Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Giancarlo Urzúa – Estudiante: Benjamín Mateluna

**Geometría Algebraica - MAT2824**
**Apuntes**
**06 de Marzo de 2025**

# Índice

# Introducción

Habrán tres evaluaciones (I1, I2, I3) cada una vale un 20 % y un examen (EX) que vale un 40 %. Las fechas son, 9 de abril, 14 de Mayo, 11 de Junio y 1 de Julio respectivamente.

# 1. Conjuntos Algebraicos afines

## 1.1. Preliminares algebraicos

Sea $R$ un anillo conmutativo con $+, \cdot$ y con $1 \neq 0$. Si $R, R'$ son anillos, un morfismo de anillos es una función $f : R \to R'$ que respeta $+, \cdot$ y $f(1_R) = 1_{R'}$. Un dominio $R$ es un anillo en donde $xy = xz$ implica que $y = z$ para todo $x \neq 0$.

**Ejemplo** $\mathbb{Z}$ es dominio, pero $\mathbb{Z}/6$ no lo es.

Un cuerpo es un dominio donde todo $x \neq 0$ tiene un inverso. Dado $R$ dominio, existe el cuerpo de fracciones $K$ tal que $R \subseteq K$. Dado $R$ anillo, sea $R[x]$ el anillo de polinomios con coeficientes en $R$, sus elementos tienen la forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d \ , \ a_d \neq 0$$

y decimos que $f$ tiene grado $d$ denotado por $gr(f)$. Se define de manera recursiva $R[x_1, \cdots, x_n] = R[x_1, \cdots, x_{n-1}][x_n]$ el anillo de polinomios en $n$ variables. Dado $f = \alpha \cdot x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$ su grado se define como $gr(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, para $f$ en general, definimos su grado como $gr(f) := max\{\text{grados de monomios}\}$. Dado $f \in R[x_1, \cdots, x_n]$ y $d = gr(f)$ entonces

$$f = F_0 + F_1 + \cdots + F_d \text{ , con } F_i \text{ homogeneos, esto es, } F_i(\lambda x_{x_1}, \cdots, \lambda x_n) = \lambda^i F(x_1, \cdots, x_n)$$

Si $f \in R[x]$ una raíz (cero) de $f$ es un $r \in R$ tal que $f(r) = 0$.

**Teorema 1.** *Se tiene que $r$ es cero si y solo si $f(x) = (x - r)g(x)$ para algún $g \in R[x]$.*

Un cero de $f(x_1, \cdots, x_n)$ es un $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$.

Decimos que $r \in R$ es irreductible si toda descomposición $r = ab$ con $a, b \in R$ se tiene que $a$ o $b$ es una unidad. Un anillo $R$ se dice dominio de factorización unica si todo elemento no nulo se puede factorizar de manera esencialmente unica en producto de irreductibles.

**Lema 1.1.** *Si $R$ es dominio de factorización unica entonces $R[x]$ es dominio de factorización unica.*

**Lema 1.2.** *Si $R$ es un dominio de factorización unica y $K$ su cuerpo de fracciones. Dado $f \in R[x]$ irreductible entonces $f$ es irreductible en $K[x]$.*

Sea $R$ un anillo. Un ideal $I \subset R$ es tal que si $a, b \in I$ entonces $a + b \in I$ y si $r \in R$ entonces $ra \in I$. Consideramos la función $\pi : R \to R/I$ donde $R/I$ es el anillo cociente que es conmutativo. Un ideal es maximal si y solo si $R/I$ es cuerpo.

**Teorema 2.** *Sea $R$ un dominio euclideano (se cumple algoritmo de la división) y $a, b \in R$, consideremos $mcd(a, b) = d$. Entonces existen $c, e \in R$ tales que $ac + be = d$.*

**Teorema 3.** *Si $F$ es un polinomio homogeneo de grado $d$, entonces*

$$dF = x_1 F_{x_1} + \cdots + x_n F_{x_n}$$

*donde $F_{x_i}$ es la derivada formal con respecto a $x_i$.*

## 1.2. Espacio Afín y Conjuntos Algebraicos

**Definición 3.1.** *Sea $k$ un cuerpo. El espacio afín de dim $n$ es $\mathbb{A}_k^n := k^n$ (generalmente se supondra que $k = \overline{k}$).*

**Definición 3.2.** *Una hipersuperficie de $\mathbb{A}_k^n$ es $V(F) = \{p \in \mathbb{A}_k^n : F(p) = 0\}$ para un $F \in k[x_1, \cdots, x_n]$.*

**Ejemplos:**

- Sea $k = \mathbb{R}$ consideramos la hipersuperficie $V(y^2 - x^2(x+1)) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (foto)
  El punto $(0,0)$ se llama nodo.
- Veamos la hipersuperficie $V((x^3 - y^3)(y^3 - 1)(x^3 - 1)) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.
- La hipersuperficie $V(x^2 + y^2 - z^2) \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ es conocida como cono (foto)
  Como en el primer ejemplo, el punto $(0,0)$ se llama nodo
- Consideremos $V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (foto)
  En este caso, el punto $(0,0)$ no es un nodo, en este caso se llama cuspide.
- Veamos el caso de una hipersuperficie no parametrizable, esta es $V(y^2 - x(x+1)(x+\lambda))$.

**Definición 3.3.** *Sea $S \subseteq k[x_1, \cdots, x_n]$ un conjunto arbitrario, se define*

$$V(S) := \{p \in \mathbb{A}^n_k : F(p) = 0 \quad \forall F \in S\} = \bigcap_{F \in S} V(F)$$

*y se dice que es un conjunto algebraico afín.*

Propiedades de un conjunto algebraico afín:

a) Sea $I = \langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i s_i, a_i \in k \right\}$, entonces $V(I) = V(S)$.

> **Demostración.** *Veamos que $V(I) \subseteq V(S)$, si $p \in V(I)$, como $S \subseteq I$ se sigue que $p \in V(S)$. Para $V(S) \subseteq V(I)$ notemos que dado $f \in I$ se tiene que $f = \sum a_i s_i$, luego si $p \in V(S)$ vemos que $f(p) = \sum a_i s_i(p) = 0$.*

b) Sea $\{I_\alpha\}$ una colección de ideales, entonces $V(\bigcup_\alpha I_\alpha) = \bigcap_\alpha V(I_\alpha)$.

c) Si $I \subseteq J$ se sigue que $V(J) \subseteq V(I)$.

d) Sean $F, G \in k[x_1, \cdots, x_n]$, se tiene que $V(FG) = V(F) \cup V(G)$.

e) Tenemos las siguientes dos identidades $V(1) = \emptyset$ y $V(0) = \mathbb{A}^n_k$.
   **observación:** Lo anterior es valido si $k$ es algebraicamente cerrado, de lo contrario, si consideramos $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ vemos que $V(x^2 + 1) = \emptyset$.

## 1.3. Ideal de un conjunto

**Definición 3.4.** *Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ un conjunto arbitrario. Se define el ideal de $X$ como*

$$I(X) := \{F \in k[x_1, \cdots, x_n] : F(p) = 0 \quad \forall p \in X\}$$

**observación:** Notemos que si $F^m \in I(X)$ entonces $F \in I(X)$. Un ideal con esta propiedad se dice radical.

Propiedades del ideal de un conjunto:

a) Si $X \subseteq Y$ se tiene que $I(Y) \subseteq I(X)$.

b) Se tiene lo siguiente $I(\emptyset) = k[x_1, \cdots, x_n]$ y $I(\mathbb{A}^n_k) = \{0\}$. Además, si $k$ es un cuerpo infinito, se tiene que $I(\{a_1, \cdots, a_n\}) = (x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$.

