Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Pedro Gaspar – Estudiante: Benjamín Mateluna

Geometría Diferencial - MAT2860
Interrogación 2
30 de mayo de 2025

Problema 1

Sea

$$\Sigma := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1 \right\}$$

Definimos la función diferenciable $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x,y,z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2}$$

Notemos que $\Sigma = h^{-1}(1)$ con 1 valor regular de h. Luego definimos la orientación del elipsoide dada por $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ definida por

$$N(p) := \frac{\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

Tenemos tres casos:

a) Si $r = a = b = c > 0$, entonces Σ es una esfera de radio r y por ende $N(p) = \frac{1}{r}p$ y por lo tanto $DN_p v = \frac{1}{r}v$ para todo $v \in T_p\Sigma$ y todo $p \in \Sigma$, luego, todo punto en Σ es umbilical.

b) Si $a > b = c > 0$, notemos que este caso es igual que $a = b > c > 0$.

Problema 2

a) Recordemos que se tiene el resultado

$$K_\Sigma \circ X = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

como $F \equiv 0$, vemos que

$$(K_\Sigma \circ X) \cdot EG = eg - f^2$$

Por otro lado, se tienen las siguientes identidades para E_{vv} y G_{uu},

$$\begin{aligned}
E_{vv} &= \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\langle X_u, X_u\rangle\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(2\langle X_{uv}, X_u\rangle\right) = 2\left(\langle X_{uvv}, X_u\rangle + \langle X_{uv}, X_{uv}\rangle\right) \\
G_{uu} &= \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\langle X_v, X_v\rangle\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(2\langle X_{vu}, X_v\rangle\right) = 2\left(\langle X_{vuu}, X_v\rangle + \langle X_{vu}, X_{vu}\rangle\right)
\end{aligned}$$

Para la expresiones $\left|(X_{uv})^T\right|^2$ y $\left\langle (X_{uu})^T, (X_{vv})^T \right\rangle$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|(X_{uv})^T\right|^2 &= \langle X_{uv} - \langle X_{uv}, N^x\rangle N^x, X_{uv} - \langle X_{uv}, N^x\rangle N^x\rangle \\
&= \langle X_{uv} - fN^x, X_{uv} - fN^x\rangle = |X_{uv}|^2 - f^2 - f^2 + f^2 = |X_{uv}|^2 - f^2
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left\langle (X_{uu})^T, (X_{vv})^T \right\rangle &= \langle X_{uu} - \langle X_{uu}, N^x\rangle N^x, X_{vv} - \langle X_{vv}, N^x\rangle N^x\rangle \\
&= \langle X_{uu} - eN^x, X_{vv} - gN^x\rangle = \langle X_{uu}, X_{vv}\rangle - eg - eg + eg = \langle X_{uu}, X_{vv}\rangle - eg
\end{aligned}$$

recordando que $e=\langle N^x, X_{uu}\rangle$, $f=\langle N^x, X_{uv}\rangle$ y $g=\langle N^x, X_{vv}\rangle$. Además, tenemos lo siguiente como consecuencia de que la parametrización es ortogonal

$$\begin{aligned} 0=\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\langle X_u, X_v\rangle\right) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\langle X_{uv}, X_v\rangle + \langle X_u, X_{vv}\rangle\right) \\ &= \langle X_{uvu}, X_v\rangle + \langle X_{uv}, X_{vu}\rangle + \langle X_{uu}, X_{vv}\rangle + \langle X_u, X_{vvu}\rangle \end{aligned}$$

lo que implica que

$$-\langle X_{uu}, X_{vv}\rangle = \langle X_{uvu}, X_v\rangle + \langle X_{uv}, X_{vu}\rangle + \langle X_u, X_{vvu}\rangle$$

Usando lo anterior, se sigue que

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\left(E_{vv}+G_{uu}\right)+\left|(X_{uv})^T\right|^2-\left\langle (X_{uu})^T, (X_{vv})^T\right\rangle \\ &= -\langle X_{uvv}, X_u\rangle - \langle X_{uv}, X_{uv}\rangle - \langle X_{vuu}, X_v\rangle - \langle X_{vu}, X_{vu}\rangle + |X_{uv}|^2 - f^2 + eg - \langle X_{uu}, X_{vv}\rangle \\ &= eg - f^2 \end{aligned}$$

y se tiene lo pedido. (Para esta parte trabaje en conjunto con Ricardo Larraín)

b) Como $\{X_u, X_v, N\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$, existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$X_{uu} = aX_u + bX_v + cN$$

