Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Mauricio Bustamante – Estudiante: Benjamín Mateluna

Topología Algebraica - MAT2850
Tarea 2
07 de septiembre de 2025

Problema 3

Por simplicidad del argumento, denotaremos los morfismos $A_i \to A_{i+1}$ y $B_i \to B_{i+1}$ como ∂. Debido a que ambas secuencias son exactas, resulta que $\partial^2 a = \partial \circ \partial(a) = 0$. Veamos que $ker\ f_3 = 0$. Sea $a \in ker\ f_3$, notemos que

$$0 = \partial f_3(a) = f_4 \partial(a) \quad \text{entonces} \quad \partial a = 0$$

Como $a \in ker\ \partial$, existe $a' \in A_2$ tal que $\partial a' = a$, luego $\partial f_2(a') = f_3 \partial(a') = f_3(a) = 0$. Por exactitud, existe $b' \in B_1$ tal que $\partial b' = f_2(a')$, puesto que f_1 es isomorfismo, existe $a'' \in A_1$ tal que $b' = f_1(a'')$, usando que los diagramas conmutan vemos que

$$a'' = f_1^{-1}(b') \quad \text{entonces} \quad \partial a'' = \partial f_1^{-1}(b') = f_2^{-1}\partial(b')$$

recordemos que $\partial b' = f_2(a')$, es decir, $\partial a'' = a'$, luego $0 = \partial^2 a'' = \partial a' = a$.

Sea $b \in B_3$, consideramos $\partial b \in B_4$, entonces $f_4^{-1}(\partial b) \in A_4$, por conmutatividad del diagrama, se sigue que $\partial f_4^{-1}(\partial b) = f_5^{-1}(\partial^2 b) = 0$, luego, por exactitud, existe $a \in A_3$ tal que $\partial a = f_4^{-1}(\partial b)$. Observemos que,

$$\partial(f_3(a) - b) = \partial f_3(a) - \partial b = f_4 \partial(a) - \partial b = 0$$

Así, existe $b' \in B_2$ tal que $\partial b' = f_3(a) - b$, definimos $a' = f_2^{-1}(b') \in A_2$, de este modo,

$$f_3(a) - b = \partial b' = \partial f_2(a') = f_3(\partial a')$$

En resumen, $f_3(a - \partial a') = b$. Concluimos que f_3 es isomorfismo.

Problema 4

Sea Ω una colección finita de $2-$simplices, decimos que Ω se pega bien si cumple lo siguiente

(1) Para todo $\sigma, \tau \in \Omega$ se tiene que $\sigma \cap \tau$ es vacío o una cara de ambos simplices.

(2) Para todo $\sigma \in \Omega$, existe $\tau \in \Omega$ tal que $\sigma \cap \tau$ es un $1-$simplice.

(3) Existe $\sigma \in \Omega$ tal que existe un único $\tau \in \Omega$ de modo que $\sigma \cap \tau$ es un $1-$simplice. Además, se tiene que $\Omega \setminus \{\sigma\}$ se pega bien o consiste de un solo elemento.

Observación: Por la primera propiedad, a cada colección finita de $2-$simplices que se pega bien, le podemos asignar un complejo simplicial. Adicionalmente, se tiene que dicho complejo simplicial es conexo gracias a la segunda propiedad.

Lema 0.1: *Sea Ω una colección finita de $2-$simplices que se pega bien. Sea K el complejo simplicial asociado a Ω, entonces $H_0(K) = \mathbb{Z}$ y es trivial en otro caso.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre el número de $2-$simplices en la colección. Para $n = 1$ ya esta probado. Supongamos que se cumple para $n - 1$, por definición, existe $\sigma \in \Omega$ tal que $\Omega \setminus \{\sigma\}$ se pega bien, sea M el complejo simplicial asociado. Sea N el complejo simplicial que consiste en las caras de σ.

Como Ω se pega bien, existe un único $2-$simplice $\tau \in \Omega$ tal que $\sigma \cap \tau$ es un $1-$simplice, entonces $M \cap N = \{\mu : \mu \leq \sigma \cap \tau\}$, que resulta ser conexo como complejo simplicial. Usando Mayer-Vietoris, para $i > 1$, es directo que $H_0(K) = 0$. Por otro lado, para $i = 1$, se sigue que

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H_1(K) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^2$$

Notemos que el generador en $M \cap N$ se mapea a un generador tanto en M como en N, vía el morfismo inducido por la inclusión. Entonces, $\varphi = (1, 1)$, lo que implica que $H_1(K) = 0$, ya que $ker\ \varphi = 0$, lo que concluye la demostración. □

Asignamos el orden a los vértices tal que $i < i+1$. Usaremos R para denotar a los anillos $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Q}$. El lema anterior es válido para R.

