Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Mauricio Bustamante – Estudiante: Benjamín Mateluna

Taller de Trabajo - MAT3094
Informe Taller de Trabajo
05 de agosto de 2025

Índice

Introducción

1. Homología y Cohomología

1.1. Complejos de Cadenas

Definición: *Un **complejo de cadenas** es una secuencia de grupos abelianos y homomorfismos*

$$\cdots \to C_3 \xrightarrow{d_3} C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

tales que $d_i \circ d_{i+1} = 0$ para todo i. Se denota por la tupla (C_*, d_*^C)
Definición: *Un **complejo de cocadenas** es una secuencia de grupos abelianos y homomorfismos*

$$0 \to C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \xrightarrow{d^2} C^3 \to \cdots$$

tal que $d^{i+1} \circ d^i = 0$ para todo i. Se denota por la tupla (C^*, d_C^*).
Observación: Los morfismos d_i y d^i se conocen como diferenciales. Por la condición dada, observamos que $im\ d_{i+1} \subseteq ker\ d_i$ (resp. $im\ d^i \subseteq ker\ d_{i+1}$). Los elementos en $ker\ d_i$ se dicen **ciclos** (resp. **cociclos**) y los elementos de $im\ d_i$ se llaman **fronteras** (resp. **cofronteras**).
Definición: *La **homología** de un complejo de cadenas C es*

$$H_i(C_*) = \frac{ker\ d_i}{im\ d_{i+1}}$$

*Un elemento en $H_i(C_*)$ se conoce como **clase de homología**.*
Definición: *La **cohomología** de un complejo de cocadenas C es*

$$H_i(C^*) = \frac{ker\ d_i}{im\ d_{i-1}}$$

*Un elemento en $H_i(C^*)$ se conoce como **clase de cohomología**.*
Definición: *Sean (C, d_C) y (D, d_D) complejos de cadenas, un **mapeo de cadena**, denotado por $C_* \to D_*$ es una colección de morfismos $f_n : C_n \to D_n$ tales que $d_n^D \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n^C$. En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d_n^C"] & D_n \arrow[d, "d_n^D"] \\ C_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

La definición para **mapeo de cocadena** es análogo.
Lema 1.1: *Sea $f_* : C_* \to D_*$ un mapeo de cadena, entonces $f_* : H_n(C_*) \to H_n(D_*)$ dado por $[x] \to [f_n(x)]$ es un morfismo bien definido.*

Demostración. En primer lugar, debemos verificar que dado un ciclo entonces f lo mapea a un ciclo. Sea $x \in ker\ d_n^C$. Luego,

$$d_n^C(f_n(x)) = f_{n-1}(d_n^C(x)) = f_{n-1}(0) = 0$$

Por lo tanto, $f_n(x) \in ker\ d_n^D$. Veamos que esta bien definido, sean $x, y \in ker\ d_n^C$ tales que $[x] = [y]$, entonces $x - y = d_{n+1}^C(z)$ para $z \in C_{i+1}$. De este modo, $f_n(x) - f_n(y) = f_n(d_{n+1}^C(z)) = d_{n+1}^D(f_{n+1}(z))$ es una frontera. Así, $[f_n(x)] = [f_n(y)]$. □

Un resultado análogo se tiene para un mapeo de cocadena.

1.2. Homología y Cohomología Singular

La idea ahora es definir, dado un espacio topologico X, un complejo de cadenas $C_*(X)$, y para cada función continua $f : X \to Y$, construir un mapeo de cadena $f_* : C_*(X) \to C_*(Y)$. Para luego, obtener los grupos de homología $H_*(X)$ de cada espacio y los mapeos $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$.
Para esta construcción se utilizara homología singular. La ventaja de este vía, es que la definicón es una proppiedad instrinseca del espacio, sin embargo, resulta casi imposible calcular los complejos de cadenas y por ende, los grupos de homología.
Todos los resultados de la sección pueden ser dualizados, tomando el funtor Hom.
Definición: *Un **n-simplice estándar** es*

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0,\ \sum t_i = 1 \right\}$$

Observación: La **i-esima cara** de Δ^n es $\Delta_i^n = \{(t_0, \cdots, t_n) \in \Delta^n : t_i = 0\}$. Notamos que un $n-$simplice tiene $n+1$ caras. Cada cara luce como un $(n-1)-$simplice. De hecho, mediante el mapeo

$$\delta_i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$$
$$(t_0, \cdots, t_{n-1}) \to (t_0, \cdots, t_{i-1}, 0, t_i, \cdots, t_{n-1})$$

resulta ser homeomorfa a Δ^{n-1}.