Notemos que $\langle X_{uu}, N^x\rangle = e$, veamos las siguientes igualdades para $\langle X_{uu}, X_u\rangle$ y $\langle X_{uu}, X_v\rangle$

$$\langle X_{uu}, X_u\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\langle X_u, X_u\rangle\right) = \frac{1}{2}E_u$$

y usando que $F\equiv 0$ vemos que

$$0=\frac{\partial}{\partial u}\left(\langle X_u, X_v\rangle\right) = \langle X_{uu}, X_v\rangle + \langle X_u, X_{vu}\rangle = \langle X_{uu}, X_v\rangle + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\langle X_u, X_u\rangle\right) = \langle X_{uu}, X_v\rangle + \frac{1}{2}E_v$$

entonces tomando producto interno con X_u, X_v y N^x respectivamente y usando que $F\equiv 0$, N^x es unitario y ortogonal a $\{X_u,X_v\}$, tenemos que

$$a=\frac{\langle X_{uu}, X_u\rangle}{\langle X_u, X_u\rangle}=\frac{E_u}{2E} \qquad b=\frac{\langle X_{uu}, X_v\rangle}{\langle X_v, X_v\rangle}=-\frac{E_v}{2G} \qquad c=\langle X_{uu}, N^x\rangle = e$$

Del mismo modo que antes, tenemos $X_{uv}=a_0X_u+b_0X_v+c_0N$, veamos que $\langle X_{uv}, N^x\rangle = f$ y además

$$\begin{aligned} \langle X_{uv}, X_v\rangle &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\langle X_v, X_v\rangle\right) = \frac{1}{2}G_u \\ \langle X_{uv}, X_u\rangle &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\langle X_u, X_u\rangle\right) = \frac{1}{2}E_v \end{aligned}$$

luego

$$a_0=\frac{\langle X_{uv}, X_u\rangle}{\langle X_u, X_u\rangle}=\frac{E_v}{2E} \qquad b_0=\frac{\langle X_{uv}, X_v\rangle}{\langle X_v, X_v\rangle}=\frac{G_u}{2G} \qquad c_0=\langle X_{uv}, N^x\rangle = f$$

Queda ver $X_{vv}=a_1X_u+b_1X_v+c_1N$. Recordemos que $\langle X_{vv}, N^x\rangle = g$ y adicionalmente

$$\langle X_{vv}, X_v\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\langle X_v, X_v\rangle\right) = \frac{1}{2}G_v$$

por otro lado se tiene que

$$0=\frac{\partial}{\partial v}\left(\langle X_u, X_v\rangle\right) = \langle X_{uv}, X_v\rangle + \langle X_u, X_{vv}\rangle = \frac{1}{2}G_u + \langle X_u, X_{vv}\rangle$$

entonces

$$a_0=\frac{\langle X_{vv}, X_u\rangle}{\langle X_u, X_u\rangle}=-\frac{G_u}{2E} \qquad b_0=\frac{\langle X_{vv}, X_v\rangle}{\langle X_v, X_v\rangle}=\frac{G_v}{2G} \qquad c_0=\langle X_{vv}, N^x\rangle = g$$

lo que demuestra lo pedido.

c) Del item anterior tenemos las siguientes igualdades

$$(X_{uu})^T = \frac{E_u}{2E}X_u - \frac{E_v}{2G}X_v$$
$$(X_{uv})^T = \frac{E_v}{2E}X_u + \frac{G_u}{2G}X_v$$
$$(X_{vv})^T = -\frac{G_u}{2E}X_u + \frac{G_v}{2G}X_v$$

Por otro lado también se tiene lo siguiente

$$\left|(X_{uv})^T\right|^2 = \left\langle \frac{E_v}{2E}X_u + \frac{G_u}{2G}X_v, \frac{E_v}{2E}X_u + \frac{G_u}{2G}X_v \right\rangle = \frac{E_v^2}{4E} + \frac{G_u^2}{4G}$$
$$\left\langle (X_{uu})^T, (X_{vv})^T \right\rangle = \left\langle \frac{E_u}{2E}X_u - \frac{E_v}{2G}X_v, -\frac{G_u}{2E}X_u + \frac{G_v}{2G}X_v \right\rangle = -\frac{E_uG_u}{4E} - \frac{E_vG_v}{4G}$$

