en R, para cada subconjunto no vacío de $\mathcal{C}$ elegimos un ideal. Sea I_0 el ideal escogido para $\mathcal{C}$, definimos el conjunto*

$$\mathcal{C}_1 := \{I \in \mathcal{C} : I_0 \subset I\}$$

Si $\mathcal{C}_1 = \emptyset$ entonces I_0 es el ideal maximal. Si no, repetimos el proceso. Sea $I \in \mathcal{C}_1$ el escogido, definimos

$$\mathcal{C}_2 := \{I \in \mathcal{C}_2 : I_1 \subset I\}$$

Es suficiente demostrar que existe n tal que $\mathcal{C}_n = \emptyset$. Sea $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ es ideal, además, notemos que $I_n \subset I_{n+1}$. Como R es Noetheriano, entonces $I = (f_1, \cdots, f_m)$, luego existe r tal que $f_1, \cdots, f_m \in I_r$, lo que implica que $I \subseteq I_r$ y por lo tanto $I = I_r$ se sigue que $I_r = I_s$ para todo $s > r$, lo cual es una contradicción.

- *(b) $\Rightarrow$(c) | Basta tomar $\mathcal{C}$ como nuestra colección de ideales en R, luego, existe un elemento maximal.*

- *(c) $\Rightarrow$(a) | Sea $I \subseteq R$ un ideal. Si $I = (0)$ estamos listos, de lo contrario, sea $f_1 \in I$, entonces $(f_1) \subseteq I$. Supongamos que $I \setminus (f_1) \neq \emptyset$, sea $f_2 \in I \setminus (f_1)$, de esta manera construimos una cadena ascendente de ideales*

$$(f_1) \subset (f_1, f_2) \subset \cdots \subset (f_1, \cdots, f_n) \subset \cdots$$

para algun N la cadena se estabiliza y por ende $(f_1, \cdots, f_N) = I$.

Proposición 5.2. *Cualquier colección de conjuntos algebraicos $\{V_i\}_{i \in I}$ en $\mathbb{A}_k^n$ tiene un elemento minimal.*

Demostración. *Dada $\{V_i\}_{i\in I}$ obtenemos una colección $\mathcal{C} = \{I(V_i)\}_{i\in I}$ de ideales en $k[x_1, \cdots, x_n]$, el cual es Noetheriano. Luego $\mathcal{C}$ tiene un elemento maximal, digamos $I(V_*)$, afirmamos que V_* es el elemento minimal, de lo contrario, existe $V_i \subseteq V_*$ entonces $I(V_*) \subseteq I(V_i)$.*

Teorema 6. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un conjunto algebraico. Entonces existen unicos conjuntos algebraicos irreducibles $V_1, \cdots, V_m$ tales que*

$$V = \bigcup_{i}^{m} V_i \quad y \quad V_i \not\subset V_j \quad \forall i \neq j$$

Demostración. *Sea $\mathcal{C} = \{V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ conjunto algebraico : V no es unión finita de irreducibles$\}$. Si $\mathcal{C}$ es vacío estamos listos. Si no lo es, sea $V \in \mathcal{C}$ minimal. Tenemos que V no es irreducible, entonces $V = V_1 \cup V_2$ con $V_i \subset V$, lo que implica que algún $V_i \in \mathcal{C}$ lo cual es una contradicción.*

Sea $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ con V_i irreducibles, asumir que $V_i \not\subset V_j$ para todo $i \neq j$. Digamos que

$$\bigcup_{i=1}^{m} V_i = \bigcup_{j=1}^{s} W_j \quad con \quad V_i \not\subset V_j \quad y \quad W_i \not\subset W_j \quad y \quad V_i, W_j \neq \emptyset$$

Notemos que $V_1 = V_1 \cap V = \bigcup_{j=1}^{s}(V_1 \cap W_j)$, como V_1 es irreducible, existe unico j tal que $V_1 = V_1 \cap W_j$, es decir, $V_1 \subseteq W_j$. Por otro lado, existe unico i tal que $W_j \subseteq V_i$, lo que implica que $V_1 \subseteq V_i$ entonces $i = 1$ y así $V_1 = W_j$.

1.6. Conjuntos Algebraicos del Plano

Lema 6.1. *Si $f, g \in k[x, y]$ no tienen factores en común, entonces $V(f, g)$ es un conjunto finito.*

Demostración. *Recordemos que $k(x)[y]$ es dominio euclideano. Por lema de gauss, f, g no tienen factores en común en $k(x)[y]$, entonces existen $a, b \in k(x)[y]$ tal que $af + bg = 1$. Existe $r(x)$ tal que*

$$raf + rbg = r$$

es una ecuación en $k[x, y]$. Sea $(p, q) \in V(f, g)$, evaluando en la ecuación anterior vemos que

$$0 = raf(p, q) + rbg(p, q) = r(p)$$

por lo tanto la cantidad de valores posibles de p es finita. Haciendo lo mismo para y obtenemos que q solo puede tomar una cantidad finita de valores.

Corolario 6.1. *Si $f \in k[x, y]$ es irreducible con $|V(f)| = \infty$ entonces $I(V(f)) = (f)$ y $V(f)$ es irreducible.*

Demostración. *Si $g \in I(V(f))$, entonces $|V(f, g)| = \infty$, luego, f y g tienen factores en común, como f es irreducible, entonces f divide a g lo que implica que $g \in (f)$. La otra contención es directa.*

Por otro lado, notemos que (f) es primo, pues f es irreducible, así, $V(f)$ es irreducible.

Corolario 6.2. *Supongamos que k es infinito, entonces los conjuntos algebraicos irreducibles de $\mathbb{A}^2_k$ son: $\emptyset$, $\mathbb{A}^2_k$, un punto y los conjuntos $V(f)$ con f irreducible y $|V(f)| = \infty$.*

Demostración. *Sea V un conjunto algebraico irreducible. Si $|V| < \infty$ entonces $V = \emptyset$ o V es un punto. Si $I(V) = (0)$ entonces $V = \mathbb{A}^2_k$. Supongamos que $|V| = \infty$ y que $(0) \subset I(V) \subset k[x, y]$. Como $I(V)$ es primo, existe un polinomio no constante e irreducible tal que $f \in I(V)$.*

Si $g \in I(V)$ y $g \notin (f)$, entonces $V \subset V(f, g)$, por la proposición, esto es una contradicción. De este modo, $I(V) = (f)$. Afirmamos que $V(f) = V$, en efecto, tenemos que $V = V(I(V)) = V(f)$.

Corolario 6.3. *Supongamos que $k = \overline{k}$. Sea $f \in k[x, y]$ y sea $f = \prod_{i=1}^{m} f_i^{\alpha_i}$ con f_i irreducible. Entonces*

$$V(f) = \bigcup_{i=1}^{m} V(f_i)$$

es su descomposición en irreducibles y además $I(V(f)) = (f_1, \cdots, f_m)$.

Demostración. *Como f_i, f_j son coprimos no hay inclusiones entre $V(f_i)$ y $V(f_j)$, de lo contrario si existen $i \neq j$ tales que $V(f_i) \subset V(f_j)$, entonces*

$$(f_i) = I(V(f_i)) \supset I(V(f_j)) = (f_j)$$

lo cual es una contradicción. Luego,

$$I(V(f)) = I\left(\bigcup V(f_i)\right) = \bigcap I(V(f_i)) = \bigcap (f_i) = (f_1 \cdots f_m)$$

1.7. Nullstellensatz de Hilbert

En general supondremos que $k = \overline{k}$, a no ser que se diga lo contrario.

