Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Pedro Gaspar – Estudiante: Benjamín Mateluna

Geometría Diferencial - MAT2860
Apuntes
06 de Marzo de 2025

Índice

1. Introducción

1.1. Evaluaciones

Habrán tres interrogaciones (I1, I2, I3) cada una vale un 25 % y un examen (EX) que vale un 25 %. Las fechas son 14 de abril, 19 de Mayo, 16 de Junio y 3 de Julio respectivamente.

2. Curvas en $\mathbb{R}^n$

2.1. Curvas parametrizadas

Consideramos $\mathbb{R}^n := \{v = (v_1, \cdots, v_n) : v_i \in \mathbb{R}\}$. Un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n, con el producto escalar dado por

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \quad \text{con } v, w \in \mathbb{R}^n$$

Definición 0.1. *Una curva parametrizada en $\mathbb{R}^n$ es una función continua $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con I un intervalo abierto. Escribimos $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \cdots, \alpha_n(t))$.*

Diremos que α es diferenciable si sus funciones coordenadas $\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty$. En tal caso, el vector $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \cdots, \alpha_n'(t))$ se llama vector tangente a la curva α en $t \in I$

Definición 0.2. *La traza de una curva parametrizada $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es $\alpha(I) = im(\alpha)$.*

Ejemplos

a) Si $p, v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$, la curva parametrizada $\alpha(t) = tv + p$ con $t \in \mathbb{R}$ que describe una recta que pasa por $p = \alpha(0)$ con vector tangente $\alpha'(t) = v$.

b) Sea $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $b(t) := t^3 \cdot \overrightarrow{e}_1$ es una curva parametrizada diferenciable con $\beta'(t) = 3t^2 \cdot \overrightarrow{e}_1$.

c) Sea $p \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$ consideramos $\alpha(t) = (rcos(t), rsen(t)) + p$, una curva parametrizada diferenciable cuya traza es $\alpha(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y)|\, p = r\}$

d) Sean $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (acos(t), asen(t), bt)$ con $t \in \mathbb{R}$ se llama una helice circular. Además $\alpha'(t) = (-asen(t), acos(t), b)$.

e) Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ es una curva parametrizada diferenciable con $\alpha(-2) = \alpha(2) = 0$, pero $\alpha'(-2) \neq \alpha(2)$.

2.2. Longitud y Parametro de Arco

Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada, consideremos $[a, b] \subseteq I$. Buscamos medir la longitud de $\alpha([a, b])$. Una estrategia, dada una partición $P := \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ de $[a, b]$ calculamos

$$\sum_{i=1}^{k} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| =: L_a^b(\alpha, P)$$

esta suma corresponde a la longitud de una curva poligonal que pasa por los puntos $\alpha(t_i)$. Si $Q \supseteq P$ es otra partición de $[s, b]$, entonces $L_a^b(\alpha, Q) \geq L_a^b(\alpha, P)$.

Definición 0.3. *La longitud de una curva parametrizada α sobre $[a, b] \subseteq I$ es*

$$L_a^b(\alpha) = sup\{L_a^b(\alpha, P) : P \text{ es partición de } [a, b]\}.$$

Si α es diferenciable sobre $[a, b]$ y hacemos $|P| = max\{t_i - t_{i-1}\}$ muy pequeña, esperariamos que $|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| \approx \left|\alpha'(\overline{t_i})\right| (t_i - t_{i-1})$.

Proposición 0.1. *Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable sobre $[a, b] \subseteq I$, entonces*

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt$$

(Para la demostración revisar Montiel-Ros, página 5)

Corolario 0.1. *Tenemos que $|\alpha(a) - \alpha(b)| \leq L_a^b(\alpha)$.*

Corolario 0.2. *Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cumple $|DF(p)v| = |v|$ para todo $p, v \in \mathbb{R}^n$, entonces $L_a^b(F \circ \alpha) = L_a^b(\alpha)$.*

De hecho, $F \circ \alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable, con

$$|(F \circ \alpha)'(t)| = |DF(\alpha(t))\alpha'(t)| = |\alpha'(t)|$$

para todo $t \in I$, basta con integrar sobre $[a, b]$. Si $p_0 \in \mathbb{R}^n$ y $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal ortogonal , esto es, $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$, entonces $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(p) = Ap + p_0$ cumple

$$DF(p)v = \frac{d}{dt}F(p + tv)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(A(p + tv) + p_0)\big|_{t=0} = Av$$

Por lo tanto $|DF(p)v| = |Av| = |v|$.

