Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Mauricio Bustamante – Estudiante: Benjamín Mateluna

Topología Algebraica - MAT2850
Apuntes
05 de agosto de 2025

Índice

Motivación

Dados dos espacios topológicos X e Y ¿Cuando son homeomorfos?. Decimos que dos espacios son **homeomorfos** si existe $f: X \to Y$ continua, biyectiva y con inversa constinua. La topología algebraica ataca esta pregunta de la siguiente forma:

(1) Asigna a cada espacio topológico X un objeto algebraico $G(X)$.

(2) Aigna a cada función continua $f: X \to Y$ un homomorfismo $G(f): G(X) \to G(Y)$ tal que

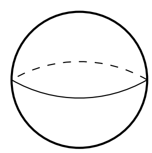
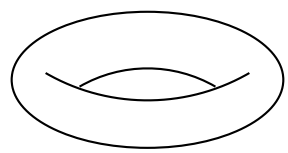
  (a) $G(f \circ g) = G(f) \circ G(g)$

  (b) $G(id_X) = id_{G(X)}$

Observación: Ambas condiciones implican que si $f: X \to Y$ es homeomorfismo, entonces $G(f): G(X) \to G(Y)$ es isomorfismo. A veces los G que se construyen satisfacen la propiedad extra que si X se puede ”deformar continuamente” en Y entonces $G(X) \cong G(Y)$.

Decimos que G es un **invariante homotópico**.
Ejemplos:

(1) Tenemos los espacios

Mas adelante veremos que la homología le asigna a la esfera el grupo $\{e\}$ y al toro $\mathbb{Z}^2$. En general, una superficie de genero g tendrá el grupo $\mathbb{Z}^{2g}$.

(2) ¿Cuando $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ son homeomorfos? Si $n \neq$, el grupo de homología de $\mathbb{R}^n$ será $\{e\}$ y por el contrario, para $\mathbb{R}^m$ va a ser $\mathbb{Z}$ y por lo tanto R^n y $\mathbb{R}^m$ son homeomorfos si y solo si $n = m$.

(3) Un ejemplo particular, para el circulo se tiene que $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ pero $\pi_1(\mathbb{S}^2) = \{e\}$ y por lo tanto los espacios no son homeomorfos.

Definición: *Una **homotopía** entre dos funciones continuas $f, g: X \to Y$ es una función continua $H: X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.*
Notación: La función $H_t: X \to Y$ esta dada por $H_t(x) := H(x, t)$. Una homotopía de f a g se denota por $f \sim g$.

Proposición 0.1: *Ser homotópico es una relación de equivalencia en $\mathcal{C}(X, Y)$.*

Demostración. Debemos probar tres cosas

(1) La relación es reflexiva. Sea $f: X \to Y$, consideramos la homotopía constante, esto es $H(x, t) := f(x)$ es continua ya que

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[rr, bend right, "H"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

(2) Simetría. Supongamos que $f \sim g$, consideramos $H'(x, t) = H(x, 1-t)$ y es continua por que

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r, "id \times (1-t)"] \arrow[rr, bend right, "H'"'] & X \times [0,1] \arrow[r, "H"] & Y \end{tikzcd}$$

(3) Por último, la transitividad. Sean $f \sim g$ y $g \sim h$, Definimos $H * G: X \times [0,1] \to Y$ dada por

$$H * G(x, t) := \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

que resulta continua por el lema del pegado.

□

Definición: *Decimos que $f : X \to Y$ es una **equivalencia homotópica**, si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f \sim id_X$ y $f \circ g \sim id_Y$*
En tal caso, X e Y se dicen homotópicamente equivalentes o que tienen el mismo tipo de homotopía y se denota por $X \sim Y$.

Ejemplo:

(1) Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo, en particular, tomando $g = f^{-1}$, se sigue que es equivalencia homotópica.

(2) Se tiene que $\{0\} \sim \mathbb{R}^n$, consideremos la inclusión $i :\to \{0\} \to \mathbb{R}^n$, afirmamos que es i es equivalencia homotópica. En efecto, se verifica que $\pi : \mathbb{R}^n \to \{0\}$ es una inversa homotópica. Por un lado $\pi \circ i = id_{\{0\}}$ y por otro $i \circ \pi = 0$. Notamos que $H(x, t) = tx$ con $t \in [0, 1]$ es una homotopía entre 0 y $id_{\mathbb{R}^n}$.

(3) Veamos que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim \mathbb{S}^{n-1}$. Probaremos que la función $i : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es equivalencia homotópica. En efecto,

$$\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$$
$$x \to \frac{x}{|x|}$$

es inversa homotópica. Es claro que $\pi \circ i = id_{s^{n-1}}$. Definimos

$$H(x, t) := t\frac{x}{|x|} + (1 - t)x$$

Notamos que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = \frac{x}{|x|}$, es decir, H es una homotopia entre $i \circ \pi$ e $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$. Además, se verifica que $im(H) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1. Homología

Queremos asignarle a un espacio topológico X arbitrario, grupos abelianos $H_0(X), H_1(X), \cdots$ tal que si $X \sim Y$, entonces $H_i(X) \cong H_i(Y)$ para todo i. Ituitivamente, $H_k(X)$ estará generado por ciertos subespacios de X de dimensión k.