Teorema 7. *Sea $I \subset k[x_1, \cdots, x_n]$ un ideal, entonces $V(I) \neq \emptyset$.*

Demostración. *Podemos suponer que I es maximal. En efecto, recordemos que todo ideal esta contenido en un ideal maximal, digamos M, entonces $V(M) \subseteq V(I)$. $\{\}$Como I es maximal, esto equivale a que $k[x_1, \cdots, x_n]/I \supset k$ es cuerpo. Como k es algebraicamente cerrado, podemos asumir que $k[x_1, \cdots, x_n]/I = k$.*

Así, cada variable x_i puede ser identificada por un elemento en k digamos a_i, lo que implica que $x_i - a_i$ es igual 0 bajo el cociente, se sigue que $x_i - a_i \in I$, luego $I = (x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$. (Mejorar escritura)

De la demostración surge una pregunta, ¿Por que $k[x_1,\cdots,x_n]/I = k$? El siguiente lema lo responde

Lema 7.1. *(Lema de Zariski) Sea $K \subset L$ una extensión de cuerpo tal que L es finitamente generado como k-algebra. Entonces L es finitamente generado como k-módulo.*

Exploraremos una demostración menos general del teorema anterior, pero sin usar lema de Zariski. Para ello supongamos que $k = \mathbb{C}$.

Demostración. *Del mismo modo, supongamos que $I \subset k[x_1,\cdots,x_n]$ es un ideal maximal, luego $L := k[x_1,\cdots,x_n]/I$ es cuerpo, consideramos el morfismo canónico*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n] \arrow[r, "\pi"] & L \\ \mathbb{C}[x_i] \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "\pi_i:=\pi\big|_{\mathbb{C}[x_i]}"'] & \end{tikzcd}$$

Afirmamos que $ker(\pi_i) = (0)$ o $ker(\pi_i) = (x_i - a_i)$ para algún $a_i \in \mathbb{C}$. En efecto, si $ker(\pi_i) \neq (0)$, entonces $(0) \subset ker(\pi_i) \subset \mathbb{C}[x_i]$, donde la segunda contención es estricta, de lo contrario, $1 \in I$ y entonces $I = k[x_1,\cdots,x_n]$. Sea $f \in ker(\pi_i)$, entonces como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, existe $(x_i - a_i)$ factor de f tal que $\pi_i(x_i - a_i) = 0$.

Volviendo a la demostración del teorema. Tenemos dos consideramos

- *$ker(\pi_i) = (x_i - a_i)$ para todo i. Entonces $(x_1 - a_i,\cdots,x_n - a_n) \subseteq I$. Como $(x_1 - a_i,\cdots,x_n - a_n)$ es ideal maximal e I es propio se obtiene el resultado.*
- *Existe i tal que $ker(\pi_i) = (0)$, entonces π_i es inyectiva, como L es cuerpo $\mathbb{C}(x_i)$ se incrusta en L.*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[x_i] \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d, "i"'] & L \\ \mathbb{C}(x_i) \arrow[ur, "i_L"'] & \end{tikzcd}$$

Es decir $\mathbb{C}(x_i) \subseteq L$. Notemos que L es un espacio vectorial numerable, a saber, la base corresponde a todos los monomios. Notemos que el siguiente conjunto es linealmente independiente

$$S := \left\{ \frac{1}{x_i - a_i} : a \in \mathbb{C} \right\}$$

Notemos que si $\sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{x_i - a_j} = 0$ entonces multiplicando por $(x_i - a_1)\cdots(x_i - a_m)$ y evaluando se tiene que $\lambda_j = 0$ para todo j. Esto es una contradicción pues S es no numerable.

Teorema 8. *(Teorema de Nullstellensatz) Sea $I \subset k[x_1,\cdots,x_n]$, entonces $I(V(I)) = \sqrt{I}$.*

Demostración.

- *$\supseteq$ | Sea $f \in \sqrt{I}$, entonces $f^n \in I$ para algún n. Luego $f^n(p) = 0$ para todo $p \in V(I)$, entonces $f(p) = 0$ para todo $p \in V(I)$ lo que implica que $f \in I(V(I))$.*
- *$\subseteq$ | (Truco de Rabinowitsch) Sea $f \in I(V(I))$ y digamos que $I = (f_1,\cdots,f_m)$. Definimos el ideal $J := (f_1,\cdots,f_m, x_{n+1}f - 1) \subseteq k[x_1,\cdots,x_{n+1}]$. Supongamos que $(a_1,\cdots,a_n,a_{n+1}) \in V(J)$, entonces $(a_1,\cdots,a_n) \in V(I)$ se sigue que $f(a_1,\cdots,a_n) = 0$, esto resulta en una contradicción. Concluimos que $V(J) = \emptyset$.*

  Por el teorema anterior y como k es algebraicamente cerrado tenemos que $J = k[x_1,\cdots,x_{n+1}]$, entonces existen $\{g_i\}_{i=1}^{m+1} \subseteq k[x_1,\cdots,x_n]$ tales que

$$g_1f_1 + \cdots + g_mf_m + g_{m+1}(x_{n+1}f - 1) = 1$$

tomando $x_{n+1} = 1/f$ *obtenemos*

$$g_1(x_1, \cdots, x_n, 1/f)f_1 + \cdots + g_m(x_1, \cdots, x_n, 1/f)f_m = 1$$

existe $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^n \in I$.

Corolario 8.1. *Hay una correspondecia uno a uno entre puntos en* $\mathbb{A}^n_k$ *e ideales maximales.*

Corolario 8.2. *Las variedades afines en* $\mathbb{A}^n_k$ *estan en correspondecia uno a uno con los ideales primos.*

Corolario 8.3. *Las hipersuperficies irreducibles en* $\mathbb{A}^n_k$ *se corresponden uno a uno con polinomios irreducibles en* $k[x_1, \cdots, x_n]$.

Corolario 8.4. *Sea* $I \subseteq k[x_1, \cdots, x_n]$ *un ideal. Entonces* $V(I)$ *es un conjunto finito de puntos si y solo si como* k*-espacio vectorial* $k[x_1, \cdots, x_n]/I$ *tiene dimensión finita.*

Demostración.

- $\Leftarrow |$ *Sean* $p_1, \cdots, p_r \in V(I) \subseteq \mathbb{A}^n_k$. *Consideramos* $F_1, \cdots, F_r \in k[x_1, \cdots, x_n]$ *tales que* $F_i(p_j) = 0$ *para todo* $i \neq j$ *y* $F_i(p_i) = 1$. *Sea* $\overline{F_i}$ *la imagen de* F_i *en el cociente* $k[x_1, \cdots, x_n]/I = R$.

  Afirmamos que el conjunto $\{F_1, \cdots, F_r\}$ *es linealmente independiente en* R. *En efecto, si*

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overline{F_i} = 0 \quad con \quad \lambda_i \in k$$

  entonces $\sum \lambda_i \overline{F_i} \in I$, *evaluando en* p_i *vemos que* $\lambda_i = 0$ *para todo* i, *lo que prueba la afirmación. Así,* $r \leq dim_k R$.

- $\Rightarrow |$ *Digamos que* $V(I) = \{p_1, \cdots, p_r\}$ *y* $p_i = (a_{i1}, \cdots, a_{in})$. *Definimos*

$$F_j := \prod_{i=1}^{r} (x_j - a_{ij})$$

  Luego $F_j \in I(V(I))$, *por Nullstellensatz, se tiene que* F_j^N *para algún* N, *así,* $\overline{F_j}^N = 0$ *en* R, *es decir,* $p(x_j) + x_j^{rN} = 0$, *con* $gr(p_j) < rN$ *entonces* $dim_k R < \infty$.

Ejemplos:

- Consideremos los polinomios $x - y, y - x^2 \in k[x, y]$, se sigue $V((x - y, y - x^2)) = \{(0, 0), (1, 1)\}$

$$dim_k \left(k[x, y] \Big/ (x - y, y - x^2) \right) = dim_k \left(k[x] \Big/ (x - x^2) \right) = dim_k (k \oplus kx) = 2$$

- Notemos que $V(x - y - 1, x - y) = \emptyset$ y por otro lado

$$k[x, y] \Big/ (x - y, x - y - 1) = k[x, y] \Big/ (1) = (0)$$

  así $dim_k R = 0$.

- Veamos que $V(y, x - y^3) = \{(0, 0)\}$, entonces

$$dim_k \left(k[x, y] \Big/ (y, x^3 - y) \right) = dim_k \left(k[x] \Big/ (x^3) \right) = 3$$

- El conjunto $V(my - x, y - x^2)$ tiene dos puntos de intersección para todo $m \neq 0$,

$$dim_k \left(k[x, y] \Big/ (my - x, y - x^2) \right) = dim_k \left(k[x] \Big/ (mx^2 - x) \right) = 2$$

  pero si $m = 0$, vemos que $dim_k R = 1$.

