PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: GREGORIO MORENO – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

Teoría de Integración - MAT2534
Tarea 4
25 de junio de 2025

Problema 1

a) Sea $f \in H$, como V es un subespacio vectorial cerrado, existen únicos $f_V \in V$ y $f_\perp \in V^\perp$ tales que $f = f_V + f_\perp$. Luego, dada $h \in V$, se tiene que

$$\int f\overline{h}\, d\mu = \int (f_V + f_\perp)\overline{h}\, d\mu = \int f_V\overline{h}\, d\mu + \int f_\perp \overline{h}\, d\mu$$

y como $f_\perp \in V^\perp$ vemos que

$$\int f\overline{h}\, d\mu = \int f_V\overline{h}\, d\mu$$

tomando $g = f_V$ se tiene lo pedido.

b) Afirmamos que

$$\mathcal{G} = \sigma(E_1, \cdots, E_n) = \left\{ \bigcup_{i\in I} E_i : I \subseteq \{1, \cdots, n\} \right\} =: \Sigma$$

es directo que $\Sigma \subseteq \mathcal{G}$. Basta probar que Σ es σ-álgebra, claramente $\emptyset \in \Sigma$. Sea $E \in \Sigma$, como los E_i cubren Ω y son disjuntos de a pares, vemos que

$$E^c = \left(\bigcup_{i\in I} E_i \right)^c = \bigcup_{i \in I^c} E_i \in \Sigma \quad \text{con } I \subseteq \{1, \cdots, n\}$$

Por otro lado, como $\#\Sigma = 2^n$, la unión numerable de elementos en Σ sigue estando en Σ pues en realidad es una unión finita de los conjuntos E_i.

Sabemos que suma de medibles y poderación de medibles es medible y por lo tanto M es un subespacio vectorial de H. Queda probar que es cerrado. Vamos a probar que dada $f \in M$ se puede escribir como

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{E_i} \quad \text{donde } a_i \in \mathbb{C}$$

Supongamos que $f \not\equiv 0$, sea $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$, en particular, se tiene que $f^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{G}$, entonces

$$f^{-1}(\{a\}) = \bigcup_{i\in I} E_i \quad \text{con } I \subseteq \{1, \cdots, n\}$$

Sea $b \neq a$, entonces si $b \in f(\Omega)$

$$f^{-1}(\{b\}) = \bigcup_{j\in J} E_j \quad \text{con } J \subseteq \{1, \cdots, n\}$$

Como $f^{-1}(\{b\}) \cap f^{-1}(\{a\}) = f^{-1}(\{a\} \cap \{b\}) = \emptyset$, concluimos que $I \cap J = \emptyset$, así, f asume finitos valores, puesto que la colección $(E_i)_{i=1}^n$ es finita, lo que prueba la afirmación.

Sean $f, g \in M$, observemos que

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathbb{1}_{E_i} \quad \text{y} \quad g = \sum_{i=1}^{n} g_i \mathbb{1}_{E_i} \quad \text{con } f_i, g_i \in \mathbb{C}$$

luego, como los E_i son disjuntos de a pares

$$\|f-g\|_{L^2}^2 = \int |f-g|^2 \; d\mu = \int \left|\sum_{i=1}^n (f_i - g_i)\mathbb{1}_{E_i}\right|^2 \; d\mu = \int \sum_{i=1}^n |f_i - g_i|^2 \, \mathbb{1}_{E_i} \; d\mu = \sum_{i=1}^n |f_i - g_i|^2 \, \mu(E_i)$$

Sea $(f_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq M$ tal que $f_m \to f \in L^2$. En particular, la sucesión f_m es de cauchy, entonces por lo anterior mencionado, la sucesión $(a_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}^n$ donde $a_m := (a_{m,1}, \cdots, a_{m,n})$ y

$$f_m = \sum_{i=1}^n a_{m,i}\mathbb{1}_{E_i} \quad \text{es una sucesión de cauchy.}$$

Así, existe $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que $a_m \to a$. Consideramos

$$s = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{E_i}$$

entonces, por cauchy schwarz

$$\|s - f_m\|_{L^2}^2 = \int |s - f_m|^2 \; d\mu \leq \int \sum_{i=1}^n |s_i - f_{m,i}|^2 \, \mathbb{1}_{E_i} \; d\mu \leq \sum_{i=1}^n |s_i - f_{m,i}|^2 \, \mu(\Omega) = \sum_{i=1}^n |s_i - f_{m,i}|^2$$

por ende $f_m \to s$ en L^2, por unicidad del límite, concluimos que $f = s \in M$.

