



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: MAURICIO BUSTAMANTE – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

Topología Algebraica - MAT2850
Apuntes
05 de agosto de 2025

Índice

Motivación	3
1. Homología Simplicial	5
1.1. Complejos de Cadenas	5
1.2. Complejos Simpliciales	7
1.3. Homología Simplicial	9

Definición: Decimos que $f : X \rightarrow Y$ es una **equivalencia homotópica**, si existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \sim id_X$ y $f \circ g \sim id_Y$. En tal caso, X e Y se dicen homotópicamente equivalentes o que tienen el mismo tipo de homotopía y se denota por $X \sim Y$.

Ejemplo:

- (1) Sea $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo, en particular, tomando $g = f^{-1}$, se sigue que es equivalencia homotópica.
- (2) Se tiene que $\{0\} \sim \mathbb{R}^n$, consideremos la inclusión $i : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, afirmamos que es equivalencia homotópica. En efecto, se verifica que $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\}$ es una inversa homotópica. Por un lado $\pi \circ i = id_{\{0\}}$ y por otro $i \circ \pi = 0$. Notamos que $H(x, t) = tx$ con $t \in [0, 1]$ es una homotopía entre 0 y $id_{\mathbb{R}^n}$.
- (3) Veamos que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim \mathbb{S}^{n-1}$. Probaremos que la función $i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es equivalencia homotópica. En efecto,

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ x &\rightarrow \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

es inversa homotópica. Es claro que $\pi \circ i = id_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Definimos

$$H(x, t) := t \frac{x}{|x|} + (1 - t)x$$

Notamos que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = \frac{x}{|x|}$, es decir, H es una homotopía entre $i \circ \pi$ e $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$. Además, se verifica que $im(H) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1. Homología Simplicial

Queremos asignarle a un espacio topológico X arbitrario, grupos abelianos $H_0(X), H_1(X), \dots$ tal que si $X \sim Y$, entonces $H_i(X) \cong H_i(Y)$ para todo i . Intuitivamente, $H_k(X)$ estará generado por ciertos subespacios de X de dimensión k .

Habrá una relación de equivalencia, $A, B \subseteq X$ de dimensión k serán equivalentes si hay un subespacio de X de dimensión $k + 1$ cuyo borde es $A \cup B$.

Hay que restringir la clase de espacios a una con nociones de dimensión, borde, etc. Estos serán los complejos simpliciales. Necesitamos, adicionalmente, un objeto algebraico que capture esas nociones, esto corresponde a los complejos de cadenas.

1.1. Complejos de Cadenas

Definición: Un **complejo de cadenas** es una sucesión de grupos abelianos y homomorfismos

$$\dots \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

tal que $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ para todo i . Se denota por $(C_\bullet, \partial_\bullet)$.

Observación: Notemos que $\text{im } \partial_{i+1} \subseteq \ker \partial_i \subseteq C_i$. Dado que los grupos son abelianos, esta observación permite definir el siguiente objeto.

Definición: El i -ésimo grupo de homología de $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ se define por

$$H_i(C_i) := \frac{\ker \partial_i}{\text{im } \partial_{i+1}}$$

Ejemplos:

- Si A un grupo abeliano, entonces

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0$$

es un complejo de cadenas donde $C_i = A$. Entonces

$$H_j(C_\bullet) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ A & \text{si } j = i \end{cases}$$

- Consideremos la cadena exacta

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

entonces $H_j(C_\bullet) = 0$ para todo i .

- Veamos que

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es un complejo de cadenas. La homología asociadas son $H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z}$, $H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_2$ y $H_k(C_\bullet) = 0$.

Definición: Sean $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ y $(D_\bullet, \partial_\bullet)$ dos complejos de cadenas. Un **mapeo de cadenas** es una colección de homomorfismos $f_n : C_n \rightarrow D_n$ tal que $\partial_n f_n = f_{n-1} \partial_n$ para todo n , es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ D_n & \xrightarrow{\partial_n} & D_{n-1} \end{array}$$

y se denota por $f : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$.

Lema 1.1: Si $f : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ es un mapeo de cadenas, entonces la asignación $f_* : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$ dada por

$$f_*([x]) = [f_n(x)]$$

esta bien definida y es un homomorfismo de grupos.