Habrá una relación de equvalencia, $A, B \subseteq X$ de dimensión k serán equivalentes si hay un subespacio de X de dimensión $k+1$ cuyo borde es $A \cup B$.

Hay que restringir la clase de espacios a una con nociones de dimensión, borde, etc. Estos serán los complejos simpliciales. Necesitamos, adicionalmente, un objeto algebraico que capture esas nociones, esto corresponde a los complejos de cadenas.

1.1. Complejos de Cadenas

Definición: *Un **complejo de cadenas** es una sucesión de grupos abelianos y homomorfismos*

$$\cdots \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

tal que $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ para todo i. Se denota por $(C_\bullet, \partial_\bullet)$.
Observación: Notemos que $im\ \partial_{i+1} \subseteq ker\ \partial_i \subseteq C_i$. Dado que los grupos son abelianos, esta observación permite definir el siguiente objeto.

Definición: *El **i-ésimo grupo de homología** de $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ se define por*

$$H_i(C_i) := \frac{ker\ \partial_i}{im\ \partial_{i+1}}$$

Ejemplos:

- Si A un grupo abeliano, entonces

  $$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0$$

  es un complejo de cadenas donde $C_i = A$. Entonces

  $$H_j(C_\bullet) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ A & \text{si } j = i \end{cases}$$

- Consideremos la cadena exacta

  $$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

  entonces $H_j(C_\bullet) = 0$ para todo i.

- Veamos que

  $$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

  es un complejo de cadenas. La homología asociadas son $H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z}$, $H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_2$ y $H_k(C_\bullet) = 0$.

Definición: *Sean $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ y $(D_\bullet, \partial_\bullet)$ dos complejos de cadenas. Un **mapeo de cadenas** es una colección de homomorfismos $f_n : C_n \to D_n$ tal que $\partial_n f_n = f_{n-1}\partial_n$ para todo n, es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ D_n \arrow[r, "\partial_n"] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

y se denota por $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$.

Lema 1.1: *Si $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ es un mapeo de cadenas, entonces la asignación $f_* : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$ dada por*

$$f_*([x]) = [f_n(x)]$$

esta bien definida y es un homomorfismo de grupos.

Demostración. Sea $x \in ker\partial_n$ entonces $\partial_n f_n(x) = f_{n-1}\partial_n(x) = f_{n-1}(0) = 0$. Así, $f_n(x) \in ker\ \partial_n$ y por tanto la expresión tiene sentido. Si $[x] = [y]$ entonces $x - y = \partial_n(z)$ para $z \in C_{n+1}$, se sigue que $f_n(x) - f_n(y) = f_n\partial_{n+1}(z) = \partial_{n+1}f_{n+1}(z)$. Concluimos que $[f_n(x)] = [f_n(y)]$. $\square$

Ejemplo: Consideremos la siguiente situación

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "3"] \arrow[d, "id"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 & C_\bullet \arrow[d, "f_\bullet"] \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "3"] & \mathbb{Z}_3 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 & D_\bullet
\end{tikzcd}$$

Entonces $f_* : H_2(C_\bullet) = 0 \to H_2(D_\bullet) = \mathbb{Z}$ es el morfismo trivial. Mientras que $\pi_* : H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_3 \to H_1(D_\bullet) = \mathbb{Z}_3$ es la identidad.

Observación: Sea $g_\bullet : D_\bullet \to G_\bullet$ un mapeo de cadenas, entonces $(g \circ f)_\bullet : C_\bullet \to G_\bullet$ es un mapeo de cadenas y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
H_n(C_\bullet) \arrow[rr, "(g\circ f)_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & & H_n(G_\bullet) \\
& H_n(D_\bullet) \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\partial_n g_n f_n = g_{n-1}\partial_n f_n = g_{n-1}f_{n-1}\partial_n$. Por otro lado, tenemos que $(g\circ f)_*([x]) = [(g\circ f)(x)] = g_*([f(x)]) = (g_*\circ f_*)([x])$, lo que prueba la afirmación.

Definición: *Sean $i_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ y $j_\bullet : B_\bullet \to C_\bullet$ dos mapeos de cadenas. Decimos que forman una sucesión exacta corta si la secuencia*

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{i_n} B_n \xrightarrow{j_n} C_n \longrightarrow 0$$

es exacta y corta de grupos abelianos libres para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo denotamos como $0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$.

Teorema 1.2 (Lema de la serpiente): *Sea $0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$ una secuencia de complejos de cadenas, entonces existen morfismos*

$$\delta_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(A_\bullet) \arrow[r, "i_*"] & H_n(B_\bullet) \arrow[r, "j_*"] & H_n(C_\bullet) \arrow[dll, "\delta_n", rounded corners] & \\
& H_{n-1}(A_\bullet) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-1}(B_\bullet) \arrow[r, "j_*"] & H_{n-1}(C_\bullet) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(B_\bullet) \longrightarrow H_0(C_\bullet) \longrightarrow 0$$

Demostración. Vamos a hacer un cacería de diagramas (:D). Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_{n+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_n \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Primero debemos definir $\delta_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$. Sea $[c] \in H_n(C_\bullet)$ entonces $c \in ker\ \partial \subseteq C_n$. Como j es sobre, existe $b \in B_n$ tal que $j(b) = c$. Consideramos ∂b y notamos que

$$j\partial(b) = \partial j(b) = \partial c = 0$$

entonces existe un único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b$. Verificamos que $i\partial(a) = \partial i(a) = \partial^2 b = 0$ y como i es inyectiva vemos que $\partial a = 0$. Afirmamos que $\delta_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$ por

$$\delta_n([c]) = [a]$$

cumple lo buscado. Debemos demostrar lo siguiente

(1) No depende de la elección de b. Sea b' tal que $j(b') = c$ entonces $j(b'-b) = c-c = 0$, existe único a_0 tal que $i(a_0) = b'-b$. Por otro lado, existe a' tal que
$$i(a') = \partial b' = \partial b + \partial i(a_0) = \partial b + i\partial(a_0)$$
entonces $i(a' - \partial a_0) = \partial b = i(a)$, por inyectividad, $a' - \partial a_0 = a$, lo que implica que $[a] = [a']$.