Definición: *Sea X un espacio topologico. Un **n-simplice singular** en X es una función continua $\sigma : \Delta^n \to X$.*

Dado un espacio X, tenemos una colección de $n-$simplices, vamos a considerar el grupo abeliano libre generado por este conjunto para construir un complejo de cadenas y así los grupos de homología.

Definición: *(**Complejo de cadena singular**) Definimos*

$$C_n(X) := \left\{ \sum n_\sigma \sigma \mid \sigma : \Delta^n \to X,\ n_\sigma \in \mathbb{Z}\ \ \textit{nulo salvo finitos casos} \right\}$$

Junto con los diferenciales $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ dada por

$$\sigma \to \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \delta_i$$

que se extiende linealmente.

Para chequear que efectivamente tenemos una complejo de cadenas, tenemos los siguientes resultados

Lema 1.2: *Sea $i < j$, entonces $\delta_j \circ \delta_i = \delta_i \circ \delta_{j-1}$.*

Demostración. Sea $x = (t_0, \cdots, t_{n-2}) \in \Delta^{n-2}$, notemos que

$$\delta_j \circ \delta_i(x) = (t_0, \cdots, t_{i-1}, 0, t_i, \cdots, t_{j-2}, 0, t_{j-1}, \cdots, t_{n-2}) = \delta_i \circ \delta_{j-1}(x)$$

lo que prueba el resultado. □

Corolario: *El morfismo $d_{n-1} \circ d_n : C_n(X) \to C_{n-2}(X)$ es trivial.*

Demostración. Basta probar para cada elemento en la base, es decir, $\sigma : \Delta^n \to X$. Tenemos que

$$d_{n-1} \circ d_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i$$

Usando el lema anterior, vemos que

$$\begin{aligned} d_{n-1} \circ d_n(\sigma) &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i \\ &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_i \circ \delta_{j-1} + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i \end{aligned}$$

haciendo un cambio de índice en la primera expresión, resulta que

$$d_{n-1} \circ d_n(\sigma) = \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j+1} \sigma \circ \delta_i \circ \delta_j + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i = 0$$

□

Con lo anterior podemos definir la homología singular de un espacio

Definición: *La **homología singular** de un espacio topologico X es la homología del complejo de cadenas $C_*(X)$, es decir,*

$$H_i(X) := H_i(C_*(X), d_*) = \frac{ker\ d_i}{im\ d_{i+1}}$$

Para definir un complejo de cocadenas debemos trabajar un poco mas. Definimos el grupo abeliano

$$C^n(X) = Hom(C_n(X), \mathbb{Z})$$

con la operación de grupo dada por $(\psi + \varphi)(a) = \psi(a) + \varphi(a)$ con $\psi, \varphi \in C_n(X)$, se verifica que $\psi + \varphi$ es morfismo. Consideramos el operador dual de d_n, denotado por $d^n : C^n(X) \to C^{n+1}(X)$ y dado por $d^n(\varphi) := \varphi \circ d_{n+1}$. Observamos que

$$0 \to C^0(X) \xrightarrow{d^0} C^1(X) \xrightarrow{d^1} \cdots$$

es un complejo de cocadenas, ya que $d^{n+1}(d^n(\varphi)) = \varphi \circ d_{n+1} \circ d_{n+2} = \varphi \circ 0 = 0$. Así, la **cohomología singular** se define como

$$H^i(X) := H^i(C^*(X), d^*) = \frac{ker\ d^i}{im\ d^{i-1}}$$

Proposición 1.3: *Sea $f : X \to Y$ una función continua de espacios topologicos, entonces las funciones*

$$f_n : C_n(X) \to C_n(Y) \quad dada\ por$$
$$\sum_\sigma n_\sigma \sigma \to \sum_\sigma n_\sigma f \circ \sigma$$

da un mapeo de cadena.