Luego

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v\right] \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{G_{uu}\sqrt{EG} - G_u\frac{E_uG+EG_u}{2\sqrt{EG}} + E_{vv}\sqrt{EG} - E_v\frac{E_vG+EG_v}{2\sqrt{EG}}}{EG}\right) \\
&= -\frac{1}{4EG}\left(\frac{2G_{uu}EG - G_u(E_uG+EG_u) + 2E_{vv}EG - E_v(E_vG+EG_v)}{EG}\right) \\
&= -\frac{1}{4EG}\left(2(E_{vv}+G_{uu}) - \frac{G_uE_u}{E} - \frac{G_u^2}{G} - \frac{E_v^2}{E} - \frac{E_vG_v}{G}\right) \\
&= \frac{1}{EG}\left(-\frac{1}{2}(E_{vv}+G_{uu}) + \frac{E_v^2}{4E} + \frac{G_u^2}{4G} + \frac{E_uG_u}{4E} + \frac{E_vG_v}{4G}\right) \\
&= \frac{1}{EG}\left(-\frac{1}{2}(E_{vv}+G_{uu}) + \left|(X_{uv})^T\right|^2 - \left\langle (X_{uu})^T, (X_{vv})^T \right\rangle\right) = \frac{1}{EG}(K_\Sigma \circ X)EG = K_\Sigma \circ X
\end{aligned}$$

Problema 3

a) Sea $\gamma : [a,b] \to \Sigma$ una curva continua. Definimos el conjunto

$$A := \{c \in [a,b] : \text{Existe } N_c : [a,c] \to \mathbb{S}^2 \text{ continua, } N_c(a) = n \text{ y } N_c(t) \in (T_{\gamma(t)}\Sigma)^\perp\}$$

Notemos que A es no vacío, en efecto, $a \in A$ tomando $N_a(a) = n$ y es continua por ser constante.

Afirmamos que A es abierto, sea $c \in A$. Existe $N_c : [a,c] \to \mathbb{S}^2$ continua tal que $N_c(a) = n$ y $N_c(t) \in (T_{\gamma(t)}\Sigma)^\perp$. Sea $(\mathcal{U}, X)$ una carta de $\gamma(c)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) =: V \subseteq \gamma^{-1}(X(\mathcal{U}))$. Dado $0 < \delta < \varepsilon$ definimos $N_\delta^x : \mathcal{U} \to \mathbb{S}^2$ como sigue

$$N_\delta^x(u,v) := \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u,v)$$

Consideramos la función $N_\delta^c := N_\delta^x \circ X^{-1} \circ \gamma : V \to \mathbb{S}^2$ tal que $N_\delta^c(c) = N_c(c)$. Definimos $N_\delta : [0,\delta] \to \mathbb{S}^2$ como

$$N_\delta(t) := \begin{cases} N_c(t) & \text{si } t \in [a,c] \\ N_\delta^c(t) & \text{si } t \in [c, c+\delta] \end{cases}$$

Por lema del pegamiento N_δ es una función continua, ya que $N_\delta^c(c) = N_c(c)$. Además, por construcción, cumple las hipotesis necesarias, luego $[a, c+\varepsilon) \subset A$.

Veamos que A es cerrado. Sea $(c_n)_n \subseteq A$ tal que c_n converge a $c \in [a,b]$. Sea $(\mathcal{U}, X)$ una carta de $\gamma(c)$, por continuidad, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma(c_n) \in X(\mathcal{U})$.

Definimos N_c^x del mismo modo que antes. Sea $V := \gamma^{-1}(X(\mathcal{U}))$ consideremos $N_c^0 := N_c^x \circ X^{-1} \circ \gamma : V \to \mathbb{S}^2$ tal que $N_c^0(c_n) = N_{c_n}(c_n)$. Se define $N_c : [a, c] \to \mathbb{S}^2$ por

$$N_c(t) := \begin{cases} N_{c_n}(t) & \text{si } t \in [a, c_n] \\ N_c^0(t) & \text{si } t \in [c_n, c] \end{cases}$$

Al igual que antes, esta función es continua, por lema de pegamientos y cumple con las hipotesis necesarias por construcción y por lo tanto $c \in A$. Así, $A \subseteq [a, b]$ es clopen y por lo tanto $A = [a, b]$.

