Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesora: Amal Taarabt – Estudiante: Benjamín Mateluna

Teoría Espectral - MAT2820
Tarea 2
04 de noviembre de 2025

Operadores compactos

(1) La función T_K es claramente lineal. Observemos que por lema del pegado la función K es continua, para ver que $T_K \in \mathcal{B}(H)$, nos damos $f \in L^2([0,1])$ y por la desigualdad de Jensen, se sigue que

$$\begin{aligned} \|T_K f\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 |T_K f(x)|^2 \ dx = \int_0^1 \left| \int_0^1 K(x,y) f(y) \ dy \right|^2 \ dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x,y)|^2 |f(y)|^2 \ dy \right) \ dx \leq \left(\max_{(x,y)\in[0,1]^2} |K(x,y)| \right)^2 \|f\|_{L^2}^2 < \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto, el operador T_K es acotado. Para ver que es autoadjunto en primer lugar veamos que $K(x,y) = K(y,x)$ para todo $(x,y) \in [0,1]^2$ y además $K([0,1]^2) \subseteq \mathbb{R}$, luego, por Fubini se tiene que

$$\begin{aligned} \langle T^* f, g \rangle_{L^2} = \langle f, Tg \rangle_{L^2} &= \int_0^1 \overline{f(x)} T_K g(x) \ dx = \int_0^1 \overline{f(x)} \left(\int_0^1 K(x,y) g(y) \ dy \right) \ dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \overline{f(x)} K(x,y) g(y) \ dy \ dx = \int_0^1 \int_0^1 \overline{K(y,x) f(x)} g(y) \ dx \ dy \\ &= \int_0^1 \overline{T_K f(y)} g(y) \ dy = \langle T_K f, g \rangle_{L^2} \end{aligned}$$

para toda $f, g \in L^2([0,1])$, lo que implica que T_K es autoadjunto.

(2) Sea $f \in L^2([0,1])$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in [0,1]$. Como K es continua, para todo $y \in [0,1]$, se tiene que $K(x_n, y) f(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} K(x,y) f(y)$, además

$$|K(x_n, y) f(y)| \leq \|K\|_\infty |f(y)| =: g$$

y como $L^2([0,1]) \subseteq L^1([0,1])$, la función g es integrable. Así, por teorema de convergencia dominada resulta que

$$\lim_{n\to\infty} T_K f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 K(x_n, y) f(y) \ dy = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} K(x_n, y) f(y) \ dy = \int_0^1 K(x,y) f(y) \ dy = T_K f(x)$$

Concluimos que $T_K(L^2) \subseteq \mathcal{C}([0,1])$.

(3)

(a) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada, entonces existe $M > 0$ tal que $\|f_n\|_{L^2} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo visto en el primer ejercicio, sabemos que

$$|T_K f_n(x)|^2 \leq \int_0^1 |K(x,y)|^2 |f_n(y)|^2 \ dy \leq \|K\|_\infty^2 \cdot \|f_n\|_{L^2}^2 \leq \|K\|_\infty^2 \cdot M^2 < \infty$$

es decir, la sucesión $(T_K f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Veamos que es equicontinua. Dado que $[0,1]^2$ es compacto, en realidad se tiene que K es uniformemente continua, sea $x_0 \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si

$$|x_0 - x| < \delta \quad \text{entonces} \quad |K(x_0, y) - K(x,y)| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{para todo } y \in [0,1]$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, observemos que

$$|T_K f_n(x_0) - T_K f_n(x)| \leq \int_0^1 |K(x_0, y) - K(x,y)| \cdot |f_n(y)| \ dy < \frac{\varepsilon}{M} \cdot \|f_n\|_{L^1} \leq \varepsilon$$

Por el teorema de Arzela Ascoli se tiene el resultado.