1.8. Modulos y Condiciones de Finitud

Sea R un anillo, se dice que M es un R-módulo, si M es un grupo conmutativo y si viene con producto escalar, es decir, una función de $R \times M$ a M, se denota por $a \cdot m$ que satisface lo siguiente

- $(a+b)m = am + bm$ para todo $a, b \in R$ y $m \in M$.
- $a(m+n) = am + an$ para todo $a \in R$ y $m, n \in M$.
- $(ab)m = a(bm)$ para todo $a, b \in R$ y $m \in M$.
- $1_R \cdot m = m$ para todo $m \in M$

Un subgrupo de N de un R-módulo M se dice un submodulo si N es un R-módulo con el mismo producto escalar. Dado $S \subseteq M$, definimos el generado de S por

$$\langle S \rangle := \left\{ \sum r_i s_i \;\mid\; r_i \in R, s_i \in S \right\}$$

de hecho corresponde al submódulo de M mas pequeño que contiene a S. Decimos que M es finitamente generado si existe $S \subseteq M$ tal que $\langle S \rangle = M$.

Sea $R \subseteq S$ anillos. Decimos que S es modulo finito sobre R, si es finitamente generado como R-módulo.

Sean $v_1, \cdots, v_n \in S$. Sea $\varphi : R[x_1, \cdots, x_n] \to S$ el morfismo de anillo que manda x_i a v_i. La imagen de φ se denota por $R[v_1, \cdots, v_n]$ y corresponde a un subanillo de S que contiene a R y $v_1, \cdots, v_n$, además, es el subanillo mas pequeño con esta propiedad. Decimos que S es un algebra finita sobre R si $S = R[v_1, \cdots, v_n]$ para algunos $v_1, \cdots, v_n \in S$.

Sean $K \subset L$ cuerpos. Sean $v_1, \cdots, v_n \in L$ y consideremos $K(v_1, \cdots, v_n)$ el cuerpo de fracciones de $K[v_1, \cdots, v_n]$. Al igual que antes, corresponde al menor subcuerpo de L que contiene a K y $v_1, \cdots, v_n$. El cuerpo L se dice una extensión finitamente generada de K si $L = K(v_1, \cdots, v_n)$ para algunos $v_1, \cdots, v_n \in L$.

1.9. Elementos Integrales

Definición 8.1. *Sean $R \subset S$ dominios enteros. Decimos que un elemento $v \in S$ es integral sobre R si*

$$v^n + r_{n-1} v^{n-1} + \cdots + r_1 v + r_0 = 0$$

para algunos $r_i \in R$ y $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 8.1. *Sean $R \subset S$ dominios enteros, $v \in S$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones*

a) v es integral sobre R.

b) $R[v]$ es un R-modulo finitamente generado.

c) Existe un subanillo $R' \subset S$ con $R[v] \subset R'$ y R' un R-modulo finitamente generado sobre R.

Demostración.

- *(a) $\Rightarrow$(b) | Existe un polinomio monico $f \in R[x]$ tal que $f(v) = 0$, luego el $R[v]$ se puede generar por finitos elementos.*
- *(b) $\Rightarrow$(c) | Basta tomar $R' = R[v]$.*
- *(c) $\Rightarrow$(a) | Existe R' tal que $R \subset R[v] \subset R' \subset S$. Con R, $R[v]$, R' finitamente generados como R-modulos. Sean $w_1, \cdots, w_n$ generadores de R'. Sabemos que*

$$v \cdot w_i = a_{i1} w_1 + \cdots + a_{in} w_n$$

luego tenemos el sistema

$$\begin{aligned}
&(a_{11} - v)w_1 + a_{12}w_2 + \cdots + a_{1n}w_n = 0 \\
&a_{21}w_1 + (a_{22} - v)w_2 + \cdots + a_{2n}w_n = 0 \\
&\vdots \\
&a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \cdots + (a_{nn} - v)w_n = 0
\end{aligned}$$

Como $R \subset S$ son dominios, podemos verlo dentro del cuerpo de fracciones, entonces tiene sentido calcular el determinante de la matriz asociada al sistema de ecuaciones. Por otro lado, $(w_1, \cdots, w_n)$ es una solución no trivial del sistema y por lo tanto el determinante de la matriz asociada es 0, lo que implica que v es integral sobre R.

Corolario 8.5. *Sean $R \subseteq S$ dominios. Entonces los elementos integrales sobre R forman un anillo.*

Demostración. *Sean $a, b \in S$ elementos integrales sobre R. Notemos que*

$$R \subseteq R[a+b] \subseteq R[a,b] \quad y \quad R \subseteq R[ab] \subseteq R[a,b]$$

Como a y b son elementos integrales sobre R, $R[a]$ y $R[b]$ son finitamente generados por $\{1, a, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$ y $\{1, b, b^2, \cdots, b^{n-1}\}$. Es claro que $R[a,b]$ es generado por $\{a^i b^j : 0 \leq i \leq n-1,\ 0 \leq j \leq m-1\}$. Por la proposición se sigue que $a+b$ y ab son elementos integrales sobre R.

Definición 8.2. *Sean $R \subseteq S$ dominios. Decimos que S es integral sobre R si todo $s \in S$ es integral sobre R.*

Además, R es un dominio integralmente cerrado si ningún $z \in Frac(R) \setminus R$ es integral.

Ejemplos:

- Consideremos $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, sea $p/q \in \mathbb{Q}$ con p y q coprimos. Si tenemos la expresión

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

  Por teorema de la raiz racional, q debe dividir a 1, luego $q = 1$ lo que implica que $p/q \in \mathbb{Z}$. Concluimos que Z es integralmente cerrado.

- Veamos el conjunto algebraico $V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2_k$ con $k = \overline{k}$. Vemos el anillo

$$R = \frac{k[x,y]}{(y^2 - x^3)}$$

  que es un dominio, pues $(y^2 - x^3)$ es irreductible. Dentro de $R \subseteq Frac(R)$, vemos que se cumple la relación $y^2 = x^3$, que dentro del cuerpo de fracciones es equivalente a

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - x = 0$$

  notemos que $\frac{y}{x} \notin R$ y que $x \in R$. Por lo tanto R no es integralmente cerrado.

- Sea $V(y - x^2) \subseteq \mathbb{A}^2_k$. Vemos el anillo

$$R = \frac{k[x,y]}{(y - x^2)}$$

  por demostrar, R es integralmente cerrado. Consideremos la función $\varphi : \mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^2_k$ dada por $\varphi(t) = (t, t^2)$. Notemos que $Im(\varphi) = V(y - x^2)$. La función φ induce el isomorfismo

$$\begin{aligned}
\frac{k[x,y]}{(y - x^2)} &\to k[t] \\
x &\to t \\
y^2 &\to t^2
\end{aligned}$$

  Como $k[t]$ es DFU, se sigue que R es integralmente cerrado.

Vamos a estudiar un caso particular del lema de Zariski. Sea k un cuerpo e $I \subseteq k[x]$ un ideal maximal, entonces $k[x]/I = L$ es un cuerpo. Tenemos dos casos, $I = (0)$ ó $I = (f(x))$. Si $I = (0)$ entonces $k[x]$ es cuerpo, esto es una contradicción. Por otro lado escribimos

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

pero en L se tiene que $f(x) = 0$, luego, L es generado como k módulo por $\{1, x, \cdots, x^{n-1}\}$.

Veamos cuando $k[x,y]/I = L$ donde k es un cuerpo e $I \subseteq k[x,y]$ es un ideal maximal. Si $x \in I$ o $y \in I$ podemos reducir al caso anterior. Entonces L es finitamente generado por potencias de x e y.

Pensaremos en $k(x)$ como los cocientes de polinomios en una variable modulo I, luego

$$k \subset k(x) \subset k(x)[y] = L$$

donde la igualdad $k(x)[y] = L$ se debe a que la inversa de un polinomio en $k(x)$ en realidad se escribe como combinación de potencias de x e y. Además, por el caso anterior, $k(x)[y]$ es finitamente generado como $k(x)$ módulo.