Corolario 0.3. *Si $h : J \subseteq \mathbb{R} \to I \subseteq \mathbb{R}$ es un difeomorfismo y $\alpha : I \to \mathbb{R}$ es una curva parametrizada diferenciable, entonces*

$$L_a^b(\alpha \circ h) = L_c^d(\alpha)$$

donde $h([a, b]) = [c, d]$ para todo $[a, b] \subseteq J$.

Por regla de la cadena tenemos que $(\alpha \circ h')(t) = h'(t)\alpha'(h(t))$. La curva $\alpha \circ h$ tiene la misma traza que α, en efecto $(\alpha \circ h)(J) = \alpha(h(J)) = \alpha(I)$. Decimos que $\alpha \circ h$ es una reparametrización de la curva *alpha*.

Demostración. *Como h y h^{-1} son diferenciables, se tiene que $h'(t) \neq 0$ para todo $t \in J$. Veamos que*

$$1 = \frac{d}{dt}(t) = (h^{-1} \circ h)'(t) = (h^{-1})'(h(t))h'(t)$$

Luego como J es un intervalo y h' es continua, tenemos que $h' < 0$ o $h > 0$.

- *Si $h' < 0$, entonces $h(a) = c$, $h(b) = d$,*

$$\int_a^b |(\alpha \circ h)'(t)|\, dt = \int_a^b |\alpha'(h(t))|\, |h'(t)|\, dt = \int_c^d |\alpha'(s)|\, ds = L_c^d(\alpha)$$

- *Si $h' > 0$, entonces $h(b) = c$, $h(a) = d$,*

$$\int_a^b |(\alpha \circ h)'(t)|\, dt = \int_a^b |\alpha'(h(t))|\, |h'(t)|\, dt = \int_d^c -|\alpha'(s)|\, ds = \int_c^d |\alpha'(s)|\, ds = L_c^d(\alpha)$$

Definición 0.4. *Se dice que una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Si además $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$ se dice que α esta parametrizada por el arco.*

Una curva α parametrizada por el arco tienen las siguientes propiedades

- $\alpha'(t)$ es ortogonal a $\alpha''(t)$ para todo $t \in I$, en efecto

$$0 = \frac{d}{dt}(|\alpha'(t)|^2) = \frac{d}{dt}(\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle) = 2\,\langle \alpha'(t), \alpha''(t)\rangle$$

- Se tiene que $L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt = b - a$.

Teorema 1. *Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable regular, entonces α admite una parametrización por arco. Concretamente , si $t_0 \in I$ y definimos $s : I \to \mathbb{R}$ por*

$$s(t) := \int_{t_0}^t |\alpha'(t)|\, dt$$

entonces s es un difeomorfismo sobre $J \subseteq \mathbb{R}$ y $\alpha \circ s^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ esta parametrizada por el arco.

Demostración. *Por TFC, sabemos que s es diferenciable, mas aun, $s'(t) = |\alpha'(t)|$ para todo $t \in I$. Luego, $s' > 0$, es decir, s es creciente y $s(I) = J$ es un intervalo abierto. Además, por teorema de la función inversa, vemos que*

$$(s^{-1})'(r) = \frac{1}{s'(s^{-1}(r))} = \frac{1}{|\alpha'(s^{-1}(r))|} \quad \forall r \in J$$

Por lo tanto $\left|(\alpha \circ s^{-1})'(r)\right| = 1$ para todo $r \in J$, luego $\alpha \circ s^{-1}$ esta parametrizada por el arco.

Ejemplos

a) Sea $\alpha(t) = tv + p_0$ con $p_0, v \in \mathbb{R}^n$ y $v \neq 0$. Como $\alpha'(t) = v$, tenemos

$$s(t) = \int_0^t |v|\, dx = t\,|v|$$

entonces $\alpha \circ s^{-1}(x) = x \cdot \frac{v}{|v|} + p_0$ es una parametrización por el arco de α.

b) Consideremos $\alpha(t) = (rcost, rsent) + p_0$ con $p_0 \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$. Como $\alpha'(t) = (-rsent, rcost)$ entonces $|\alpha'(t)| = r$, tenemos que

$$s(t) = \int_0^t r dx = rt$$

y $(\alpha \circ s^{-1})(x) = (rcos(\frac{x}{r}), rsen(\frac{x}{r})) + p_0$ es una curva parametrizada por el arco para α.

