FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Pontificia Universidad Católica de Chile

Título del Documento

Benjamín Mateluna

Docente Guía: Mauricio Bustamante

14 de octubre de 2025

ÍNDICE

1. Resumen.

2. Introduction.

3. Homología. Para empezar, debemos estudiar algunas definiciones y resultados de álgebra homológica y así establecer . Se comenzará por complejos de cadenas y cocadenas y algunos resultados menores. En la parte de "Resultados de Homología" se verán herramientas importantes para trabajar con los grupos de homología.

3.1. Complejos de Cadenas.

DEFINICIÓN 3.1. Un complejo de cadenas es una sucesión de grupos abelianos y homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

tal que $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ para todo i. Se denota por $(C_\bullet, \partial_\bullet)$.

OBSERVACIÓN. Notemos que $im\ \partial_{i+1} \subseteq ker\ \partial_i \subseteq C_i$. Dado que los grupos son abelianos, esta observación permite definir el siguiente grupo.

DEFINICIÓN 3.2. El $i-$ésimo grupo de homología de $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ se define por

$$H_i(C_\bullet) := \frac{ker\ \partial_i}{im\ \partial_{i+1}}$$

EJEMPLO. Veamos que

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es un complejo de cadenas, donde los grupos de homología asociados son $H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z}$, $H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_2$ y $H_k(C_\bullet) = 0$ para $k \neq 0, 1$.

Los elementos en $ker\ \partial_i$ e $im\ \partial_i$ se llaman ciclos y fronteras, respectivamente. Un elemento en $H_i(C_\bullet)$ se dice clase de homología. Los elementos en los grupos abelianos C_i se conocen como cadenas y los morfismos ∂_i como diferenciales.

Ahora que hemos introducido lo básico sobre homología, queremos estudiar como interactúan estos objetos entre sí, buscamos una noción de morfismo entre las cadenas que además induzca uno entre los grupos de homología, esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.3. Sean $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ y $(D_\bullet, \partial_\bullet)$ dos complejos de cadenas. Un mapeo de cadenas es una colección de homomorfismos $f_n : C_n \to D_n$ tal que $\partial_n f_n = f_{n-1}\partial_n$ para todo n, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
D_n \arrow[r, "\partial_n"] & D_{n-1}
\end{tikzcd}$$

y se denota por $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$.

PROPOSICIÓN 3.4. *Si $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ es un mapeo de cadenas, entonces la asignación $f_* : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$ dada por*

$$f_*([x]) = [f_n(x)]$$

esta bien definida y es un homomorfismo de grupos.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in ker\partial_n$ entonces $\partial_n f_n(x) = f_{n-1}\partial_n(x) = f_{n-1}(0) = 0$. Así, $f_n(x) \in ker\ \partial_n$ y por lo tanto la expresión tiene sentido.

Si $[x] = [y]$ entonces $x - y = \partial_{n+1}(z)$ para $z \in C_{n+1}$, se sigue que $f_n(x) - f_n(y) = f_n\partial_{n+1}(z) = \partial_{n+1} f_{n+1}(z)$. Concluimos que $[f_n(x)] = [f_n(y)]$. Que sea homomorfismo es directo de la definición. □

EJEMPLO. Consideremos la siguiente situación

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "3"] \arrow[d, "id"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 & C_\bullet \arrow[d, "f_\bullet"] \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "3"] & \mathbb{Z}_3 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 & D_\bullet
\end{tikzcd}$$

Con $f_\bullet$ un mapeo de cadenas. Entonces $f_* : H_2(C_\bullet) \to H_2(D_\bullet)$ es el morfismo trivial, ya que $H_2(C_\bullet) = 0$. Mientras que $\pi_* : H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_3 \to H_1(D_\bullet) = \mathbb{Z}_3$ es la identidad.

OBSERVACIÓN. Notemos que si $g_\bullet : D_\bullet \to G_\bullet$ es un mapeo de cadenas, entonces la colección de morfimos $(g \circ f)_\bullet : C_\bullet \to G_\bullet$ es un mapeo de cadenas y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
H_n(C_\bullet) \arrow[rr, "(g\circ f)_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & & H_n(G_\bullet) \\
& H_n(D_\bullet) \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

En efecto, $\partial_n g_n f_n = g_{n-1}\partial_n f_n = g_{n-1} f_{n-1}\partial_n$. Por otro lado, tenemos que $(g \circ f)_*([x]) = [(g \circ f)(x)] = g_*([f(x)]) = (g_* \circ f_*)([x])$, lo que prueba la afirmación.