Demostración. Sea $x \in \ker \partial_n$ entonces $\partial_n f_n(x) = f_{n-1} \partial_n(x) = f_{n-1}(0) = 0$. Así, $f_n(x) \in \ker \partial_n$ y por tanto la expresión tiene sentido. Si $[x] = [y]$ entonces $x - y = \partial_n(z)$ para $z \in C_{n+1}$, se sigue que $f_n(x) - f_n(y) = f_n \partial_{n+1}(z) = \partial_{n+1} f_{n+1}(z)$. Concluimos que $[f_n(x)] = [f_n(y)]$. \square

Ejemplo: Consideremos la siguiente situación

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{3} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & C_{\bullet} \\
 & & \downarrow & & \downarrow id & & \downarrow \pi & & \downarrow id & & & \downarrow f_{\bullet} \\
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{3} & \mathbb{Z}_3 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & D_{\bullet}
 \end{array}$$

Entonces $f_* : H_2(C_{\bullet}) = 0 \rightarrow H_2(D_{\bullet}) = \mathbb{Z}$ es el morfismo trivial. Mientras que $\pi_* : H_1(C_{\bullet}) = \mathbb{Z}_3 \rightarrow H_1(D_{\bullet}) = \mathbb{Z}_3$ es la identidad.

Observación: Sea $g_{\bullet} : D_{\bullet} \rightarrow G_{\bullet}$ un mapeo de cadenas, entonces $(g \circ f)_{\bullet} : C_{\bullet} \rightarrow G_{\bullet}$ es un mapeo de cadenas y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(C_{\bullet}) & \xrightarrow{(g \circ f)_*} & H_n(G_{\bullet}) \\
 & \searrow f_* & \nearrow g_* \\
 & H_n(D_{\bullet}) &
 \end{array}$$

Notemos que $\partial_n g_n f_n = g_{n-1} \partial_n f_n = g_{n-1} f_{n-1} \partial_n$. Por otro lado, tenemos que $(g \circ f)_*([x]) = [(g \circ f)(x)] = g_*([f(x)]) = (g_* \circ f_*)([x])$, lo que prueba la afirmación.

Nuestro objetivo será asociar un complejo de cadenas a un espacio topológico X arbitrario, lo que nos dará un grupo de homología para cada dimensión, además dada $f : X \rightarrow Y$ una función continua, nos gustaría obtener un mapeo de cadenas y por tanto un homomorfismo entre los grupos de homología de cada espacio.

1.2. Complejos Simpliciales

Definición: Dados $n + 1$ puntos $\{v_0, \dots, v_n\} \in \mathbb{R}^w$ son **afínmente independientes**, si generan un n -plano afín, es decir, $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ es un conjunto linealmente independiente, esto es

$$\sum_{i=0}^n t_i v_i = 0 \quad y \quad \sum_{i=0}^n t_i = 0 \quad \text{entonces} \quad t_i = 0 \quad \text{para todo } i$$

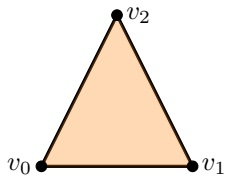
Ejemplo: Dos puntos son afínmente independientes. Tres puntos son afínmente independientes si y solo si no son colineales.

Definición: Si $\{v_0, \dots, v_n\}$ son afínmente independientes, ellos definen el **n -simplejo**

$$\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle = \left\{ x = \sum_{i=0}^n t_i v_i, \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1 \quad y \quad t_i \geq 0 \right\}$$

Decimos que σ es el n -simplejo generado por v_0, \dots, v_n . Los puntos v_i se llaman **vértices** de σ . Una **cara** de un simplejo σ es un simplejo τ generado por un subconjunto de $\{v_0, \dots, v_n\}$ y lo denotamos por $\tau \leq \sigma$. Si el subconjunto es propio, se dice que τ es una **cara propia**.

La **frontera** de un n -simplejo σ es la unión de todas sus caras propias, se denota por $\partial\sigma$, el **interior** de σ es $\text{int}(\sigma) := \sigma \setminus \partial\sigma$.