(b) Sabemos que $\mathcal{B} = \{\varphi_n = e^{2\pi inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2([0,1])$, dado $n \in \mathbb{Z}$, vemos que

$$T_K\varphi_n(x) = \int_0^1 K(x,y)\varphi_n(y)\, dy = \int_0^x y(1-x)e^{2\pi iny}\, dy + \int_x^1 x(1-y)e^{2\pi iny}\, dy =: I_1 + I_2$$

Por un lado tenemos que

$$I_1 = (1-x)\int_0^x ye^{2\pi iny}\, dy = (1-x)\left(\frac{ye^{2\pi iny}}{2\pi in}\Big|_0^x - \frac{1}{2\pi in}\int_0^x e^{2\pi iny}\, dy\right) = (1-x)\left(\frac{xe^{2\pi inx}}{2\pi in} - \frac{e^{2\pi inx}-1}{(2\pi in)^2}\right)$$

y por el otro lado

$$I_2 = x\int_x^1 (1-y)e^{2\pi iny}\, dy = x\left(\frac{(1-y)e^{2\pi iny}}{2\pi in}\Big|_x^1 + \frac{1}{2\pi in}\int_x^1 e^{2\pi iny}\, dy\right) = x\left(-\frac{(1-x)e^{2\pi inx}}{2\pi in} + \frac{e^{2\pi in}-e^{2\pi inx}}{(2\pi in)^2}\right)$$

entonces

$$T_K\varphi_n(x) = \frac{c_n(x)}{(2\pi in)^2} \quad \text{donde } |c_n(x)| \leq 4 \quad \text{para todo } x \in [0,1]$$

de este modo obtenemos que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|T_K\varphi_n\|_{L^2}^2 \leq 16\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2\pi in)^4} < \infty$$

Por lo tanto T_K es un operador de Hilbert Schmidt, por ejercicio de la guía, concluimos que es compacto.

(4) Sea $\lambda \in \mathbb{R}^*$ un autovalor y $f \in L^2([0,1])$ un autovector, entonces

$$\int_0^x y(1-x)f(y)\, dy + \int_x^1 x(1-y)f(y)\, dy = T_Kf(x) = \lambda f(x)$$

como $f \in L^2([0,1]) \subseteq L^1([0,1])$, entonces f es absolutamente continua, en particular, es continua y por lo tanto por teorema fundamental del cálculo resulta que f es diferenciable, luego

$$\lambda f'(x) = -\int_0^x yf(y)\, dy + x(1-x)f(x) + \int_x^1 (1-y)f(y)\, dy - x(1-x)f(x) = -\int_0^x yf(y)\, dy + \int_x^1 (1-y)f(y)\, dy$$

por la misma razón que antes obtenemos que f' es continua y diferenciable, así

$$\lambda f''(x) = -xf(x) - (1-x)f(x) = -f(x)$$

Notar que f'' es continua por que f lo es. Por otro lado, veamos que $\lambda f(0) = T_Kf(0) = 0$ y $\lambda f(1) = T_Kf(1) = 0$, lo anterior resulta en la siguiente EDO con condiciones iniciales

$$\begin{cases} f''(x) + \frac{1}{\lambda}f(x) = 0 & \text{para todo } x \in [0,1] \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

con $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$.

(5) Asumiendo que T_K es positivo, implica que si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ es autovalor entonces $\lambda \geq 0$. Sea $f \in L^2([0,1])$ un autovector correspondiente a λ. De la parte anterior sabemos que f satisface la EDO $f'' + \frac{1}{\lambda}f = 0$ con condiciones iniciales $f(0) = f(1) = 0$, de ayudantía, la solución viene dada por

$$f(x) = Acos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + Bsen\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad \text{con A,B constantes}$$

Evaluando en las condiciones iniciales vemos que $0 = f(0) = A$, verifiquemos que $\varphi(x) = sen(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})$ es autovector,

$$T_K\varphi(x) = \int_0^1 K(x,y)sen\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right)\, dy = \int_0^x y(1-x)sen\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right)\, dy + \int_x^1 x(1-y)sen\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right)\, dy =: I_1 + I_2$$

donde,

$$I_1 = (1-x)\left(-\sqrt{\lambda}ycos\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right)\Big|_0^x + \sqrt{\lambda}\int_0^x cos\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right)\, dy\right) = (1-x)\left(-\sqrt{\lambda}xcos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + \lambda sen\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$$

y

$$I_2 = x\left(-(1-y)\sqrt{\lambda}cos\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right)\Big|_x^1 + \sqrt{\lambda}\int_x^1 cos\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right)\, dy\right) = x\left((1-x)\sqrt{\lambda}cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + \lambda sen\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$$

de este modo $T_K\varphi = \lambda\varphi$. Aplicando la segunda condición inicial, vemos que

$$0 = f(1) = sen\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = n\pi \text{ con } n \in \mathbb{N}, \quad \text{luego } \lambda = \frac{1}{n^2\pi^2}$$