Tenemos dos casos:

- Caso 1: La extensión $k \subset k(x)$ es finita. Esto implica que la extensión $k \subseteq L$ es finita, basta tomar el producto de los generadores.
- Caso 2: Se tiene la siguiente igualdad

  $$k(x) = \left\{ \text{cocientes } \frac{p(x)}{q(x)} \right\}$$

  En L se debe cumplir la relación $y^m = a_{m-1}y^{m-1} + \cdots + a_1 y + a_0$ con $a_i \in k(x)$. Tomar $a \in k[x]$ tal que a^m limpie los denominadores, luego

  $$(ay)^m = b_{m-1}(ay)^{m-1} + \cdots + b_1(ay) + b_0$$

  con $b_i \in k[x]$. Se sigue que ay es integral sobre $k[x]$. Sea $z \in L$, luego para N suficientemente grande $a^N z$ es integral sobre $k[x]$, ya que

  $$\begin{aligned} a^N z &= a^N f(x,y) \\ &= a^N (c_0 + c_1 y + \cdots + c_M y^M) \\ &= c'_0 + c'_1(ya) + \cdots + c'_M(ya)^M \end{aligned}$$

  donde $c'_i \in k[x]$. Como $k[x]$ es DFU, $a = p_1 \cdots p_s$ su factorización en irreducibles, sea p_{s+1} un irreductible distinto de p_i, tomando $z = \frac{1}{p_{s+1}}$ resulta que $a^N z$ es integral, lo cual es una contradicción.

Lema 8.1. *(Lema de Zariski) Sean $K \subseteq L$ y L es finitamente generado como K algebra, entonces L es finitamente generado como K modulo, es decir, como espacio vectorial.*

2. Variedades Afines

De ahora en adelante k será un cuerpo algebraicamente cerrado. A un conjunto algebraico afín irreducible lo llamamos variedad afín, o simplemente variedad.

2.1. Anillo de Coordenadas

Definición 8.3. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad no vacía. Definimos*

$$\Gamma(V) := \frac{k[x_1, \cdots, x_n]}{I(V)}$$

*y lo llamamos el **anillo de coordenadas de** V y los elementos de $\Gamma(V)$ les decimos **funciones regulares**.*

Observación: El anillo de coordenadas de V es un dominio, ya que $\mathbb{I}(V)$ es un ideal primo de $k[x_1, \cdots, x_n]$. Por otro lado, dado $f, g \in k[x_1, \cdots, x_n]$ entonces f, g determinan la misma función si y solo si $f - g \equiv 0$ en V, es decir, $f - g \in \mathbb{I}(V)$. De este modo tenemos dos maneras de ver los elementos de $\Gamma(V)$; como una función de V, o como clase de equivalencia de polinomios.

2.2. Aplicaciones Polinomiales

Definición 8.4. *Sean $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}_k^m$ variedades. Una aplicación $\varphi : V \to W$ se dice **aplicación polinomial** si existen $f_i \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tales que*

$$\varphi(a) = \varphi(a_1, \cdots, a_n) = (f_1(a), \cdots, f_m(a))$$

Proposición 8.2. *Sean $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}_k^m$ variedades. Entonces hay una correspondecia uno a uno entre las funciones polinomiales $\varphi : V \to W$ y los homomorfismos $\tilde{\varphi} : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$.*

Demostración.

- *Dada $\varphi : V \to W$ una aplicación polinomial, sean $f_i \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tales que $\varphi = (f_1, \cdots, f_m)$. Definimos $\tilde{\varphi} : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ dada por*

  $$\tilde{\varphi}(f) := f \circ \varphi = f(f_1, \cdots, f_m)$$

  Veamos que esta bien definida, en efecto, sea $f \in \mathbb{I}(W)$, entonces $g \circ \varphi \equiv 0$ en V, luego $g \circ \varphi \in \mathbb{I}(V)$. Claramente $\tilde{\varphi}$ es homomorfismo.

- *Sea $\tilde{\varphi} : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ un homomorfismo. Sean $f_i \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tales que $\tilde{\varphi}(y_i) = f_i$, definimos la aplicación polinomial $\varphi := (f_i, \cdots, f_m)$, por la discusión anterior φ esta bien definida y además la función inducida por φ es la misma que $\tilde{\varphi}$.*

Definición 8.5. *Una aplicación polinomial se dice **isomorfismo** si tiene inversa que también es una aplicación polinomial.*

Observación: Por la proposición anterior una aplicación polinomial es isomorfismo si y solo si el homomorfismo inducido es isomorfismo de anillos. Luego, dos variedades son isomorfas si y solo si sus anillos de coordenadas son isomorfos.

2.3. Cambio de Coordenadas

Definición 8.6. *Un **cambio de coordenadas afín** en $\mathbb{A}_k^n$ es una aplicación polinomial $\varphi = (f_1, \cdots, f_n) : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^n$ tal que $gr(f_i) = 1$ y φ es biyectiva.*

2.4. Funciones Racionales y Anillos Locales

Definición 8.7. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad no vacía. Definimos el **cuerpo de funciones racionales** en V como $k(V) := Frac(\Gamma(V))$. Un elemento en $k(V)$ se dice **función racional** en V.*

Notemos que $f \in k(V)$ no es necesariamente una función $f : V \to \mathbb{A}^1_k$. Consideremos $V = \mathbb{V}(xw - yz) \subseteq \mathbb{A}^4_k$ y $f = \frac{x}{y}$, luego, no es posible evaluar en los puntos de la forma $(a, 0, b, 0)$.

Definición 8.8. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n_k$ una variedad no vacía. Sea f una función racional de V y $p \in V$, decimos que f esta definida en p si para algunos $a, b \in \Gamma(V)$ se tiene que $f = \frac{a}{b}$ y $b(p) \neq 0$.*

Observación: Si $\Gamma(V)$ es DFU entonces la expresión a/b es esencialmente única y por lo tanto f esta definida en p si y solo si $b(p) \neq 0$.

Definición 8.9. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n_k$ una variedad no vacía. Sea $p \in V$, definimos*

$$\mathcal{O}_p(V) := \{f \in k(V) : f \text{ está definida en } p\}$$

*se dice que $\mathcal{O}_p(V)$ es el **anillo local** de V en p.*

Observación: Notemos que $\mathcal{O}_p(V)$ es un subanillo de $k(V)$ que contiene $\Gamma(V)$, en otras palabras $k \subseteq \Gamma(V) \subseteq \mathcal{O}_p(V) \subseteq k(V)$.
Este anillo tiene la propiedad de que tiene un único ideal maximal, a saber, $m_p(V) = \{f \in \mathcal{O}_p(V) : f(p) = 0\}$. Un anillo con esta propiedad se dice **anillo local**.

Definición 8.10. *El conjunto de puntos $p \in V$ donde una función racional f no está definida se llama el **conjunto de polos** de f.*

Proposición 8.3.

a) El conjunto de polos de una función racional es un subconjunto algebraico de V.

b) $\Gamma(V) = \bigcap_{p \in V} \mathcal{O}_p(V)$.

Demostración.

a) Sea $f \in k(V)$. Consideramos

$$J_f := \{G \in k[x_1, \cdots, x_n] : \overline{G}f \in \Gamma(V)\}$$

donde $\overline{G}$ es la clase de G en $\Gamma(V)$. Es claro que J_f es un ideal en $k[x_1, \cdots, x_n]$ que contiene a $I(V)$. Veamos que $V(J_f) = \{$polos de $f\}$.

Supongamos que $p \notin V(J_f)$, entonces existe $G \in J_f$ tal que $G(p) \neq 0$. Tenemos que $\overline{G}f = \overline{H} \in \Gamma(V)$, en $k(V)$ se tiene que $f = \frac{H}{G}$, entonces p no es polo de f.

Si p no es polo de f, entonces existen $G, H \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tal que $f = \frac{H}{G}$ y $G(p) \neq 0$, además vemos que $\overline{G}f \in \Gamma(V)$, es decir, $p \notin V(J_f)$.

b) Una contención es clara, veamos la otra. Sea $f \in \bigcap_{p \in V} \mathcal{O}_p(V)$, entonces $V(J_f) = \emptyset$, por Nullstellensatz se sigue que $J_f = k[x_1, \cdots, x_n]$ y por ende $f = 1 \cdot f \in \Gamma(V)$.