Veamos que la función N_γ es unica, supongamos que existe N' que satisface las mismas condiciones, luego $(N_\gamma - N')^{-1}(0)$ y $(N_\gamma + N')^{-1}(0)$ son cerrados disjuntos que separan $[a, b]$, pues $N_\gamma(t) = \pm N'(t)$. Como $N_\gamma(a) = N'(a)$, se sigue que $N_\gamma(t) = N'(t)$ para todo $t \in [a, b]$ lo que prueba la unicidad.

b) Supongamos que Σ es orientable, entonces existe un campo normal unitario continuo $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$. Sea $\gamma : [a, b] \to \Sigma$ una curva continua y cerrada. Por la parte anterior existe una única función y continua $N_\gamma : [a, b] \to \mathbb{S}^2$ tal que

$$N(\gamma(a)) = N_\gamma(a) \quad \text{y} \quad N_\gamma(t) \in (T_{\gamma(t)}\Sigma)^\perp$$

Consideremos la función continua $N \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{S}^2$. Notemos que $N \circ \gamma$ cumple las mismas propiedades que N_γ por definición de N, luego, por unicidad se sigue que

$$N_\gamma(a) = N(\gamma(a)) = N(\gamma(b)) = N_\gamma(b)$$

Supongamos, sin perdida de generalidad, que Σ es conexa, en caso contrario basta ver el resultado para cada componente conexa. Supongamos que para toda curva γ continua y cerrada se cumple que $N_\gamma(a) = N_\gamma(b)$.

Sea $q \in \Sigma$ consideremos su vector normal n unitario, definimos $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ como sigue

$$N(p) := N_\gamma(1)$$

donde $\gamma : [0, 1] \to \Sigma$ es una curva continua tal que $\gamma(0) = q$ y $\gamma(1) = p$, además $N_\gamma(0) = n$ para toda curva γ. Veamos que N esta bien definida, es decir, es independiente de la curva representante. Sean γ, γ_0 como antes, definimos la curva

$$\alpha(t) := \begin{cases} \gamma(1 - 2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_0(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

y su campo normal $N_\alpha : [0, 1] \to \mathbb{S}^2$ como

$$N_\alpha(t) := \begin{cases} N_\gamma(1 - 2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ N_{\gamma_0}(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

es continuo pues $N_\gamma(0) = N_{\gamma_0}(0)$ y es única tal que $N_\alpha(0) = N_\gamma(1)$, luego como α es cerrada

$$N_\gamma(1) = N_\alpha(0) = N_\alpha(1) = N_{\gamma_0}(1)$$

Veamos que N es continua. Sea $p_0 \in \Sigma$, sea γ un camino que une q con p_0, entonces por continuidad de N_γ se sigue que $\lim\limits_{t \to b} N(\gamma(t)) = \lim\limits_{t \to b} N_\gamma(t) = N_{\gamma(b)} = N(p_0)$. Como lo anterior es independiente del camino, conluimos que

$$\lim_{p \to p_0} N(p) = N(p_0)$$

Problema 4

Si $p \in S_r$, es claro que $\Phi(p) = \phi(p)$, adicionalmente esta es la única extensión. Veamos que $\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ es invertible, como ϕ es isometría, en particular es invertible, definimos $\psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ como sigue

$$\psi(p) := \frac{|p|}{r} \phi^{-1} \left(\frac{p}{|p|} r \right)$$

luego

$$\Phi\circ\psi(p)=\Phi(\psi(p))=\Phi\left(\frac{|p|}{r}\phi^{-1}\left(\frac{p}{|p|}r\right)\right)=\frac{\left|\frac{|p|}{r}\phi^{-1}\left(\frac{p}{|p|}r\right)\right|}{r}\phi\left(\frac{\frac{|p|}{r}\phi^{-1}\left(\frac{p}{|p|}r\right)}{\left|\frac{|p|}{r}\phi^{-1}\left(\frac{p}{|p|}r\right)\right|}r\right)$$
$$=\frac{|p|}{r}\phi\left(\phi^{-1}\left(\frac{p}{|p|}r\right)\right)=p$$

del mismo modo se sigue que $\psi\circ\Phi(p)=p$. Veamos que $D\Phi_p$ es isometría lineal y por ende un isomorfismo lineal. Sea $p\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ y sea $w\in\mathbb{R}^3$, entonces

$$D\Phi_p w=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Phi(p+tw)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\frac{|p+tw|}{r}\phi\left(r\frac{p+tw}{|p+tw|}\right)\right)$$
$$=\left(\frac{\langle p+tw,w\rangle}{r\,|p+tw|}\phi\left(r\frac{p+tw}{|p+tw|}\right)+\frac{|p+tw|}{r}D\phi_{\frac{p}{|p|}r}\left(r\frac{w\,|p+tw|-(p+tw)\frac{\langle p+tw,w\rangle}{|p+tw|}}{|p+tw|^2}\right)\right)\Big|_{t=0}$$
$$=\frac{\langle p,w\rangle}{r\,|p|}\phi\left(r\frac{p}{|p|}\right)+|p|\,D\phi_{\frac{p}{|p|}r}\left(\frac{w}{|p|}-\frac{p\,\langle p,w\rangle}{|p|^3}\right)$$