(6) Como T_K es un operador autoadjunto y compacto y por lo tanto $\sigma(T_K)\setminus\{0\}$ es vacío, son finitos autovalores o corresponde a una sucesión decreciente de autovalores tales que convergen a 0. De la parte anterior sabemos que

$$\left\{\lambda_n = \frac{1}{n^2\pi^2} : n \in \mathbb{N}\right\} = \sigma_p(T_K) \subseteq \sigma(T_K)$$

lo que implica que $\overline{\sigma_p(T_K)} = \sigma(T_K)$.

(7) Usando lo anterior y el hecho de que T_K es autoadjunto, resulta que

$$\|T_K\|_{\mathcal{B}(L^2)} = r(T_K) = \sup_{\lambda\in\sigma(T_K)} |\lambda| = \sup_{\lambda\in\overline{\sigma_p(T_K)}} |\lambda| = \frac{1}{\pi^2}$$

(8) Notemos que $K(x,y) = \text{mín}\{x,y\} - xy$. Por otro lado, para $x \in [0,1]$, definimos $\varphi_t(x) = \mathbb{1}_{\{t\leq x\}}(t) - x$. Veamos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi_t(x)\varphi_t(y)\, dt &= \int_0^1 (\mathbb{1}_{\{t\leq x\}}(t) - x)(\mathbb{1}_{\{t\leq y\}}(t) - y)\, dt \\
&= \int_0^1 \mathbb{1}_{\{t\leq x, t\leq y\}}(t)\, dt - y\int_0^1 \mathbb{1}_{\{t\leq x\}}(t)\, dt - x\int_0^1 \mathbb{1}_{\{t\leq y\}}(t)\, dt + \int_0^1 xy\, dt \\
&= \text{mín}\{x,y\} - xy = K(x,y)
\end{aligned}$$

De este modo, por tonelli y usando que $|\varphi_t(x)| \leq 2$, la función $\varphi_t(x)\varphi_t(y)\overline{f(x)}f(y)$ es integrable para toda $f \in L^2([0,1]) \subseteq L^1([0,1])$, así por Fubini vemos que

$$\begin{aligned}
\langle T_K f, f\rangle &= \int_{[0,1]^2} K(x,y)\overline{f(x)}f(y)\, dy\, dx = \int_{[0,1]^3} \varphi_t(x)\varphi_t(y)\overline{f(x)}f(y)\, dt\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left(\overline{\int_0^1 \varphi_t(x)f(x)\, dx} \cdot \int_0^1 \varphi_t(y)f(y)\, dy\right) dt = \int_0^1 \left|\int_0^1 \varphi_t(x)f(x)\, dx\right|^2 dt \geq 0
\end{aligned}$$

Hemos concluido que T_K es un operador positivo.

(9) **Teorema de Mercer**

Lema 0.1: *Sea $\{e_\alpha\}_{\alpha\in J}$ un conjunto ortonormal en $\mathcal{H}$. Si $(\{e_\alpha\}_{\alpha\in J})^\perp = \{0\}$ entonces $\{e_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Con $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert.*

Demostración. Sea $M = span(\{e_\alpha\}_{\alpha\in J})$, tenemos que $\overline{M}^\perp = (\{e_\alpha\}_{\alpha\in J})^\perp$, además se tiene que $\mathcal{H} = \overline{M} \oplus (\{e_\alpha\}_{\alpha\in J})^\perp = \overline{M}$, lo que implica que $\{e_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es una base ortonormal. □

Lema 0.2: *Sea $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $L^2([0,1])$, entonces $\{\overline{\psi_n}\psi_j\}_{n,j\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $L^2([0,1])^2$.*

