Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Mauricio Bustamante – Estudiante: Benjamín Mateluna

Topología Álgebraica - MAT2850
Tarea 4
07 de noviembre de 2025

Problema 1

(1) En primer lugar veamos que $\bullet$ esta bien definida, es decir, dados α, β caminos basados en x_0 tales que $[\alpha] = [\beta]$, entonces $\widehat{x} \bullet [\alpha] = \widehat{x} \bullet [\beta]$. En efecto, por levantamiento de homotopías relativas, se sigue que $\widehat{\alpha}(1) = \widehat{\beta}(1)$, lo que implica que

$$\widehat{x} \bullet [\alpha] = \widehat{\alpha}(1) = \widehat{\beta}(1) = \widehat{x} \bullet [\beta]$$

Además, como $p\widehat{\alpha} = \alpha$, se sigue que $\widehat{\alpha}(1) \in p^{-1}(x_0)$. Veamos que $\bullet$ induce una acción por la derecha de $\pi_1(X, x_0)$ en $p^{-1}(x_0)$. Sea $\widehat{x} \in p^{-1}(x_0)$ y ct_{x_0} el lazo constante basado en x_0. Notemos que el lazo $ct_{\widehat{x}}$ levanta a ct_{x_0}, luego $\widehat{x} \bullet [ct_{x_0}] = ct_{\widehat{x}}(1) = \widehat{x}$.

Sean α, β lazos basados en x_0 y $\widehat{x} \in p^{-1}(x_0)$. Afirmamos que $[p(\widehat{\alpha}^{-1} * \widehat{\alpha * \beta})] = [\beta]$ en $\pi_1(X, x_0)$. En primer lugar, vemos que

$$p(\widehat{\alpha}^{-1} * \widehat{\alpha * \beta})(0) = \alpha(1) = x_0 \quad \text{y} \quad p(\widehat{\alpha}^{-1} * \widehat{\alpha * \beta})(1) = \beta(1) = x_0$$

por lo que la expresión tiene sentido. Por otro lado, notemos que $p(\widehat{\alpha}^{-1} * \widehat{\alpha * \beta}) = p(\widehat{\alpha}^{-1}) * \alpha * \beta$ y adicionalmente tenemos que

$$[\alpha] * [p\widehat{\alpha^{-1}}] = [ct_{x_0}] = p_*[ct_{\widehat{x}}] = p_*[\widehat{\alpha} * \widehat{\alpha}^{-1}] = [p(\widehat{\alpha} * \widehat{\alpha}^{-1})] = [p\widehat{\alpha} * p\widehat{\alpha}^{-1}] = [p\widehat{\alpha}] * [p\widehat{\alpha}^{-1}] = [\alpha] * [p\widehat{\alpha}^{-1}]$$

lo que implica que $p\widehat{\alpha}^{-1} \sim \alpha^{-1}$, lo que prueba la afirmación. Así, se tiene lo siguiente

$$(\widehat{x} \bullet [\alpha]) \bullet [\beta] = \widehat{\alpha}(1) \bullet [\beta] = \widehat{\alpha}(1) \bullet [p(\widehat{\alpha}^{-1} * \widehat{\alpha * \beta})] = \widehat{\alpha * \beta}(1) = \widehat{x} \bullet [\alpha * \beta]$$

Notar que $\widehat{\alpha}^{-1} * \widehat{\alpha * \beta}(0) = \widehat{\alpha}(1)$.

(2) Supongamos que $\widehat{X}$ es arcoconexo, sean $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$, existe $\widehat{\gamma} : [0, 1] \to \widehat{X}$ continua tal que $\widehat{\gamma}(0) = \widehat{x}_1$ y $\widehat{\gamma}(1) = \widehat{x}_2$. Definimos $\gamma = p\widehat{\gamma}$, un lazo basado en x_0, entonces

$$\widehat{x}_1 \bullet [\gamma] = \widehat{\gamma}(1) = \widehat{x}_2$$

Por otro lado, supongamos que $\bullet$ es transitiva. Sean $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{X}$, tenemos dos casos, $\widehat{x}, \widehat{y} \in p^{-1}(x_0)$ para algún $x_0 \in X$, entonces, existe un lazo γ basado en x_0 tal que $\widehat{\gamma}(0) = \widehat{x}$ y

$$\widehat{\gamma}(1) = \widehat{x} \bullet [\gamma] = \widehat{y}$$

por lo tanto, $\widehat{\gamma}$ es el camino buscado. En cambio, si $\widehat{x} \in p^{-1}(x)$ e $\widehat{y} \in p^{-1}(y)$ con $x \neq y$, como X es arcoconexo, existe un camino γ de modo que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. Por lema del levantamiento $\widehat{\gamma}(0) = \widehat{x}$ y $\widehat{\gamma}(1) = \widehat{y'} \in p^{-1}(y)$ y por el caso anterior concluimos.