notemos que

$$|D\Phi_p w|^2=\left|\frac{\langle p,w\rangle}{r\,|p|}\phi\left(r\frac{p}{|p|}\right)+|p|\,D\phi_{\frac{p}{|p|}r}\left(\frac{w}{|p|}-\frac{p\,\langle p,w\rangle}{|p|^3}\right)\right|^2$$
$$=\frac{\langle p,w\rangle^2}{|p|^2}+\left|w-p\frac{\langle p,w\rangle}{|p|^2}\right|^2=\frac{\langle p,w\rangle^2}{|p|^2}+|w|^2-2\frac{\langle p,w\rangle^2}{|p|^2}+\frac{\langle p,w\rangle^2}{|p|^2}=|w|^2$$

donde la segunda igualdad se debe a que dado $v\in S_r$ se tiene que $\langle D\phi_v w,v\rangle=0$, además usamos el hecho de que $D\phi_v$ es isometría lineal. Por teorema de la función inversa se sigue que Φ es difeomorfismo local y como es biyectiva es difeomorfismo, así por ejercicio visto en clase existe un único movimiento rígido $F:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ tal que $\Phi=F\big|_{\mathbb{R}^3\setminus\{0\}}$.
Notemos que $F(S_r)=\Phi(S_r)=\phi(S_r)=S_r$ y por lo tanto F es una isometría lineal de $\mathbb{R}^3$ y $\phi=\Phi\big|_{S_r}=F\big|_{S_r}$. Por otro lado por un ejemplo visto en clase, dada una isometría lineal F tenemos que $F(S_r)=S_r$ lo que implica que $\phi:=F\big|_{S_r}$ es un difeomorfismo y $D\phi_p$ es isometría lineal.

Por último, queda ver que esta correspondencia es, de hecho, un morfismo de grupos. Sean ϕ,ψ isometrías de S_r y F,G sus correspondientes isometrías lineales de $\mathbb{R}^3$, es claro que $F\circ G$ es isometría y dado $p\in S_r$ notamos que $(F\circ G)(p)=F(G(p))=F(\psi(p))=\phi(\psi(p))$, por unicidad $F\circ G$ es la isometría que corresponde a $\phi\circ\psi$. Concluimos que $Isom(S_r)$ es isomorfo al grupo de isometrías lineales de $\mathbb{R}^3$.

Problema 5

a) Consideramos la parametrización $X:(0,2\pi)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u,v):=((R+rcos(u))cos(v),(R+rcos(u))sen(v),rsen(u))$$

calculamos sus derivadas parciales para encontrar los coeficientes de la primera forma fundamental

$$F=\langle X_u,X_v\rangle=(R+rcos(u))rsen(u)cos(v)sen(v)-(R+rcos(u))rsen(u)cos(v)sen(v)=0$$

$$E=\langle X_u,X_u\rangle=r^2sen^2(u)cos^2(v)+r^2sen^2(u)sen^2(v)+r^2cos^2(u)=r^2sen(u)+r^2cos(u)=r^2$$

$$G=\langle X_v,X_v\rangle=(R+rcos(u))^2sen^2(v)+(R+rcos(u))^2cos^2(v)=(R+rcos(u))^2$$

Como $F \equiv 0$, la parametrización es ortogonal y por el problema tenemos que

$$(K_\Sigma \circ X)\sqrt{EG} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v\right]$$

donde $E_v \equiv 0$, pues E es constante, además $\sqrt{EG} = (R + rcos(u))r$ y $G_u = -2(R + rcos(u))rsen(u)$, luego

$$\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u = \left(\frac{-2(R + rcos(u))rsen(u)}{(R + rcos(u))r}\right)_u = (-2sen(u))_u = -2cos(u)$$

Utilizando lo anterior, vemos que

$$(K_\Sigma \circ X)\sqrt{EG} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v\right] = -\frac{1}{2}(-2cos(u) + 0) = cos(u)$$

b) Así

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(K_\Sigma \circ X)\sqrt{EG}\; dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} cos(u)\; du\; dv = 0$$