



**Topología Algebraica - MAT2850**

**Tarea 2**

**05 de septiembre de 2025**

### Problema 3

Por simplicidad en el argumento, denotaremos los morfismos  $A_i \rightarrow A_{i+1}$  y  $B_i \rightarrow B_{i+1}$  como  $\partial$ , además, como ambas secuencias son exactas, resulta que  $\partial^2 a = \partial \circ \partial(a) = 0$ . Veamos que  $\ker f_3 = 0$ . Sea  $a \in \ker f_3$ , notemos que

$$0 = \partial f_3(a) = f_4 \partial(a) = 0 \quad \text{entonces} \quad \partial a = 0$$

Como  $a \in \ker \partial$ , existe  $a' \in A_2$  tal que  $\partial a' = a$ , luego  $\partial f_2(a') = f_3 \partial(a') = f_3(a) = 0$ . Por exactitud, existe  $b' \in B_1$  tal que  $\partial b' = f_2(a')$ , como  $f_1$  es isomorfismo, existe  $a'' \in A_1$  tal que  $b' = f_1(a'')$ , como los diagramas conmutan vemos que

$$a'' = f_1^{-1}(b') \quad \text{entonces} \quad \partial a'' = \partial f_1^{-1}(b') = f_2^{-1} \partial(b')$$

recordemos que  $\partial b' = f_2(a')$ , es decir,  $\partial a'' = a'$ , luego  $0 = \partial^2 a'' = \partial a' = a$ .

Sea  $b \in B_3$ , consideramos  $\partial b \in B_4$ , entonces  $f_4^{-1}(\partial b) \in A_4$ , por conmutatividad de los diagramas, vemos que  $\partial f_4^{-1}(\partial b) = f_5^{-1}(\partial^2 b) = 0$ , luego, por exactitud, existe  $a \in A_3$  tal que  $\partial a = f_4^{-1}(\partial b)$ ,

$$\partial(f_3(a) - b) = \partial f_3(a) - \partial b = f_4 \partial(a) - \partial b = 0$$

así, existe  $b' \in B_2$  tal que  $\partial b' = f_3(a) - b$ , definimos  $a' = f_2^{-1}(b') \in A_2$ , de este modo,

$$f_3(a) - b = \partial b' = \partial f_2(a') = f_3(\partial a')$$

en resumen,  $f_3(a - \partial a') = b$ . Concluimos que  $f_3$  es isomorfismo.

### Problema 4

Asignamos el orden a los vértices tal que  $i < i + 1$ .

- (1) **Definición:** Notemos que el complejo simplicial es conexo, luego, el argumento presentado en el problema 5, es invariante del anillo utilizado, entonces  $H_0(K) \cong R$  donde  $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}$ . Adicionalmente,  $C_i = 0$  para  $i > 2$ , ya que no hay  $i$ -simplices. Basta calcular  $H_i(K)$  para  $i = 1, 2$ . Tenemos el complejo de cadenas

$$0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

Para encontrar los grupos de homología basta calcular  $\ker \partial_2$ ,  $\text{im } \partial_2$  y  $\ker \partial_1$ . A cada vértice en  $C_0(K)$  le asignamos el vector canónico de la siguiente manera  $i = e_{i+1}$ , a cada 1-simplice le asignamos un vector como sigue,

$$\begin{aligned} \langle 0, 1 \rangle &= e_1 & \langle 1, 2 \rangle &= e_6 & \langle 2, 3 \rangle &= e_{10} & \langle 3, 4 \rangle &= e_{13} \\ \langle 0, 2 \rangle &= e_2 & \langle 1, 3 \rangle &= e_7 & \langle 2, 4 \rangle &= e_{11} & \langle 3, 5 \rangle &= e_{14} \\ \langle 0, 3 \rangle &= e_3 & \langle 1, 4 \rangle &= e_8 & \langle 2, 5 \rangle &= e_{12} & \langle 4, 5 \rangle &= e_{15} \\ \langle 0, 4 \rangle &= e_4 & \langle 1, 5 \rangle &= e_9 & & & & \\ \langle 0, 5 \rangle &= e_5 & & & & & & \end{aligned}$$