(2) No depende de la elección del representante de $[c]$. Sea $c' = c + \partial c'' = j(b) + \partial j(b'') = j(b) + j\partial(b'')$, diremos $b' = b + \partial b''$, notemos que $\partial b' = \partial b + \partial^2 b'' = \partial b$. El mismo $a \in A_{n-1}$ satisface $i(a) = \partial b'$. Entonces $\delta_n[c] = [a] = \delta_n[c']$.

(3) La función δ_n es morfismo, es decir
$$\delta_n([c] + [c']) = \delta_n[c] + \delta_n[c']$$
Notar que si $j(b) = c$ y $j(b') = c'$ entonces $j(b + b') = c + c'$, existen únicos $a, a' \in A_{n-1}$ tales que $i(a + a') = \partial(b + b'')$ y así
$$\partial_n([c + c']) = [a + a'] = [a] + [a']$$

(4) Exactitud en $H_n(C_\bullet)$ y $H_n(A_\bullet)$. Veamos que $im\ j_* \subseteq ker\ \delta_n$. Sea $j_*[b]$ con $\partial b = 0$. Entonces

$$\delta_n j_*[b] = \delta_n[j(b)]$$

Existe único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b = 0$, entonces $a = 0$ y por lo tanto $\delta_n j_*[b] = [a] = 0$. Queda ver que $ker\ \delta_n \subseteq im\ j_*$. Sea $[c] \in ker\ \delta_n$ con $\partial c = 0$. Por definición de δ_n, para cada b tal que $j(b) = c$ hay un único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b$.

Como $\delta_n[c] = [a] = 0$ se sigue que $a = \partial a'$ y entonces $\partial b = i(a) = i\partial(a') = \partial i(a')$, así $b - i(a') \in ker\ \partial$, es decir $b - i(a')$ representa una clase de homología.

Ahora $j(b - i(a')) = j(b) = c$, por ende, $j_*[b - i(a')] = [c]$. Para $H_n(A_\bullet)$ la demostración es similar.

(5) Exactitud en $H_n(B_\bullet)$. Sea $[a] \in im\ i_*$ con $\partial a = 0$, entonces

$$j_* i_*[a] = [j_n i_n(a)] = 0$$

y por lo tanto $im\ i_* \subseteq ker\ j_*$. Sea $[b] \in ker\ j_*$ con $\partial b = 0$, entonces $j_*[b] = [j(b)] = 0$, lo que implica que $j(b) = \partial c' = \partial j(b') = j\partial(b')$, existe único $a \in A_{n-1}$ tal que $b - \partial b' = i(a)$, además

$$i\partial(a) = \partial i(a) = \partial b + \partial^2 b' = 0$$

entonces $\partial a = 0$. Luego $i_*[a] = [b]$. Concluimos que $im i_* = ker\ j_*$.

Lo que concluye el teorema. □

Definición: *Sean $f_\bullet, g_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ mapeos de cadenas. Una **homotopía de cadenas** es una colección de morfismos*

$$h_n : C_n \to C_{n+1} \quad \textit{tal que}$$
$$f_n - g_n = \partial h_n + h_{n-1}\partial$$

Lo denotamos como $f_\bullet \sim g_\bullet$.

Proposición 1.3: *Sea $f_\bullet \sim g_\bullet$ entonces $f_* = g_*$.*

Demostración. Sea $[x] \in H_n(C_\bullet)$, por definición, sabemos que $\partial x = 0$, luego

$$(f_* - g_*)([x]) = [(f - g)(x)] = [(\partial h + h\partial)(x)] = [\partial h x] = 0$$

lo que prueba la afirmación. □

Nuestro objetivo será asociar un complejo de cadenas a un espacio topológico X arbitrario, lo que nos dara un grupo de homología para cada dimensión, además dada $f : X \to Y$ una función continua, nos gustaría obtener un mapeo de cadenas y por tanto un homomorfismo entre los grupos de homología de cada espacio.

1.2. Complejos Simpliciales

Definición: *Dados $n+1$ puntos $\{v_0, \cdots, v_n\} \in \mathbb{R}^\omega$ son* ***afínmente independientes****, si generan un $n-$plano afín, es decir, $\{v_1 - v_0, \cdots, v_n - v_0\}$ es un conjunto linealmente independiente, esto es*

$$\sum_{i=0}^{n} t_i v_i = 0 \quad y \quad \sum_{i=0}^{n} t_i = 0 \quad \textit{entonces} \quad t_i = 0 \textit{ para todo } i$$

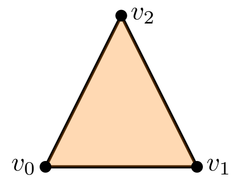
Ejemplo: Dos puntos son afínmente independientes. Tres puntos son afínmente independientes si y solo si no son colineales.

