Obstrucciones homotópicas a la existencia de estructuras de grupo topológico

Tesis de Pregrado

Benjamín Mateluna Medina

Pontificia Universidad Católica de Chile

bmateluna@uc.cl

9 de diciembre de 2025

Resumen

Estudiaremos la noción de grupo topológico, analizaremos obstrucciones topológicas para que un espacio admita dicha estructura. Se usarán herramientas de la topología algebraica, tales como

Resumen

Estudiaremos la noción de grupo topológico, analizaremos obstrucciones topológicas para que un espacio admita dicha estructura. Se usarán herramientas de la topología algebraica, tales como

- Cohomología singular

Resumen

Estudiaremos la noción de grupo topológico, analizaremos obstrucciones topológicas para que un espacio admita dicha estructura. Se usarán herramientas de la topología algebraica, tales como

- Cohomología singular
- Espacios cubrientes

Resumen

Estudiaremos la noción de grupo topológico, analizaremos obstrucciones topológicas para que un espacio admita dicha estructura. Se usarán herramientas de la topología algebraica, tales como

- Cohomología singular
- Espacios cubrientes
- Grupo fundamental

Resumen

Estudiaremos la noción de grupo topológico, analizaremos obstrucciones topológicas para que un espacio admita dicha estructura. Se usarán herramientas de la topología algebraica, tales como

- Cohomología singular
- Espacios cubrientes
- Grupo fundamental

Uno de los resultados principales, consecuencias de otros tres, es que la única superficie (una $2-$variedad) compacta y conexa que es grupo topológico es el toro. También veremos que ninguna esfera de dimensión par lo es.

Esquema de la Presentación

Grupo Topológico

¿Qué es un grupo topológico?

Un *grupo topológico* es un espacio X, equipado con una aplicación continua,

$$m : X \times X \to X$$

y un elemento $e \in X$ que actúa como la identidad, de modo que (X, m, e) es grupo. Además, exigimos que que el mapa de inversión

$$\varphi : X \to X, \qquad \varphi(x) = x^{-1}$$

sea continuo.

Ejemplos

Los primeros ejemplos surgen de manera natural, como $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $GL_n(\mathbb{R})$ ó $GL_n(\mathbb{C})$ son grupos topológicos. Menos trivial, también tenemos los espacios

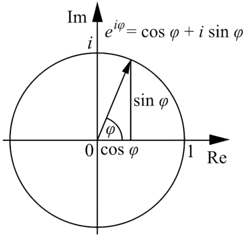


Figura: El círculo ó $\mathbb{S}^1$

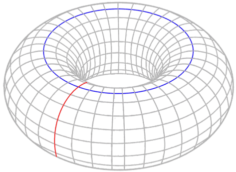


Figura: El toro ó $\mathbb{T}^2$

Para los siguientes ejemplos requerimos de los cuaterniones, denotados por $\mathbb{H}$, que corresponden a los elementos de la forma

$$q = a + bi + cj + dk \qquad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

donde $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Para los siguientes ejemplos requerimos de los cuaterniones, denotados por $\mathbb{H}$, que corresponden a los elementos de la forma

$$q = a + bi + cj + dk \qquad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

donde $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Se suman coordenada a coordenada y se pueden multiplicar usando las relaciones dadas (como los números complejos). Forman un álgebra de división, equipado con una norma, que corresponde a la norma en $\mathbb{R}^4$, por lo que la identificación

$$(a, b, c, d) \mapsto q = a + bi + cj + dk$$

es isometría.

Al igual que con $\mathbb{S}^1$, la norma es multiplicativa y por lo tanto $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{H} \setminus \{0\}$ es subgrupo. La multiplicación y el mapa de inversión son continuos, luego $\mathbb{S}^3$ es grupo topológico.

Al igual que con $\mathbb{S}^1$, la norma es multiplicativa y por lo tanto $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{H} \setminus \{0\}$ es subgrupo. La multiplicación y el mapa de inversión son continuos, luego $\mathbb{S}^3$ es grupo topológico.

Podemos, además, definir una estructura de grupo topológico en $\mathbb{RP}^3 = \mathbb{S}^3/\{\pm 1\}$ usando la multiplicación en $\mathbb{S}^3$, que desciende a una en $\mathbb{RP}^3$, ya que $\{\pm 1\}$ esta en el centro.

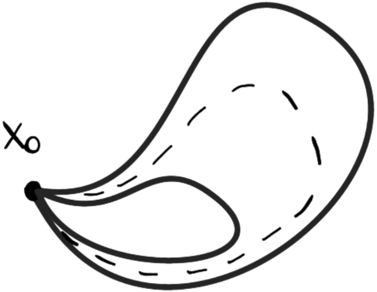
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \arrow[d, "\pi \times \pi"'] \arrow[dr, "\pi \circ m"] & \\
\mathbb{RP}^3 \times \mathbb{RP}^3 \arrow[r, dashed] & \mathbb{RP}^3
\end{tikzcd}$$

La construcción de los últimos dos ejemplos no es sencilla.

¿Qué obstrucciones topológicas surgen para ser grupo topológico?

Buscamos condiciones necesarias que debe cumplir un espacio para tener dicha estructura.

Grupo Fundamental



La primera obstrucción que aparece y también la más accesible se enuncia en el teorema que sigue:

Teorema

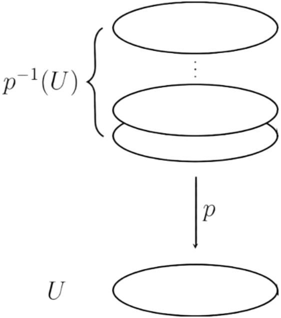
Sea X un grupo topológico arcoconexo. Entonces $\pi_1(X, e)$ es abeliano.