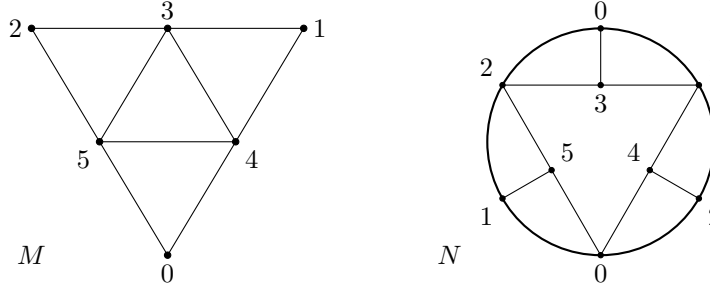
Luego, la acción de  $\partial_1$  esta representado por la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

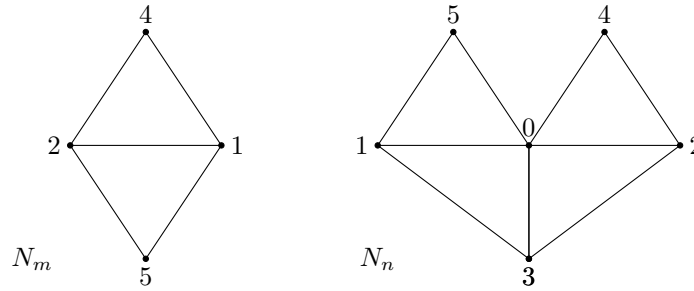
Sean  $c_i$  las columnas de la matriz, notemos que  $c_i - c_1 = c_{i+4}$  para  $1 < i < 6$ ,  $c_i - c_6 = c_{i+3}$  para  $6 < i < 10$ ,  $c_i - c_{10} = c_{i+2}$  para  $i = 11, 12$  y  $c_{14} - c_{13} = c_{15}$ . Lo anterior nos dice que las primeras cinco columnas generan la imagen de  $\partial_1$ , luego, el kernel tiene dimensión 10. Además, las relaciones nos dan los vectores que generan y tienen la forma  $1, -1, -1$ , no necesariamente juntos y el resto son ceros, se sigue que  $\ker \partial_1 \cong R^{10}$ , donde  $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}$ .

Queda estudiar la acción de  $\partial_2$ .

(2) **Mayer-Vietoris:** Para Mayer-Vietoris consideramos los siguientes subcomplejos simpliciales,



Por el lema, se tiene que  $H_0(M) = \mathbb{Z}$  y  $H_i(M) = 0$  para  $i > 0$  y además,  $H_i(M \cap N) = \mathbb{Z}$  para  $i = 0, 1$ . Por otro lado, para  $N$ , consideramos la subdivisión en complejos simpliciales, como sigue,



Nuevamente, por el lema, se sigue que  $H_0(N_m) = H_0(N_n) = \mathbb{Z}$  y 0 en otro caso. Por otro lado,  $H_0(N_m \cap N_n) = \mathbb{Z}^2$  y 0 en otro caso. Entonces usando Mayer-Vietoris resulta que

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H_2(N) \longrightarrow 0$$

es decir,  $H_2(N) = 0$ , para  $i = 1$  vemos que

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H_1(N) \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^2$$

## Problema 5

Dado  $K$  un complejo simplicial finito, sean  $v, w \in V_K$ , decimos que  $v \sim_p w$  si y solo si  $v$  esta conectado a  $w$  ó  $v = w$ , es decir, si existe una sucesión de 1-simplices  $\langle w_0, w_1 \rangle, \dots, \langle w_{k-1}, w_k \rangle$  tales que  $w_0 = v$  y  $w_k = w$ .

Por definición resulta que  $x \sim_p x$ , además, notemos que si  $v \sim_p w$  entonces  $w \sim_p v$  basta tomar  $\omega_i := w_{k-i}$ . Por otro lado, si  $v \sim_p w$  y  $w \sim_p u$ , entonces la sucesión

$$\langle w_0, w_1 \rangle, \dots, \langle w_{k-1}, w_k \rangle, \langle \omega_0, \omega_1 \rangle, \dots, \langle \omega_{j-1}, \omega_j \rangle$$

donde  $w_0 = v$ ,  $w_k = w$ ,  $\omega_0 = w$  y  $\omega_j = u$  es una sucesión que conecta  $v$  con  $u$ , en otras palabras,  $v \sim_p u$ .