Definición: *Si $\{v_0, \cdots, v_n\}$ son afínmente independientes, ellos definen el* ***n-simplejo***

$$\sigma = \langle v_0, \cdots, v_n \rangle = \left\{ x = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i, \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \quad y \quad t_i \geq 0 \right\}$$

Decimos que σ es el $n-$simplejo generado por $v_0, \cdots, v_n$. Los puntos v_i se llaman **vértices** de σ. Una **cara** de un simplejo σ es un simplejo τ generado por un subconjunto de $\{v_0, \cdots, v_n\}$ y lo denotamos por $\tau \leq \sigma$. Si el subconjunto es propio, se dice que τ es una **cara propia**.

La **frontera** de un $n-$simplejo σ es la unión de todas sus caras propias, se denota por $\partial\sigma$, el **interior** de σ es $int(\sigma) := \sigma \setminus \partial\sigma$.



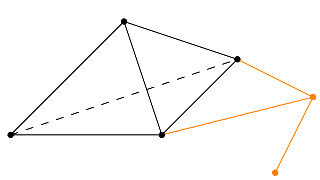
Definición: *Un* ***complejo simplicial*** *(geométrico) K es un conjunto de simplejos tales que*

(1) Si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau \in K$.

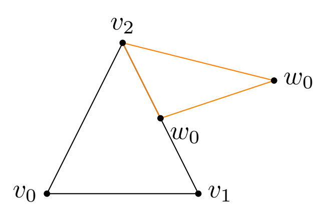
(2) Si $\sigma, \tau \in K$ entonces $\sigma \cap \tau = \emptyset$ ó $\sigma \cap \tau$ es una cara de σ y de τ.

El **poliedro** asociado a un complejo simplicial K es $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$. Un espacio topológico X se llama un poliedro si existe un complejo simplicial K y un homeomorfismo $f : |K| \to X$. Al par (K, f) se le llama una **triangulación** de X. Denotamos por V_K al conjunto de vértices de los simplices.

Observación: Si X es triangulable, entonces es Hausdorff por que $|K|$ lo es.



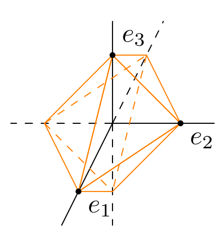
(1)



(2)

La figura (1) corresponde a un complejo simplicial, mientras que la figura (2) no es un complejo simplicial ya que los simplices que la componen no se pegan bien.

Ejemplo: Consideremos el complejo simplicial K formado por los simplices $\sigma = \langle \pm e_1, \pm e_2, \pm e_3 \rangle$ y sus respectivas caras. Consideremos $f : |K| \to \mathbb{S}^2$ por $f(x) := x / |x|$, entonces (K, f) es una triangulación de la $2-$esfera.



Definición: *Sean K y L complejos simpliciales. Un* ***mapeo simplicial*** *de K a L es una función $f : V_K \to V_L$ tal que si $\sigma = \langle v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_n} \rangle$ es un simplejo en K entonces*

$$\{f(v_{\alpha_0}), \cdots, f(v_{\alpha_n})\}$$

genera un simplice en L, al cual llamamos $f(\sigma)$. Notación $f : K \to L$.

Ejemplo: Sea $\triangle^n = \langle e_1, \cdots, e_{n+1} \rangle \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^\infty$. Entonces las funciones $f : \triangle^1 \to \triangle^2$ y $g : \triangle^2 \to \triangle^1$ dadas por $f(e_i) = e_i$ y $g(e_1) = g(e_3) = e_1$, $g(e_2) = e_2$ son mapeos simpliciales.

Lema 1.4: *Sea $f : K \to L$ un mapeo simplicial. Entonces induce una función continua $|f| : |K| \to |L|$.*

Demostración. Sea $\sigma \in K$, digamos que $\sigma = \langle v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_n} \rangle$ y Definimos

$$\begin{aligned} f_\sigma : \sigma &\to |L| \\ \sum_{i=0}^k t_i v_i &\to \sum_{i=0}^k t_i f(v_i) \end{aligned}$$

que es continua por que es lineal en los t_i. Se observa que si $\tau \leq \sigma$ entonces $f_\tau = f_\sigma\big|_\tau$. Ahora tomamos σ y σ', entonces

$$f_\sigma\big|_{\sigma\cap\sigma'} = f_{\sigma\cap\sigma'} = f_{\sigma'}\big|_{\sigma\cap\sigma'}$$

entonces $|f| := \bigcup_{\sigma\in K} f_\sigma$ es una función continua de $|K|$ en $|L|$. □

Sea $g : L \to J$ un mapeo simplicial, entonces $g \circ f$ es mapeo simplicial, ya que f mapea vértices de un simplice a vértices de un simplice y del mismo modo lo hace g, además se tiene lo siguiente

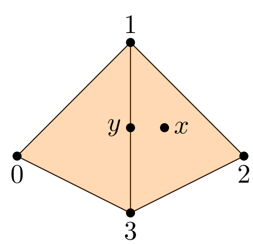
$$|g \circ f|(x) = |g \circ f| \left(\sum t_i v_{\alpha_i}\right) = \sum t_i (g \circ f)(v_{\alpha_i}) = \sum t_i g(f(v_{\alpha_i})) = (|g| \circ |f|)(x)$$

es decir, $|g \circ f| = |g| \circ |f|$. Un mapeo simplicial puede ser definido también como una función continua $f : |K| \to |L|$ que manda vértices en vértices y es lineal en sus caras.