## 1.4. El Teorema de la Base de Hilbert

**Teorema 4.** *Todo conjunto algebraico corresponde a la intersección finita de hipersuperficies.*

> **Demostración.** *Sea $V(I)$ el conjunto algebraico para algún ideal $I \subseteq k[x_1, \cdots, x_n]$. Basta con probar que $I$ es finitamente generado, en tal caso $I = (F_1, \cdots, F_r)$, entonces $V(I) = V(F_1, \cdots, F_r) = V(F_1) \cap \cdots \cap V(F_r)$.*

**Teorema 5.** *Si $R$ es un anillo Noetheriano, entonces $R[X]$ es un anillo Noetheriano.*

**Demostración.** *Sea $I \subseteq R[X]$ un ideal. Dado $F = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$ con $a_d \neq 0$ decimos que $a_d$ es el término líder de $F$ denotado por $l(F)$. Sea*

$$\mathcal{J} := \{r \in R : r \text{ es término líder de algún } F \in I\} \cup \{0\}$$

*Afirmamos que $\mathcal{J}$ es ideal, en efecto, sean $l(F), l(G) \in \mathcal{J}$, supongamos sin perdida de generalidad que $gr(F) \leq gr(G)$, luego*

$$Fx^{gr(G)-deg(F)} + G = H$$

*donde $l(H) = l(F) + l(G)$. Es claro que $r \cdot l(F) \in \mathcal{J}$ con $r \in R$. Por hipotesis existen $F_1, \cdots, F_r \in I$ tales que $\mathcal{J} = (l(F_1), \cdots, l(F_r))$. Sea $N > gr(F_i)$ para todo $1 \leq i \leq r$. Para cada $m \leq N$ definimos*

$$\mathcal{J}_m := \{r \in R : r \text{ es término líder de } F \in I \text{ y } gr(F) \leq m\}$$

*Notemos que los $\mathcal{J}_m$ son ideales en $R$, por ende, son finitamente generados, es decir $\mathcal{J}_m = (l(F_{m,j}))$. Consideremos el ideal $I' = \langle F_{m,j}, F_i \rangle$, afirmamos que $I' = I$. Claramente se tiene que $I' \subset I$. Supongamos, por contradicción, que $I' \neq I$, sea $G \in I' \setminus I$ de menor grado. Tenemos dos consideramos*

*a) Veamos cuando $gr(G) > N$, existen polinomios $Q_i \in R[X]$ tal que $G$ y $\sum Q_iF_i$ tienen el mismo coeficiente líder. Luego $G - \sum Q_iF_i \in I'$ pues tiene menor grado que $G$, se sigue que $G \in I'$.*

*b) El resultado para $gr(G) \leq N$ se obtiene del mismo modo, usando esta vez los $F_{m,j}$.*

**Ejemplo:** Sea $(0,0) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, entonces $\{(0,0)\} = V(x^2 + y^2)$. Pero en $\mathbb{C}$ tenemos que $\{(0,0)\} \neq V(F)$ para ningún $F \in k[x,y]$.

## 1.5. Componentes Irreducibles en un Conjunto Algebraico

**Definición 5.1.** *Un conjunto algebraico $V$ se dice reducible si $V = V_1 \cup V_2$ con $V_i$ conjunto conjunto algebraico y distinto de $V$.*

**Observación:** Un punto es un conjunto algebraico irreducible, lo que implica que cualquier conjunto finito es algebraico y reducible.

**Ejemplos:**

- Notemos que $V(xy) = V(x) \cup V(y)$, es decir $V(xy)$ es reducible.
- Consideremos el espacio afín $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$, entonces el conjunto algebraico $V((x^2+1)x) = \{0\}$ es irrducible.

**Proposición 5.1.** *Un conjunto algebraico $V$ es irrducible si y solo si el ideal $I(V)$ es primo.*

**Demostración.**

- $\Rightarrow |$ *Supongamos que $I(V)$ no es primo, entonces existen $F_1, F_2$ polinomios tales que $F_1 \cdot F_2 \in I(V)$ y $F_1, F_2 \notin I(V)$. Afirmamos que $V = (V \cap V(F_1)) \cup (V \cap V(F_2))$. Sea $p \in V$, entonces $F_1(p) \cdot F_2(p) = 0$ lo que implica que $p \in (V \cap V(F_1)) \cup (V \cap V(F_2))$, además $V \cap V(F_i) \neq V$ ya que existe $q_i$ tal que $F_i(q_i) \neq 0$.*
- $\Leftarrow |$ *Supongamos que $V$ es reducible. Luego $V = V_1 \cup V_2$ con $V_i \neq V$. Entonces existe un polinomio $F_i$ tal que $F_i(p) = 0$ para todo $p \in V_i$, pero no para todo punto en $V$. Notemos que $F_1 \cdot F_2 \in I(V)$, sin embargo, $F_i \notin I(V)$.*

**Definición 5.2.** *Una variedad afín $V$ es un conjunto algebraico afín irreducible.*

**Lema 5.1.** *Sea $R$ un anillo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*a) $R$ es Noetheriano.*

*b) Si $\mathcal{C}$ es una colección no vacía de ideales en $R$, entonces $\mathcal{C}$ tiene un elemento maximal, es decir, existe $I \in \mathcal{C}$ que no está contenido en otro ideal de $\mathcal{C}$.*

*c) Toda cadena ascendente de ideales en $R$ se estabiliza.*

**Demostración.**

- *(a) $\Rightarrow$(b) | Necesitamos usar el axioma de elección. Sea $\mathcal{C}$ una colección de ideales en $R$, para cada subconjunto no vacío de $\mathcal{C}$ elegimos un ideal. Sea $I_0$ el ideal escogido para $\mathcal{C}$, definimos el conjunto*

$$\mathcal{C}_1 := \{I \in \mathcal{C} : I_0 \subset I\}$$

*Si $\mathcal{C}_1 = \emptyset$ entonces $I_0$ es el ideal maximal. Si no, repetimos el proceso. Sea $I \in \mathcal{C}_1$ el escogido, definimos*

$$\mathcal{C}_2 := \{I \in \mathcal{C}_2 : I_1 \subset I\}$$

*Es suficiente demostrar que existe $n$ tal que $\mathcal{C}_n = \emptyset$. Sea $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ es ideal, además, notemos que $I_n \subset I_{n+1}$. Como $R$ es Noetheriano, entonces $I = (f_1, \cdots, f_m)$, luego existe $r$ tal que $f_1, \cdots, f_m \in I_r$, lo que implica que $I \subseteq I_r$ y por lo tanto $I = I_r$ se sigue que $I_r = I_s$ para todo $s > r$, lo cual es una contradicción.*

- *(b) $\Rightarrow$(c) | Basta tomar $\mathcal{C}$ como nuestra colección de ideales en $R$, luego, existe un elemento maximal.*

- *(c) $\Rightarrow$(a) | Sea $I \subseteq R$ un ideal. Si $I = (0)$ estamos listos, de lo contrario, sea $f_1 \in I$, entonces $(f_1) \subseteq I$. Supongamos que $I \setminus (f_1) \neq \emptyset$, sea $f_2 \in I \setminus (f_1)$, de esta manera construimos una cadena ascendente de ideales*

$$(f_1) \subset (f_1, f_2) \subset \cdots \subset (f_1, \cdots, f_n) \subset \cdots$$

*para algun $N$ la cadena se estabiliza y por ende $(f_1, \cdots, f_N) = I$.*

**Proposición 5.2.** *Cualquier colección de conjuntos algebraicos $\{V_i\}_{i \in I}$ en $\mathbb{A}_k^n$ tiene un elemento minimal.*