c) Recordemos que L^2 viene dotado de un producto interno, que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ que induce la norma $\|\cdot\|_{L^2}$. Por la parte anterior sabemos que M es subespacio vectorial cerrado, así por la parte a) existe una única $g \in V$ tal que

$$\int f\overline{h} \; d\mu = \int g\overline{h} \; d\mu$$

y g resulta ser la proyección ortogonal de f en V. Luego

$$g = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{E_i}$$

y además $\langle f - g, h \rangle = 0$ para todo $h \in V$. En particular, si tomamos $h = \mathbb{1}_{E_i}$, resulta que

$$\int_{E_i} f - g \; d\mu = 0 \quad \text{y entonces} \quad \int_{E_i} f \; d\mu = \int_{E_i} g \; d\mu = c_i \mu(E_i)$$

en otras palabras

$$c_i = \frac{1}{\mu(E_i)} \int_{E_i} f \; d\mu = \frac{\langle f, \mathbb{1}_{E_i} \rangle_{L^2}}{\mu(E_i)}$$

conluimos que

$$g = \sum_{i=1}^n \frac{\langle f, \mathbb{1}_{E_i} \rangle_{L^2}}{\mu(E_i)} \mathbb{1}_{E_i}$$

Problema 2

a) Como $u \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$ satisface $-u'' + u = f$, entonces dada $v \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$ se tiene que $-u''v + uv = fv$, por la desigualdad de Hölder, vemos que fv es integrable, además $-u''v + uv \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$. Integrando a ambos lados y usando integración por partes tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} fv \; d\lambda &= \int_{[a,b]} -u''v + uv \; d\lambda = -\int_{[a,b]} u''v \; d\lambda + \int_{[a,b]} uv \; d\lambda \\
&= -u'v\Big|_a^b + \int_{[a,b]} u'v' \; d\lambda + \int_{[a,b]} uv \; d\lambda \\
&= \int_{[a,b]} (uv + u'v') \; d\lambda
\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se debe a que $supp(v) \subseteq (a,b)$.

b) Sea $[c,d] \subseteq [a,b]$, con $a < c < d < b$. Entonces, existe una sucesión acotada $(v_n)_n \subseteq \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$ tal que $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{1}_{[c,d]}$ para $x \in [a,b]$. Por otro lado, integrando por partes, observamos que

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f v_n \, d\lambda &= \int_{[a,b]} (u v_n + u' v_n') \, d\lambda = \int_{[a,b]} u' v_n' \, d\lambda + \int_{[a,b]} u v_n \, d\lambda \\ &= \int_{[a,b]} -u'' v_n + u v_n \, d\lambda\end{aligned}$$

Existe $M > 0$ tal que $v_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $|v_n f| \leq M\,|f|$ y además $v_n f$ converge puntualmente a $\mathbb{1}_{[c,d]} f$, por el mismo argumento se tiene un resultado similar para $\mathbb{1}_{[c,d]}(-u'' + u)$. De este modo, como $f, u \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$, por teorema de convergencia dominada se sigue que

$$\int_{[c,d]} f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f v_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} -u'' v_n + u v_n \, d\lambda = \int_{[c,d]} -u'' + u \, d\lambda$$

como esto es para c, d arbitrarios, concluimos que $f = -u'' + u$ $\lambda - ctp$.

Afirmamos que esta igualdad se cumple para todo $x \in (a,b)$. Supongamos, por contradicción, que existe $x \in (a,b)$ tal que $f(x) \neq -u''(x) + u(x)$, como f, u y u'' son continuas, existe un intervalo abierto $I \subseteq [a,b]$ tal que $f(x) \neq -u''(x) + u(x)$ para todo $x \in I$. Esto contradice que la igualdad sea en casi todas partes.

c) Sea $u \in H$, entonces existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$ tal que $u_n \to u$ con la norma $\|\cdot\|_H$. En particular, la sucesión u_n es de cauchy, además, se tiene que

$$\|u_n\|_H^2 = \int |u_n|^2 + |u_n'|^2 \, d\lambda \geq \int |u_n'|^2 \, d\lambda = \|u_n'\|_{L^2}^2$$

entonces, la sucesión $v_n := u_n' \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$ es de cauchy según la norma en L^2. Como este espacio es un espacio métrico completo, existe $v \in L_0^2$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int |v_n - v|^2 \, d\lambda = 0$$