DEFINICIÓN 3.5. Sean $f_\bullet, g_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ mapeos de cadenas. Una homotopía de cadenas es una colección de morfismos

$$h_n : C_n \to C_{n+1} \quad \text{tales que}$$
$$f_n - g_n = \partial h_n + h_{n-1}\partial$$

Lo denotamos como $f_\bullet \sim g_\bullet$.

PROPOSICIÓN 3.6. *Sea $f_\bullet \sim g_\bullet$ entonces $f_* = g_*$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $[x] \in H_n(C_\bullet)$, por definición, sabemos que $\partial x = 0$, luego

$$(f_* - g_*)([x]) = [(f - g)(x)] = [(\partial h + h\partial)(x)] = [\partial hx] = 0$$

lo que prueba la afirmación. □

3.2. Resultados sobre Homología. Los siguientes resultados van a permitir trabajar en mejor modo con los grupos de homología de un complejo de cadenas y también permitirán establecer, más adelante, la invarianza homotópica.

A partir de este momento los índices para indicar los morfismos ∂_i y entre complejos de cadenas no se escribirán, a no ser que se de una definición, para mayor comodididad.

DEFINICIÓN 3.7. Sean $i_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ y $j_\bullet : B_\bullet \to C_\bullet$ dos mapeos de cadenas. Decimos que forman una secuencia exacta corta si la secuencia

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{i_n} B_n \xrightarrow{j_n} C_n \longrightarrow 0$$

es una secuencia exacta y corta de grupos abelianos libres para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo denotamos como $0 \to A_\bullet \xrightarrow{i_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{j_\bullet} C_\bullet \to 0$.

TEOREMA 3.8 (Lema de la serpiente). *Sea $0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$ una secuencia de complejos de cadenas, entonces existen morfismos*

$$\delta_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$$

tales que la siguiente secuencia es exacta

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(A_\bullet) \arrow[r, "i_*"] & H_n(B_\bullet) \arrow[r, "j_*"] & H_n(C_\bullet) \arrow[dll, rounded corners, to path={-- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-2ex]\tikztostart.south) -| ([xshift=-8ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}, "\delta_n"'] & \\
& H_{n-1}(A_\bullet) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-1}(B_\bullet) \arrow[r, "j_*"] & H_{n-1}(C_\bullet) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(B_\bullet) \longrightarrow H_0(C_\bullet) \longrightarrow 0$$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a hacer lo que se conoce como una cacería de diagramas. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_{n+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_n \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Primero debemos definir $\delta_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$. Sea $[c] \in H_n(C_\bullet)$ entonces $c \in ker\ \partial \subseteq C_n$. Como j es sobre, existe $b \in B_n$ tal que $j(b) = c$. Consideramos ∂b y notamos que

$$j\partial(b) = \partial j(b) = \partial c = 0$$

entonces existe un único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b$. Verificamos que $i\partial(a) = \partial i(a) = \partial^2 b = 0$ y como i es inyectiva vemos que $\partial a = 0$. Afirmamos que $\delta_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$ por

$$\delta_n([c]) = [a]$$

cumple lo buscado. Debemos demostrar lo siguiente

1. No depende de la elección de b. Sea b' tal que $j(b') = c$ entonces $j(b' - b) = c - c = 0$, existe único a_0 tal que $i(a_0) = b' - b$. Por otro lado, existe a' tal que

$$i(a') = \partial b' = \partial b + \partial i(a_0) = \partial b + i\partial(a_0)$$

entonces $i(a' - \partial a_0) = \partial b = i(a)$, por inyectividad, $a' - \partial a_0 = a$, lo que implica que $[a] = [a']$.
2. No depende de la elección del representante de $[c]$. Sea $c' = c + \partial c'' = j(b) + \partial j(b'') = j(b) + j\partial(b'')$, diremos $b' = b + \partial b''$, notemos que $\partial b' = \partial b + \partial^2 b'' = \partial b$. El mismo $a \in A_{n-1}$ satisface $i(a) = \partial b'$. Entonces $\delta_n[c] = [a] = \delta_n[c']$.
3. La función δ_n es morfismo, es decir