(1) **Definición:** Notemos que el complejo simplicial es conexo, dado que el argumento presentado en el problema 5 es invariante del anillo utilizado, se sigue que $H_0(K) \cong R$. Adicionalmente, $C_i = 0$ para $i > 2$, ya que no hay $i-$simplices. Basta calcular $H_i(K)$ para $i = 1, 2$. Tenemos el complejo de cadenas,

$$0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

Para encontrar los grupos de homología basta calcular $ker\ \partial_2, im\ \partial_2$ y $\ker \partial_1$. A cada vértice en $C_0(K)$ le asignamos el vector canónico como sigue $i = e_{i+1}$. A cada $1-$simplice le asignamos un vector de la siguiente manera,

$$\begin{array}{llll}
\langle 0,1\rangle = e_1 & \langle 0,5\rangle = e_5 & \langle 1,5\rangle = e_9 & \langle 3,4\rangle = e_{13} \\
\langle 0,2\rangle = e_2 & \langle 1,2\rangle = e_6 & \langle 2,3\rangle = e_{10} & \langle 3,5\rangle = e_{14} \\
\langle 0,3\rangle = e_3 & \langle 1,3\rangle = e_7 & \langle 2,4\rangle = e_{11} & \langle 4,5\rangle = e_{15} \\
\langle 0,4\rangle = e_4 & \langle 1,4\rangle = e_8 & \langle 2,5\rangle = e_{12} &
\end{array}$$

Luego, la acción de ∂_1 esta representado por la matriz

$$\begin{pmatrix}
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

Usando SAGE, se obtiene que $ker\ \partial_1 \cong R^{10}$. Queda estudiar el morfismo ∂_2. Realizamos la siguiente identificación

$$\begin{array}{lll}
\langle 0,1,3\rangle = e_1 & \langle 0,2,4\rangle = e_4 & \langle 1,2,5\rangle = e_7 \\
\langle 0,2,3\rangle = e_2 & \langle 0,4,5\rangle = e_5 & \langle 1,3,4\rangle = e_8 \\
\langle 0,1,5\rangle = e_3 & \langle 1,2,4\rangle = e_6 & \langle 2,3,5\rangle = e_9 \\
 & \langle 3,4,5\rangle = e_{10} &
\end{array}$$

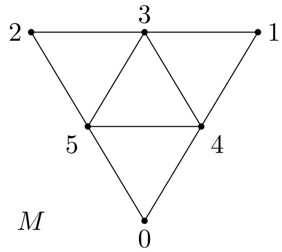
Junto con la identificación de los generadores de $C_1(K)$, el morfismo ∂_2 está representado por la matriz

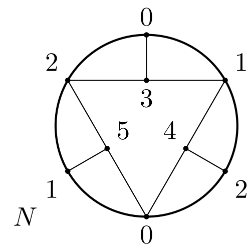
$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Nuevamente, usando SAGE, se obtiene que $ker\ \partial_2 = 0$ si $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, pero en $\mathbb{Z}^2$ se tiene que $ker\ \partial_2 = \mathbb{Z}_2$. Además, $im\ \partial_2 = \mathbb{Z}_2^9$ cuando $R = \mathbb{Z}_2$, mientras que para $\mathbb{Z}$ tenemos que $im\ \partial_2 = 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^9$ y para $\mathbb{Q}$, $im\ \partial_2 = \mathbb{Q}^{10}$. Entonces,

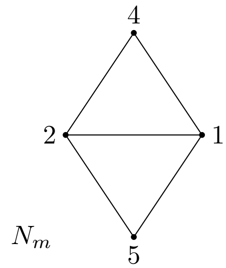
$$H_i(K;\mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{si } i = 0,1,2 \\ 0 & \text{si } i \neq 0,1,2 \end{cases} \qquad H_i(K;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 0,1 \end{cases} \qquad H_i(K;\mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i \neq 0 \end{cases}$$

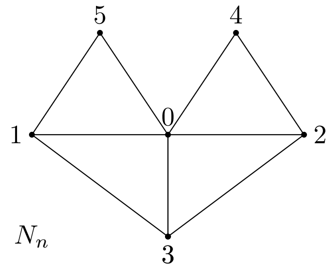
(2) **Mayer-Vietoris:** Consideramos los siguientes subcomplejos simpliciales,