Daremos un par de definiciones útiles para mas adelante, que están relacionadas con la noción de aproximar una función continua por un mapeo simplicial.

Definición: *Sea $x \in |K|$. El* ***portador*** *de x es el simplejo de K mas pequeño (en términos de inclusión) que contiene a x. Se denota por $carr(x)$.*

Ejemplo: Veamos el siguiente complejo



Entonces $carr(y) = \langle 1, 3 \rangle$, $carr(x) = \langle 1, 2, 3 \rangle$ y $carr(4) = \langle 4 \rangle$.

Observación: Notemos que $y \in carr(x)$ si y solo si $carr(y) \subseteq carr(x)$. Sea $\sigma \in K$, entonces $\sigma = carr(x)$ si y solo si $x \in int(\sigma)$, esto es una caracterización útil del portador.

En efecto, si $\sigma = carr(x)$, supongamos, por contradicción, que $x \in \partial\sigma$, entonces $x \in \tau < \sigma$, como K es complejo, $\tau \in K$. Por otro lado, si $x \in int(\sigma)$, sea $\tau \in K$ tal que $x \in \tau$, luego $\tau \cap \sigma$ es una cara de σ, pero $x \in \tau \cap \sigma$ lo que implica que $\sigma = \tau \cap \sigma \subseteq \tau$, es decir, $\sigma = carr(x)$.

Proposición 1.5: *Sea $g : K \to L$ un mapeo simplicial, entonces $g(carr(x)) = carr(g(x))$.*

Demostración. Por la observación anterior, basta probar que $g(x) \in int(g(carr(x)))$, sean $v_i \in V_K$ tales que $\langle v_1, \cdots, v_n \rangle = carr(x)$, luego

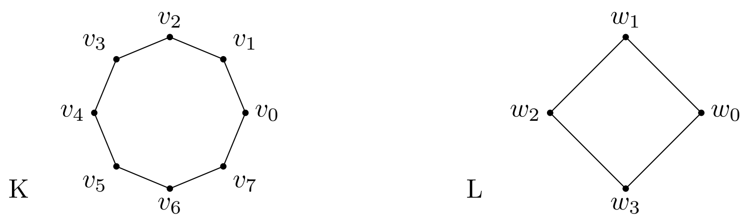
$$x = \sum_{i=1}^n t_i v_i \quad \text{donde } t_i > 0 \text{ para todo } i \text{, entonces} \quad g(x) = \sum_{i=0}^n t_i g(v_i) \in g(carr(x))$$

como $t_i > 0$ vemos que $g(x) \in int(g(carr(x)))$. □

Definición: *Sea $f : |K| \to |L|$ una función continua. Una **aproximación simplicial** a f es un mapeo simplicial $g : K \to L$ tal que*

$$g(x) \in carr(f(x)) \text{ para todo } x \in |K|$$

Ejemplo: Se definen los siguientes complejos simpliciales,



El poliedro asociado a cada complejo es $\mathbb{S}^1$, consideramos la función continua $f(z) = z^2$, una aproximación simplicial es $g(v_i) = g(v_{i+4}) = w_i$ para $0 \leq i \leq 3$.

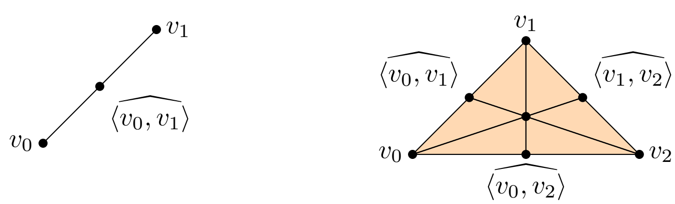
Definición: *Sea K un complejo simplicial. La **primera subdivisión baricéntrica** K' **de** K es el complejo simplicial K' cuyos*

- *Vértices son los baricentros $\hat{\sigma}$ de los simpleces σ de K.*
- *Un $n-$simplice de K' es $\langle \hat{\sigma_0}, \hat{\sigma_1}, \cdots, \hat{\sigma_n} \rangle$ si $\sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n$ (Son caras propias).*

Una $r-$ésima división baricéntrica se define recursivamente $K^{(r)} := (K^{(r-1)})'$. Recordemos que si $\sigma = \langle v_0, \cdots, v_n \rangle$ entonces $\hat{\sigma} = \frac{1}{n+1} \sum v_i$.

Proposición 1.6: *Sea K un complejo simplicial entonces $|K'| = |K|$.*

Ejemplo: Algunos ejemplos de división baricéntrica de dos simplices.



donde el punto central del segundo ejemplo es $\widehat{\langle v_0, v_1, v_2 \rangle}$.

1.3. Homología Simplicial

Dado K un complejo simplicial finito, esto es, que tiene un número finito de vértices. Elegimos un orden total en el conjunto de vértices, digamos $v_0 < v_1 < \cdots < v_n$.