$$\delta_n([c] + [c']) = \delta_n[c] + \delta_n[c']$$

Notar que si $j(b) = c$ y $j(b') = c'$ entonces $j(b + b') = c + c'$, existen únicos $a, a' \in A_{n-1}$ tales que $i(a + a') = \partial(b + b'')$ y así

$$\delta_n([c + c']) = [a + a'] = [a] + [a']$$

4. Exactitud en $H_n(C_\bullet)$ y $H_n(A_\bullet)$. Veamos que $im\ j_* \subseteq ker\ \delta_n$. Sea $j_*[b]$ con $\partial b = 0$. Entonces

$$\delta_n j_*[b] = \delta_n[j(b)]$$

Existe único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b = 0$, entonces $a = 0$ y por lo tanto $\delta_n j_*[b] = [a] = 0$. Queda ver que $ker\ \delta_n \subseteq im\ j_*$. Sea $[c] \in ker\ \delta_n$ con $\partial c = 0$. Por definición de δ_n, para cada b tal que $j(b) = c$ hay un único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b$.

Como $\delta_n[c] = [a] = 0$ se sigue que $a = \partial a'$ y entonces $\partial b = i(a) = i\partial(a') = \partial i(a')$, así $b - i(a') \in ker\ \partial$, es decir $b - i(a')$ representa una clase de homología.

Ahora $j(b - i(a')) = j(b) = c$, por ende, $j_*[b - i(a')] = [c]$. Para $H_n(A_\bullet)$ la demostración es similar.
5. Exactitud en $H_n(B_\bullet)$. Sea $[a] \in im\ i_*$ con $\partial a = 0$, entonces

$$j_* i_*[a] = [j_n i_n(a)] = 0$$

y por lo tanto $im\ i_* \subseteq ker\ j_*$. Sea $[b] \in ker\ j_*$ con $\partial b = 0$, entonces $j_*[b] = [j(b)] = 0$, lo que implica que $j(b) = \partial c' = \partial j(b') = j\partial(b')$, existe único $a \in A_{n-1}$ tal que $b - \partial b' = i(a)$, además

$$i\partial(a) = \partial i(a) = \partial b + \partial^2 b' = 0$$

entonces $\partial a = 0$. Luego $i_*[a] = [b]$. Concluimos que $im\ i_* = ker\ j_*$.

Lo que concluye el teorema. $\square$

LEMA 3.9. *Sean* $0 \to A_\bullet \xrightarrow{i} B_\bullet \xrightarrow{j} C_\bullet \to 0$ *y* $0 \to A'_\bullet \xrightarrow{i'} B'_\bullet \xrightarrow{j'} C'_\bullet \to 0$ *secuencias exactas cortas. Además, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_1"] & B_n \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_2"] & C_n \arrow[d, "f_3"] \\ A'_n \arrow[r, "i"] & B'_n \arrow[r, "j"] & C'_n \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde f_i es mapeo de cadenas, entonces el diagrama,

$$\begin{tikzcd} H_{n+1}(C_\bullet) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_{3*}"] & H_n(A_\bullet) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_{1*}"] & H_n(B_\bullet) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_{2*}"] & H_n(C_\bullet) \arrow[d, "f_{3*}"] \\ H_{n+1}(C_\bullet) \arrow[r, "\delta"] & H_n(A'_\bullet) \arrow[r, "i_*"] & H_n(B'_\bullet) \arrow[r, "j_*"] & H_n(C'_\bullet) \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

En otras palabras, la secuencia exacta del lema de la serpiente es natural.