Por el lema, se tiene que $H_0(M) = R$ y es trivial en otro caso, además, vemos que $H_i(M \cap N) = R$ para $i = 0, 1$ y es cero en otro caso. Por otro lado, para N, consideramos la subdivisión en complejos simpliciales como sigue,





Nuevamente, por el lema, se sigue que $H_0(N_m) = H_0(N_n) = R$ y es trivial en otro caso. Por otro lado, $H_0(N_m \cap N_n)$ consiste en la unión disjunta de dos 1−simplices, luego, $H_0(N_m \cap N_n) = R^2$ y es cero en otro caso. Entonces, usando Mayer-Vietoris resulta que

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H_i(N) \longrightarrow 0$$

donde $i > 1$. Por lo tanto, $H_i(N) = 0$ cuando $i > 1$. Veamos cuando $i = 1$, se tiene la siguiente secuencia exacta

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H_1(N) \longrightarrow R^2 \xrightarrow{\varphi} R^2$$

Como $N_m \cap N_n$ posee dos componentes conexas, es generado por dos elementos, por ende, cada generador se mapea a un generador tanto en $H_0(N_m)$ como en $H_0(N_n)$ vía el morfismo inducido por la inclusión, lo que implica que

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por exactitud, $H_1(N) = R$, puesto que $ker\ \varphi \cong R$. Para $i = 0$ sabemos que el complejo es conexo, entonces $H_0(N) = R$. Volviendo al Mayer-Vietoris original, tenemos que

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & H_2(K) \arrow[r] & R \arrow[r, "\psi"] & R \arrow[r, "\phi"] & H_1(K) \arrow[dllll, rounded corners] \\ & R \arrow[r, "\varphi"] & R^2 \arrow[r] & H_0(K) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Notemos que el mapeo $H_1(M \cap N) \to H_1(M)$ es trivial, mientras que el generador en $H_1(M \cap N)$, a saber,

$$\tau = \langle 1, 4 \rangle - \langle 0, 4 \rangle + \langle 0, 5 \rangle + \langle 2, 5 \rangle - \langle 2, 3 \rangle - \langle 1, 3 \rangle$$

se mapea dos veces al generador en $H_1(N)$ que es $\sigma = \langle 0, 1 \rangle + \langle 1, 2 \rangle - \langle 0, 2 \rangle$. En efecto, notemos que

$$\partial_2(\langle 0, 2, 3 \rangle + \langle 0, 1, 3 \rangle - \langle 0, 2, 4 \rangle + \langle 0, 1, 5 \rangle + \langle 1, 2, 5 \rangle - \langle 0, 2, 3 \rangle) = 2\sigma - \tau$$

De este modo, $ker\ \psi = 0$ para $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, mientras que $ker\ \psi = \mathbb{Z}_2$ para $\mathbb{Z}_2$. Luego, $im\ \psi = 2\mathbb{Z}$, $im\ \psi = \mathbb{Q}$ y finalmente $im\ \psi = 0$ cuando vemos los coeficientes en $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}_2$ respectivamente. Por otro lado, por la misma razón que antes, $\varphi = (1, 1)$, es decir, $ker\ \varphi = 0$ para R y entonces ϕ es sobreyectivo. Por primer teorema de isomorfismo y exactitud, concluimos que

$$H_i(K; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{si } i = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{si } i \neq 0, 1, 2 \end{cases} \qquad H_i(K; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 0, 1 \end{cases} \qquad H_i(K; \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i \neq 0 \end{cases}$$

Problema 5

Sea K un complejo simplicial finito y sean $v, w \in V_K$, decimos que $v \sim_p w$ si y solo si v esta conectado a w ó $v = w$, es decir, si existe una sucesión de $1-$simplices $\langle w_0, w_1\rangle, \cdots, \langle w_{k-1}, w_k\rangle$ tales que $w_0 = v$ y $w_k = w$.

Por definición resulta que $x \sim_p x$, además, notemos que si $v \sim_p w$ entonces $w \sim_p v$ basta tomar $\omega_i := w_{k-i}$. Por otro lado, si $v \sim_p w$ y $w \sim_p u$, entonces la sucesión

$$\langle w_0, w_1\rangle, \cdots, \langle w_{k-1}, w_k\rangle, \langle \omega_0, \omega_1\rangle, \cdots, \langle \omega_{j-1}, \omega_j\rangle$$

donde $w_0 = v$, $w_k = w$, $\omega_0 = w$ y $\omega_j = u$ es una sucesión que conecta v con u, en otras palabras, $v \sim_p u$.