c) Definimos $\alpha(t) = (acost, asent, bt)$ con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ una curva parametrizada por el arco es

$$(\alpha \circ s^{-1})(x) = \left(acos\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), asen\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

2.3. Curvatura de un Curva Regular (Teoría Local de Curvas)

Notación: Notamos por $\mathcal{J}$ a la función $\mathcal{J} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathcal{J}(x, y) = (-y, x)$ que cumple lo siguientes

- $\mathcal{J}$ es una transformación lineal ortogonal.
- $\langle u, \mathcal{J}u, =\rangle\, 0$ y $\mathcal{J}(\mathcal{J}u) = -u$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$.
- Si $|u| = 1$, entonces $\{u, \mathcal{J}u\}$ es una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^2$.
- Si $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal ortogonal, entonces $\mathcal{J}A = det(A)A\mathcal{J}$.

Nuestro objetivo es asociar a una curva parametrizada regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una cantidad geometrica, para ello queremos definir una función $K(= K_\alpha) : I \to \mathbb{R}$ tal que

a) K es invariante bajo movimientos rigidos.

b) K es invariante por parametrizaciones.

c) $K \equiv 0$ si y solo si α corresponde a un segmento de recta.

Si tenemos $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por el arco, definimos por $T : I \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(s) := \alpha'(s)$ y $N : I \to \mathbb{R}^2$ como $N(s) := \mathcal{J}T(s)$. Recordemos que $\{T(s), N(s)\}$ es una base ortonormal en $\mathbb{R}^n$ para cada $s \in I$ (Tiedro de Frenet).

Notemos que $N(s) \perp T(s)$ y $T'(s) \perp T(s)$, luego, existe un $k(s) \in \mathbb{R}$ tal que $T'(s) = K(s)N(s)$. La función $K_\alpha = K : I \to \mathbb{R}$ se llama la curva de α. Tomando el producto con $N(s)$,

$$K(s) = \langle K(s)N(s), N(s)\rangle$$

Por lo tanto $K(s) = \langle T'(s), N(s)\rangle$. Por otro lado, observemos que

$$N'(s) = \frac{d}{ds}\left(\mathcal{J}T(s)\right) = \mathcal{J}\frac{d}{ds}(T(s)) = \mathcal{J}(K(s)N(s)) = \mathcal{J}(K(s)\mathcal{J}T(s)) = -K(s)T(s)$$

Proposición 1.1. *Para una curva parametrizada por el arco $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ vale que $T' = KN$ y $N' = -KT$.*

Ejemplos:

a) Una recta parametrizada por el arco $\alpha(s) := s \cdot \frac{v}{|v|} + p_0$ con $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, tenemos que

$$T(s) = \frac{v}{|v|} \ , \ N(s) = \frac{\mathcal{J}v}{|v|} = \frac{\mathcal{J}v}{|\mathcal{J}v|} \text{ y } K(s) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

b) Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ esta parametrizada y $K \equiv 0$, entonces $T'(s) = 0$ para todo $s \in I$, es decir, $\alpha''(s) = 0$ para todo $s \in I$. Integrando dos veces concluimos que cada coordenada de α es una función lineal, luego α es un segmento de recta.

c) Sea $\alpha(s) := \left(rcos\left(\frac{s}{r}\right), rsen\left(\frac{s}{r}\right)\right) + p_0$, entonces

$$T(s) = \left(-sen\left(\frac{s}{r}\right), cos\left(\frac{s}{r}\right)\right) \text{ y } N(s) = \left(-cos\left(\frac{s}{r}\right), -sen\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

Notemos que

$$T'(s) = \left(-\frac{1}{r}cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r}sen\left(\frac{s}{r}\right)\right) = \frac{1}{r}N(s)$$

Por lo tanto $K(s) = \frac{1}{r}\langle N(s), N(s)\rangle = \frac{1}{r}$.