Proposición 8.4. *$\mathcal{O}_p(V)$ es un dominio local Noetheriano.*

Demostración. *Sea $I \subseteq \mathcal{O}_p(V)$ un ideal, consideremos $I' = I \cap \Gamma(V)$. Como $\Gamma(V)$ es Noetheriano, existen $f_i \in \Gamma(V)$ tales que $I' = \langle f_1, \cdots, f_m \rangle$. Luego si $f = \frac{a}{b}$ entonces $bf = a \in I'$. Se sigue que*

$$bf = \sum a_i f_i \Rightarrow f = \sum \frac{a_i}{b} f_i$$

2.5. Anillos de Evaluación Discreta

Proposición 8.5. *Sea R un dominio que no es cuerpo. Luego, R es Noetheriano, local y su ideal maximal es principal si y solo si existe $t \in R$ irreducible tal que para todo $z \in R \setminus \{0\}$ y $z = ut^n$ para algún u unidad y $n \in \mathbb{N}_0$.*

Definición 8.11. *Sea R como antes, decimos que R es un **anillo de evaluación discreta** y lo abreviamos DVR, el elemento t se llama **parametro uniformizante**.*

Ejemplos:

- Consideremos $p \in \mathbb{A}_k^1 = V$, sea $m_p(V)$ el unico ideal maximal de $\mathcal{O}_p(V)$, luego $(t) = m_p(V)$.
- Un no ejemplo. Si tomamos $p = (0,0) \in \mathbb{A}_k^2 = V$ entonces $(x, y) \subseteq \mathcal{O}_p(V)$ no es principal, $\mathcal{O}_p(V)$ no es un DVR.

Definición 8.12. *Sea R un DVR, consideremos $k = Frac(R)$, entonces para todo $z \in k$ existe $n \in \mathbb{Z}$ y $u \in R$ unidad tales que $z = ut^n$, luego*

a) *n es el* ***orden*** *de z y se escribe $ord(z)$. Decimos que $ord(o) = \infty$.*

b) *Si $n < 0$, entonces z es un* ***polo****.*

c) *Si $n > 0$, decimos que z es un* ***cero****.*

d) *Si $n = 0$, z se dice* ***unidad****.*

2.6. Formas

Definición 8.13. *Una* ***forma*** *es un polinomio homogeneo en $R[x_1, \cdots, x_n]$, con R dominio. Recordando el capitulo 1, sección 1, $f \in R[x_1, \cdots, x_n]$ es homogeneo si $f(\lambda \overrightarrow{x}) = \lambda^n f(\overrightarrow{x})$ con $n = gr(f)$.*

Ejemplo: Sea $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3 x_4$ es una forma.

Definición 8.14. *Sea R un dominio,*

a) *Sea $f \in R[x_1, \cdots, x_n]$, escribimos $f = \sum f_0 + f_1 + \cdots + f_d$ donde f_i es un polinomio homogeneo de grado i, definimos $f^* \in R[x_1, \cdots, x_{n+1}]$ como*

$$f^* := x_{n+1}^d f_0 + x_{n+1}^{d-1} f_1 + \cdots + f_d = x_{n+1}^d f\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$$

este proceso se llama ***homogenización****.*

b) *Sea $F \in R[x_1, \cdots, x_{n+1}]$ una forma, definimos $F_* \in R[x_1, \cdots, x_n]$ como $F_* := F(x_1, \cdots, x_n, 1)$. Decimos que* ***deshomogenizamos*** *el polinomio.*

Proposición 8.6. *Se cumple lo siguiente*

a) *$(FG)_* = F_* G_*$ y $(fg)^* = f^* g^*$.*

b) *Si $F \neq 0$ y r es la mayor potencia de x_{n+1} que divide F entonces $x_{n+1}^r (F_*)^* = F$. Además, $(f^*)_*$.*

c) *Se tiene que $(F + G)_* = F_* + G_*$. Por otro lado, sea $r = gr(g)$, $s = gr(f)$ y $t = r + s - gr(f + g)^*$ entonces $x_{n+1}^t (f + g)^* = x_{n+1}^r f^* + x_{n+1}^s g^*$.*

2.7. Producto Directo de Anillos

Definición 8.15. *Sean $R_1, \cdots, R_n$ anillos, definimos $R := \prod R_i$ junto con las operaciones*

$$\begin{aligned}(a_1, \cdots, a_n) + (b_2, \cdots, b_n) &:= (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n) \\ (a_1, \cdots, a_n) \cdot (b_2, \cdots, b_n) &:= (a_1 \cdot b_1, \cdots, a_n \cdot b_n)\end{aligned}$$

y $\pi_i : R \to R_i$ son las proyecciones a cada coordenada. Decimos que R es un ***anillo producto****.*

Observación: Es directo que R con las operaciones definidas es un anillo, donde $(0, \cdots, 0)$ y $(1, \cdots, 1)$ son los neutros de $+$ y $\cdot$ respectivamente.

Proposición 8.7. ***(Propiedad Universal)*** *Para todo anillo S y todo morfismo $\phi_i : S \to R_i$, existe un unico morfismo $\varphi : S \to R$ tal que*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\phi_i"'] & R \arrow[dl, "\pi_i"] \\ R_i & \end{tikzcd}$$

2.8. Operando con Ideales

Definición 8.16. *Sean $I, J \subseteq R$ ideales de un anillo R. Definimos el* ***producto de ideales*** *como*

$$IJ := \langle ab : a \in I, b \in J \rangle$$

Observación: Si $I = \langle a_1, \cdots, a_n \rangle$ entonces

$$I^n = \left\langle a_1^{i_1} \cdots a_k^{i_k} : k \leq r, \sum_{j=1}^{k} i_j = n \right\rangle$$

Definición 8.17. *Sean $I, J \subseteq R$ ideales, definimos la* ***suma de ideales*** *como $I + J := \{a + b : a \in I, b \in J\}$. Decimos I, J son* ***comaximales*** *si $I + J = R$.*

Proposición 8.8. *Sean $I, J \subseteq R$ ideales, tenemos que*

a) $IJ \subseteq I \cap J$.

b) Si I, J son comaximales entonces $IJ = I \cap J$.

2.9. Ideales de un Número Finito de Puntos

Proposición 8.9. *Sea $I \subseteq k[x_1, \cdots, x_n]$ un ideal con $k = \overline{k}$. Supongamos que $|V(I)| < \infty$, digamos que $V(I) = \{p_1, \cdots, p_m\}$, entonces existe un isomorfismo natural*

$$\varphi : \frac{k[x_1, \cdots, x_n]}{I} \to \frac{\mathcal{O}_{p_1}(\mathbb{A}_k^n)}{I\mathcal{O}_{p_1}(\mathbb{A}_k^n)} \times \cdots \times \frac{\mathcal{O}_{p_m}(\mathbb{A}_k^n)}{I\mathcal{O}_{p_m}(\mathbb{A}_k^n)}$$

donde $I\mathcal{O}_{p_i}(\mathbb{A}_k^n)$ es el ideal generado por I con elementos de $\mathcal{O}_{p_i}(\mathbb{A}_k^n)$.

Demostración. *Diremos que $\mathcal{O}_i := \mathcal{O}_{p_i}(\mathbb{A}_k^n)$, $R = k[x_1, \cdots, x_n]/I$ y que $R_i := \mathcal{O}_i/I\mathcal{O}_i$. Sea I_i el ideal maximal de p_i, luego $(x_1 - p_{i1}, \cdots, x_n - p_{in}) = I_i \supset I$. Definimos $\varphi_i : R \to R_i$ donde $\varphi(f) = \varphi_i([F]_I) := [F]_{I\mathcal{O}_i}$.*

Por la propiedad universal, existe un unico morfismo $\varphi : R \to R_1 \times \cdots \times R_m$, que esta dada por $\varphi(F) = (\varphi_1(F), \cdots, \varphi_m(F))$. Afirmamos que φ es biyección. Por Nullstellensatz se sigue que

$$\sqrt{I} = \mathbb{I}(\{p_1, \cdots, p_m\}) = \bigcap_{i=i}^{m} I_i$$

entonces $\left(\bigcap_{i=i}^m I_i\right)^d \subseteq I$ para algún $d \in \mathbb{N}$. Por otro lado $\left(\bigcap_{i=i}^m I_i\right)^d = (I_1 \cdots I_m)^d = \bigcap_{i=1}^m I_i^d$, se sigue que $\bigcap_{i=i}^m I_i^d \subseteq I$.