DEMOSTRACIÓN. Sea $c \in C_{n+1}$ tal que $\partial c = 0$. Existen $b \in B_{n+1}$ y $b' \in B'_{n+1}$ tales que

$$j(b) = c \quad \text{y} \quad j'(b') = f_3(c)$$

Existen $a \in A_n$ y $a' \in A'_n$ tales que $i(a) = \partial b$ y $i'(a') = \partial b'$. Veamos que $f_1(a) - a' \in im\ \partial$. Notemos que

$$\begin{aligned} i'(f_1(a) - a') &= i' f_1(a) - i'(a') = f_2 i(a) - \partial b' = f_2 \partial b - \partial b' \\ &= \partial(f_2 b - b') \end{aligned}$$

Notemos que $f_2 b - b' \in ker\ j'$, en efecto,

$$j' f_2(b) - j'(b') = f_3 j(b) - f_3(c) = f_3(c) - f_3(c) = 0$$

Luego, existe $a'' \in A_{n+1}$ tal que $i'(a'') = f_2(b) - b'$, así $i'(f_1(a) - a') = \partial i'(a'') = i' \partial a''$. Por inyectividad, vemos que $f_1(a) - a' = \partial a''$. Hemos probado que $f_{1*}\delta = \delta' f_{3*}$, el resto es trivial. $\square$

PROPOSICIÓN 3.10 (Lema del 5). *Considerar el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\ B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5 \end{tikzcd}$$

donde las filas son secuencias exactas y cada cuadrado conmuta. Si f_1, f_2, f_4 y f_5 son isomorfismos, entonces f_3 es isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Por simplicidad del argumento, denotaremos los morfismos $A_i \to A_{i+1}$ y $B_i \to B_{i+1}$ como ∂. Debido a que ambas secuencias son exactas, resulta que $\partial^2 a = \partial \circ \partial(a) = 0$. Veamos que $ker\ f_3 = 0$. Sea $a \in ker\ f_3$, notemos que

$$0 = \partial f_3(a) = f_4 \partial(a) \quad \text{entonces} \quad \partial a = 0$$

Como $a \in ker\ \partial$, existe $a' \in A_2$ tal que $\partial a' = a$, luego $\partial f_2(a') = f_3 \partial(a') = f_3(a) = 0$. Por exactitud, existe $b' \in B_1$ tal que $\partial b' = f_2(a')$, puesto que f_1 es isomorfismo, existe $a'' \in A_1$ tal que $b' = f_1(a'')$, usando que los diagramas conmutan vemos que

$$a'' = f_1^{-1}(b') \quad \text{entonces} \quad \partial a'' = \partial f_1^{-1}(b') = f_2^{-1}\partial(b')$$

recordemos que $\partial b' = f_2(a')$, es decir, $\partial a'' = a'$, luego $0 = \partial^2 a'' = \partial a' = a$.

Sea $b \in B_3$, consideramos $\partial b \in B_4$, entonces $f_4^{-1}(\partial b) \in A_4$, por conmutatividad del diagrama se sigue que $\partial f_4^{-1}(\partial b) = f_5^{-1}(\partial^2 b) = 0$, luego, por exactitud, existe $a \in A_3$ tal que $\partial a = f_4^{-1}(\partial b)$. Observemos que,

$$\partial(f_3(a) - b) = \partial f_3(a) - \partial b = f_4 \partial(a) - \partial b = 0$$

Así, existe $b' \in B_2$ tal que $\partial b' = f_3(a) - b$, definimos $a' = f_2^{-1}(b') \in A_2$, de este modo,

$$f_3(a) - b = \partial b' = \partial f_2(a') = f_3(\partial a')$$

En resumen, $f_3(a - \partial a') = b$. Concluimos que f_3 es isomorfismo. □

3.3. Homología Singular. La idea ahora es definir, dado un espacio topologico X, un complejo de cadenas $C_*(X)$, y para cada función continua $f : X \to Y$, construir un mapeo de cadena $f_* : C_*(X) \to C_*(Y)$, para luego obtener los grupos de homología $H_*(X)$ de cada espacio y los mapeos $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$.

Para esta construcción se utilizará homología singular. La ventaja de esta vía, es que la definicón es una proppiedad instrínseca del espacio, sin embargo, resulta casi imposible calcular los complejos de cadenas y por ende, los grupos de homología.