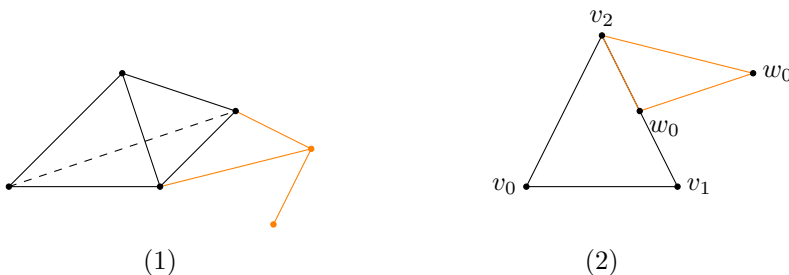


Definición: Un **complejo simplicial** (geométrico) K es un conjunto de simplejos tales que

- (1) Si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau \in K$.
- (2) Si $\sigma, \tau \in K$ entonces $\sigma \cap \tau = \emptyset$ ó $\sigma \cap \tau$ es una cara de σ y de τ .

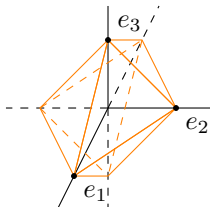
El **poliedro** asociado a un complejo simplicial K es $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$. Un espacio topológico X se llama un poliedro si existe un complejo simplicial K y un homeomorfismo $f : |K| \rightarrow X$. Al par (K, f) se le llama una **triangulación** de X . Denotamos por V_K al conjunto de vértices de los simplices.

Observación: Si X es triangulable, entonces es Hausdorff por que $|K|$ lo es.



La figura (1) corresponde a un complejo simplicial, mientras que la figura (2) no es un complejo simplicial ya que los simplices que la componen no se pegan bien.

Ejemplo: Consideremos el complejo simplicial K formado por los simplices $\sigma = \langle \pm e_1, \pm e_2, \pm e_3 \rangle$ y sus respectivas caras. Consideremos $f : |K| \rightarrow \mathbb{S}^2$ por $f(x) := x/|x|$, entonces (K, f) es una triangulación de la 2-esfera.



Definición: Sean K y L complejos simpliciales. Un **mapeo simplicial** de K a L es una función $f : V_K \rightarrow V_L$ tal que si $\sigma = \langle v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle$ es un simplejo en K entonces

$$\{f(v_{\alpha_0}), \dots, f(v_{\alpha_n})\}$$

genera un simplejo en L , al cual llamamos $f(\sigma)$. Notación $f : K \rightarrow L$.

Ejemplo: Sea $\Delta^n = \langle e_1, \dots, e_{n+1} \rangle \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^\infty$. Entonces las funciones $f : \Delta^1 \rightarrow \Delta^2$ y $g : \Delta^2 \rightarrow \Delta^1$ dadas por $f(e_i) = e_i$ y $g(e_1) = g(e_3) = e_1$, $g(e_2) = e_2$ son mapeos simpliciales.

Lema 1.2: Sea $f : K \rightarrow L$ un mapeo simplicial. Entonces induce una función continua $|f| : |K| \rightarrow |L|$.

Demostración. Sea $\sigma \in K$, digamos que $\sigma = \langle v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle$ y Definimos

$$f_\sigma : \sigma \rightarrow |L|$$

$$\sum_{i=0}^k t_i v_i \rightarrow \sum_{i=0}^k t_i f(v_i)$$

que es continua por que es lineal en los t_i . Se observa que si $\tau \leq \sigma$ entonces $f_\tau = f_\sigma|_\tau$. Ahora tomamos σ y σ' , entonces

$$f_\sigma|_{\sigma \cap \sigma'} = f_{\sigma \cap \sigma'} = f_{\sigma'}|_{\sigma \cap \sigma'}$$

entonces $|f| := \bigcup_{\sigma \in K} f_\sigma$ es una función continua de $|K|$ en $|L|$. □

Se verifica también que $|g \circ f| = |g| \circ |f|$. Un mapeo simplicial puede ser definido también como una función continua $f : |K| \rightarrow |L|$ que manda vértices en vértices y es lineal en sus caras.

1.3. Homología Simplicial

Dado K un complejo simplicial finito, esto es, que tiene un número finito de vértices. Elegimos un orden total en el conjunto de vértices, digamos $v_0 < v_1 < \dots < v_n$.

Definición: (*Complejo de cadenas simplicial*) Consideremos los grupos abelianos

$$C_n(K) := \left\{ \sum n_\sigma \sigma : \sigma = \langle v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle \text{ tal que } v_{\alpha_0} < \dots < v_{\alpha_n} \text{ y } n_\sigma \in \mathbb{Z} \text{ nulo salvo finitos casos} \right\}$$

y los diferenciales $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ se define en la base por

$$\partial_n \langle v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle = \sum_{i=0}^n (-1)^i \langle v_{\alpha_0}, \dots, \widehat{v_{\alpha_i}}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle$$

donde $\langle v_{\alpha_0}, \dots, \widehat{v_{\alpha_i}}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle := \langle v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_{i-1}}, v_{\alpha_{i+1}}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle$. Se extiende linealmente al resto del grupo.