Sean $F_i \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tales que $F_i(p_j) = 0$ para $i \neq j$ y $F_i(p_i) = 1$, definimos $E_i = 1 - (1 - F_i^d)^d$ para $i = 1, \cdots, m$. Notemos que $E_i = F_i^d D_i$ para algún D_i, entonces $E_i \in I_j^d$ para $i \neq j$, lo que implica

- *Dado j fijo se tiene que $1 - \sum_i E_i = (1 - E_j) - \sum_{i \neq j} E_i \in I_j^d$, lo que implica que $1 - \sum_i E_i \in \bigcap_{j=1}^m I_j^d$.*
- *Para i fijo vemos que $E_i - E_i^2 = E_i(1 - F_i^d)^d \in \bigcap_{i=1}^m I_i^d$.*

Definimos $e_i := [E_i]_I \in R$, por lo anterior, cumplen que $e_i^2 = e_i$, $e_i e_j = 0$ y $\sum_i e_i = 1$.

Lema: *Si $G \in k[x_1, \cdots, x_n]$ con $G(p_i) \neq 0$ entonces existe $t \in R$ tal que $tg = e_i$ donde $g = [G]_I \in R$. En efecto, supongamos que $G(p_i) = 1$ y sea $H = 1 - G$, luego*

$$(1 - H)(E_i + HE_i + \cdots + H^{d-1}E_i) = E_i - H^d E_i$$

por ende

$$g(e_i + he_i + \cdots + h^{d-1}e_i) = e_i$$

Veamos que φ es biyección. Sea $f \in R$ tal que $\varphi(f) = 0$, luego $[F]_{I\mathcal{O}_i} = 0$, lo que implica que $F \in I\mathcal{O}_i$, entonces existe $G \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tal que $G_i(p_i) \neq 0$ y $FG \in I$, por el lema se sigue que existe $t_i \in R$ tal que $t_i g_i = e_i$, *entonces*

$$f = \sum_i e_i f = \sum_i t_i g_i f = 0$$

por lo tanto φ es inyectiva. Como $E_i(p_i) = 1$ vemos que $\varphi(e_i)$ es una unidad en R_i, como $e_i e_j = 0$ para $i \neq j$ se tiene que $\varphi_i(e_j) = 0$ para $i \neq j$. Por ende, $\varphi_i(e_i) = \varphi_i(\sum e_j) = 1$. Sea

$$z = \left(\frac{h_1}{g_1}, \cdots, \frac{h_m}{g_m}\right) \in R_1 \times \cdots \times R_m$$

por el lema, existe t_i tal que $t_i g_i = e_i$, tenemos que

$$\varphi_i(g_i)\frac{h_i}{g_i} = [G_i]_i \cdot \left[\frac{H_i}{G_i}\right]_i = [H_i]_i = \varphi_i(h_i)$$

lo que implica que $\varphi_i(t_i h_i) = h_i/g_i$. De este modo

$$\varphi_i\left(\sum t_j h_j e_j\right) = \varphi_i(t_i h_i) = \frac{h_i}{g_i}$$

concluimos que $\varphi(\sum t_j h_j e_j) = z$ y por lo tanto φ es sobreyectiva.

Corolario 8.6.

$$dim_k\left(\frac{k[x_1, \cdots, x_n]}{I}\right) = \sum_{i=1}^{m} dim_k\left(\frac{\mathcal{O}_i}{I\mathcal{O}_i}\right)$$

2.10. Modulos Cociente y Secuencias Exactas

Sea R un anillo, sean M y V R-modulos un morfismo de grupos $\varphi : M \to V$ se dice **morfismo de R-modulos** si $\varphi(am) = a\varphi(m)$ para todo $a \in R$ y $m \in M$. Decimos que es isomorfismo cuando es biyectivo.

Sea N un submodulo de un R-modulo M, en el grupo cociente M/N consideramos la operación $a\overline{m} = \overline{am}$, lo que da estructura de R-modulo y lo llamamos el **modulo cociente** de M por N.

Definición 8.18. *Sean $\psi : M' \to M$ y $\varphi : M \to M''$ morfismos de R-modulos. Decimos que la secuencia*

$$M' \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} M''$$

*es **exacta** si $Im(\psi) = ker(\varphi)$.*

Proposición 8.10.

a) Sea

$$0 \longrightarrow V' \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} V'' \longrightarrow 0$$

una secuencia exacta de espacios vectoriales sobre un cuerpo k de dimensión finita, entonces $dimV' + dimV'' = dimV$.

b) Sea

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3 \xrightarrow{\varphi_3} V_4 \longrightarrow 0$$

una secuencia exacta de espacios vectoriales sobre un cuerpo k de dimensión finita, entonces $dimV_4 = dimV_3 - dimV_2 + dimV_1$

2.11. Modulos Libres

Definición 8.19. *Sea R un anillo y X un conjunto. Consideramos*

$$M_X := \left\{\varphi : X \to R : \left|\varphi^{-1}(R \setminus \{0\})\right| < \infty\right\}$$

*Lo dotamos de estructura de R-modulo como sigue: $(\varphi+\psi)(x) := \varphi(x)+\psi(x)$ y $(a\varphi)(x) := a\varphi(x)$, donde $\varphi, \psi \in M_X$ y $a \in R$. El modulo M_X se dice R-**modulo libre** sobre el conjunto X.*

Observación: Si definimos $\varphi_x \in M_X$ como $\varphi_x(y) := \mathbb{1}_x(y)$, entonces todo $\varphi \in M_X$ tiene expresión unica $\varphi = \sum a_x \varphi_x$ donde $a_x = \varphi(x)$. Usualmente escribimos x en lugar de φ_x.

Proposición 8.11. *(**Propiedad Universal**) Sea $\alpha : X \to M$ una función del conjunto X a un R-modulo M, entonces α se extiende de manera unica a un morfismo de M_X a M.*

Definición 8.20. *Un R-modulo M se dice **libre** con base $m_1, \cdots, m_n \in M$, si el conjunto $X := \{m_1, \cdots, m_n\}$ y el morfismo natural de M_X a M es isomorfismo.*

3. Propiedades Locales de Curvas Planas

3.1. Puntos Multiples y Rectas Tangentes

Definición 8.21. *Sea $V = \mathbb{V}(F) \subseteq \mathbb{A}_k^2$ con F no constante y no necesariamente irreducible. Decimos que V es una **curva plana**. El **grado** de una curva es el grado de F.*

Observación: Si $F = F_1^{\alpha_1} \cdots F_r^{\alpha_r}$ con F_i irreducible entonces $V = \mathbb{V}(F_1) \cup \cdots \cup \mathbb{V}(F_r)$ es su descomposición en irreducibles. Si $\alpha_i = 1$ decimos que la componente $\mathbb{V}(F_i)$ es **simple**.

Definición 8.22. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^2$ una curva plana. Dado $p \in V = \mathbb{V}(F)$ decimos que es **no singular** si $F_x(p) \neq 0$ o $F_y(p) \neq 0$. En este caso la recta*

$$F_x(p)(x-a) + F_y(p)(y-b) = 0 \quad \text{con } p = (a,b)$$

*es la **recta tangente** en p. De lo contrario, decimos que p es **singular**.*

Definición 8.23. *Una curva plana $V \subseteq \mathbb{A}_k^2$ se dice **no singular** si todo punto es no singular.*

Ejemplo: Sea $F = y^2 - x^2 - x^3$, luego $F_x = -2x - 3x^2$ y $F_y = 2y$. Buscamos los puntos singulares, debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} y^2 - x^2 - x^3 &= 0 \\ -2x - 3x^2 &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned}$$

Si $char(k) \neq 2, 3$, entonces $x, y = 0$. Por otro lado, si $char(k) = 2$ entonces $x = 0$ por la segunda ecuación y así, por la primera ecuación, $y = 0$. Para $char(k) = 3$ el resultado es directo. El unico punto singular es $(0, 0)$.