El primer no ejemplo que surge es $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, cuyo grupo fundamental es F_2. También, es posible calcular los grupos fundamentales de las superficies

$$\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2 \qquad y \qquad \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2$$

Que corresponden a las superficies de género $g > 1$, en ambos casos, los grupos fundamentales no son abelianos.

Espacios cubrientes



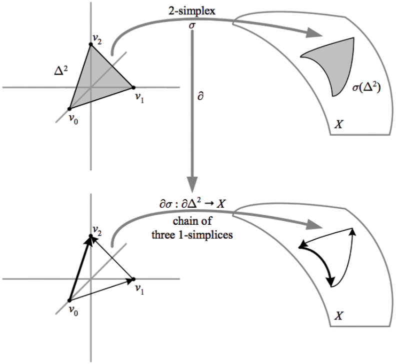
De la mano de la primera obstrucción, surge la teoría de espacios cubrientes como una manera de calcular el grupo fundamental de un espacio. Sin embargo, nuestro interés radica en el siguiente teorema:

Teorema

El cubriente universal de un grupo topológico es grupo topológico.

Para nuestro objetivo buscamos el cubriente universal del plano proyectivo ($\mathbb{RP}^2$), que resulta ser $\mathbb{S}^2$ y más adelante veremos que este último no es grupo topológico. Así, el plano proyectivo tampoco es grupo topológico.

Cohomología singular



Anillo de Cohomología

Dado un anillo conmutativo R, a un espacio X le asignamos un $R-$módulo, denotado por $H^n(X; R)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En conjunto, forman el anillo de cohomología

$$H^*(X; R) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^n(X; R)$$

Que tiene estructura de álgebra graduada.

Anillo de Cohomología

Dado un anillo conmutativo R, a un espacio X le asignamos un $R-$módulo, denotado por $H^n(X; R)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En conjunto, forman el anillo de cohomología

$$H^*(X; R) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^n(X; R)$$

Que tiene estructura de álgebra graduada. Por ejemplo, los anillos de cohomología de $\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{T}^2$ son isomorfos, como algebras graduadas, a lo siguiente:

$$H^*(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2) \qquad \text{donde } |x| = n$$

y

$$H^*(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x, y]/(x^2, y^2, xy + yx) \qquad \text{donde } |x|, |y| = 1$$

Algebras de Hopf

Definición

Sea A un álgebra graduada, se dice álgebra de Hopf si cumple:

1. Existe una unidad $1 \in A_0$ tal que el morfismo $R \to A_0$ dado por $r \mapsto r \cdot 1$ es isomorfismo.
2. Existe un morfismo de algebras graduadas $\triangle : A \to A \otimes A$, llamado coproducto, que satisface

$$\triangle(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha + \sum_i \alpha_i' \otimes \alpha_{n-i}''$$

donde $|\alpha_i'|, |\alpha_{n-i}''| > 0$ para todo $\alpha \in A_n$ con $n > 0$.

Teorema

Sea X un grupo topológico arcoconexo tal que $H^n(X;R)$ es un $R-$módulo libre f.g. para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $H^*(X;R)$ es un álgebra de Hopf.

Teorema

Sea X un grupo topológico arcoconexo tal que $H^n(X;R)$ es un $R-$módulo libre f.g. para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $H^*(X;R)$ es un álgebra de Hopf.

En el caso de $\mathbb{S}^n$ el coproducto viene dado por $\triangle(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. Como $\triangle$ es morfismo de algebras, resulta que

$$0 = \triangle(x^2) = 2 \cdot x \otimes x \quad \text{cuando } |x| \text{ par} \qquad y \qquad \triangle(x^2) = 0 \quad \text{cuando } |x| \text{ impar}$$

En el primer caso vemos que $2 = 0$ en $\mathbb{Z}$.

Teorema

Sea X un grupo topológico arcoconexo tal que $H^n(X;R)$ es un $R-$módulo libre f.g. para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $H^*(X;R)$ es un álgebra de Hopf.

En el caso de $\mathbb{S}^n$ el coproducto viene dado por $\triangle(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. Como $\triangle$ es morfismo de algebras, resulta que

$$0 = \triangle(x^2) = 2 \cdot x \otimes x \quad \text{cuando } |x| \text{ par} \qquad y \qquad \triangle(x^2) = 0 \quad \text{cuando } |x| \text{ impar}$$

En el primer caso vemos que $2 = 0$ en $\mathbb{Z}$. Concluimos que

Teorema

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathbb{S}^n$ es grupo topológico entonces n es impar.

Superficies

Hasta ahora tenemos que el toro $\mathbb{T}^2$ es una superficie compacta y conexa que es grupo topológico. Por otro lado, hemos descartado otras superficies como $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{RP}^2$ y superficies de género $g > 1$, el siguiente teorema las clasifica:

Teorema de clasificación de superficies

Toda superficie, no vacía, compacta y conexa es homeomorfa a una de las siguientes

1. La $2-$esfera, es decir, $\mathbb{S}^2$.
2. Superficies orientables de género g.
3. Superficies no orientables de género g.

Nota al pie de página

En un ánimo de generalizar los resultados, podemos relajar la noción de grupo topológico hasta homotopía. Introducimos los $H-$espacios:

Definición

Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un H-espacio si existe una aplicación continua $\mu : X \times X \to X$ y un elemento $e \in X$ (identidad) tales que los mapeos

$$\phi(x) = \mu(x, e), \qquad \psi(x) = \mu(e, x)$$

son homotópicos a la identidad, relativos a $\{e\}$.