Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Pedro Gaspar – Estudiante: Benjamín Mateluna

Geometría Diferencial - MAT2860
Resumen Superficies Regulares (I1)
06 de Abril de 2025

1. Superficies Regulares

1.1. Definición y ejemplos

Definición 0.1. *Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, decimos que Σ es una superficie regular si para todo $p \in \Sigma$ existe un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^3$ con $p \in V$ y una función diferenciable*

$$\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

tal que

- $\varphi(\mathcal{V}) = V \cap \Sigma$
- *φ es homeomorfismo de $\mathcal{V}$ sobre $V \cap \Sigma$*
- *$D\varphi(q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva, es decir, si $\varphi = \varphi(u, v)$, entonces*

$$\varphi_u(q) := D\varphi(q) \cdot e_1 = \frac{d}{dt}\varphi(q + te_1)\Big|_{t=0}$$
$$\varphi_v(q) := D\varphi(q) \cdot e_2 = \frac{d}{dt}\varphi(q + te_2)\Big|_{t=0}$$

  son linealmente independientes, en otras palabras $\varphi_u(q) \times \varphi_v(q) \neq 0$. Decimos que φ es una parametrización local para Σ.

Definición 0.2. *Una superficie parametrizada diferenciable es una aplicación diferenciable $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $\mathcal{V}$ abierto. Se dice que φ es regular si $D\varphi(q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $q \in \mathcal{V}$.*

Definición 0.3. *Sea $F : W \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable. Se dice que $q \in \mathbb{R}^m$ es un valor regular para F, si $F^{-1}(q) = \emptyset$ o si para todo $p \in F^{-1}(q)$ se tiene que $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es sobreyectiva.*

Teorema 1. *Sea $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $c \in \mathbb{R}$ es un valor regular para h, entonces $h^{-1}(c)$ es una superficie regular.*

1.2. Cambio de Coordenadas

Lema 1.1. *Sea $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie parametrizada regular*

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Entonces para todo punto $(u_0, v_0) \in \mathcal{V}$ se tiene que $D(\pi \circ \varphi)(u_0, v_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un isomorfismo lineal, donde $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una de las proyecciones a los planos xy, xz o yz.

Consecuentemente existe $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$ abierto con $(u_0, v_0) \in \mathcal{V}_0$ tal que $\pi \circ \varphi(\mathcal{V}_0) = W_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto y $\pi \circ \varphi\big|_{\mathcal{V}_0} : \mathcal{V}_0 \to W_0$ es un difeomorfismo.

Corolario 1.1. *Si $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie regular, entonces para todo $p \in \Sigma$ existe parametrización local cuya imagen contiene a p y que corresponde a la gráfica de una función diferenciable.*

Teorema 2. *Si $\varphi_i : \mathcal{V}_i \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ son parametrizaciones locales de Σ con $U := \varphi_1(\mathcal{V}_1) \cap \varphi_2(\mathcal{V}_2) \neq \emptyset$. Entonces la aplicación*

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \varphi_2^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^2$$

es un difeomorfismo. Se dice que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ es un cambio de coordenadas.

1.3. Aplicaciones Diferenciables

Definición 2.1. *Se dice que $f : \Sigma \to \mathbb{R}^d$ es diferenciable en $p \in \Sigma$ si existe una parametrización local $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ con $p \in \varphi(\mathcal{V})$ y tal que $f \circ \varphi$ es diferenciable en $\varphi^{-1}(p) \in \mathcal{V}$.*

Definición 2.2. *Se dice que*

$$\gamma : V \subseteq \mathbb{R}^d \to \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$$

con Σ una superficie parametrizada regular, es diferenciable en $q \in V$. Si existe una parametrización local $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $\gamma(q) \in \varphi(\mathcal{V})$ tal que

$$\varphi^{-1} \circ \gamma : \gamma^{-1}(\varphi(\mathcal{V})) \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^2$$

es diferenciable en $q \in \gamma^{-1}(\varphi(\mathcal{V}))$.

Lema 2.1.

a) Sean $\gamma : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^d \to \Sigma$ y $f : \Sigma \to \mathbb{R}^m$ tales que γ es diferenciable en q y f es diferenciable en $\gamma(q)$ entonces $f \circ \gamma$ es diferenciable en q.

b) Sean $f : \Sigma \to \mathbb{R}^m$ y $\phi : W \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ con $f(\Sigma) \subseteq W$ tales que f es diferenciable en p y ϕ es diferenciable en $\phi \circ f$ es diferenciable en p.

Corolario 2.1. *Una aplicación $\gamma : V \subseteq \mathbb{R}^d \to \Sigma$ es diferenciable $q \in V$ si y solo si sus coordenadas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ son funciones diferenciables de V a $\mathbb{R}$ en q.*

Definición 2.3. *Sean Σ_1, Σ_2 superficies regulares. Se dice que*

$$F : \Sigma_1 \to \Sigma_2$$

es diferenciable en $p \in \Sigma_1$. Si existen parametrizaciones locales $\varphi_i : \mathcal{V}_i \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ para Σ_i con $p \in \varphi_1(\mathcal{V}_1)$ y $F(p) \in \varphi_2(\mathcal{V}_2)$ tales que

$$\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1 : (F \circ \varphi_1)^{-1}(\varphi(\mathcal{V}_2)) \to \mathcal{V}_2$$

es diferenciable en $\varphi_1^{-1}(p) \in \mathcal{V}_1$.

Proposición 2.1. *Sea $F : \Sigma_1 \to \Sigma_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ y escribimos*

$$F(p) = (F_1(p), F_2(P), F_3(p))$$

donde $F_i : \Sigma_1 \to \mathbb{R}$. Entonces F es diferenciable en $p \in \Sigma_1$ si y solo si F_i son diferenciables en $p \in \Sigma_1$.

Definición 2.4. *Se dice que $F : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ entre superficies regulares es un difeomorfismo si*

- *F es diferenciable, es decir, F es diferenciable para todo $p \in \Sigma_1$.*
- *F es una biyección y F^{-1} es diferenciable*

Teorema 3. *Sean $F : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ y $G : \Sigma_2 \to \Sigma_3$ aplicaciones diferenciables entre superficies regulares. Si F es diferenciable en $p \in \Sigma_1$ y G es diferenciable en $F(p) \in \Sigma_2$ entonces $G \circ F$ es diferenciable en $p \in \Sigma_1$.*

1.4. El Plano Tangente

Definición 3.1. *El plano tangente a Σ en $p \in \Sigma$ es el subespacio vectorial*

$$D\varphi(\varphi^{-1}(p))(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$$

con φ una parametrización local en p. Lo denotaremos por $T_p\Sigma$.

Proposición 3.1. *Para $p \in \Sigma$ y $w \in \mathbb{R}^3$ tenemos que $w \in T_p\Sigma$ si y solo si existe una curva parametrizada diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que*

- $\alpha(0) = p$.
- $\alpha(t) \in \Sigma$ *para todo* $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
- $\alpha'(0) = w$.

Definición 3.2. *Sea $f : \Sigma \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $p \in \Sigma$. Definimos la derivada o diferencial de f en $p \in \Sigma$ se define por*

$$\begin{aligned} &Df_p : T_p\Sigma \to \mathbb{R}^m \\ &w = \alpha'(0) \to (f \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Proposición 3.2. *La derivada de una función diferenciable no depende de la elección de la curva y es lineal.*