Observación: Sea $p \in k[x, y]$ homogeneo de grado d y $k = \overline{k}$, entonces

$$p = \prod_i (x - \lambda_i y)^{\alpha_i}$$

Definición 8.24. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^2$ una curva plana. Sea $p = (0,0)$, escribimos $F = F_m + F_{m+1} + \cdots + F_n$ con $m \leq n$. La **multiplicidad** de $V = \mathbb{V}(F)$ en p es $m_p(F) := m$.*

Observación: Veamos que $p = (0, 0)$ es no singular si y solo si $m_p(F) = 1$. Si $m_p(F) = 2$ decimos que p es punto doble, si $m_p(F) = 3$ es punto triple y asi.

Definición 8.25. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^2$ una curva plana. Sea $p = (0,0)$, escribimos $F = F_m + F_{m+1} + \cdots + F_n$ con $m \leq n$. Entonces*

$$F_m = \prod_i L_i^{\alpha_i}$$

*con L_i lineal y se llama **recta tangente** de V en p y α_i se dice **multiplicidad de la tangente**. Si $\alpha_i = 1$ para todo i, decimos que p es **punto multiple ordinario**.*

Definición 8.26. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^2$ una curva plana. Definimos la multiplicidad de $p = (a,b)$ en V como*

$$m_p(F) := m_{(0,0)}\left(F^T\right) \quad \text{con } F^T = F(x+a, y+b)$$

3.2. Multiplicidades y Anillos Locales

> **Teorema 9.** *Sea V una curva plana irreducible. Entonces p un punto no singular de $V = \mathbb{V}(F)$ si y solo si $\mathcal{O}_p(V)$ es un anillo de evaluación discreta.*
>
> *En tal caso, si $L = ax + by + c$ es una recta no tangente en p, entonces su imagen en $\mathcal{O}_p(V)$ es un parametro uniformizante.*

Demostración. *Supongamos que p es un punto no singular de V y L una recta que pasa por p que no es tangente a F en p. Podemos suponer que $p = (0,0)$ y que y es la recta tangente y $L = X$. Basta mostrar que x genera $m_p(V)$.*

Notemos que $m_p(V) = (x,y)$ en $\mathcal{O}_p(V)$. Escribimos $F = Y + P(x,y)$ donde $P(x,y)$ son términos de grado mayor. Luego, reescribimos $F = YG - X^2H$, donde $G = 1 + P_1(x,y)$ con $P_1(x,y)$ términos de grado mayor y $H \in k[x]$.

Entonces $yg = x^2h \in \Gamma(V)$, lo que implica que $y = x^2hg^{-1} \in (x)$, ya que $g(p) \neq 0$. Por lo tanto, $m_p(V) = (x,y) = (x)$.

La otra dirección se sigue del siguiente teorema.

La demostración del siguiente teorema se encuentra en algebraic curves de fulton.

Teorema 10. *Sea p un punto de una curva irreducible $V = \mathbb{V}(F)$. Entonces para n suficientemente grande, se tiene que*

$$m_p(F) = dim_k\left(\frac{m_p(V)^n}{m_p(V)^{n+1}}\right)$$

En particular, la multiplicidad de F en p depende solo del anillo local $\mathcal{O}_p(V)$.

Observación: Notemos que si $\mathcal{O}_p(V)$ es un DVR, entonces, $m_p(F) = 1$ lo que implica que p es no singular.

Ejemplo: Sea $(x,y) \subseteq k[x,y]$, luego

$$dim_k\left(\frac{(x,y)}{(x,y)^2}\right) = 2$$

3.3. Número de Intersecciones

Sean $V = \mathbb{V}(F), W = \mathbb{V}(G)$ curvas planas y sea $p \in \mathbb{A}_k^2$. El objetivo de esta sección es definir el número de Intersecciones de dos curvas V y W, que será denotado por $I(p, F \cap G)$. Comenzaremos listando 7 propiedades que nos gustaría que tuviese el número de intersección

(1) $I(p, F\cap G)$ es un entero no negativo para todo $F, G \in k[x,y]$ y $p \in \mathbb{A}^2$ si F, G no tienen factores en común que pasen por p, de lo contrario decimos que $I(p, F \cap G) = \infty$.

(2) $I(p, F \cap G) = 0$ si y solo si $p \notin F \cap G$. Además, $I(p, F \cap G)$ solo depende de las componentes de F, G que pasan por p.

(3) Si T es un cambio afín de coordenadas en $\mathbb{A}^2$ y $T(q) = p$ entonces $I(p, F \cap G) = I(q, F^T \cap G^T)$.

(4) $I(p, F \cap G) = I(p, G \cap F)$.

(5) $I(p, F \cap G) \geq m_p(F)m_p(G)$, con igualdad si y solo si F y G no tienen rectas tangentes en común en p.

(6) Si $F = \prod F_i^{r_i}$ y $G = \prod G_j^{s_j}$, entonces

$$I(p, F \cap G) = \sum_{i,j} r_i s_j I(p, F_i \cap G_j)$$

(7) $I(p, F \cap G) = I(p, F \cap (G + AF))$ para todo $A \in k[x,y]$.

El siguiente teorema asegura la existencia y unicidad del número de intersección, la demostración se encuentra en algebraic curves de Fulton.

Teorema 11. *Existe un único número de intersección $I(p, F \cap G)$ definido para todas las curvas planas y todos los puntos en $\mathbb{A}^2$, que satisface las siete propiedades. Además, esta dado por la fórmula*

$$I(p, F \cap G) = dim_k\left(\frac{\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)}{(F,G)}\right)$$

Ejemplo: Calcular el $I(p, F\cap G)$ donde $F = (x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3$ y $G = (x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2$ y $p = (0,0)$. Reemplacemos G por $G - (x^2+y^2)F = y((x^2+y^2)(y^2-3x^2) - 4x^2y) = yE$, luego

$$I(p, F\cap G) = I(p, F\cap (G-(x^2+y^2)E)) = I(p, F\cap y) + I(p, F\cap E)$$

por la propiedad (7) y (6) respectivamente. Como $F = x^4 + yA$, entonces por la propiedad $(5), (7)$ y (6) se sigue que $I(p, F\cap y) = I(p, x^4\cap y) = 4$.

Reemplazamos E por $E + 3F = y(5x^2 - 3y^2 + 4y^3 + 4x^2y) = yH$, así

$$I(p, F\cap E) = I(p, F\cap y) + I(p, F\cap H) = 4 + 6 = 10$$

por la propiedad $(7), (6)$ y (5). Por lo tanto $I(p, F\cap G) = 14$.

4. Variedades Proyectivas

4.1. Espacio Proyectivo

Definición 11.1. *Sea k un cuerpo tal que $k = \overline{k}$. Definimos el **n-espacio proyectivo** sobre k, denotado por $\mathbb{P}_k^n$, como*

$$\mathbb{P}_k^n := \frac{\mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{(0, \cdots, 0)\}}{\sim}$$

*donde $x \sim y$ si y solo si existe $\lambda \in k \setminus \{0\}$ tal que $x = \lambda y$. Un elemento $p \in \mathbb{P}_k^n$ se dice **punto** y un representante de la clase se llama **coordenada homogénea** para p.*

Observación: Un elemento en $\mathbb{P}_k^n$ típicamente se escribe por algún representante de la clase, y este se escribe del modo que sigue $[x_1, \cdots, x_{n+1}]$. Consideremos el conjunto

$$U_i := \{[x_1, \cdots, x_{n+1}] \in \mathbb{P}_k^n : x_i \neq 0\}$$

de este modo cada $p \in U_i$ se puede escribir de manera única como $[x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}]$. Notemos que $\mathbb{P}_k^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$, donde U_i puede ser vista como una copia $\mathbb{A}_k^n$. Por conveniencia nos enfocaremos en U_{n+1}.