Demostración. Por Fubini, vemos que

$$\left\langle \overline{\psi_n}\psi_j, \overline{\psi_m}\psi_i \right\rangle_{L^2} = \int_0^1\int_0^1 \psi_n(x)\overline{\psi_j(y)\psi_m(x)}\psi_i(y)\, dx\, dy = \int_0^1 \overline{\psi_m(x)}\psi_n(x)\, dx \cdot \int_0^1 \overline{\psi_j(y)}\psi_i(y)\, dy = \delta_{nm}\delta_{ij}$$

lo que implica que el conjunto es ortonormal, para ver que es base, por el primer lema basta probar que dado $f \in L^2([0,1]^2)$ tal que si $\left\langle f, \overline{\psi_n}\psi_j \right\rangle_{L^2} = 0$ para todo $n,j \in \mathbb{N}$ entonces $f = 0$. Para $y \in [0,1]$ definimos $f^y(x) = f(x,y)$, que esta en $L^2([0,1])$ para casi todo $y \in [0,1]$. Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$F_n(y) = \left\langle \overline{f^y}, \psi_n \right\rangle_{L^2([0,1])}, \quad \text{que es medible por Fubini}$$

Por Cauchy-Schwarz y Fubini notamos que

$$\|F_n\|^2_{L^2([0,1])} = \int_0^1 \left|\left\langle \overline{f^y}, \psi_n \right\rangle_{L^2([0,1])}\right|^2 dy \leq \int_0^1 \|f^y\|^2_{L^2([0,1])}\, dy = \int_0^1\int_0^1 |f(x,y)|^2\, dx\, dy = \|f\|_{L^2([0,1]^2)}$$

Además, veamos que $\langle F_n, \psi_j\rangle_{L^2([0,1])} = \left\langle f, \overline{\psi_n}\psi_j \right\rangle_{L^2([0,1]^2)} = 0$ para todo $n,j \in \mathbb{N}$. Como ψ_j es base, $F_n(y) = 0$ para casi todo $y \in [0,1]$ y todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $f^y = 0$ para casi todo $y \in [0,1]$, nuevamente por que ψ_n es base, se sigue que $\|f\|^2_{L^2([0,1]^2)} = 0$. □

(a) Sea $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y simétrica. Sea $T_k : L^2[(0,1)] \to L^2([0,1])$ definido como al inicio, con kernel K que también es positivo. Como K es continua, simétrica y positivo implica que el operador T_K es lineal, acotado, autoadjunto, compacto y positivo. Sea $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de autovectores de T_K y $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sus respectivos autovalores.

Por el segundo lema se tiene que $\{\overline{\psi_n}\psi_j\}_{n,j\in\mathbb{N}}$ es base ortonormal de $L^2([0,1]^2)$, entonces

$$K(x,y) = \sum_{n,j\in\mathbb{N}} \left\langle K, \overline{\psi_n}\psi_j \right\rangle_{L^2} \overline{\psi_n(x)}\psi_j(y)$$

por Fubini, notamos lo siguiente

$$\begin{aligned} \left\langle K, \overline{\psi_n}\psi_j \right\rangle_{L^2} &= \int_0^1 \int_0^1 K(x,y)\overline{\psi_n(x)}\psi_j(y)\ dx\ dy = \int_0^1 \overline{T_K\psi_n(y)}\psi_j(y)\ dy \\ &= \lambda_n \int_0^1 \overline{\psi_n(y)}\psi_j(y)\ dy = \lambda_n \left\langle \psi_n, \psi_j \right\rangle = \lambda_n\delta_{nj} \end{aligned}$$

de este modo,

$$K(x,y) = \sum_{n,j\in\mathbb{N}} \lambda_n\delta_{nj}\overline{\psi_n(x)}\psi_j(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n\overline{\psi_n(x)}\psi_n(y) \quad \text{en particular,} \quad K(x,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \left|\psi_n(x)\right|^2$$

Por otro lado, como el producto interno es continuo respecto a la norma en L^2, se sigue que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \int_0^1 \left|\psi_n(x)\right|^2\ dx = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \left|\psi_n(x)\right|^2\ dx = \int_0^1 K(x,x)\ dx$$

(b) Sabemos que

$$\sigma_p(T_K) = \left\{ \lambda_n = \frac{1}{n^2\pi^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\int_0^1 K(x,x)\ dx = \int_0^1 x(1-x)\ dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

así, por el teorema de Mercer, concluimos que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \pi^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n = \pi^2 \int_0^1 K(x,x)\ dx = \frac{\pi^2}{6}$$