DEFINICIÓN 3.11. Un $n-$simplice estándar es

$$\Delta^n = \left\{(t_0, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0, \sum t_i = 1\right\}$$

OBSERVACIÓN. La $i-$ésima cara de Δ^n es $\Delta_i^n = \{(t_0, \cdots, t_n) \in \Delta^n : t_i = 0\}$. Notamos que un $n-$simplice estándar tiene $n+1$ caras, donde cada una luce como un $(n-1)-$simplice estándar. De hecho, mediante el mapeo

$$\begin{aligned} \delta_i : \Delta^{n-1} &\to \Delta_i^n \\ (t_0, \cdots, t_{n-1}) &\to (t_0, \cdots, t_{i-1}, 0, t_i, \cdots, t_{n-1}) \end{aligned}$$

resulta ser homeomorfa a Δ^{n-1}.

DEFINICIÓN 3.12. Sea X un espacio topologico. Un $n-$simplice singular en X es una función continua $\sigma : \Delta^n \to X$.

Dado un espacio X, tenemos una colección de $n-$simplices, vamos a considerar el grupo abeliano libre generado por este conjunto para construir un complejo de cadenas y así los grupos de homología.

DEFINICIÓN 3.13. Definimos

$$C_n(X) := \left\{\sum n_\sigma \sigma \mid \sigma : \Delta^n \to X, n_\sigma \in \mathbb{Z} \text{ nulo salvo finitos casos}\right\}$$

Junto con los diferenciales $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ dada por

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \delta_i$$

que se extiende linealmente.

Al complejo $(C_\bullet(X), \partial_\bullet)$ se le llama complejo de cadena singular. Aunque debemos verificar que $\partial^2 = 0$, lo que se muestra en el siguiente lema.

LEMA 3.14. *El morfismo* $d_{n-1} \circ d_n : C_n(X) \to C_{n-2}(X)$ *es trivial.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar para cada elemento en la base, es decir, para $\sigma : \Delta^n \to X$. Tenemos lo siguiente

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i$$

Usando que $\delta_j \circ \delta_i = \delta_i \circ \delta_{j-1}$ si $i < j$, vemos que

$$\begin{aligned}\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) &= \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\sigma \circ \delta_j \circ \delta_i + \sum_{i \geq j}(-1)^{i+j}\sigma \circ \delta_j \circ \delta_i \\ &= \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\sigma \circ \delta_i \circ \delta_{j-1} + \sum_{i \geq j}(-1)^{i+j}\sigma \circ \delta_j \circ \delta_i\end{aligned}$$

haciendo un cambio de índice en la primera expresión, resulta que

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = \sum_{i \leq j}(-1)^{i+j+1}\sigma \circ \delta_i \circ \delta_j + \sum_{i \geq j}(-1)^{i+j}\sigma \circ \delta_j \circ \delta_i = 0$$

□

Con lo anterior podemos definir la homología singular de un espacio topológico arbitrario.

DEFINICIÓN 3.15. La homología singular de un espacio topológico X, es la homología del complejo de cadenas $C_\bullet(X)$, es decir,

$$H_i(X) := H_i(C_\bullet(X), \partial_\bullet) = \frac{ker\ \partial_i}{im\ \partial_{i+1}}$$

Hemos cumplido con una parte del objetivo inicial, ahora nos gustaría, dada una función continua $f : X \to Y$ entre espacios topológicos, un morfismo entre sus grupos de homología, para ello la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.16. *Sea* $f : X \to Y$ *un función continua entre espacios topológicos, entonces las funciones*

$$f_n : C_n(X) \to C_n(Y) \quad \textit{dadas en la base por} \quad f_n(\sigma) = f \circ \sigma$$

forman un mapeo de cadenas $f_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$.

DEMOSTRACIÓN. Es directo de la definición que para todo $n \in \mathbb{N}$ la función f_n es morfismo de grupos abelianos, por otro lado

$$\partial_n f_n(\sigma) = \partial_n(f \circ \sigma) = \sum_i (-1)^i f \circ \sigma \circ \delta_i = \sum_i (-1)^i f_{n-1}(\sigma \circ \delta_i) = f_{n-1}\partial_n(\sigma)$$

□

OBSERVACIÓN. Juntando lo anterior y un resultado previo, la función f induce un morfismo de grupos $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$, más aún, si f es homeomorfismo, entonces f_* es isomorfismo. Por ende, los grupos de homología son un invariante topológico.

Lo bueno de esta construcción, a diferencia de otras construcciones, es que las definiciones no dependen de otra cosa más que el espacio topológico, es decir, de los abiertos del espacio. