



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: GREGORIO MORENO – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

Teoría de Integración - MAT2534

Tarea 3

06 de junio de 2025

Problema 1

a) Sea $t > 0$, notemos que $e^{-tx^2} < e^{-tx}$ para $x > 1$, es positiva y continua, luego

$$I = \int_0^\infty e^{-tx^2} dx = \int_{(0,\infty)} e^{-tx^2} d\lambda(x)$$

entonces

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{(0,\infty)} e^{-tx^2} d\lambda(x) \right) \left(\int_{(0,\infty)} e^{-ty^2} d\lambda(y) \right) = \int_{(0,\infty)} e^{-ty^2} \left(\int_{(0,\infty)} e^{-tx^2} d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(0,\infty)} e^{-t(x^2+y^2)} d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \end{aligned}$$

Como la función $e^{-t(x^2+y^2)}$ es continua y positiva, por tonelli, vemos que

$$I^2 = \int_{(0,\infty)^2} e^{-t(x^2+y^2)} (\lambda \otimes \lambda) dx dy$$

Consideremos el cambio de variables $x = r \cos(\theta)$ y $y = r \sin(\theta)$ con $r \in (0, \infty)$ y $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ con determinante jacobiano igual a r , luego, por cambio de variables se sigue que

$$I^2 = \int_{(0,\infty)^2} e^{-t(x^2+y^2)} (\lambda \otimes \lambda) dx dy = \int_{(0,\frac{\pi}{2}) \times (0,\infty)} r e^{-tr^2} (\lambda \otimes \lambda) d\theta dr$$

por tonelli, vemos que

$$I^2 = \int_{(0,\frac{\pi}{2})} \left(\int_{(0,\infty)} r e^{-tr^2} dr \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\infty r e^{-tr^2} dr \right) d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty r e^{-tr^2} dr$$

donde la segunda igualdad se debe a la continuidad y positividad. Utilizando el cambio de variable $u = tr^2$, observamos que

$$\int_0^\infty r e^{-tr^2} dr = \frac{1}{2t} \int_0^\infty e^{-u} du = \frac{1}{2t} - e^{-u} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2t} < \infty$$

De este modo,

$$I^2 = \frac{\pi}{4t}$$

concluimos que $g(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}}$.

- b) Consideremos la función $F(x, t) = e^{-x^2} \cos(tx)$. Dado $t_0 \in \mathbb{R}$ vemos que la función $F(x, t_0)$ es continua y por ende medible, además, $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Para $t = 0$ notamos que

$$f(0) = \int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

y por lo tanto $f(x, 0)$ es integrable. Por otro lado,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| = \left| -xe^{-x^2} \sin(tx) \right| \leq |x| e^{-x^2} =: g$$

es claro que g es una función integrable, basta notar que su integral impropia es finita. Luego, la función f es diferenciable y como $|F(x, t)| \leq e^{-x^2}$ se tiene que

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(tx) dx \right) = \frac{d}{dt} \left(\int_{(0, \infty)} e^{-x^2} \cos(tx) d\lambda(x) \right) = \int_{(0, \infty)} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-x^2} \cos(tx)) d\lambda(x) \\ &= \int_{(0, \infty)} -xe^2 \sin(tx) d\lambda(x) = \int_0^\infty -xe^2 \sin(tx) dx \\ &= \frac{e^{-x^2}}{2} \sin(tx) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{t}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(tx) dx = \frac{t}{2} f(t) \end{aligned}$$

Tenemos una EDO de variables separables $f' = -\frac{t}{2}f$ con condición inicial $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Luego

$$\int \frac{df}{f} = \int -\frac{t}{2} dt$$

se sigue que

$$\log(f) = -\frac{t^2}{4} + C \quad \text{entonces} \quad f = e^{-\frac{t^2}{4} + C}$$

evaluando en la condición inicial vemos que

$$f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{t^2}{4}}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

- c) Sean $0 < a < b < \infty$. Notemos que

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-tx} dt$$

La función e^{-tx} es continua y positiva, por tonelli vemos que

$$\begin{aligned} \int_{(0, \infty) \times (a, b)} e^{-tx} dt dx &= \int_{(a, b)} \int_{(0, \infty)} e^{-tx} dx dt = \int_a^b \int_0^\infty e^{-tx} dx dt = \int_a^b \int_0^\infty -\frac{e^u}{t} du dt \\ &= \int_a^b -\frac{1}{t} e^u \Big|_0^{-\infty} dt = \int_a^b \frac{1}{t} dt = \log \left(\frac{b}{a} \right) \end{aligned}$$

la segunda igualdad se debe a la continuidad y que la función e^{-tx} es positiva. Por otro lado tenemos que

$$\int_{(0, \infty) \times (a, b)} e^{-tx} dt dx = \int_{(0, \infty)} \int_{(a, b)} e^{-tx} dt dx = \int_0^\infty \int_a^b e^{-tx} dt dx = h(a, b)$$

Por lo tanto $h(a, b) = \log \left(\frac{b}{a} \right)$.

Problema 2

a) El cambio de variables a coordenadas polares en \mathbb{R}^n , denotado por φ_n esta dado por

$$\begin{aligned} x_n &= r \operatorname{sen}(\theta_{n-1}) \\ x_{n-1} &= r \cos(\theta_{n-1}) \operatorname{sen}(\theta_{n-2}) \\ &\vdots \\ x_2 &= r \cos(\theta_{n-1}) \cos(\theta_{n-2}) \cdots \cos(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_1) \\ x_1 &= r \cos(\theta_{n-1}) \cos(\theta_{n-2}) \cdots \cos(\theta_2) \cos(\theta_1) \end{aligned}$$

Afirmamos que el determinante jacobiano del cambio de variables es

$$J_{\varphi_n}(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = r^{n-1} \prod_{i=2}^{n-1} (\cos^{i-1}(\theta_i))$$

Procederemos por inducción sobre la dimensión. Para $n = 1$ el resultado es inmediato, supongamos que se tiene para n . Debemos probar el resultado para $n + 1$. Expandiendo por cofactores notamos que

$$\begin{aligned} J_{\varphi_n} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial r} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial r} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial r} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_n} \\ \operatorname{sen}(\theta_n) & 0 & \cdots & 0 & r \cos(\theta_n) \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n \operatorname{sen}(\theta_n) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_n} \end{vmatrix} + r \cos(\theta_n) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial r} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Vamos a identificar (x_1, \dots, x_n) con (y_1, \dots, y_n) y consideramos el cambio de variable φ_n . Notemos que $\frac{\partial x_i}{\partial \theta_j} = \cos(\theta_n) \frac{\partial y_i}{\partial \theta_j}$ donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n-1$. Además, $\frac{\partial x_i}{\partial \theta_n} = -\operatorname{sen}(\theta_n) r \frac{\partial y_i}{\partial r}$ con $1 \leq i \leq n$ y también $\frac{\partial x_i}{\partial r} = \cos(\theta_n) \frac{\partial y_i}{\partial r}$ para $1 \leq i \leq n$. Luego,

$$J_{\varphi_{n+1}} = (-1)^{n+1} r \operatorname{sen}^2(\theta_n) \cos^{n-1}(\theta_n) \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial y_1}{\partial r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial y_n}{\partial r} \end{vmatrix} + r \cos^{n+1}(\theta_n) \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial r} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial r} & \frac{\partial y_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial \theta_{n-1}} \end{vmatrix}$$

Si permutamos $n-1$ columnas en la primer submatriz corresponde al jacobiano de φ_n , adicionalmente, la segunda submatriz es exactamente igual al jacobiano de φ_n . Entonces

$$\begin{aligned} J_{\varphi_{n+1}} &= (-1)^{n+1} r \operatorname{sen}^2(\theta_n) \cos^{n-1}(\theta_n) (-1)^{n-1} J_{\varphi_n} + r \cos^{n+1}(\theta_n) J_{\varphi_n} \\ &= r \cos^{n-1}(\theta_n) J_{\varphi_n} (\operatorname{sen}^2(\theta_n) + \cos^2(\theta_n)) = r \cos^{n-1}(\theta_n) J_{\varphi_n} \end{aligned}$$

Usando la hipotesis inductiva, nos queda

$$J_{\varphi_{n+1}} = r^n \prod_{i=2}^n (\cos^{i-1}(\theta_i))$$

b) De la parte anterior consideramos el cambio de variable a coordenadas polares en \mathbb{R}^n . Tenemos lo siguiente

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} g(|x|) d\lambda(x) = \int_{(0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2}} g(r) |J_{\varphi_n}| dr d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{n-1}$$

como la función sigue siendo positiva después de aplicar el cambio de variable, por tonelli se sigue que

$$\begin{aligned}
I &= \int_{(0,\infty)} \int_{(0,2\pi)} \int_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \cdots \int_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} g(r) |J_{\varphi_n}| d\theta_{n-1} \cdots d\theta_2 d\theta_1 dr \\
&= 2\pi \prod_{i=2}^{n-1} \left(\int_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \cos^{i-1}(\theta) d\lambda(\theta) \right) \int_{(0,\infty)} g(r) r^{n-1} d\lambda(r) \\
&= 2\pi \prod_{i=2}^{n-1} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{i-1}(\theta) d\theta \right) \int_{(0,\infty)} g(r) r^{n-1} d\lambda(r) \\
&= 2\pi \prod_{i=2}^{n-1} \left(\int_0^\pi \sin^{i-1}(\theta) d\theta \right) \int_{(0,\infty)} g(r) r^{n-1} d\lambda(r)
\end{aligned}$$

en la última igualdad utilizamos que las variables son independientes entre sí, además, para ahorrar notación eliminamos los índices de las variables θ . Definimos

$$I(m) = \int_0^\pi \sin^m(\theta) d\theta$$

para $m \in \mathbb{N}_0$. Afirmamos que

$$I(2m) = \pi \prod_{k=1}^m \frac{2k-1}{2k} \quad \text{y} \quad I(2m+1) = 2 \prod_{k=1}^m \frac{2k}{2k+1}$$

Probaremos lo anterior para el caso par, el otro caso es análogo. Sea $m = 0$, el resultado es directo. Supongamos que el resultado se tiene para m . Utilizando integración por partes se obtiene la recursión

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^{2m+2}(\theta) d\theta &= -\frac{\cos(\theta)\sin^{2m+1}(\theta)}{2m+2} \Big|_0^\pi + \frac{2m+1}{2m+2} \int_0^\pi \sin^{2m}(\theta) d\theta = \frac{2m+1}{2m+2} \int_0^\pi \sin^{2m}(\theta) d\theta \\
&= \frac{2m+1}{2m+2} \cdot \pi \prod_{k=1}^m \frac{2k-1}{2k} = \pi \prod_{k=1}^{m+1} \frac{2k-1}{2k}
\end{aligned}$$

Además observamos que

$$I(2m-1)I(2m) = 2 \prod_{k=1}^{m-1} \frac{2k}{2k+1} \cdot \pi \prod_{k=1}^m \frac{2k-1}{2k} = 2\pi \cdot \frac{2m-1}{2m} \cdot \prod_{k=1}^{m-1} \frac{2k-1}{2k+1} = 2\pi \cdot \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{1}{2m-1} = \frac{\pi}{m}$$

Regresando al problema original, tenemos dos casos, $n-1$ es impar, es decir, $n-1 = 2k-1$, entonces

$$2\pi \prod_{i=2}^{n-1} \left(\int_0^\pi \sin^{i-1}(\theta) d\theta \right) = 2\pi \prod_{i=2}^{2k-1} I(i-1) = 2\pi \prod_{j=1}^{k-1} I(2j-1)I(2j) = 2\pi \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\pi}{j} = \frac{2\pi^k}{(k-1)!}$$

Supongamos que $n-1$ es par, lo que implica que $n-1 = 2k$, así

$$\begin{aligned}
2\pi \prod_{i=2}^{n-1} \left(\int_0^\pi \sin^{i-1}(\theta) d\theta \right) &= 2\pi \prod_{i=2}^{2k} I(i-1) = 2\pi \cdot I(2k-1) \prod_{i=2}^{2k-1} I(i-1) = 2\pi \cdot \frac{\pi^{k-1}}{(k-1)!} \cdot 2 \prod_{j=1}^{k-1} \frac{2j}{2j+1} \\
&= 4\pi^k \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \frac{2j}{2j+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k-1)!!}
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$I = S_{n-1} \int_{(0,\infty)} g(r) r^{n-1} d\lambda(r)$$

Problema 3

En primer lugar, notemos que

$$I = \int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy} (\lambda \otimes \lambda)(dxdy) = \int_{[0,1]^2} \sum_{n \geq 1} (xy)^{n-1} (\lambda \otimes \lambda)(dxdy)$$

como xy es positiva en $[0, 1]^2$, por convergencia monótona y tonelli se sigue que

$$I = \sum_{n \geq 1} \int_{[0,1]^2} (xy)^{n-1} (\lambda \otimes \lambda)(dxdy) = \sum_{n \geq 1} \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} x^{n-1} y^{n-1} dxdy = \sum_{n \geq 1} \left(\int_{[0,1]} x^{n-1} dx \right) \left(\int_{[0,1]} y^{n-1} dy \right)$$

la última igualdad se debe a la independencia entre las variables. Por continuidad, vemos que

$$I = \sum_{n \geq 1} \left(\int_0^1 x^{n-1} dx \right) \left(\int_0^1 y^{n-1} dy \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

Por otro lado, consideramos el cambio de variable $x = u + v$ e $y = u - v$ con determinante jacobiano igual a 2, luego la nueva región de integración \mathcal{R} esta determinado por

$$\mathcal{R} := \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq \frac{1}{2}, -u \leq v \leq u \right\} \cup \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq u \leq 1, 1+u \leq v \leq 1-u \right\}$$

Así,

$$I = \int_{\mathcal{R}} \frac{2}{1 - (u+v)(u-v)} (\lambda \otimes \lambda)(dxdy) = 2 \int_{\mathcal{R}} \frac{1}{1 - u^2 + v^2} (\lambda \otimes \lambda)(dxdy)$$

Diremos que $\mathcal{R}_+ := \mathcal{R} \cap \{v \geq 0\}$. Por simetría respecto a v , vemos que

$$I = 4 \int_{\mathcal{R}_+} \frac{1}{1 - u^2 + v^2} (\lambda \otimes \lambda)(dxdy) = 4 \int_{[0,1] \times (R_+)^2(u)} \frac{1}{1 - u^2 + v^2} (\lambda \otimes \lambda)(dxdy)$$

donde $(R_+)^2(u)$ es la sección de R_+ respecto de u . Notemos que en la última igualdad se utilizo que la función es continua y positiva. Así, por tonelli se sigue que

$$I = 4 \int_{[0,1]} \int_{(R_+)^2(u)} \frac{1}{1 - u^2 + v^2} d\lambda(v) d\lambda(u) = 4 \int_0^1 \int_0^{f(u)} \frac{1}{1 - u^2 + v^2} dv du$$

con f función que describe el contorno superior de \mathcal{R}_+ en función de u . Luego

$$I = 4 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^u \frac{1}{1 - u^2 + v^2} dv du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-u} \frac{1}{1 - u^2 + v^2} dv du \right)$$

consideramos $a = \sqrt{1 - u^2}$ que esta bien definido pues $0 \leq u \leq 1$, así

$$\begin{aligned} I &= 4 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^u \frac{1}{a^2 + v^2} dv du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-u} \frac{1}{a^2 + v^2} dv du \right) \\ &= 4 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{v}{a} \right) \Big|_0^u du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{v}{a} \right) \Big|_0^{1-u} du \right) \\ &= 4 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \right) du \right) = 4(I_1 + I_2) \end{aligned}$$

Para I_1 integramos por partes, en efecto

$$\begin{aligned} I_1 &= \arcsen(u) \arctan \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsen(u) \frac{1}{1 + \frac{u^2}{1-u^2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{1}{1-u^2} du \\ &= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsen(u) \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{\pi^2}{36} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt = \frac{\pi^2}{36} - \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{72} \end{aligned}$$

donde realizamos el cambio de variable $t = \arcsen(u)$. Por otra parte, para I_2 consideramos el cambio de variable $u = \cos(\theta)$ y entonces

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{1}{\sen(\theta)} \arctan\left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\sen(\theta)}\right) \sen(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \arctan\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \arctan(\tan(w)) dw = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} w dw = w^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{36} \end{aligned}$$

Luego

$$I = 4(I_1 + I_2) = \left(\frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi^2}{36}\right) = 4 \cdot \frac{3\pi^2}{72} = \frac{\pi^2}{6}$$

Problema 4

Afirmamos que $f_{\alpha,\beta}$ es de variación acotada si y solo si $\alpha > \beta$. En efecto, supongamos que $\alpha \leq \beta$, definimos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$$x_n := \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}n\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

con $x_0 := 0$. Notemos que $x_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además

$$f_{\alpha,\beta}(x_n) = \frac{2^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\pi^{\frac{\alpha}{\beta}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}} \sen\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

si n es par entonces $f_{\alpha,\beta}(x_n) = 0$, de lo contrario,

$$f_{\alpha,\beta}(x_n) = \frac{2^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\pi^{\frac{\alpha}{\beta}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}$$

Consideramos la partición $\Pi_n = \{x_i\}_{i=0}^n$, sin pérdida de generalidad, supongamos que n es impar, entoces $n = 2k-1$, luego

$$V(f, \Pi_n) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \geq \sum_{j=1}^k |f(x_{2j-1})| = \sum_{j=1}^k \frac{2^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\pi^{\frac{\alpha}{\beta}}} \cdot \frac{1}{(2j-1)^{\frac{\alpha}{\beta}}} = \frac{2^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\pi^{\frac{\alpha}{\beta}}} \sum_{j=1}^k \frac{1}{(2j-1)^{\frac{\alpha}{\beta}}}$$

como $\alpha \leq \beta$, la última suma diverge cuando $n \rightarrow \infty$ y por lo tanto $f_{\alpha,\beta}$ no es de variación acotada.

Supongamos que $\alpha > \beta$. Definimos $f_n := \mathbb{1}_{\{0\} \cup [\frac{1}{n}, 1]} f_{\alpha,\beta}$. Es claro que f_n converge puntualmente a $f_{\alpha,\beta}$, así

$$V(f, [0, 1]) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} V(f_n, [0, 1])$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, notemos que $V(f_n, [0, 1]) = V(f_n, [0, \frac{1}{n}]) + V(f_n, [\frac{1}{n}, 1]) = V(f_n, [\frac{1}{n}, 1])$. La función f_n se puede extender de modo que sea diferenciable en $(\frac{1}{n} - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Luego, se tiene que

$$V\left(f_n, \left[\frac{1}{n}, 1\right]\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 |f'_{\alpha,\beta}(x)| dx \leq \int_0^1 |f'_{\alpha,\beta}(x)| dx$$

donde la segunda integral es impropia, que esta bien definida ya que $f'_{\alpha,\beta}$ es Riemann integrable en todo intervalo de la forma $[b, 1]$, por continuidad. Veamos que

$$\int_0^1 |f'_{\alpha,\beta}(x)| dx = \int_0^1 |\alpha x^{\alpha-1} \sen(x^{-\beta}) - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos(x^{-\beta})| dx \leq \alpha \int_0^1 x^{\alpha-1} dx + \beta \int_0^1 x^{\alpha-\beta-1} dx$$