**Demostración.** *Dada $\{V_i\}_{i \in I}$ obtenemos una colección $\mathcal{C} = \{I(V_i)\}_{i \in I}$ de ideales en $k[x_1, \cdots, x_n]$, el cual es Noetheriano. Luego $\mathcal{C}$ tiene un elemento maximal, digamos $I(V_*)$, afirmamos que $V_*$ es el elemento minimal, de lo contrario, existe $V_i \subseteq V_*$ entonces $I(V_*) \subseteq I(V_i)$.*

**Teorema 6.** *Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un conjunto algebraico. Entonces existen unicos conjuntos algebraicos irreducibles $V_1, \cdots, V_m$ tales que*

$$V = \bigcup_{i}^{m} V_i \quad y \quad V_i \not\subset V_j \quad \forall i \neq j$$

**Demostración.** *Sea $\mathcal{C} = \{V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ conjunto algebraico : $V$ no es unión finita de irreducibles$\}$. Si $\mathcal{C}$ es vacío estamos listos. Si no lo es, sea $V \in \mathcal{C}$ minimal. Tenemos que $V$ no es irreducible, entonces $V = V_1 \cup V_2$ con $V_i \subset V$, lo que implica que algún $V_i \in \mathcal{C}$ lo cual es una contradicción.*

*Sea $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ con $V_i$ irreducibles, asumir que $V_i \not\subset V_j$ para todo $i \neq j$. Digamos que*

$$\bigcup_{i=1}^{m} V_i = \bigcup_{j=1}^{s} W_j \quad con \quad V_i \not\subset V_j \quad y \quad W_i \not\subset W_j \quad y \quad V_i, W_j \neq \emptyset$$

*Notemos que $V_1 = V_1 \cap V = \bigcup_{j=1}^{s} (V_1 \cap W_j)$, como $V_1$ es irreducible, existe unico $j$ tal que $V_1 = V_1 \cap W_j$, es decir, $V_1 \subseteq W_j$. Por otro lado, existe unico $i$ tal que $W_j \subseteq V_i$, lo que implica que $V_1 \subseteq V_i$ entonces $i = 1$ y así $V_1 = W_j$.*

## 1.6. Conjuntos Algebraicos del Plano

**Lema 6.1.** *Si $f, g \in k[x, y]$ no tienen factores en común, entonces $V(f, g)$ es un conjunto finito.*

**Demostración.** *Recordemos que $k(x)[y]$ es dominio euclideano. Por lema de gauss, $f, g$ no tienen factores en común en $k(x)[y]$, entonces existen $a, b \in k(x)[y]$ tal que $af + bg = 1$. Existe $r(x)$ tal que*

$$raf + rbg = r$$

*es una ecuación en $k[x, y]$. Sea $(p, q) \in V(f, g)$, evaluando en la ecuación anterior vemos que*

$$0 = raf(p, q) + rbg(p, q) = r(p)$$

*por lo tanto la cantidad de valores posibles de p es finita. Haciendo lo mismo para y obtenemos que q solo puede tomar una cantidad finita de valores.*

**Corolario 6.1.** *Si $f \in k[x, y]$ es irreducible con $|V(f)| = \infty$ entonces $I(V(f)) = (f)$ y $V(f)$ es irreducible.*

**Demostración.** *Si $g \in I(V(f))$, entonces $|V(f, g)| = \infty$, luego, $f$ y $g$ tienen factores en común, como $f$ es irreducible, entonces $f$ divide a $g$ lo que implica que $g \in (f)$. La otra contención es directa.*

*Por otro lado, notemos que $(f)$ es primo, pues f es irreducible, así, $V(f)$ es irreducible.*

**Corolario 6.2.** *Supongamos que k es infinito, entonces los conjuntos algebraicos irreducibles de $\mathbb{A}_k^2$ son: $\emptyset$, $\mathbb{A}_k^2$, un punto y los conjuntos $V(f)$ con $f$ irreducible y $|V(f)| = \infty$.*

**Demostración.** *Sea $V$ un conjunto algebraico irreducible. Si $|V| < \infty$ entonces $V = \emptyset$ o $V$ es un punto. Si $I(V) = (0)$ entonces $V = \mathbb{A}_k^2$. Supongamos que $|V| = \infty$ y que $(0) \subset I(V) \subset k[x, y]$. Como $I(V)$ es primo, existe un polinomio no constante e irreducible tal que $f \in I(V)$.*

*Si $g \in I(V)$ y $g \notin (f)$, entonces $V \subset V(f, g)$, por la proposición, esto es una contradicción. De este modo, $I(V) = (f)$. Afirmamos que $V(f) = V$, en efecto, tenemos que $V = V(I(V)) = V(f)$.*

**Corolario 6.3.** *Supongamos que $k = \overline{k}$. Sea $f \in k[x, y]$ y sea $f = \prod_{i=1}^{m} f_i^{\alpha_i}$ con $f_i$ irreducible. Entonces*

$$V(f) = \bigcup_{i=1}^{m} V(f_i)$$

*es su descomposición en irreducibles y además $I(V(f)) = (f_1, \cdots, f_m)$.*

**Demostración.** *Como $f_i, f_j$ son coprimos no hay inclusiones entre $V(f_i)$ y $V(f_j)$, de lo contrario si existen $i \neq j$ tales que $V(f_i) \subset V(f_j)$, entonces*

$$(f_i) = I(V(f_i)) \supset I(V(f_j)) = (f_j)$$

*lo cual es una contradicción. Luego,*

$$I(V(f)) = I\left(\bigcup V(f_i)\right) = \bigcap I(V(f_i)) = \bigcap (f_i) = (f_1 \cdots f_m)$$

## 1.7. Nullstellensatz de Hilbert

En general supondremos que $k = \overline{k}$, a no ser que se diga lo contrario.

**Teorema 7.** *Sea $I \subset k[x_1, \cdots, x_n]$ un ideal, entonces $V(I) \neq \emptyset$.*

**Demostración.** *Podemos suponer que $I$ es maximal. En efecto, recordemos que todo ideal esta contenido en un ideal maximal, digamos $M$, entonces $V(M) \subseteq V(I)$. $\{\}$Como $I$ es maximal, esto equivale a que $k[x_1, \cdots, x_n]/I \supset k$ es cuerpo. Como $k$ es algebraicamente cerrado, podemos asumir que $k[x_1, \cdots, x_n]/I = k$.*

*Así, cada variable $x_i$ puede ser identificada por un elemento en $k$ digamos $a_i$, lo que implica que $x_i - a_i$ es igual 0 bajo el cociente, se sigue que $x_i - a_i \in I$, luego $I = (x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$. (Mejorar escritura)*

De la demostración surge una pregunta, ¿Por que $k[x_1, \cdots, x_n]/I = k$? El siguiente lema lo responde

**Lema 7.1.** *(Lema de Zariski) Sea $K \subset L$ una extensión de cuerpo tal que $L$ es finitamente generado como $k$-algebra. Entonces $L$ es finitamente generado como $k$-módulo.*

Exploraremos una demostración menos general del teorema anterior, pero sin usar lema de Zariski. Para ello supongamos que $k = \mathbb{C}$.