Definición: *(**Complejo de cadenas simplicial**) Consideremos los grupos abelianos*

$$C_n(K) := \left\{\sum n_\sigma \sigma : \sigma = \langle v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_n}\rangle \text{ tal que } v_{\alpha_0} < \cdots < v_{\alpha_n} \text{ y } n_\sigma \in \mathbb{Z} \text{ nulo salvo finitos casos}\right\}$$

y los diferenciales $\partial_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ se define en la base por

$$\partial_n \langle v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_n}\rangle = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle v_{\alpha_0}, \cdots, \widehat{v_{\alpha_i}}, \cdots, v_{\alpha_n}\rangle$$

donde $\langle v_{\alpha_0}, \cdots, \widehat{v_{\alpha_i}}, \cdots, v_{\alpha_n}\rangle := \left\langle v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_{i-1}}, v_{\alpha_{i+1}}, \cdots, v_{\alpha_n}\right\rangle$. Se extiende linealmente al resto del grupo.

> **Teorema 1.7:** *La tupla $(C_\bullet(K), \partial_\bullet)$ es un complejo de cadenas, además, la homología del complejo no depende del orden en el conjunto de vértices.*

Definición: *Sea K un complejo simplicial finito. El **i-ésimo grupo de homología simplicial** de K es*

$$H_i(K) := H_i(C_\bullet(K)) = \frac{ker\ \partial_i}{im\ \partial_{i+1}}$$

Ejemplos:

(1) Sea $K = \{\langle v_0, v_1\rangle, \{v_0\}, \{v_1\}\}$ y consideramos el orden $v_0 < v_1$. El complejo corresponde a un segmento de recta, notemos que $3v_0 - 5v_1 \in C_0(K)$, con la identificación $v_0 = (1, 0)$ y $v_1 = (0, 1)$ vemos que $C_0(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, esta identificación no es canónica, es decir, depende de la base que escojamos y sus imagenes correspondientes.

Por otro lado, $C_1(K) \cong \mathbb{Z}$ con la identificación $\langle v_0, v_1\rangle = 1$. Adicionalmente, se tiene que $C_i(K) = 0$ para $i > 1$. Luego,

$$0 \longrightarrow C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{0} 0$$

donde $\partial_1 \langle v_0, v_1\rangle = v_1 - v_2 \in C_0(K)$. Con las identificaciones que hicimos resulta que $\partial_1(1) = (-1, 1)$. De este modo queda la cadena

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

Así $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(K) = 0$, $H_i(K) = 0$ para $i > 0$.

(2) Sean v_0, v_1, v_2 puntos no colineales. Consideramos $\sigma = \langle v_0, v_1, v_2\rangle$ y $K := \{\tau \leq \sigma\}$ definimos el orden $v_0 < v_1 < v_2$. Notemos que

$$\begin{aligned} C_0(K) &= \mathbb{Z}\{v_0, v_1, v_2\} \\ C_1(K) &= \mathbb{Z}\{\langle v_0, v_1\rangle, \langle v_1, v_2\rangle, \langle v_0, v_2\rangle\} \\ C_2(K) &= \mathbb{Z}\{\langle v_0, v_1, v_2\rangle\} \end{aligned}$$

Entonces $\partial_0 = 0$,

$$\partial_1 = \begin{cases} \partial \langle v_0, v_1\rangle = v_1 - v_0 \\ \partial \langle v_1, v_2\rangle = v_2 - v_1 \\ \partial \langle v_0, v_3\rangle = v_3 - v_0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \partial_2 \langle v_0, v_1, v_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle - \langle v_0, v_2\rangle + \langle v_0, v_1\rangle$$

Realizando las identificaciones $v_i = e_{i+1}$ para $i = 0, 1, 2$, $\langle v_0, v_1, v_2\rangle = 1$, $\langle v_0, v_1\rangle = e_1, \langle v_1, v_2\rangle = e_2$ y $\langle v_0, v_2\rangle = e_3$ resulta que $C_0(K) \cong \mathbb{Z}^3, C_1(K) \cong \mathbb{Z}^3$ y $C_2(K) \cong \mathbb{Z}$. Tenemos

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \longrightarrow 0$$

donde

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Claramente $H_i(K) = 0$ para $i > 2$. Además, $ker\ \partial_2$, entonces $H_2(K) = 0$. Notemos que $im\ \partial_2 \cong \mathbb{Z}$ y $ker\ \partial_1 \cong \mathbb{Z}$, luego $H_1(K) = 0$. Por otro lado, $im\ \partial_1 \cong \mathbb{Z}^2$. Por ende $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

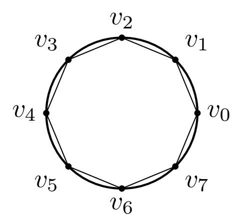
Comentario: Se invita a calcular la homología de un $n-$simplejo. Hasta ahora hemos definido todo respecto a $\mathbb{Z}$, pero se puede definir homología simplicial de manera análoga para cualquier anillo R.