La integral que esta a la izquierda es convergente, ya que $\alpha > 0$ y por ende $\alpha - 1 > -1$. Por otro lado, como $\alpha > \beta$, se tiene que $\alpha - \beta - 1 > -1$ lo que implica que la integral de la derecha es convergente. De este modo,

$$V(f, [0, 1]) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} V(f_n, [0, 1]) \leq \int_0^1 |f'_{\alpha,\beta}(x)| dx < \infty$$

Concluimos que $f_{\alpha,\beta}$ es de variación acotada.

Problema 5

Lema 0.1. Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente y absolutamente continua. Sea $E \subseteq [a, b]$ un conjunto de medida nula, entonces $\lambda(g(E)) = 0$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, como E es medible, existe $G \supseteq E$ abierto tal que $\lambda(G) < \delta$ para todo $\delta > 0$, como g es creciente y absolutamente continua, existe $\delta > 0$ y G abierto tal que $\lambda(g(E)) \leq \lambda(g(G)) < \varepsilon$. Dado que ε es arbitrario, concluimos que $\lambda(g(E)) = 0$.

Sea $I = (c, d) \subseteq [a, b]$ un intervalo, como g es absolutamente continua, por TFC se sigue que

$$\lambda(g(I)) = \lambda((g(c), g(d))) = g(d) - g(c) = \int_{(c,d)} g' d\lambda$$

además utilizamos el hecho de que g es creciente y $g(I)$ un intervalo. Sea $(I_n)_n$ intervalos disjuntos de a pares contenidos en $[a, b]$, entonces como g es estrictamente creciente, en particular es inyectiva, se sigue que $g(I_n)$ son disjuntos de a pares. Notemos que

$$\lambda\left(g\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n\right)\right) = \lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} g(I_n)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(g(I_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{I_n} g' d\lambda = \int \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{I_n} g' d\lambda = \int_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n} g' d\lambda$$

en donde para intercambiar la suma con la integral usamos teorema de convergencia dominada. Como todo abierto se puede escribir como unión numerable de intervalos abiertos disjuntos de a pares, lo anterior prueba el argumento para abiertos $U \subseteq [a, b]$.

Sea $G \in \mathcal{G}_\delta$, existen $(U_n)_n$ abiertos de $[a, b]$ tales que

$$G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

sin pérdida de generalidad podemos suponer que estos abiertos están encajonados. Como $[a, b]$ es compacto entonces $g([a, b])$ es compacto y entonces $g(U_1) < \infty$, así

$$\lambda(g(G)) = \lambda\left(g\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n\right)\right) = \lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} g(U_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(g(U_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U_n} g' d\lambda = \int_G g' d\lambda$$

donde la última igualdad se debe al teorema de convergencia dominada, notando que $\mathbb{1}_{U_n}$ converge a $\mathbb{1}_G$.

Sea $E \subseteq [a, b]$ medible, existe $G \in \mathcal{G}_\delta$ tal que $\lambda(G \setminus E) = 0$, por el lema tenemos que $\lambda(g(G \setminus E)) = 0$, como g es continua, inyectiva y $[a, b]$ es compacto se sigue que $\lambda(g(E)) = \lambda(g(G))$, entonces

$$\lambda(g(E)) = \lambda(g(G)) = \int_G g' d\lambda = \int_E g' d\lambda + \int_{G \setminus E} g' d\lambda = \int_E g' d\lambda$$