**Demostración.** *Del mismo modo, supongamos que $I \subset k[x_1, \cdots, x_n]$ es un ideal maximal, luego $L := k[x_1, \cdots, x_n]/I$ es cuerpo, consideramos el morfismo canónico*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] \arrow[r, "\pi"] & L \\
\mathbb{C}[x_i] \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "\pi_i := \pi\big|_{\mathbb{C}[x_i]}"'] &
\end{tikzcd}$$

*Afirmamos que $ker(\pi_i) = (0)$ o $ker(\pi_i) = (x_i - a_i)$ para algún $a_i \in \mathbb{C}$. En efecto, si $ker(\pi_i) \neq (0)$, entonces $(0) \subset ker(\pi_i) \subset \mathbb{C}[x_i]$, donde la segunda contención es estricta, de lo contrario, $1 \in I$ y entonces $I = k[x_1, \cdots, x_n]$. Sea $f \in ker(\pi_i)$, entonces como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, existe $(x_i - a_i)$ factor de $f$ tal que $\pi_i(x_i - a_i) = 0$.*

*Volviendo a la demostración del teorema. Tenemos dos consideramos*

- *$ker(\pi_i) = (x_i - a_i)$ para todo $i$. Entonces $(x_1 - a_i, \cdots, x_n - a_n) \subseteq I$. Como $(x_1 - a_i, \cdots, x_n - a_n)$ es ideal maximal e $I$ es propio se obtiene el resultado.*

- *Existe $i$ tal que $ker(\pi_i) = (0)$, entonces $\pi_i$ es inyectiva, como $L$ es cuerpo $\mathbb{C}(x_i)$ se incrusta en $L$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[x_i] \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d, "i"'] & L \\
\mathbb{C}(x_i) \arrow[ur, "i_L"'] &
\end{tikzcd}$$

  *Es decir $\mathbb{C}(x_i) \subseteq L$. Notemos que $L$ es un espacio vectorial numerable, a saber, la base corresponde a todos los monomios. Notemos que el siguiente conjunto es linealmente independiente*

$$S := \left\{ \frac{1}{x_i - a_i} : a \in \mathbb{C} \right\}$$

  *Notemos que si $\sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{x_i - a_j} = 0$ entonces multiplicando por $(x_i - a_1) \cdots (x_i - a_m)$ y evaluando se tiene que $\lambda_j = 0$ para todo $j$. Esto es una contradicción pues $S$ es no numerable.*

**Teorema 8.** *(Teorema de Nullstellensatz) Sea $I \subset k[x_1, \cdots, x_n]$, entonces $I(V(I)) = \sqrt{I}$.*

**Demostración.**

- *$\supseteq$ | Sea $f \in \sqrt{I}$, entonces $f^n \in I$ para algún $n$. Luego $f^n(p) = 0$ para todo $p \in V(I)$, entonces $f(p) = 0$ para todo $p \in V(I)$ lo que implica que $f \in I(V(I))$.*

- *$\subseteq$ | (Truco de Rabinowitsch) Sea $f \in I(V(I))$ y digamos que $I = (f_1, \cdots, f_m)$. Definimos el ideal $J := (f_1, \cdots, f_m, x_{n+1}f - 1) \subseteq k[x_1, \cdots, x_{n+1}]$. Supongamos que $(a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}) \in V(J)$, entonces $(a_1, \cdots, a_n) \in V(I)$ se sigue que $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$, esto resulta en una contradicción. Concluimos que $V(J) = \emptyset$.*

  *Por el teorema anterior y como $k$ es algebraicamente cerrado tenemos que $J = k[x_1, \cdots, x_{n+1}]$, entonces existen $\{g_i\}_{i=1}^{m+1} \subseteq k[x_1, \cdots, x_n]$ tales que*

$$g_1 f_1 + \cdots + g_m f_m + g_{m+1}(x_{n+1}f - 1) = 1$$

*tomando* $x_{n+1} = 1/f$ *obtenemos*

$$g_1(x_1, \cdots, x_n, 1/f)f_1 + \cdots + g_m(x_1, \cdots, x_n, 1/f)f_m = 1$$

*existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^n \in I$.

**Corolario 8.1.** *Hay una correspondecia uno a uno entre puntos en* $\mathbb{A}_k^n$ *e ideales maximales.*

**Corolario 8.2.** *Las variedades afines en* $\mathbb{A}_k^n$ *estan en correspondecia uno a uno con los ideales primos.*

**Corolario 8.3.** *Las hipersuperficies irreducibles en* $\mathbb{A}_k^n$ *se corresponden uno a uno con polinomios irreducibles en* $k[x_1, \cdots, x_n]$.

**Corolario 8.4.** *Sea* $I \subseteq k[x_1, \cdots, x_n]$ *un ideal. Entonces* $V(I)$ *es un conjunto finito de puntos si y solo si como* $k$*-espacio vectorial* $k[x_1, \cdots, x_n]/I$ *tiene dimensión finita.*

**Demostración.**

- $\Leftarrow |$ *Sean* $p_1, \cdots, p_r \in V(I) \subseteq \mathbb{A}_k^n$. *Consideramos* $F_1, \cdots, F_r \in k[x_1, \cdots, x_n]$ *tales que* $F_i(p_j) = 0$ *para todo* $i \neq j$ *y* $F_i(p_i) = 1$. *Sea* $\overline{F_i}$ *la imagen de* $F_i$ *en el cociente* $k[x_1, \cdots, x_n]/I = R$.

  *Afirmamos que el conjunto* $\{F_1, \cdots, F_r\}$ *es linealmente independiente en* $R$. *En efecto, si*

  $$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overline{F_i} = 0 \quad con \quad \lambda_i \in k$$

  *entonces* $\sum \lambda_i \overline{F_i} \in I$, *evaluando en* $p_i$ *vemos que* $\lambda_i = 0$ *para todo* $i$, *lo que prueba la afirmación. Así,* $r \leq dim_k R$.

- $\Rightarrow |$ *Digamos que* $V(I) = \{p_1, \cdots, p_r\}$ *y* $p_i = (a_{i1}, \cdots, a_{in})$. *Definimos*

  $$F_j := \prod_{i=1}^{r} (x_j - a_{ij})$$

  *Luego* $F_j \in I(V(I))$, *por Nullstellensatz, se tiene que* $F_j^N$ *para algún* $N$, *así,* $\overline{F_j}^N = 0$ *en* $R$, *es decir,* $p(x_j) + x_j^{rN} = 0$, *con* $gr(p_j) < rN$ *entonces* $dim_k R < \infty$.

**Ejemplos:**

- Consideremos los polinomios $x - y, y - x^2 \in k[x, y]$, se sigue $V((x - y, y - x^2)) = \{(0, 0), (1, 1)\}$

  $$dim_k \left( k[x, y] \Big/ (x - y, y - x^2) \right) = dim_k \left( k[x] \Big/ (x - x^2) \right) = dim_k (k \oplus kx) = 2$$

- Notemos que $V(x - y - 1, x - y) = \emptyset$ y por otro lado

  $$k[x, y] \Big/ (x - y, x - y - 1) = k[x, y] \Big/ (1) = (0)$$

  así $dim_k R = 0$.

- Veamos que $V(y, x - y^3) = \{(0, 0)\}$, entonces

  $$dim_k \left( k[x, y] \Big/ (y, x^3 - y) \right) = dim_k \left( k[x] \Big/ (x^3) \right) = 3$$

- El conjunto $V(my - x, y - x^2)$ tiene dos puntos de intersección para todo $m \neq 0$,

  $$dim_k \left( k[x, y] \Big/ (my - x, y - x^2) \right) = dim_k \left( k[x] \Big/ (mx^2 - x) \right) = 2$$

  pero si $m = 0$, vemos que $dim_k R = 1$.

## 1.8. Modulos y Condiciones de Finitud

Sea $R$ un anillo, se dice que $M$ es un $R$-módulo, si $M$ es un grupo conmutativo y si viene con producto escalar, es decir, una función de $R \times M$ a $M$, se denota por $a \cdot m$ que satisface lo siguiente

- $(a+b)m = am + bm$ para todo $a, b \in R$ y $m \in M$.
- $a(m+n) = am + an$ para todo $a \in R$ y $m, n \in M$.
- $(ab)m = a(bm)$ para todo $a, b \in R$ y $m \in M$.
- $1_R \cdot m = m$ para todo $m \in M$

Un subgrupo de $N$ de un $R$-módulo $M$ se dice un submodulo si $N$ es un $R$-módulo con el mismo producto escalar. Dado $S \subseteq M$, definimos el generado de $S$ por

$$\langle S \rangle := \left\{ \sum r_i s_i \;\mid\; r_i \in R, s_i \in S \right\}$$

de hecho corresponde al submódulo de $M$ mas pequeño que contiene a $S$. Decimos que $M$ es finitamente generado si existe $S \subseteq M$ tal que $\langle S \rangle = M$.