Demostración. Debemos chequear que $d_n^D \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n^C$. Basta probar para la base, notemos que

$$d_n^D(f_n(\sigma)) = d_n^D(f \circ \sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (f \circ \sigma) \circ \delta_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i f \circ (\sigma \circ \delta_i) = f(d_n^C(\sigma)) = f_{n-1}(d_n^C(\sigma))$$

□

Observación: Por el primer lema, obtenemos una colección de morfismos entre los grupos de homología. Por otro lado, dada $g : Y \to Z$ una función continua, afirmamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} H_n(X) \arrow[r, "(g\circ f)_*"] \arrow[d, "f_*"'] & H_n(Z) \\ H_n(Y) \arrow[ur, "g_*"'] & \end{tikzcd}$$

En efecto, sea $\sigma \in C_n(X)$ un elemento de la base, entonces $(g \circ f)_*(\sigma) = g \circ f \circ \sigma = g(f_*(\sigma)) = g_*(f_*(\sigma))$. Adicionalmente, directo de la definición, se obtiene que

$$(id_X)_* = id_{H_n(X)} : H_n(X) \to H_n(X)$$

De lo anterior, se deduce la siguiente proposición.

Proposición 1.4: *Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo, entonces $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ es un isomorfismo de grupos abelianos.*

Ejemplo: Consideremos el espacio de un punto $pt = \{*\}$. Existe un único simplice singular $\sigma_n : \Delta^n \to pt$, lo que implica que $\sigma_n \circ \delta_i = \sigma_{n-1}$. Entonces, el grupo libre $C_n(pt) \cong \mathbb{Z}$ y esta generado por σ_n. Notemos que

$$d_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_n \circ \delta_i = \begin{cases} \sigma_{n-1} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Luego, el complejo de cadenas se ve como sigue,

$$\cdots \to \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

El grupo de homología y cohomología del complejo es como sigue

$$H^n(pt) = H_n(pt) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Lema 1.5: *Sea X un espacio arcoconexo y no vacío, entonces $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.*

Demostración. Se define el morfismo $\varphi : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ dado por

$$\sum n_\sigma \sigma \to \sum n_\sigma$$

Como X es no vacío el morfismo es sobreyectivo. Afirmamos que $ker\ \varphi = im\ d_1$, en efecto, sea $\sigma \in C_1(X)$, luego

$$\varphi(d_1(\sigma)) = \varphi(\sigma \circ \delta_0 - \sigma \circ \delta_1) = 1 - 1 = 0$$

Por otro lado, supongamos que $\sum n_\sigma \sigma \in ker\ \varphi$. Sea $x_0 \in X$, consideremos el $0-$simplice singular $\sigma : \Delta^0 \to X$. Como el espacio es arcoconexo existe $\tau_\sigma : \Delta^1 \to X$ tal que $\tau_\sigma \circ \delta_0 = \sigma$ y $\tau_\sigma \circ \delta_1 = x_0$, así

$$d_1\left(\sum n_\sigma \tau_\sigma\right) = \sum n_\sigma(\sigma - x_0) = \sum n_\sigma \sigma - \left(\sum n_\sigma\right) x_0 = \sum n_\sigma \sigma$$

Por lo tanto, por primer teorema de isomorfismo, se tiene el resultado. □

2. Herramientas Útiles de Homología y Cohomología

2.1. Invarianza Homotópica

Teorema 2.1: *Sean $f, g : X \to Y$ funciones homotópicas. Entonces, inducen el mismo morfismo en homología y cohomología, es decir,*

$$f_* = g_* : H_*(X) \to H_*(Y)$$

análogamente se tiene que $f^* = g^*$

Corolario: *Sea $f : X \to Y$ una equivalencia homotópica, entonces $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ y $f^* : H^*(X) \to H^*(Y)$ son isomorfismos.*

Demostración. Sea $g : Y \to X$ una inversa homotópica, entonces

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (id_X)_* = id_{H_*(X)}$$

Similarmente, tenemos que $f_* \circ g_* = id_{H_*(Y)}$. Entonces f_* es un isomorfismo con inversa g_*. El caso de cohomología es análogo. □

Ejemplo: Como $\mathbb{R}^n$ es homotópico a un punto, resulta que

$$H^i(\mathbb{R}^n) = H_i(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

2.2. Mayer-Vietoris

El siguiente resultado permite calcular el grupo de homología y cohomología de manera indirecta, esto, mediante el cálculo de dichos grupos de espacios mas pequeños que conforman al espacio ambiente, la información estará codificada en una secuencia exacta.