Teorema 1.3: La tupla $(C_\bullet(K), \partial_\bullet)$ es un complejo de cadenas, además, la homología del complejo no depende del orden en el conjunto de vértices.

Definición: Sea K un complejo simplicial finito. El *i-ésimo grupo de homología simplicial* de K es

$$H_i(K) := H_i(C_\bullet(K)) = \frac{\ker \partial_i}{\operatorname{im} \partial_{i+1}}$$

Ejemplos:

- (1) Sea $K = \{\langle v_0, v_1 \rangle, \{v_0\}, \{v_1\}\}$ y consideramos el orden $v_0 < v_1$. El complejo corresponde a un segmento de recta, notemos que $3v_0 - 5v_1 \in C_0(K)$, con la identificación $v_0 = (1, 0)$ y $v_1 = (0, 1)$ vemos que $C_0(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, esta identificación no es canónica, es decir, depende de la base que escojamos y sus imágenes correspondientes.

Por otro lado, $C_1(K) \cong \mathbb{Z}$ con la identificación $\langle v_0, v_1 \rangle = 1$. Adicionalmente, se tiene que $C_i(K) = 0$ para $i > 1$. Luego,

$$0 \longrightarrow C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{0} 0$$

donde $\partial_1 \langle v_0, v_1 \rangle = v_1 - v_0 \in C_0(K)$. Con las identificaciones que hicimos resulta que $\partial_1(1) = (-1, 1)$. De este modo queda la cadena

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

Así $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(K) = 0$, $H_i(K) = 0$ para $i > 0$.

- (2) Sean v_0, v_1, v_2 puntos no colineales. Consideramos $\sigma = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ y $K := \{\tau \leq \sigma\}$ definimos el orden $v_0 < v_1 < v_2$. Notemos que

$$\begin{aligned} C_0(K) &= \mathbb{Z}\{v_0, v_1, v_2\} \\ C_1(K) &= \mathbb{Z}\{\langle v_0, v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_0, v_2 \rangle\} \\ C_2(K) &= \mathbb{Z}\{\langle v_0, v_1, v_2 \rangle\} \end{aligned}$$

Entonces $\partial_0 = 0$,

$$\partial_1 = \begin{cases} \partial \langle v_0, v_1 \rangle = v_1 - v_0 \\ \partial \langle v_1, v_2 \rangle = v_2 - v_1 \\ \partial \langle v_0, v_2 \rangle = v_2 - v_0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \partial_2 \langle v_0, v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle - \langle v_0, v_2 \rangle + \langle v_0, v_1 \rangle$$

Realizando las identificaciones $v_i = e_{i+1}$ para $i = 0, 1, 2$, $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle = 1$, $\langle v_0, v_1 \rangle = e_1$, $\langle v_1, v_2 \rangle = e_2$ y $\langle v_0, v_2 \rangle = e_3$ resulta que $C_0(K) \cong \mathbb{Z}^3$, $C_1(K) \cong \mathbb{Z}^3$ y $C_2(K) \cong \mathbb{Z}$. Tenemos

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \longrightarrow 0$$

donde

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Claramente $H_i(K) = 0$ para $i > 2$. Además, $\ker \partial_2$, entonces $H_2(K) = 0$. Notemos que $\operatorname{im} \partial_2 \cong \mathbb{Z}$ y $\ker \partial_1 \cong \mathbb{Z}$, luego $H_1(K) = 0$. Por otro lado, $\operatorname{im} \partial_1 \cong \mathbb{Z}^2$. Por ende $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

Comentario: Se invita a calcular la homología de un n —simplejo. Hasta ahora hemos definido todo respecto a \mathbb{Z} , pero se puede definir homología simplicial de manera análoga para cualquier anillo R .

Lema 1.4: Sea $f : K \rightarrow L$ un mapeo simplicial, entonces las funciones

$$f_n : C_n(K) \rightarrow C_n(L)$$

$$\langle v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle \rightarrow \begin{cases} \langle f(v_{\alpha_0}), \dots, f(v_{\alpha_n}) \rangle & \text{si son distintos} \\ 0 & \text{si no lo son} \end{cases}$$

forman un mapeo de cadena.