Afirmamos que v es la función buscada. Sea $w \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$, entonces

$$\int v_n w \, d\lambda = \int u_n' w \, d\lambda = u_n w\Big|_a^b - \int u_n w' \, d\lambda = -\int u_n w' \, d\lambda$$

Basta demostrar que $v_n w$ y $u_n w'$ convergen a vw y uw' en L^1 respectivamente. En efecto, por hölder tenemos que

$$\int |v_n w - vw| \, d\lambda = \int |v_n - v|\,|w| \, d\lambda \leq \|v_n - v\|_2 \, \|w\|_2$$

y por otro lado

$$\int |u_n w' - uw'| \, d\lambda = \int |u_n - u|\,|w'| \, d\lambda \leq \|u_n - u\|_2 \, \|w'\|_2 \leq \|u_n - u\|_H \, \|w'\|_2$$

como $w \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$ vemos que $\|w\|_2, \|w'\|_2 < \infty$ y usando la convergencia en H y L^2 se tiene el resultado. Resta ver que v es única. Sea $\widehat{v} \in L_0^2$ tal que

$$\int \widehat{v} w \, d\lambda = -\int u w' \, d\lambda$$

para toda $w \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$. Entonces para toda $w \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$, se tiene que

$$\int v w \, d\lambda = \int \widehat{v} w \, d\lambda \quad \text{lo que implica que} \quad \int (v - \widehat{v}) w \, d\lambda = 0$$

por el mismo argumento que antes, para todo $c < d$ con $c, d \in (a,b)$ se tiene que

$$\int_{[c,d]} v - \widehat{v} \, d\lambda = 0$$

concluimos que $v = \widehat{v}$ $\lambda - ctp$, lo que prueba la unicidad en L^2.

d) Sean $u, w \in H$, existe $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$ tal que $w_n \to w$ según la norma $\|\cdot\|_H$. Por la parte anterior, tenemos que

$$\int u' w_n \, d\lambda = -\int u w_n' \, d\lambda$$

Por el mismo argumento que antes, sabemos que $\|u'w_n - u'w\|_1 \leq \|w_n - w\|_H \|u'\|_2$ y además $\|uw_n' - uw'\|_1 \leq \|u\|_2 \|w_n' - w'\|_2$ y por lo tanto

$$\int u'w \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int u' w_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} -\int u w_n' \, d\lambda = \int u w' \, d\lambda$$

e) Como resultado previo, vamos a demostrar la linealidad de la derivada débil. Sean $u, v \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, existen $u_n, v_n \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$ sucesiones tales que $u_n \to u$ y $v_n \to v$ en H. Dada $w \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$ se sigue que

$$-\int (u_n + \alpha v_n) w' \, d\lambda = \int (u_n + \alpha v_n)' w \, d\lambda = \int u_n' w \, d\lambda + \alpha \int v_n' w \, d\lambda$$

haciendo $n \to \infty$ y usando linealidad de la integral, por unicidad, concluimos que $(u + \alpha v)' = u' + \alpha v'$.

En H definimos el siguiente producto interno

$$\langle u, v\rangle_H = \int uv + u'v' \, d\lambda \quad \text{para } u, v \in H$$

debemos probar que en efecto, es un producto interno. En primer lugar notemos que $\langle u, u\rangle = \|u\|_H^2$ y como esta última es norma, se tiene que $\langle u, u\rangle_H \geq 0$ para todo $u \in H$ y la igualdad se cumple si y solo si $u = 0$. Por otro lado, es claro que $\langle u, v\rangle_H = \langle v, u\rangle_H$ y además

$$\langle u + \alpha w, v\rangle = \int (u + \alpha w)v + (u + \alpha w)'v' \, d\lambda = \int uv + u'v' \, d\lambda + \alpha \int wv + w'v' \, d\lambda = \langle u, v\rangle + \alpha \langle w, v\rangle$$

Donde usamos la linealidad de la derivada débil. Así, H es un espacio de Hilbert, pues con la norma $\|\cdot\|_H$ es un espacio métrico completo. Sea $f \in L^2$. Definimos el funcional $I : H \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(v) := \int fv \, d\lambda$$

es claro que I es lineal, veamos que es continuo. Por hölder notamos que

$$I(v) = \int fv \, d\lambda \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_H$$

y como I es acotado, concluimos que es continuo. De este modo, por teorema de representación de riesz, existe un único $u \in H$ tal que

$$\int (uv + u'v') \, d\lambda = \langle u, v\rangle_H = I(v) = \int fv \, d\lambda$$