Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Mauricio Bustamante – Estudiante: Benjamín Mateluna

Topología Algebraica - MAT2850
Apuntes
05 de agosto de 2025

Índice

Motivación

Dados dos espacios topológicos X e Y ¿Cuando son homeomorfos?. Decimos que dos espacios son **homeomorfos** si existe $f : X \to Y$ continua, biyectiva y con inversa constinua. La topología algebraica ataca esta pregunta de la siguiente forma:

(1) Asigna a cada espacio topológico X un objeto algebraico $G(X)$.

(2) Aigna a cada función continua $f : X \to Y$ un homomorfismo $G(f) : G(X) \to G(Y)$ tal que

  (a) $G(f \circ g) = G(f) \circ G(g)$

  (b) $G(id_X) = id_{G(X)}$

Observación: Ambas condiciones implican que si $f : X \to Y$ es homeomorfismo, entonces $G(f) : G(X) \to G(Y)$ es isomorfismo. A veces los G que se construyen satisfacen la propiedad extra que si X se puede "deformar continuamente" en Y entonces $G(X) \cong G(Y)$.

Decimos que G es un **invariante homotópico**.(Faltan ejemplos - c1)

Definición: *Una **homotopía** entre dos funciones continuas $f, g : X \to Y$ es una función continua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$.*
Notación: La función $H_t : X \to Y$ esta dada por $H_t(x) := H(x,t)$. Una homotopía de f a g se denota por $f \sim g$.

Proposición 0.1: *Ser homotópico es una relación de equivalencia en $\mathcal{C}(X,Y)$.*

Definición: *Decimos que $f : X \to Y$ es una **equivalencia homotópica**, si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f \sim id_X$ y $f \circ g \sim id_Y$*
En tal caso, X e Y se dicen homotópicamente equivalentes o que tienen el mismo tipo de homotopía y se denota por $X \sim Y$.

Ejemplo:

- Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo, en particular, tomando $g = f^{-1}$, se sigue que es equivalencia homotópica.

- Se tiene que $\{0\} \sim \mathbb{R}^n$, consideremos la inclusión $i :\to \{0\} \to \mathbb{R}^n$, afirmamos que es i es equivalencia homotópica. En efecto, se verifica que $\pi : \mathbb{R}^n \to \{0\}$ es una inversa homotópica. Por un lado $\pi \circ i = id_{\{0\}}$ y por otro $i \circ \pi = 0$. Notamos que $H(x,t) = tx$ con $t \in [0,1]$ es una homotopía entre 0 y $id_{\mathbb{R}^n}$.

- Veamos que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim \mathbb{S}^{n-1}$. Probaremos que la función $i : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es equivalencia homotópica. En efecto,

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\to \mathbb{S}^{n-1} \\ x &\to \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

  es inversa homotópica. Es claro que $\pi \circ i = id_{s^{n-1}}$. Definimos

$$H(x,t) := t\frac{x}{|x|} + (1-t)x$$

  Notamos que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = \frac{x}{|x|}$, es decir, H es una homotopia entre $i \circ \pi$ e $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$. Además, se verifica que $im(H) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1. Homología Simplicial

Queremos asignarle a un espacio topológico X arbitrario, grupos abelianos $H_0(X), H_1(X), \cdots$ tal que si $X \sim Y$, entonces $H_i(X) \cong H_i(Y)$ para todo i. Ituitivamente, $H_k(X)$ estará generado por ciertos subespacios de X de dimensión k.

Habrá una relación de equvalencia, $A, B \subseteq X$ de dimensión k serán equivalentes si hay un subespacio de X de dimensión $k+1$ cuyo borde es $A \cup B$. (Falta ejemplo - c1)

Hay que restringir la clase de espacios a una con nociones de dimensión, borde, etc. Estos serán los complejos simpliciales. Necesitamos, adicionalmente, un objeto algebraico que capture esas nociones, esto corresponde a los complejos de cadenas.

1.1. Complejos de Cadenas

Definición: *Un **complejo de cadenas** es una sucesión de grupos abelianos y homomorfismos*

$$\cdots \to C_3 \xrightarrow{d_3} C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

tal que $d_i \circ d_{i+1} = 0$ para todo i. Se denota por (C_*, d_*).
Observación: Notemos que $im\ d_{i+1} \subseteq ker\ d_i \subseteq C_i$. Dado que los grupos son abelianos, esta observación permite definir el siguiente objeto.

Definición: *El **i-ésimo grupo de homología** de (C_*, d_*) se define por*

$$H_i(C_i) := \frac{ker\ d_i}{im\ d_{i+1}}$$

Ejemplos:

- Si A un grupo abeliano, entonces
$$\cdots \to 0 \to 0 \to A \to 0 \to \cdots \to 0 \to 0$$
es un complejo de cadenas donde $C_i = A$. Entonces
$$H_j(C_*) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ A & \text{si } j = i \end{cases}$$
- Consideremos la cadena exacta
$$\cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \to 0$$
entonces $H_j(C_*) = 0$ para todo i.
- Veamos que
$$\cdots \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \to 0$$
es un complejo de cadenas. La homología asociadas son $H_0(C_*) = \mathbb{Z}$, $H_1(C_*) = \mathbb{Z}_2$ y $H_k(C_*) = 0$.

Nuestro objetivo será asociar un complejo de cadenas a un espacio topológico X arbitrario.

1.2. Complejos Simpliciales

Definición: *Dados $n+1$ puntos $\{v_0, \cdots, v_n\} \in \mathbb{R}^\omega$ son **afínmente independientes**, si generan un $n-$plano afín, es decir, $\{v_1 - v_0, \cdots, v_n - v_0\}$ es un conjunto linealmente independiente, esto es*

$$\sum_{i=0}^{n} t_i v_i = 0 \quad y \quad \sum_{i=0}^{n} t_i = 0 \quad entonces \quad t_i = 0 \text{ para todo } i$$

Ejemplo: Dos puntos son afínmente independientes. Tres puntos son afínmente independientes si y solo si no son colineales. (Falta ejemplo dibujo - c1)

Definición: *Si $\{v_0, \cdots, v_n\}$ son afínmente independientes, ellos definen el **n-simplejo***

$$\sigma = \langle v_0, \cdots, v_n \rangle = \left\{ x = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i, \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \quad y \quad t_i \geq 0 \right\}$$

Decimos que σ es el $n-$simplejo generado por $v_0, \cdots, v_n$. Los puntos v_i se llaman **vértices** de σ. Una **cara** de un simplejo σ es un simplejo τ generado por un subconjunto de $\{v_0, \cdots, v_n\}$ y lo denotamos por $\tau \leq \sigma$. Si el subconjunto es propio, se dice que τ es una **cara propia**.

La **frontera** de un $n-$simplejo σ es la unión de todas sus caras propias, se denota por $\partial\sigma$, el **interior** de σ es $int(\sigma) := \sigma \setminus \partial\sigma$.

Definición: *Un **complejo simplicial** (geométrico) K es un conjunto de simplejos tales que*

(1) Si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau \in K$.

(2) Si $\sigma, \tau \in K$ entonces $\sigma \cap \tau = \emptyset$ ó $\sigma \cap \tau$ es una cara de σ y de τ.

El **poliedro** asociado a un complejo simplicial K es $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$. Un espacio topológico X se llama un poliedro si existe un complejo simplicial K y un homeomorfismo $f : |K| \to X$. Al par (K, f) se le llama una **triangulación** de X.

Observación: Si X es triangulable, entonces es Hausdorff por que $|K|$ lo es. (Faltan ejemplos - c2)