(3) Debemos probar que dado $\widehat{x} \in \widehat{X}$ se tiene que

$$p_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x})) = S_{\widehat{x}}$$

donde $S_{\widehat{x}}$ es el estabilizador de $\widehat{x}$. Sea $[\alpha] \in S_{\widehat{x}}$, entonces $\widehat{x} = \widehat{x} \bullet [\alpha] = \widehat{\alpha}(1)$, como $p\widehat{\alpha} = \alpha$, concluimos que $[\alpha] \in p_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}))$. Sea $[\alpha] \in p_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}))$, entonces existe un lazo basado en $\widehat{x}$, digamos $\widehat{\alpha}$, tal que $[p\widehat{\alpha}] = [\alpha]$, entonces

$$\widehat{x} \bullet [\alpha] = \widehat{x} \bullet [p\widehat{\alpha}] = \widehat{\alpha}(1) = \widehat{x}$$

(4) Usando la parte anterior y orbita establizador, resulta que

$$\left| \frac{\pi_1(X, x_0)}{p_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}))} \right| = |O_{\widehat{x}}| = \left| p^{-1}(x_0) \right|$$

donde en la última igualdad usamos que la acción es transitiva, o equivalentemente, que $\widehat{X}$ es arcoconexo.

Problema 2

El problema planteado es similar al problema 1.IV, pero faltan condiciones.

Problema 3

Consideremos la función $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ definida por

$$f(x,y) := \begin{cases} (x, 1-2y) & \text{si } 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ (x, 2y-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

y por lema del pegado, vemos que f es continua. Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} {[0,1]^2} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{T}^2}"] \arrow[dr, "\phi"] & {[0,1]^2} \arrow[d, "\pi_K"] \\ \mathbb{T}^2 & K \end{tikzcd}$$

donde $\phi = \pi_K \circ f$. Queremos que ϕ descienda a un función continua entre $\mathbb{T}^2$ y K, veamos que es constante en las fibras de $\pi_{\mathbb{T}^2}$. Sea $t \in [0,1]$, sabemos que $(0,t) \sim (1,t)$. Si $t \leq \frac{1}{2}$, entonces $f(0,t) = (0, 1-2t) \sim (1, 1-2t) = f(1,t)$, del mismo modo para $t \geq \frac{1}{2}$. Por otro lado, tenemos que $(t,0) \sim (t,1)$, luego $f(t,0) = (t,1) = f(t,1)$.
Sea $\varphi : \mathbb{T}^2 \to K$ la función inducida por ϕ, afirmamos que (T^2, φ) es un espacio cubriente regular de K. Bajo lo anterior, concluimos que

$$\mathbb{Z}^2 \cong \pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) \cong \varphi_*(\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0)) \trianglelefteq \pi_1(K, y_0)$$

con $y_0 = \varphi(x_0)$. Lo anterior concluye el ejercicio.
Para probar la afirmación, debemos demostrar los siguientes dos puntos

(1) La tupla $(\mathbb{T}^2, \varphi)$ es un espacio cubriente de K.

(2) El cubrimiento es regular, esto es equivalente a probar que el grupo $\triangle(\mathbb{T}^2, \varphi)$ actúa transitivamente en $\varphi^{-1}(x_0)$ para algún $x_0 \in K$. Definimos la función continua $g : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ por $g(x,y) = (x, 1-y)$, se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} {[0,1]^2} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{T}^2}"] \arrow[dr, "\rho"] & {[0,1]^2} \arrow[d, "\pi_{\mathbb{T}^2}"] \\ \mathbb{T}^2 & \mathbb{T}^2 \end{tikzcd}$$

donde $\rho := \pi_{\mathbb{T}^2} \circ g$. Sea $t \in [0,1]$, entonces $g(0,t) = (0, 1-t) \sim (1, 1-t) = g(1,t)$ y además $g(t,1) = (t,0) \sim (t,1) = g(t,0)$, lo que implica que ρ desciende a una función continua $r : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, más aún, como g es homeomorfismo también lo es r. Por otro lado, sea (x,y) tal que $y \geq \frac{1}{2}$, se sigue que

$$\varphi([x,y]) = [x, 2y-1] = [x, 1-2(1-y)] = \varphi([x, 1-y]) = \varphi \circ r([x,y])$$

similarmente se tiene para $y \leq \frac{1}{2}$. Concluimos que $r \in \triangle(\mathbb{T}^2, \varphi)$. Consideramos $x_0 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$, luego

$$\varphi^{-1}(x_0) = \left\{ \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \right\}$$

Notar que $r([\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]) = [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ y viceversa. Por ende, $\triangle(\mathbb{T}^2, \varphi)$ actúa transitivamente en $\varphi^{-1}(x_0)$.