Teorema 2.2: *Sea $X = A \cup B$ con A y B conjuntos abiertos. Se tienen las inclusiones*

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "i_B"] & A \arrow[d, "j_A"] \\ B \arrow[r, "j_B"] & X \end{tikzcd}$$

Entonces, existen homomorfismos $\partial_{MV} : H_n(X) \to H_{n-1}(A \cap B)$ tales que la siguiente secuencia es exacta

$$\begin{tikzcd} \arrow[r, "\partial_{MV}"] & H_n(A\cap B) \arrow[r, "i_{A*}\oplus i_{B*}"] & H_n(A)\oplus H_n(B) \arrow[r, "j_{A*}-j_{B*}"] & H_n(X) \arrow[dll, "\partial_{MV}"] \\ & H_{n-1}(A\cap B) \arrow[r, "i_{A*}\oplus i_{B*}"] & H_{n-1}(A)\oplus H_{n-1}(B) \arrow[r, "j_{A*}-j_{B*}"] & H_{n-1}(X) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(A)\oplus H_0(B) \xrightarrow{j_{A*}-j_{B*}} H_0(X) \longrightarrow 0$$

Es mas, la secuencia de Mayer-Vietoris es natural, es decir, si $f : X = A \cup B \to Y = U \cap V$ cumple que $f(A) \subseteq U$ y $f(B) \subseteq V$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} H_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial_{MV}"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(A\cap B) \arrow[r, "i_{A*}\oplus i_{B*}"] \arrow[d, "f|_{A\cap B*}"] & H_n(A)\oplus H_n(B) \arrow[r, "j_{A*}-j_{B*}"] \arrow[d, "f|_{A*}\oplus f|_{B*}"] & H_n(X) \arrow[d, "f_*"] \\ H_{n+1}(Y) \arrow[r, "\partial_{MV}"] & H_n(U\cap V) \arrow[r, "i_{U*}\oplus i_{V*}"] & H_n(U)\oplus H_n(V) \arrow[r, "j_{U*}-j_{V*}"] & H_n(Y) \end{tikzcd}$$

conmuta.

2.3. Homología Relativa

Definición: *Sea $A \subseteq X$. El morfismo $i_n : C_n \to C_n(X)$ es inyectivo, definimos*

$$C_n(X, A) := \frac{C_n(X)}{C_n(A)}$$

*el diferencial $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ se restringe al mapa $C_n(A) \to C_{n-1}(A)$, lo que define un morfismo $d_n : C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$, dado por $d_n([c]) := [d_n(c)]$. La **homología relativa** esta dada por*

$$H_n(X, A) := H_n(C_*(X, A))$$

Teorema 2.3: *Existen homomorfismos $\partial : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$ dados por mapear $[[c]]$ a $[d_n(c)]$. Mas aún, la siguiente secuencia es exacta*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial"] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] & H_n(X) \arrow[r, "q_*"] & H_n(X, A) \arrow[dll, rounded corners, "\partial"'] & \\
& H_{n-1}(A) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-1}(X) \arrow[r, "q_*"] & H_{n-1}(X, A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(X) \xrightarrow{q_*} H_0(X, A) \longrightarrow 0$$

donde q_* es el morfismo inducido por el cociente $q : C_*(X) \to C_*(X, A)$.

Definición: *Sean (X, A) y (Y, B) espacios topologicos con $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Un **mapa de pares** es una función continua $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subseteq B$.*

Tales mapas inducen un morfismo $f_* : H_n(X, A) \to H_n(X, A)$ tal que la secuencia exacta de homología relativa es natural.

2.4. Teorema de Escisión

Teorema 2.4: *Sea (X, A) un par de espacios y $Z \subseteq A$ tal que $\overline{Z} \subseteq int(A)$ tomando la clausura en X. Entonces el morfismo*

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \to H_n(X, A)$$

es un isomorfismo.