Sea $R \subseteq S$ anillos. Decimos que $S$ es modulo finito sobre $R$, si es finitamente generado como $R$-módulo.

Sean $v_1, \cdots, v_n \in S$. Sea $\varphi : R[x_1, \cdots, x_n] \to S$ el morfismo de anillo que manda $x_i$ a $v_i$. La imagen de $\varphi$ se denota por $R[v_1, \cdots, v_n]$ y corresponde a un subanillo de $S$ que contiene a $R$ y $v_1, \cdots, v_n$, además, es el subanillo mas pequeño con esta propiedad. Decimos que $S$ es un algebra finita sobre $R$ si $S = R[v_1, \cdots, v_n]$ para algunos $v_1, \cdots, v_n \in S$.

Sean $K \subset L$ cuerpos. Sean $v_1, \cdots, v_n \in L$ y consideremos $K(v_1, \cdots, v_n)$ el cuerpo de fracciones de $K[v_1, \cdots, v_n]$. Al igual que antes, corresponde al menor subcuerpo de $L$ que contiene a $K$ y $v_1, \cdots, v_n$. El cuerpo $L$ se dice una extensión finitamente generada de $K$ si $L = K(v_1, \cdots, v_n)$ para algunos $v_1, \cdots, v_n \in L$.

## 1.9. Elementos Integrales

**Definición 8.1.** *Sean $R \subset S$ dominios enteros. Decimos que un elemento $v \in S$ es integral sobre $R$ si*

$$v^n + r_{n-1} v^{n-1} + \cdots + r_1 v + r_0 = 0$$

*para algunos $r_i \in R$ y $n \in \mathbb{N}$.*

**Proposición 8.1.** *Sean $R \subset S$ dominios enteros, $v \in S$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones*

*a) $v$ es integral sobre $R$.*

*b) $R[v]$ es un $R$-modulo finitamente generado.*

*c) Existe un subanillo $R' \subset S$ con $R[v] \subset R'$ y $R'$ un $R$-modulo finitamente generado sobre $R$.*

**Demostración.**

- *(a) $\Rightarrow$(b) | Existe un polinomio monico $f \in R[x]$ tal que $f(v) = 0$, luego el $R[v]$ se puede generar por finitos elementos.*
- *(b) $\Rightarrow$(c) | Basta tomar $R' = R[v]$.*
- *(c) $\Rightarrow$(a) | Existe $R'$ tal que $R \subset R[v] \subset R' \subset S$. Con $R$, $R[v]$, $R'$ finitamente generados como $R$-modulos. Sean $w_1, \cdots, w_n$ generadores de $R'$. Sabemos que*

$$v \cdot w_i = a_{i1} w_1 + \cdots + a_{in} w_n$$

*luego tenemos el sistema*

$$\begin{aligned}
&(a_{11}-v)w_1 + a_{12}w_2 + \cdots + a_{1n}w_n = 0\\
&a_{21}w_1 + (a_{22}-v)w_2 + \cdots + a_{2n}w_n = 0\\
&\vdots\\
&a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \cdots + (a_{nn}-v)w_n = 0
\end{aligned}$$

*Como $R \subset S$ son dominios, podemos verlo dentro del cuerpo de fracciones, entonces tiene sentido calcular el determinante de la matriz asociada al sistema de ecuaciones. Por otro lado, $(w_1, \cdots, w_n)$ es una solución no trivial del sistema y por lo tanto el determinante de la matriz asociada es $0$, lo que implica que $v$ es integral sobre $R$.*

**Corolario 8.5.** *Sean $R \subseteq S$ dominios. Entonces los elementos integrales sobre $R$ forman un anillo.*

**Demostración.** *Sean $a, b \in S$ elementos integrales sobre $R$. Notemos que*

$$R \subseteq R[a+b] \subseteq R[a,b] \quad y \quad R \subseteq R[ab] \subseteq R[a,b]$$

*Como $a$ y $b$ son elementos integrales sobre $R$, $R[a]$ y $R[b]$ son finitamente generados por $\{1, a, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$ y $\{1, b, b^2, \cdots, b^{n-1}\}$. Es claro que $R[a,b]$ es generado por $\{a^i b^j : 0 \leq i \leq n-1,\ 0 \leq j \leq m-1\}$. Por la proposición se sigue que $a+b$ y $ab$ son elementos integrales sobre $R$.*

**Definición 8.2.** *Sean $R \subseteq S$ dominios. Decimos que $S$ es integral sobre $R$ si todo $s \in S$ es integral sobre $R$.*

*Además, $R$ es un dominio integralmente cerrado si ningún $z \in Frac(R) \setminus R$ es integral.*

**Ejemplos:**

- Consideremos $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, sea $p/q \in \mathbb{Q}$ con $p$ y $q$ coprimos. Si tenemos la expresión

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

  Por teorema de la raiz racional, $q$ debe dividir a 1, luego $q = 1$ lo que implica que $p/q \in \mathbb{Z}$. Concluimos que $Z$ es integralmente cerrado.

- Veamos el conjunto algebraico $V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}_k^2$ con $k = \overline{k}$. Vemos el anillo

$$R = \frac{k[x,y]}{(y^2 - x^3)}$$

  que es un dominio, pues $(y^2 - x^3)$ es irreducible. Dentro de $R \subseteq Frac(R)$, vemos que se cumple la relación $y^2 = x^3$, que dentro del cuerpo de fracciones es equivalente a

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - x = 0$$

  notemos que $\frac{y}{x} \notin R$ y que $x \in R$. Por lo tanto $R$ no es integralmente cerrado.

- Sea $V(y - x^2) \subseteq \mathbb{A}_k^2$. Vemos el anillo

$$R = \frac{k[x,y]}{(y - x^2)}$$

  por demostrar, $R$ es integralmente cerrado. Consideremos la función $\varphi : \mathbb{A}_k^1 \to \mathbb{A}_k^2$ dada por $\varphi(t) = (t, t^2)$. Notemos que $Im(\varphi) = V(y - x^2)$. La función $\varphi$ induce el isomorfismo

$$\begin{aligned}
\frac{k[x,y]}{(y-x^2)} &\to k[t]\\
x &\to t\\
y^2 &\to t^2
\end{aligned}$$

  Como $k[t]$ es DFU, se sigue que $R$ es integralmente cerrado.

Vamos a estudiar un caso particular del lema de Zariski. Sea $k$ un cuerpo e $I \subseteq k[x]$ un ideal maximal, entonces $k[x]/I = L$ es un cuerpo. Tenemos dos casos, $I = (0)$ ó $I = (f(x))$. Si $I = (0)$ entonces $k[x]$ es cuerpo, esto es una contradicción. Por otro lado escribimos

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

pero en $L$ se tiene que $f(x) = 0$, luego, $L$ es generado como $k$ módulo por $\{1, x, \cdots, x^{n-1}\}$.

Veamos cuando $k[x, y]/I = L$ donde $k$ es un cuerpo e $I \subseteq k[x, y]$ es un ideal maximal. Si $x \in I$ o $y \in I$ podemos reducir al caso anterior. Entonces $L$ es finitamente generado por potencias de $x$ e $y$.

Pensaremos en $k(x)$ como los cocientes de polinomios en una variable modulo $I$, luego

$$k \subset k(x) \subset k(x)[y] = L$$

donde la igualdad $k(x)[y] = L$ se debe a que la inversa de un polinomio en $k(x)$ en realidad se escribe como combinación de potencias de $x$ e $y$. Además, por el caso anterior, $k(x)[y]$ es finitamente generado como $k(x)$ módulo.

Tenemos dos casos:

- Caso 1: La extensión $k \subset k(x)$ es finita. Esto implica que la extensión $k \subseteq L$ es finita, basta tomar el producto de los generadores.
- Caso 2: Se tiene la siguiente igualdad

  $$k(x) = \left\{ \text{cocientes } \frac{p(x)}{q(x)} \right\}$$

  En $L$ se debe cumplir la relación $y^m = a_{m-1}y^{m-1} + \cdots + a_1 y + a_0$ con $a_i \in k(x)$. Tomar $a \in k[x]$ tal que $a^m$ limpie los denominadores, luego

  $$(ay)^m = b_{m-1}(ay)^{m-1} + \cdots + b_1(ay) + b_0$$

  con $b_i \in k[x]$. Se sigue que $ay$ es integral sobre $k[x]$. Sea $z \in L$, luego para $N$ suficientemente grande $a^N z$ es integral sobre $k[x]$, ya que

  $$\begin{aligned} a^N z &= a^N f(x, y) \\ &= a^N(c_0 + c_1 y + \cdots + c_M y^M) \\ &= c'_0 + c'_1(ya) + \cdots + c'_M(ya)^M \end{aligned}$$

  donde $c'_i \in k[x]$. Como $k[x]$ es DFU, $a = p_1 \cdots p_s$ su factorización en irreducibles, sea $p_{s+1}$ un irreductible distinto de $p_i$, tomando $z = \frac{1}{p_{s+1}}$ resulta que $a^N z$ es integral, lo cual es una contradicción.

**Lema 8.1.** *(Lema de Zariski) Sean $K \subseteq L$ y $L$ es finitamente generado como $K$ algebra, entonces $L$ es finitamente generado como $K$ modulo, es decir, como espacio vectorial.*

# 2. Variedades Afines

De ahora en adelante $k$ será un cuerpo algebraicamente cerrado. A un conjunto algebraico afín irreducible lo llamamos variedad afín, o simplemente variedad.

## 2.1. Anillo de Coordenadas

**Definición 8.3.** *Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad no vacía. Definimos*

$$\Gamma(V) := \frac{k[x_1, \cdots, x_n]}{I(V)}$$

*y lo llamamos el **anillo de coordenadas de** $V$ y los elementos de $\Gamma(V)$ les decimos **funciones regulares**.*

**Observación:** El anillo de coordenadas de $V$ es un dominio, ya que $\mathbb{I}(V)$ es un ideal primo de $k[x_1, \cdots, x_n]$. Por otro lado, dado $f, g \in k[x_1, \cdots, x_n]$ entonces $f, g$ determinan la misma función si y solo si $f - g \equiv 0$ en $V$, es decir, $f - g \in \mathbb{I}(V)$. De este modo tenemos dos maneras de ver los elementos de $\Gamma(V)$; como una función de $V$, o como clase de equivalencia de polinomios.

## 2.2. Aplicaciones Polinomiales

**Definición 8.4.** *Sean $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}_k^m$ variedades. Una aplicación $\varphi : V \to W$ se dice **aplicación polinomial** si existen $f_i \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tales que*

$$\varphi(a) = \varphi(a_1, \cdots, a_n) = (f_1(a), \cdots, f_m(a))$$

**Proposición 8.2.** *Sean $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}_k^m$ variedades. Entonces hay una correspondecia uno a uno entre las funciones polinomiales $\varphi : V \to W$ y los homomorfismos $\tilde{\varphi} : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$.*

**Demostración.**

- *Dada $\varphi : V \to W$ una aplicación polinomial, sean $f_i \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tales que $\varphi = (f_1, \cdots, f_m)$. Definimos $\tilde{\varphi} : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ dada por*

$$\tilde{\varphi}(f) := f \circ \varphi = f(f_1, \cdots, f_m)$$

  *Veamos que esta bien definida, en efecto, sea $f \in \mathbb{I}(W)$, entonces $g \circ \varphi \equiv 0$ en $V$, luego $g \circ \varphi \in \mathbb{I}(V)$. Claramente $\tilde{\varphi}$ es homomorfismo.*

- *Sea $\tilde{\varphi} : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ un homomorfismo. Sean $f_i \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tales que $\tilde{\varphi}(y_i) = f_i$, definimos la aplicación polinomial $\varphi := (f_i, \cdots, f_m)$, por la discusión anterior $\varphi$ esta bien definida y además la función inducida por $\varphi$ es la misma que $\tilde{\varphi}$.*

**Definición 8.5.** *Una aplicación polinomial se dice **isomorfismo** si tiene inversa que también es una aplicación polinomial.*

**Observación:** Por la proposición anterior una aplicación polinomial es isomorfismo si y solo si el homomorfismo inducido es isomorfismo de anillos. Luego, dos variedades son isomorfas si y solo si sus anillos de coordenadas son isomorfos.

## 2.3. Cambio de Coordenadas

**Definición 8.6.** *Un **cambio de coordenadas afín** en $\mathbb{A}_k^n$ es una aplicación polinomial $\varphi = (f_1, \cdots, f_n) : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^n$ tal que $gr(f_i) = 1$ y $\varphi$ es biyectiva.*

## 2.4. Funciones Racionales y Anillos Locales

**Definición 8.7.** *Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad no vacía. Definimos el **cuerpo de funciones racionales** en $V$ como $k(V) := Frac(\Gamma(V))$. Un elemento en $k(V)$ se dice **función racional** en $V$.*

Notemos que $f \in k(V)$ no es necesariamente una función $f : V \to \mathbb{A}^1_k$. Consideremos $V = \mathbb{V}(xw - yz) \subseteq \mathbb{A}^4_k$ y $f = \frac{x}{y}$, luego, no es posible evaluar en los puntos de la forma $(a, 0, b, 0)$.

**Definición 8.8.** *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n_k$ una variedad no vacía. Sea $f$ una función racional de $V$ y $p \in V$, decimos que $f$ esta definida en $p$ si para algunos $a, b \in \Gamma(V)$ se tiene que $f = \frac{a}{b}$ y $b(p) \neq 0$.*

**Observación:** Si $\Gamma(V)$ es DFU entonces la expresión $a/b$ es esencialmente única y por lo tanto $f$ esta definida en $p$ si y solo si $b(p) \neq 0$.

**Definición 8.9.** *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n_k$ una variedad no vacía. Sea $p \in V$, definimos*

$$\mathcal{O}_p(V) := \{f \in k(V) : f \text{ está definida en } p\}$$

*se dice que $\mathcal{O}_p(V)$ es el **anillo local** de $V$ en $p$.*

**Observación:** Notemos que $\mathcal{O}_p(V)$ es un subanillo de $k(V)$ que contiene $\Gamma(V)$, en otras palabras $k \subseteq \Gamma(V) \subseteq \mathcal{O}_p(V) \subseteq k(V)$.
Este anillo tiene la propiedad de que tiene un único ideal maximal, a saber, $m_p(V) = \{f \in \mathcal{O}_p(V) : f(p) = 0\}$. Un anillo con esta propiedad se dice **anillo local**.

**Definición 8.10.** *El conjunto de puntos $p \in V$ donde una función racional $f$ no está definida se llama el **conjunto de polos** de $f$.*

**Proposición 8.3.**

*a) El conjunto de polos de una función racional es un subconjunto algebraico de $V$.*

*b) $\Gamma(V) = \bigcap_{p \in V} \mathcal{O}_p(V)$.*

**Demostración.**

*a) Sea $f \in k(V)$. Consideramos*

$$J_f := \{G \in k[x_1, \cdots, x_n] : \overline{G}f \in \Gamma(V)\}$$

*donde $\overline{G}$ es la clase de $G$ en $\Gamma(V)$. Es claro que $J_f$ es un ideal en $k[x_1, \cdots, x_n]$ que contiene a $I(V)$. Veamos que $V(J_f) = \{$polos de $f\}$.*

*Supongamos que $p \notin V(J_f)$, entonces existe $G \in J_f$ tal que $G(p) \neq 0$. Tenemos que $\overline{G}f = \overline{H} \in \Gamma(V)$, en $k(V)$ se tiene que $f = \frac{H}{G}$, entonces $p$ no es polo de $f$.*

*Si $p$ no es polo de $f$, entonces existen $G, H \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tal que $f = \frac{H}{G}$ y $G(p) \neq 0$, además vemos que $\overline{G}f \in \Gamma(V)$, es decir, $p \notin V(J_f)$.*

*b) Una contención es clara, veamos la otra. Sea $f \in \bigcap_{p \in V} \mathcal{O}_p(V)$, entonces $V(J_f) = \emptyset$, por Nullstellensatz se sigue que $J_f = k[x_1, \cdots, x_n]$ y por ende $f = 1 \cdot f \in \Gamma(V)$.*

**Proposición 8.4.** *$\mathcal{O}_p(V)$ es un dominio local Noetheriano.*

**Demostración.** *Sea $I \subseteq \mathcal{O}_p(V)$ un ideal, consideremos $I' = I \cap \Gamma(V)$. Como $\Gamma(V)$ es Noetheriano, existen $f_i \in \Gamma(V)$ tales que $I' = \langle f_1, \cdots, f_m \rangle$. Luego si $f = \frac{a}{b}$ entonces $bf = a \in I'$. Se sigue que*

$$bf = \sum a_i f_i \Rightarrow f = \sum \frac{a_i}{b} f_i$$

## 2.5. Anillos de Evaluación Discreta

**Proposición 8.5.** *Sea $R$ un dominio que no es cuerpo. Luego, $R$ es Noetheriano, local y su ideal maximal es principal si y solo si existe $t \in R$ irreducible tal que para todo $z \in R \setminus \{0\}$ y $z = ut^n$ para algún $u$ unidad y $n \in \mathbb{N}_0$.*

**Definición 8.11.** *Sea $R$ como antes, decimos que $R$ es un **anillo de evaluación discreta** y lo abreviamos $DVR$, el elemento $t$ se llama **parametro uniformizante**.*

**Ejemplos:**

- Consideremos $p \in \mathbb{A}_k^1 = V$, sea $m_p(V)$ el unico ideal maximal de $\mathcal{O}_p(V)$, luego $(t) = m_p(V)$.
- Un no ejemplo. Si tomamos $p = (0,0) \in \mathbb{A}_k^2 = V$ entonces $(x,y) \subseteq \mathcal{O}_p(V)$ no es principal, $\mathcal{O}_p(V)$ no es un $DVR$.

**Definición 8.12.** *Sea $R$ un $DVR$, consideremos $k = Frac(R)$, entonces para todo $z \in k$ existe $n \in \mathbb{Z}$ y $u \in R$ unidad tales que $z = ut^n$, luego*

*a)* *$n$ es el **orden** de $z$ y se escribe $ord(z)$. Decimos que $ord(o) = \infty$.*

*b)* *Si $n < 0$, entonces $z$ es un **polo**.*

*c)* *Si $n > 0$, decimos que $z$ es un **cero**.*

*d)* *Si $n = 0$, $z$ se dice **unidad**.*

## 2.6. Formas

**Definición 8.13.** *Una **forma** es un polinomio homogeneo en $R[x_1, \cdots, x_n]$, con $R$ dominio. Recordando el capitulo 1, sección 1, $f \in R[x_1, \cdots, x_n]$ es homogeneo si $f(\lambda \overrightarrow{x}) = \lambda^n f(\overrightarrow{x})$ con $n = gr(f)$.*

**Ejemplo:** Sea $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3x_4$ es una forma.

**Definición 8.14.** *Sea $R$ un dominio,*

*a)* *Sea $f \in R[x_1, \cdots, x_n]$, escribimos $f = \sum f_0 + f_1 + \cdots + f_d$ donde $f_i$ es un polinomio homogeneo de grado $i$, definimos $f^* \in R[x_1, \cdots, x_{n+1}]$ como*

$$f^* := x_{n+1}^d f_0 + x_{n+1}^{d-1} f_1 + \cdots + f_d = x_{n+1}^d f\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$$

*este proceso se llama **homogenización**.*

*b)* *Sea $F \in R[x_1, \cdots, x_{n+1}]$ una forma, definimos $F_* \in R[x_1, \cdots, x_n]$ como $F_* := F(x_1, \cdots, x_n, 1)$. Decimos que **deshomogenizamos** el polinomio.*

**Proposición 8.6.** *Se cumple lo siguiente*

*a)* *$(FG)_* = F_*G_*$ y $(fg)^* = f^*g^*$.*

*b)* *Si $F \neq 0$ y $r$ es la mayor potencia de $x_{n+1}$ que divide $F$ entonces $x_{n+1}^r (F_*)^* = F$. Además, $(f^*)_*$.*

*c)* *Se tiene que $(F+G)_* = F_* + G_*$. Por otro lado, sea $r = gr(g)$, $s = gr(f)$ y $t = r + s - gr(f+g)^*$ entonces $x_{n+1}^t (f+g)^* = x_{n+1}^r f^* + x_{n+1}^s g^*$.*

## 2.7. Producto Directo de Anillos

**Definición 8.15.** *Sean $R_1, \cdots, R_n$ anillos, definimos $R := \prod R_i$ junto con las operaciones*

$$(a_1, \cdots, a_n) + (b_2, \cdots, b_n) := (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n)$$
$$(a_1, \cdots, a_n) \cdot (b_2, \cdots, b_n) := (a_1 \cdot b_1, \cdots, a_n \cdot b_n)$$

*y $\pi_i : R \to R_i$ son las proyecciones a cada coordenada. Decimos que $R$ es un **anillo producto**.*

**Observación:** Es directo que $R$ con las operaciones definidas es un anillo, donde $(0, \cdots, 0)$ y $(1, \cdots, 1)$ son los neutros de $+$ y $\cdot$ respectivamente.

**Proposición 8.7.** ***(Propiedad Universal)*** *Para todo anillo $S$ y todo morfismo $\phi_i : S \to R_i$, existe un unico morfismo $\varphi : S \to R$ tal que*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\phi_i"'] & R \arrow[dl, "\pi_i"] \\ R_i & \end{tikzcd}$$

## 2.8. Operando con Ideales

**Definición 8.16.** *Sean $I, J \subseteq R$ ideales de un anillo $R$. Definimos el* ***producto de ideales*** *como*

$$IJ := \langle ab : a \in I, b \in J \rangle$$

**Observación:** Si $I = \langle a_1, \cdots, a_n \rangle$ entonces

$$I^n = \left\langle a_1^{i_1} \cdots a_k^{i_k} : k \leq r, \sum_{j=1}^{k} i_j = n \right\rangle$$

**Definición 8.17.** *Sean $I, J \subseteq R$ ideales, definimos la* ***suma de ideales*** *como $I + J := \{a + b : a \in I, b \in J\}$. Decimos $I, J$ son* ***comaximales*** *si $I + J = R$.*

**Proposición 8.8.** *Sean $I, J \subseteq R$ ideales, tenemos que*

*a) $IJ \subseteq I \cap J$.*

*b) Si $I, J$ son comaximales entonces $IJ = I \cap J$.*

## 2.9. Ideales de un Número Finito de Puntos

**Proposición 8.9.** *Sea $I \subseteq k[x_1, \cdots, x_n]$ un ideal con $k = \overline{k}$. Supongamos que $|V(I)| < \infty$, digamos que $V(I) = \{p_1, \cdots, p_m\}$, entonces existe un isomorfismo natural*

$$\varphi : \frac{k[x_1, \cdots, x_n]}{I} \to \frac{\mathcal{O}_{p_1}(\mathbb{A}_k^n)}{I\mathcal{O}_{p_1}(\mathbb{A}_k^n)} \times \cdots \times \frac{\mathcal{O}_{p_m}(\mathbb{A}_k^n)}{I\mathcal{O}_{p_m}(\mathbb{A}_k^n)}$$

*donde $I\mathcal{O}_{p_i}(\mathbb{A}_k^n)$ es el ideal generado por $I$ con elementos de $\mathcal{O}_{p_i}(\mathbb{A}_k^n)$.*

> **Demostración.** *Diremos que $\mathcal{O}_i := \mathcal{O}_{p_i}(\mathbb{A}_k^n)$, $R = k[x_1, \cdots, x_n]/I$ y que $R_i := \mathcal{O}_i/I\mathcal{O}_i$. Sea $I_i$ el ideal maximal de $p_i$, luego $(x_1 - p_{i1}, \cdots, x_n - p_{in}) = I_i \supset I$. Definimos $\varphi_i : R \to R_i$ donde $\varphi(f) = \varphi_i([F]_I) := [F]_{I\mathcal{O}_i}$.*
>
> *Por la propiedad universal, existe un unico morfismo $\varphi : R \to R_1 \times \cdots \times R_m$, que esta dada por $\varphi(F) = (\varphi_1(F), \cdots, \varphi_m(F))$. Afirmamos que $\varphi$ es biyección. Por Nullstellensatz se sigue que*
>
> $$\sqrt{I} = \mathbb{I}(\{p_1, \cdots, p_m\}) = \bigcap_{i=i}^{m} I_i$$
>
> *entonces $\left(\bigcap_{i=i}^m I_i\right)^d \subseteq I$ para algún $d \in \mathbb{N}$. Por otro lado $\left(\bigcap_{i=i}^m I_i\right)^d = (I_1 \cdots I_m)^d = \bigcap_{i=1}^m I_i^d$, se sigue que $\bigcap_{i=i}^m I_i^d \subseteq I$.*
>
> *Sean $F_i \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tales que $F_i(p_j) = 0$ para $i \neq j$ y $F_i(p_i) = 1$, definimos $E_i = 1 - (1 - F_i^d)^d$ para $i = 1, \cdots, m$. Notemos que $E_i = F_i^d D_i$ para algún $D_i$, entonces $E_i \in I_j^d$ para $i \neq j$, lo que implica*
>
> - *Dado $j$ fijo se tiene que $1 - \sum_i E_i = (1 - E_j) - \sum_{i \neq j} E_i \in I_j^d$, lo que implica que $1 - \sum_i E_i \in \bigcap_{j=1}^m I_j^d$.*
> - *Para $i$ fijo vemos que $E_i - E_i^2 = E_i(1 - F_i^d)^d \in \bigcap_{i=1}^m I_i^d$.*
>
> *Definimos $e_i := [E_i]_I \in R$, por lo anterior, cumplen que $e_i^2 = e_i$, $e_i e_j = 0$ y $\sum_i e_i = 1$.*
>
> ***Lema:*** *Si $G \in k[x_1, \cdots, x_n]$ con $G(p_i) \neq 0$ entonces existe $t \in R$ tal que $tg = e_i$ donde $g = [G]_I \in R$. En efecto, supongamos que $G(p_i) = 1$ y sea $H = 1 - G$, luego*
>
> $$(1 - H)(E_i + HE_i + \cdots + H^{d-1}E_i) = E_i - H^d E_i$$
>
> *por ende*
>
> $$g(e_i + he_i + \cdots + h^{d-1}e_i) = e_i$$
>
> *Veamos que $\varphi$ es biyección. Sea $f \in R$ tal que $\varphi(f) = 0$, luego $[F]_{I\mathcal{O}_i} = 0$, lo que implica que $F \in I\mathcal{O}_i$, entonces existe $G \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tal que $G_i(p_i) \neq 0$ y $FG \in I$, por el lema se sigue que existe $t_i \in R$ tal que $t_i g_i = e_i$,*

*entonces*

$$f = \sum_i e_i f = \sum_i t_i g_i f = 0$$

*por lo tanto* $\varphi$ *es inyectiva. Como* $E_i(p_i) = 1$ *vemos que* $\varphi(e_i)$ *es una unidad en* $R_i$*, como* $e_i e_j = 0$ *para* $i \neq j$ *se tiene que* $\varphi_i(e_j) = 0$ *para* $i \neq j$*. Por ende,* $\varphi_i(e_i) = \varphi_i(\sum e_j) = 1$*. Sea*

$$z = \left(\frac{h_1}{g_1}, \cdots, \frac{h_m}{g_m}\right) \in R_1 \times \cdots \times R_m$$

*por el lema, existe* $t_i$ *tal que* $t_i g_i = e_i$*, tenemos que*

$$\varphi_i(g_i)\frac{h_i}{g_i} = [G_i]_i \cdot \left[\frac{H_i}{G_i}\right]_i = [H_i]_i = \varphi_i(h_i)$$

*lo que implica que* $\varphi_i(t_i h_i) = h_i/g_i$*. De este modo*

$$\varphi_i\left(\sum t_j h_j e_j\right) = \varphi_i(t_i h_i) = \frac{h_i}{g_i}$$

*concluimos que* $\varphi(\sum t_j h_j e_j) = z$ *y por lo tanto* $\varphi$ *es sobreyectiva.*

**Corolario 8.6.**

$$dim_k\left(\frac{k[x_1, \cdots, x_n]}{I}\right) = \sum_{i=1}^{m} dim_k\left(\frac{\mathcal{O}_i}{I\mathcal{O}_i}\right)$$

## 2.10. Modulos Cociente y Secuencias Exactas

Sea $R$ un anillo, sean $M$ y $V$ $R$-modulos un morfismo de grupos $\varphi : M \to V$ se dice **morfismo de $R$-modulos** si $\varphi(am) = a\varphi(m)$ para todo $a \in R$ y $m \in M$. Decimos que es isomorfismo cuando es biyectivo.

Sea $N$ un submodulo de un $R$-modulo $M$, en el grupo cociente $M/N$ consideramos la operación $a\overline{m} = \overline{am}$, lo que da estructura de $R$-modulo y lo llamamos el **modulo cociente** de M por N.

**Definición 8.18.** *Sean* $\psi : M' \to M$ *y* $\varphi : M \to M''$ *morfismos de R-modulos. Decimos que la secuencia*

$$M' \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} M''$$

*es **exacta** si* $Im(\psi) = ker(\varphi)$*.*

**Proposición 8.10.**

*a) Sea*

$$0 \longrightarrow V' \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} V'' \longrightarrow 0$$

*una secuencia exacta de espacios vectoriales sobre un cuerpo* $k$ *de dimensión finita, entonces* $dimV' + dimV'' = dimV$*.*

*b) Sea*

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3 \xrightarrow{\varphi_3} V_4 \longrightarrow 0$$

*una secuencia exacta de espacios vectoriales sobre un cuerpo* $k$ *de dimensión finita, entonces* $dimV_4 = dimV_3 - dimV_2 + dimV_1$

## 2.11. Modulos Libres