Consideremos ahora una curva regular $\beta : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^2$ y una reparametrización $\alpha = \beta \circ h : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada por el arco, donde $h : I \to \widetilde{I}$ es un difeomorfismo con $h' > 0$. Con esto

$$|\beta'(t)| = \left|(\beta \circ h \circ h^{-1})'(t)\right| = \left|(\alpha \circ h^{-1})'(t)\right| = (h^{-1})'(t)$$

Así, definimos el diedro de Frenet de la curva α por

$$T_\beta(t) := \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = \frac{(\alpha \circ h^{-1})'(t)}{|(\alpha \circ h^{-1})'(t)|} = \frac{\alpha'(h^{-1}(t))h^{-1}(t)}{|\alpha'(h^{-1}(t))h^{-1}(t)|} = T_\alpha(h^{-1}(t))$$

Por otro lado

$$N_\beta = \mathcal{J}T_\beta(t) = \mathcal{J}T_\alpha(h^{-1}(t)) = N_\alpha(h^{-1}(t))$$

y definimos la curvatura de la curva β por

$$K_\beta(t) := K_\alpha(h^{-1}(t)) \ , \ t \in \widetilde{I}$$

Como $\beta'(t) = |\beta'(t)|\, T_\alpha(h^{-1}(t))$ se tiene que

$$\beta'' = (|\beta'|)'T_\alpha \circ h^{-1} + |\beta'|^2 (T'_\alpha \circ h^{-1})$$

y además $N_\alpha \circ h^{-1} = \mathcal{J}T_\beta = \frac{\mathcal{J}\beta'}{|\beta'|}$ se sigue que

$$\frac{\langle \beta'', \mathcal{J}\beta'\rangle}{|\beta'|} = \left\langle (|\beta'|)'T_\alpha \circ h^{-1} + |\beta'|^2 (T'_\alpha \circ h^{-1}), N_\alpha \circ h^{-1}\right\rangle = |\beta'|^2 \left\langle T'_\alpha \circ h^{-1}, N_\alpha \circ h^{-1}\right\rangle = |\beta'|^2 K_\alpha \circ h^{-1}$$

Concluimos que $K_\beta = \frac{\langle \beta'', \mathcal{J}\beta'\rangle}{|\beta'|^3}$.

Proposición 1.2. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular, entonces*

a) Si $\phi : \widetilde{I} \to I$ es un difeomorfismo entonces $K_{\alpha\circ\phi} = sgn(\phi')K_\alpha \circ \phi$.

b) Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un movimiento rigido, entonces $K_{F\circ\alpha} = (detDF)K_\alpha$.

Demostración. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular* *a) Como $(\alpha\circ\phi)'(t)=\phi'(t)\alpha'(\phi(t))$, se sigue que $|(\alpha\circ\phi)'(t)|=|\phi'(t)|\,|\alpha'(\phi(t))|$, escrito de otro modo*

$$|(\alpha\circ\phi)|=sgn(\phi')\cdot\phi'\,|\alpha'\circ\phi|$$

Luego

$$\begin{aligned}K_{\alpha\circ\phi}&=\frac{\langle(\alpha\circ\phi)'',\mathcal{J}(\alpha\circ\phi)'\rangle}{|(\alpha\circ\phi)'|^3}=\frac{\left\langle\phi''(\alpha'\circ\phi)+(\phi')^2\alpha''\circ\phi,\phi'\mathcal{J}(\alpha'\circ\phi)\right\rangle}{sgn(\phi')(\phi')^3\,|\alpha'\circ\phi|^3}\\&=\frac{(\phi')^3\,\langle\alpha''\circ\phi,\mathcal{J}\alpha'\circ\phi\rangle}{(\phi')^3\,|\alpha'\circ\phi|^3}sgn(\phi')=sgn(\phi')K_\alpha\circ\phi\end{aligned}$$

b) Sabemos que $F(p)=Ap+p_0$, entonces $DF=A$. Luego,

$$\begin{aligned}\langle(F\circ\alpha)'',\mathcal{J}(F\circ\alpha)'\rangle&=\langle(DF(\alpha)\alpha')',\mathcal{J}(DF(\alpha)\alpha')\rangle=\langle(A\alpha')',\mathcal{J}(A\alpha')\rangle\\&=\langle A\alpha'',(detA)A\mathcal{J}\alpha'\rangle=detA\,\langle\alpha'',\mathcal{J}\alpha'\rangle\end{aligned}$$

Además $|(F\circ\alpha)'|=|A\alpha'|=|\alpha'|$. Juntando lo anterior vemos que

$$K_{F\circ\alpha}=\frac{\langle(F\circ\alpha)'',\mathcal{J}(F\circ\alpha)'\rangle}{|(F\circ\alpha)'|^3}=detA\cdot K_\alpha$$