Lema 1.8: *Sea $f : K \to L$ un mapeo simplicial, definimos los morfismos*

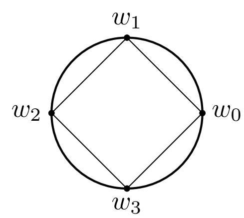
$$\begin{aligned} f_n &: C_n(K) \to C_n(L) \\ \langle v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_n} \rangle &\to \begin{cases} sign(\varphi) \left\langle f(v_{\varphi(\alpha_0)}), \cdots, f(v_{\varphi(\alpha_n)}) \right\rangle & \textit{si son distintos} \\ 0 & \textit{si no lo son} \end{cases} \end{aligned}$$

donde φ es un permutación tal que $\varphi(\alpha_0) < \cdots < \varphi(\alpha_n)$. Entonces, la colección, es un mapeo de cadena.
Por lo tanto, f induce un morfismo entre los grupos de homología de los complejos simpliciales

Ejemplo: Definimos los siguientes complejos simpliciales



K



L

Para cada complejo se da el orden que sigue $v_0 < v_1 < \cdots < v_7$ y $w_0 < w_1 < w_2 < w_3$ y definimos $f : K \to L$ por $f(v_i) = f(v_{i+4}) = w_i$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Veamos quien es $f_* : H_1(K) \to H_1(L)$. En primer lugar, sabemos que

$$H_1(K) = ker(C_1(K) \to C_0(K)) = ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathbb{Z}$$

Similarmente $H_1(K) \cong \mathbb{Z}$. Entonces

$$f_*(\langle v_0, v_1 \rangle + \cdots + \langle v_6, v_7 \rangle - \langle v_0, v_7 \rangle) = 2(\langle w_0, w_1 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle + \langle w_2, w_3 \rangle - \langle w_0, w_3 \rangle)$$

luego $f_* : H_1(K) \xrightarrow{\cdot 2} H_1(L)$. Por otro lado, notemos que $H_0(K) \cong H_0(L) \cong \mathbb{Z}$, ya que todo par de vértices en el complejo esta conectado por una secuencia de aristas, luego $f_*([v_0]) = [w_0]$, entonces $f_* : H_0(K) \to H_0(L)$ es isomorfismo.

Teorema 1.9 (Mayer-Vietoris): *Sea K un complejo simplicial y M, N subcomplejos de K que cubren a K, es decir, $M \cup N = K$. Se tienen los mapeos*

$$\begin{tikzcd} M \cap N \arrow[r, "i_N"] \arrow[d, "i_M"] & N \arrow[d, "j_N"] \\ M \arrow[r, "j_M"] & K \end{tikzcd}$$

Existen morfismos $\delta_n : H_n(K) \to H_{n-1}(K)$ tales que la secuencia

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(M \cap N) \arrow[r, "i_{M*} \oplus i_{N*}"] & H_n(M) \oplus H_n(N) \arrow[r, "j_{M*} - j_{N*}"] & H_n(K) \arrow[dlll, "\delta_n"] & \\ & H_{n-1}(M \cap N) \arrow[r, "i_{M*} \oplus i_{N*}"] & H_{n-1}(M) \oplus H_{n-1}(N) \arrow[r, "j_{M*} - j_{N*}"] & H_{n-1}(K) \arrow[r] & \cdots \\ & \cdots \arrow[r] & H_0(M) \oplus H_0(N) \arrow[r, "j_{M*} - j_{N*}"] & H_0(K) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es exacta.

Demostración. Verificaremos que

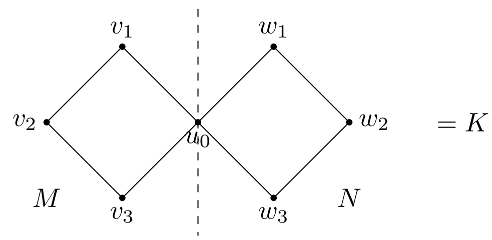
$$0 \longrightarrow C_n(M \cap N) \xrightarrow{i_M \oplus i_N} C_n(M) \oplus C_n(N) \xrightarrow{j_M - j_N} C_n(K) \longrightarrow 0$$

es una secuencia exacta corta de grupos abelianos para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, como C_n es libremente generado por los $n-$simplices e i es inyectiva, entonces $i_{M*} \oplus i_{N*}$ es inyectiva. Además, $j_{M*} - j_{N*}$ es sobreyectiva por hipotesis y es directo que $im\ i_{M*} \oplus i_{N*} \subseteq ker\ j_{M*} - j_{N*}$. Resta ver que

$$ker\ j_{M*} - j_{N*} \subseteq im\ i_{M*} \oplus i_{N*}$$

Sea $(x, y) \in ker\ j_{M*} - j_{N*}$ entonces $j_{M*}(x) = j_{N*}(y)$, es decir, x e y se escriben como suma de simplices en N y M respectivamente, entonces $(x, y) \in im\ i_{M*} \oplus i_{N*}$. Así, usando el lema de la serpiente, concluimos. $\square$

Ejemplo: Consideremos la siguiente situación



Notemos que $H_1(M) \cong \mathbb{Z}$ y $H_1(N) \cong \mathbb{Z}$, además $M \cap N = \{u_0\}$, entonces usando mayer vietoris nos queda que

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r] & H_1(K) \arrow[dlll, out=0, in=180] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "\phi"] & H_0(K) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Para $i > 2$ notamos que $H_i(K) = 0$, por otro lado el morfismo $\varphi(1) = (1, 1)$ ya que manda generador en generador, esto por que todo par de puntos en M y N estan relacionados por un camino de aristas. De este modo,

$$H_0(K) \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\ker \phi} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{im\ \varphi} \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

donde el último isomorfismo se da por que φ es inyectiva, es decir, el morfismo $H_1(K) \to \mathbb{Z}$ es trivial.

Teorema 1.10: *Sea $f : |K| \to |L|$ una función continua. Entonces f induce un homomorfismo*

$$f_* : H_*(K) \to H_*(L)$$

tal que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ e $id_* = id_{H_*(K)}$, donde $g : |L| \to |M|$ es continua.

Observación: Con esto se tendría que $H_*(K)$ es invariante topológico. Se probara en dos pasos. Veremos que toda función f continua se puede "aproximar" a una función g simplicial, también hay que comprobar que $f_* := g_*$ es independiente de la función simplicial escogida.

Teorema 1.11 (Aproximación Simplicial): *Sean K, L complejos simpliciales finitos y $f : |K| \to |L|$ una función continua. Entonces existe $r \in \mathbb{N}$ y una aproximación simplicial a f*

$$g : K^{(r)} \to L$$

A partir de esta aproximación simplicial, se cumplen dos propiedades importantes, que son

(1) f es homotópica a g. Notemos que $g(x), f(x) \in carr(f(x))$, entonces el segmento entre $g(x)$ y $f(x)$ está en $carr(f(x))$ porque es un conjunto convexo. Definimos

$$\begin{aligned} |K| \times [0, 1] &\to |L| \\ (x, t) &\to tg(x) + (1 - t)f(x) \end{aligned}$$

(2) Sean $f_1 : |K| \to |L|$, $f_2 : |L| \to |M|$ continuas y $g_1 : K \to L$, $g_2 : L \to M$ aproximaciones simpliciales de f_i, entonces $g_2 \circ g_1$ es aproximación simplicial de $f_2 \circ f_1$.

Se tiene que

$$g_2 g_1(x) \in g_2(carr(f_1(x))) = carr(g_2 f_1(x)) \subseteq carr(f_2 f_1(x))$$

Proposición 1.12: *Sea $id : |K'| \to |K|$, la función $a : V_{K'} \to V_K$ dada por $a(\hat{\sigma}) = v \in V_\sigma$ cumple que*

(1) Define una aproximación simplicial de la identidad.

(2) Toda aproximación simplicial $g : K' \to K$ de la identidad es de esta forma.

Demostración. Veamos que a es un mapeo simplicial. Sea $\sigma = \langle \hat{\sigma_0}, \cdots, \hat{\sigma_n} \rangle \in K'$, entonces $a(\hat{\sigma_i}) = v_i \in V_{\sigma_i}$. Sabemos que $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ para $0 \leq i \leq n-1$, lo que implica que $V_{\sigma_i} \subset V_{\sigma_{i+1}}$, en particular, $V = \{v_0, \cdots, v_n\} \subseteq V_{\sigma_n}$, luego, V genera una cara de σ_n, es decir, un simplice en $|K|$.

Sea $x \in |K'|$, sean $\hat{\sigma_i} \in K'$ tales que $\langle \hat{\sigma_1}, \cdots, \hat{\sigma_n} \rangle = carr(x)$, luego,

$$x = \sum_{i=1}^{n} t_i \hat{\sigma_i} \quad \text{donde } t_i > 0 \text{ para todo } i$$

en particular, $t_n > 0$, como $\hat{\sigma_n} = \frac{1}{n+1} \sum v_i$ donde $\langle v_1, \cdots, v_n \rangle = \sigma_n$, entonces x se escribe como combinación convexa de los v_i donde cada poderación es positiva, luego $x \in int(\sigma_n)$, en otras palabras, $carr(id(x)) = \sigma_n$.

Lo anterior prueba que a es una aproximación de la identidad. Por otro lado, si g es una aproximación simplicial de la identidad, entonces

$$g(\hat{\sigma}) \in carr(id(\hat{\sigma})) = \sigma$$

entonces $g(\hat{\sigma}) \in V_\sigma$, por que g es mapeo simplicial. □

Lema 1.13: *Si $f, g : K \to L$ son aproximaciones simpliciales de alguna función continua $|K| \to |L|$ entonces $g_* = f_*$.*

Lema 1.14: *Sea $a : K' \to K$ una aproximación simplicial de $id : |K'| \to |K|$. Entonces $a_* : H_n(K') \to H_n(K)$ es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Si iteramos, $a_r : K^{(r)} \to K$ entonces $a_{r*} : H_n(K^{(r)}) \to H_n(K)$ es isomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.15: *Sea $f : |K| \to |L|$ una función continua, entonces el homomorfismo*

$$f_* := s \circ a_{r*}^{-1} : H_n(K) \to H_n(L)$$

donde s es aproximación simplicial de f. Cumple que

(1) No depende de s ni de r.

(2) Si $g : |L| \to |M|$ es continua, entonces $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

La demostración de (1) es inmediata de los dos lemas previos y (2) es directo de la segunda propiedad que se tiene del teorema de aproximación simplicial. Con esto, ya podemos afirmar que la homología simplicial es un invariante topológico.

1.4. Homología Singular

1.5. Homología Relativa

1.6. Resultados de Homología

2. Cohomología

2.1. Complejos de Cocadenas

2.2. Cohomología Singular y Simplicial

2.3. Producto Cup

2.4. Anillo de Cohomología

2.5. Dualidad de Poincaré y Fórmula de Künneth

3. Grupo Fundamental

3.1. Primer Grupo Fundamental