**Definición (Componente Conexa):** Sea  $K$  un complejo simplicial finito y  $v \in V_K$ , definimos su componente conexa como

$$[v]_c := \{\sigma \in K : \sigma = \langle v_0, v_1, \dots, v_r \rangle \quad y \quad v \sim_p v_i\}$$

**Observación:** Si  $[v]_c = K$ , entonces el complejo simplicial es conexo. Sea  $w \in V_K$  tal que  $w \in [v]_c$ , entonces  $v \sim_p w$ . Luego, dado  $\sigma = \langle v_0, \dots, v_r \rangle \in [w]_c$  se tiene que  $v \sim_p v_i$ , se sigue que  $[w]_c \subseteq [v]_c$ , de manera similar obtenemos que  $[v]_c \subseteq [w]_c$ . Por lo tanto  $[w]_c = [v]_c$ .

Veamos que dado  $v \in V_K$ , se tiene que  $[v]_c$  es un subcomplejo simplicial de  $K$ . En efecto, sea  $\sigma \in [v]_c$  y  $\tau \leq \sigma$ , si  $v_i$  es un vértice de  $\tau$  entonces es vértice de  $\sigma$ , luego  $v \sim_p v_i$ , lo que implica que  $\tau \in [v]_c$ . La segunda propiedad se cumple trivialmente. Por lo

tanto, una componente conexa es un subcomplejo simplicial conexo de  $K$  y la unión de dos componentes conexas también es subcomplejo simplicial, puesto que un simplejo está en una componente conexa o en la otra, pero no en ambas.

Como  $\sim_p$  es una relación de equivalencia, particiona el conjunto de vértices, junto con lo anterior hemos probado que las componentes conexas particionan al complejo simplicial.

Debemos probar lo siguiente:

- (1) **Si  $K$  es conexo, entonces  $|K|$  arcoconexo.** Sean  $x, y \in |K|$ , existen  $\sigma_x, \sigma_y \in K$  tales que  $x \in \sigma_x$  e  $y \in \sigma_y$ , sean  $v_x \in \sigma_x$  y  $v_y \in \sigma_y$  vértices de  $K$ . Existe una sucesión

$$\langle w_0, w_1 \rangle, \dots, \langle w_{k-1}, w_k \rangle$$

tal que  $w_0 = v_x$  y  $w_k = v_y$ , consideramos la función  $f_i : [0, 1] \rightarrow |K|$  dada por  $f_i(t) := (1-t)w_i + tw_{i+1}$  que está bien definida por que  $\langle w_i, w_{i+1} \rangle$  es convexo y es continua. Del mismo modo, como  $\sigma_x$  es convexo, la función  $f_x : [0, 1] \rightarrow |K|$  dada por  $f_x(t) := (1-t)x + tv_x$  está bien definida. De manera análoga definimos  $f_y$ , pero  $f_y(0) = v_y$  y  $f_y(1) = y$ . Luego,

$$f := f \cdot f_0 \cdot f_1 \cdots \cdots f_{k-1} \cdot f_y$$

donde  $\cdot$  es la operación de concatenación. Es una función continua, por lema del pegamiento, y tal que  $f(0) = x$  y  $f(1) = y$ .

Concluimos que  $|K|$  es arcoconexo.

- (2) **Probar que  $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^{\# \text{componentes conexas}}$ .** Como  $K$  es finito, hay finitas componentes conexas, procederemos por inducción en el número de componentes conexas.

Supongamos que  $K$  tiene una componente conexa, entonces  $K$  es conexo. Dado  $v \in V_K$ , basta probar que  $[v] = [w]$  en  $H_0(K)$  para todo  $w \in V_K$ . Como  $K$  es conexo, existe una sucesión

$$\langle w_0, w_1 \rangle, \dots, \langle w_{k-1}, w_k \rangle$$

tal que  $w_0 = v$  y  $w_k = w$ , entonces

$$\partial \left( \sum_{i=0}^{k-1} \langle w_i, w_{i+1} \rangle \right) = \sum_{i=0}^{k-1} \partial \langle w_i, w_{i+1} \rangle = \sum_{i=0}^{k-1} w_{i+1} - w_i = w_k - w_0 = w - v$$

luego  $w - v \in \text{im } \partial$ . Entonces  $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ .

Sea  $n$  el número de componentes conexas. Sean  $M_i$  las componentes conexas de  $K$ , consideramos los subcomplejos simpliciales

$$M = M_n \quad \text{y} \quad N = \bigcup_{i=1}^{n-1} M_i$$

Por Mayer-Vietoris, se tiene la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow H_0(M) \oplus H_0(N) \longrightarrow H_0(K) \longrightarrow 0$$

entonces

$$H_0(K) \cong H_0(M) \oplus H_0(N) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-1} \cong \mathbb{Z}^n$$