Definición (Componente Conexa): *Sea K un complejo simplicial finito y $v \in V_K$, definimos su componente conexa como*

$$[v]_c := \{\sigma \in K : \sigma = \langle v_0, v_1, \cdots, v_r\rangle \quad y \quad v \sim_p v_i\}$$

Observación: Si $[v]_c = K$, entonces el complejo simplicial es conexo. Sea $w \in V_K$ tal que $w \in [v]_c$, entonces $v \sim_p w$. Luego, dado $\sigma = \langle v_0, \cdots, v_r\rangle \in [w]_c$ se tiene que $v \sim_p v_i$, se sigue que $[w]_c \subseteq [v]_c$, de manera similar obtenemos que $[v]_c \subseteq [w]_c$. Por lo tanto $[w]_c = [v]_c$.

Veamos que dado $v \in V_K$, se tiene que $[v]_c$ es un subcomplejo simplicial de K. En efecto, sea $\sigma \in [v]_c$ y $\tau \leq \sigma$, si v_i es un vértice de τ entonces es vértice de σ, luego $v \sim_p v_i$, lo que implica que $\tau \in [v]_c$. La segunda propiedad se cumple trivialmente. Por lo tanto, una componente conexa es un subcomplejo simplicial conexo de K y la unión de dos componentes conexas también es subcomplejo simplicial, puesto que un simplice esta en una componente conexa o en la otra, pero no en ambas.

Como $\sim_p$ es una relación de equivalencia, particiona el conjunto de vértices, junto con lo anterior hemos probado que las componentes conexas particionan al complejo simplicial.

Debemos probar lo siguiente:

(1) **Si K es conexo, entonces $|K|$ arcoconexo**. Sean $x, y \in |K|$, existen $\sigma_x, \sigma_y \in K$ tales que $x \in \sigma_x$ e $y \in \sigma_y$, sean $v_x \in \sigma_x$ y $v_y \in \sigma_y$ vértices de K. Existe una sucesión

$$\langle w_0, w_1\rangle, \cdots, \langle w_{k-1}, w_k\rangle$$

tal que $w_0 = v_x$ y $w_k = v_y$, consideramos la función $f_i : [0,1] \to |K|$ dada por $f_i(t) := (1-t)w_i + tw_{i+1}$ que esta bien definida por que $\langle w_i, w_{i+1}\rangle$ es convexo y es continua. Del mismo modo, como σ_x es convexo, la función $f_x : [0,1] \to |K|$ dada por $f_x(t) := (1-t)x + tv_x$ esta bien definida. De manera análoga, definimos f_y, pero $f_y(0) = v_y$ y $f_y(1) = y$. Luego,

$$f := f_x \bullet f_0 \bullet f_1 \bullet \cdots \bullet f_{k-1} \bullet f_y$$

donde $\bullet$ es la operación de concatenación. Es una función continua, por lema del pegamiento, tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

Concluimos que $|K|$ es arcoconexo.

(2) **Probar que $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^{\#\textbf{componentes conexas}}$**. Como K es finito, hay finitas componentes conexas, procederemos por inducción en el número de componentes conexas.

Supongamos que K tiene una componente conexa, entonces K es conexo. Dado $v \in V_K$, basta probar que $[v] = [w]$ en $H_0(K)$ para todo $w \in V_K$. Como K es conexo, existe una sucesión

$$\langle w_0, w_1\rangle, \cdots, \langle w_{k-1}, w_k\rangle$$

tal que $w_0 = v$ y $w_k = w$, entonces

$$\partial\left(\sum_{i=0}^{k-1} \langle w_i, w_{i+1}\rangle\right) = \sum_{i=0}^{k-1} \partial \langle w_i, w_{i+1}\rangle = \sum_{i=0}^{k-1} w_{i+1} - w_i = w_k - w_0 = w - v$$

luego $w - v \in im\, \partial$. Entonces $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

Sea n el número de componentes conexas. Sean M_i las componentes conexas de K, consideramos los subcomplejos simpliciales

$$M = M_n \quad \text{y} \quad N = \bigcup_{i=1}^{n-1} M_i$$

Por Mayer-Vietoris, se tiene la siguiente secuencia exacta

$$0 \longrightarrow H_0(M) \oplus H_0(N) \longrightarrow H_0(K) \longrightarrow 0$$

entonces

$$H_0(K) \cong H_0(M) \oplus H_0(N) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-1} \cong \mathbb{Z}^n$$