Definición 11.2. *Sea*

$$H_\infty := \mathbb{P}_k^n \setminus U_{n+1} = \{[x_1, \cdots, x_{n+1}] \in \mathbb{P}_k^n : x_{n+1} = 0\}$$

*Decimos que H_∞ es el **hiperplano en el infinito**.*

Observación: Notemos que existe una correspondecia entre $[x_1, \cdots, x_n, 0]$ y $[x_1, \cdots, x_n]$, por lo que H_∞ puede se identificado con $\mathbb{P}_k^{n-1}$, de este modo $\mathbb{P}_k^n = U_{n+1} \cup H_\infty$ es la unión de un n-espacio afín y un conjunto que da todas las direcciones del n-espacio afín.

4.2. Conjuntos Algebraicos Proyectivos

Definición 11.3. *Un punto $p \in \mathbb{P}_k^n$ se dice **cero** de un polinomio $F \in k[x_1, \cdots, x_{n+1}]$ si $F(x_1, \cdots, x_{n+1}) = 0$ para toda coordenada homogénea $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ de p, si es el caso, escribimos $F(p) = 0$.*

Definición 11.4. *Sea $S \subseteq k[x_1, \cdots, x_{n+1}]$, definimos*

$$\mathbb{V}(S) := \{p \in \mathbb{P}_k^n : p \text{ es cero para todo } F \in S\}$$

Observación: Al igual que en el caso de espacio afín, si I es el ideal generado por S entonces $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(S)$.

Definición 11.5. *Decimos que $V = \mathbb{V}(I)$ es un **conjunto algebraico proyectivo** o conjunto algebraico en $\mathbb{P}_k^n$ si $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(\{F_j^{(i)}\})$ donde $\{F_j^{(i)}\}$ es un conjunto finito de formas.*

Definición 11.6. *Dado $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$, definimos*

$$\mathbb{I}(X) := \{F \in k[x_1, \cdots, x_{n+1}] : F(p) = 0 \text{ para todo } p \in X\}$$

el ideal $\mathbb{I}(X)$ se dice ideal de X.

Definición 11.7. *Un ideal $I \subseteq k[x_1, \cdots, x_{n+1}]$ se dice **homogeneo** si para todo $F = \sum_i F_i \in I$, con F_i una forma de grado i, entonces $F_i \in I$.*

Observación: Para todo conjunto $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ se tiene que $\mathbb{I}(X)$ es un ideal homogeneo.

Proposición 11.1. *Un ideal $I \subseteq k[x_1, \cdots, x_{n1}]$ es homogeneo si y solo si es generado por un número finito de formas.*

> **Demostración.** *Supongamos que I es homogeneo, luego $I = \langle F^{(1)}, \cdots, F^{(r)} \rangle$, entonces I es generado por $F_j^{(i)}$ donde $F^{(i)} = \sum_j F_j^{(i)}$.*
>
> *Sea $S = \{F^\alpha\}$ un conjunto de formas que generan I, con $gr(F^\alpha)d_\alpha$. Sea $F = F_m + \cdots + F_r \in I$ y $gr(F_i) = i$.*

Luego

$$F = \sum A^\alpha F^\alpha$$

notamos que $F_m = \sum A^\alpha_{m-d_\alpha} F^\alpha$, *entonces* $F_m \in I$ *lo que implica que* $F_i \in I$ *para* $m \leq i \leq r$.

Definición 11.8. *Un conjunto algebraico* $V \subseteq \mathbb{P}^n_k$ *es* ***reducible*** *si existen* $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n_k$ *conjuntos algebraicos no triviales tales que* $V_i \neq V$ *y* $V = V_1 \cup V_2$. *En caso contrario, decimos que* V *es* ***irreducible***.

Observación: Al igual que en el caso afín, se tiene el resultado V es irreducible si y solo si $\mathbb{I}(V)$ es primo. Generalmente, se dice que un conjunto algebraico $V \subseteq \mathbb{P}^n_k$ irreducible es una **variedad proyectiva**.

Todo conjunto algebraico puede ser escrito de manera unica como unión de variedades proyectivas, su **componentes irreducibles**.

Definición 11.9. *Sea* $V \subseteq \mathbb{P}^n_k$ *un conjunto algebraico, definimos*

$$C(V) := \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1} : [x_1, \cdots, x_{n+1}] \in V \text{ o } (x_1, \cdots, x_{n+1}) = 0\}$$

el ***cono*** *sobre* V.

Para evitar confusiones, denotaremos por V_p, I_p a las operaciones proyectivas y por V_a, I_a a las afines.

Teorema 12. *(Nullstellensatz Proyectivo) Sea* $I \subseteq k[x_1, \cdots, x_{n+1}]$ *un ideal homogeneo, entonces*

a) $V_p(I) = \emptyset$ *si y solo si existe un entero* N *tal que* I *contiene todas las formas de grado mayor o igual que* N.

b) Si $V_p(I) \neq \emptyset$ *entonces* $I_p(V_p(I)) = Rad(I)$.

Observación:(Falta entender bien lo que dice)

Definición 12.1. *Sea* $V \subseteq \mathbb{P}^n_k$ *una variedad proyectiva no vacía, entonces* $\mathbb{I}(V)$ *es primo, luego el anillo*

$$\Gamma_h(V) = \frac{k[x_1, \cdots, x_{n+1}]}{\mathbb{I}(V)}$$

es un dominio, llamado ***anillo de coordenadas homogeneo*** *de* V. *Un elemento* $f \in \Gamma_h(V)$ *se dice* ***forma*** *de grado* d, *si existe una forma* $F \in k[x_1, \cdots, x_{n+1}]$ *de grado* d *tal que* $[F] = f$.

Proposición 12.1. *Todo elemento* $f \in \Gamma_h(V)$ *puede ser escrito de manera unica como* $f = f_0 + \cdots + F_m$, *con* f_i *una forma de grado* i.

Demostración. *Sea* $F \in k[x_1, \cdots, x_{n+1}]$ *tal que* $[F] = f$, *escribimos* $F = \sum F_i$ *entonces* $f = \sum f_i$, *donde* f_i *es una forma de grado* i. *Supongamos que* $f = \sum g_i$ *donde* $g_i = [G_i]$ *con* G_i *una forma de grado* i. *Luego*

$$F - \sum G_i = \sum (F_i - G_i) \in I$$

como $\mathbb{I}(V)$ *es homogeneo, se sigue que* $F_i - G_i \in I$ *lo que implica que* $f_i = g_i$.

Definición 12.2. *Sea* $k_h(V)$ *el cuerpo de fracciones de* $\Gamma_h(V)$ *y se le llama* ***cuerpo de funciones homogeneas*** *de* V.

Observación: Notar que, a diferencia del caso afín, ningún elemento en $\Gamma_h(V)$, a excepción de las constantes, determina una función. Sin embargo, si f, g son formas en $\Gamma_h(V)$ del mismo grado, entonces f/g definen una función, al menos donde g no es cero.

Definición 12.3. *El* ***cuerpo de funciones*** *de* V, *denotado por* $k(V)$, *se define como*

$$k(V) := \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in \Gamma_h(V) \text{ son formas del mismo grado} \right\}$$

los elementos en $k(V)$ *se dicen* ***funciones racionales*** *en* V.

Observación: Notar que $k(V)$ es un subcuerpo de $k_h(V)$, se tiene la cadena $k \subset k(V) \subset k_h(V)$.

Definición 12.4. *Sea $V \subseteq \mathbb{P}^n_k$ una variedad proyectiva no vacía. Sea $p \in V$, decimos que $z \in k(V)$* ***esta definida*** *en p si existen formas $f, g \in \Gamma_h(V)$ del mismo grado tales que $z = f/g$ y $g(p) \neq 0$.*

Definición 12.5. *Se define*

$$\mathcal{O}_p(V) := \{z \in k(V) : z \text{ esta definida en } p\}$$

se dice el ***anillo local*** *de V en p.*

Observación: Veamos que $\mathcal{O}_p(V)$ es un subanillo de $k(V)$, es un anillo local con ideal maximal

$$m_p(V) = \{z \in \mathcal{O}_p(V) : z(p) = 0\}$$