Proposición 1.3. *Sea $\alpha:I\to\mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por el arco. Supongamos que existe una función diferenciable $\theta:I\to\mathbb{R}$ tal que $T(s)=(cos(\theta(s)),sen(\theta(s)))$. Entonces $K_\alpha=\frac{d\theta}{ds}$.*

Demostración. *Recordemos que*

$$K_\alpha=\langle T'_\alpha,\mathcal{J}T_\alpha\rangle=\left\langle\left(-\frac{d\theta}{ds}sen\theta,\frac{d\theta}{ds}cos\theta\right),(-sen\theta,cos\theta)\right\rangle=\frac{d\theta}{ds}\,|(-sen\theta,cos\theta)|^2=\frac{d\theta}{ds}$$

Teorema 2. *Sea $K:I\to\mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces existe una unica curva parametrizada por el arco $\alpha:I\to\mathbb{R}$, salvo por movimientos rigidos, tal que $K_\alpha=K$.*

2.4. Teoría Local de Curvas en el Espacio

Definición 2.1. *Sea $\alpha:I\to\mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco. La curvatura de α en $s\in I$ es*

$$K_\alpha:=|T'(s)|$$

Observación: Para curvas en $\mathbb{R}^3$, $K_\alpha\geq 0$. Además, $K_\alpha\equiv 0$ si y solo si α es un segmento de recta.

Definición 2.2. *Sea $\alpha:I\to\mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco, tal que $K_\alpha>0$. Definimos*

$$N(s):=\frac{T'(s)}{|T'(s)|}$$

Observación: Como $T(s)\perp T'(s)$, pues $|T|=1$, está definición se condice con el caso en $\mathbb{R}^2$, además de manera directa, obtenemos que $K_\alpha N(s)=T(s)$.

Definición 2.3. *Sea $\alpha:I\to\mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco. Definimos el vector binormal de α en $s\in I$ por*

$$B(s)=T(s)\times N(s)$$

Observación: Por definición del producto cruz el conjunto $\{T,N,B\}$ es una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$ para todo $s\in I$ llamada el tiedro de Frenet de α en $s\in I$.

Notemos que $B'(s)=\frac{d}{ds}(T(s)\times N(s))=T'(s)\times N(s)+T(s)\times N'(s)=T(s)\times N'(s)$. Además, $|B|=|T|\,|N|=1$ y por lo tanto $B'\perp B$, por otro lado $\langle B',T\rangle=\langle T\times N',T\rangle=0$, osea $B'\perp T$. Por lo tanto, existe $\tau(s)\in I$ tal quiero

$$B'(s)=\tau(s)N(s)$$

Se dice que $\tau(s) =: \tau_\alpha(s)$ es la torsión de α en $s \in I$. Finalmente, como $N' \perp N$, tenemos que

$$N'(s) = aT(s) + bB(s)$$

donde

$$\begin{aligned} a\langle T, T\rangle &= \langle N', T\rangle = \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle - \langle N, T'\rangle \\ &= \frac{d}{ds}\langle N, T\rangle - \langle N, T'\rangle = -\langle N, KN\rangle = -K \end{aligned}$$

y similarmente obtenemos que $b = \langle N', B\rangle = -\tau(s)$.

Proposición 2.1. *Ecuaciones de Frenet-Serret*

- $T'(s) = K(s)N(s)$
- $N'(s) = -K(s)T(s) - \tau(s)B(s)$
- $B'(s) = \tau(s)N(s)$

Ejemplos:

a) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco. Supongamos que $\alpha(I) \subseteq P$ con P un plano. Podemos describir el plano con la ecuación $\langle x - p_0, u\rangle = 0$, donde $p_0, u \in \mathbb{R}^3$ con u unitario y perpendicular al plano. Entonces $\langle \alpha(s) - p_0, u\rangle = 0$ para todo $s \in I$, derivando vemos que

$$\langle \alpha'(s), u\rangle = \langle T(s), u\rangle = 0 \quad \forall s \in I$$

En ese caso, $K(s)$ es el valor absoluto de la curvatura de α como una curva plana. Supongamos que $K(s) > 0$ para todo $s \in I$. Entonces

$$0 = \frac{d}{ds} = \langle T, u\rangle = \langle T', u\rangle = K(s)\langle N, u\rangle$$

lo que implica que $N \perp u$ para todo $s \in I$. Luego, $B(s) = \pm u$ para todo $s \in I$, se sigue que $\tau(s) = \langle B', N\rangle = 0$.

b) Supongamos que α es una curva parametrizada por el arco tal que $\tau_\alpha \equiv 0$, entonces $B' = \tau \cdot N = 0$ para todo $s \in I$ y por lo tanto $B = u$, con $u \in \mathbb{R}^3$ y $|u| = 1$, así $T \times N = u$ para todo $s \in I$.

Ahora, usando las ecuaciones de frenet vemos que $T \perp u$ y $N \perp u$ para todo $s \in I$ y concluimos que

$$\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), u\rangle = \left\langle \int_{s_0}^{s} T(x)dx, u \right\rangle = \int_{s_0}^{s} \langle T(x), u\rangle\, dx = 0 \quad \forall s \in I$$

Proposición 2.2. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco, $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineal, ortogonal y positiva. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $F(p) = Ap + p_0$. Entonces*

$$\begin{aligned} &K_{F\circ\alpha} = K_\alpha \quad , \quad \tau_{F\circ\alpha} = \tau_\alpha \\ &T_{F\circ\alpha} = AT_\alpha \quad , \quad N_{F\circ\alpha} = AN_\alpha \quad , \quad B_{F\circ\alpha} = AB_\alpha \end{aligned}$$

Podemos extender las definiciones de curvatura, torsión y del tiedro de frenet para curvas regulares $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ por

$$K_\beta(t) := K_\alpha(h^{-1}(t))$$

donde $\alpha = \beta \circ h$ es una parametrización por el arco, con h difeomorfismo, $h' > 0$ y $K_\beta > 0$. Se cumple lo siguiente

- $T_\beta(t) = T_\alpha(h^{-1}(t))$
- $N_\beta(t) = N_\alpha(h^{-1}(t))$
- $B_\beta(t) = B_\alpha(h^{-1}(t))$

- $\tau_\beta(t) = \tau_\alpha(h^{-1}(t))$

Proposición 2.3. *Sea $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular, entonces*

a) $K_\beta = \dfrac{|\beta' \times \beta''|}{|\beta'|^3}$

b) $\tau_\beta = \dfrac{-det(\beta', \beta'', \beta''')}{|\beta' \times \beta''|^2} = -\dfrac{\langle \beta', \beta'' \times \beta''' \rangle}{|\beta' \times \beta''|^2}$

c) $T_\beta = \dfrac{\beta'}{|\beta'|}$

d) $B_\beta = \dfrac{\beta' \times \beta''}{|\beta' \times \beta''|}$

e) $N_\beta = \dfrac{|\beta'|^2 \beta'' - \langle \beta', \beta'' \rangle \beta'}{\left| |\beta'|^2 \beta'' - \langle \beta', \beta'' \rangle \beta' \right|}$

Teorema 3. *(Teorema Fundamental de las curvas en el Espacio)*
Sea $K, \tau : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables con $K(s) > 0$ para todo $s \in I$. Entonces existe $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco tal que

$$K_\alpha = K \quad y \quad \tau_\alpha = \tau$$

Además, si $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ es parametrizada por el arco tal que $K_\beta = K$ y $\tau_\beta = \tau$. Entonces existe un movimiento rigido $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F \circ \beta = \alpha$.

Demostración. *El sistema*

$$(FS) : \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad y \quad A(s) = \begin{pmatrix} 0 & K(s) & 0 \\ -K(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

tiene solución única para cada condición inicial $T(s_0) = T_0$, $N(s_0) = N_0$ y $B(s_0) = B_0$. Sea $\{T_0, N_0, B_0\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Consideremos

$$M(s) = \begin{pmatrix} \langle T, T \rangle & \langle T, N \rangle & \langle T, B \rangle \\ \langle N, T \rangle & \langle N, N \rangle & \langle N, B \rangle \\ \langle B, T \rangle & \langle B, N \rangle & \langle B, B \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} M'(s) &= \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}'^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}' \\ &= A \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} A^T \\ &= AM - MA \end{aligned}$$

La matriz $M_0(s) = I_3$ con $s \in I$ es una solución con $M_0(s_0) = I_3 = M(s_0)$ (pues T_0, N_0, B_0 son ortonormales). Por unicidad de la solución $M(s) \equiv I_3$ para todo $s \in I$.

La matriz $(T\ N\ B)$ tiene determinante 1 o -1. Sin embargo, el determinante es una función continua, luego es constante, pues su dominio es I, un conexo. Como vale 1 en $s = s_0$ pues T_0, N_0, B_0 es positiva, vale 1 sobre I.

Definimos $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ por

$$\alpha(x) = \int_{s_0}^{s} T(x) dx$$

Por TFC, $\alpha'(s) = T(s)$ unitario, luego α es una curva parametrizada por el arco. Además

$$K_\alpha(s) = |T'(s)| = |K(s) N(s)| = K(s)\,|N(s)| = K(s) \quad \forall s \in I$$

De ahí,

$$N_\alpha(s) = \frac{T'_\alpha(s)}{|T'_\alpha(s)|} = \frac{T'(s)}{|T'(s)|} = \frac{K(s)N(s)}{|K(s)N(s)|} = N(s)$$

y $B_\alpha(s) = T_\alpha(s) \times N_\alpha(s) = T(s) \times N(s) = B(s)$, *pues* $T(s), N(s), B(s)$ *es base ortonormal positiva. Por tanto,*

$$\tau_\alpha = \langle B'_\alpha(s), N_\alpha(s) \rangle = \langle B'(s), N(s) \rangle = \langle \langle , \tau \rangle N, N) = \tau(s)$$

Sea $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *ortogonal tal que*

$$\begin{aligned} AT_\beta(s_0) &= T_\alpha(s_0) \\ AN_\beta(s_0) &= N_\alpha(s_0) \\ AB_\beta(s_0) &= B_\alpha(s_0) \end{aligned}$$

y $p_0 = \alpha(s_0) - A\beta(s_0)$. *Luego,* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *con* $F(p) = Ap + p_0$. *Defina* $\gamma = F \circ \beta : I \to \mathbb{R}^3$. *Queremos ver que* $\gamma \equiv \alpha$. *Como* F *es movimiento rigido* α *y* γ *tienen curvatura* K *y torsión* τ *y tiedro*

$$\begin{aligned} T_\gamma &= T_{F\circ\beta} = AT_\beta \\ N_\gamma &= N_{F\circ\beta} = AN_\beta \\ B_\gamma &= B_{F\circ\beta} = AB_\beta \end{aligned}$$

Luego $f(s) = |T_\gamma(s) - T_\alpha(s)|^2 + |N_\gamma(s) - N_\alpha(s)|^2 + |B_\gamma(s) - B_\alpha(s)|^2$ *vale* 0 *en* $s = s_0$. *Por otro lado*

$$f'(s) = 2\left\langle T_\gamma - T_\alpha, T'_\gamma - T'_\alpha \right\rangle + 2\left\langle N_\gamma - N_\alpha, N'_\gamma - N'_\alpha \right\rangle + 2\left\langle B_\gamma - B_\alpha, B'_\gamma - B'_\alpha \right\rangle = 0 \quad \forall s \in I$$

por lo tanto f *es constante y por lo mencionado* $f \equiv 0$. *De este modo,* $\gamma' = T_\gamma \equiv T_\alpha = \alpha'$. *Pero*

$$\gamma(s_0) = F(\beta s_0) = A\beta(s_0) + p_0 = \alpha(s_0)$$

3. Superficies Regulares

Definición 3.1. *Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, decimos que Σ es una superficie regular si para todo $p \in \Sigma$ existe un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^3$ con $p \in V$ y una función diferenciable*

$$\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

tal que

- $\varphi(\mathcal{V}) = V \cap \Sigma$
- *φ es homeomorfismo de $\mathcal{V}$ sobre $V \cap \Sigma$*
- *$D\varphi(q) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva, es decir, si $\varphi = \varphi(u, v)$, entonces*

  $$D\varphi(q) \cdot e_1 = \frac{d}{dt}\varphi(q + te_1)\Big|_{t=0} = \varphi_u(q)$$
  $$D\varphi(q) \cdot e_2 = \frac{d}{dt}\varphi(q + te_2)\Big|_{t=0} = \varphi_v(q)$$

  son linealmente independientes, en otras palabras $\varphi_u(q) \times \varphi_v(q) \neq 0$.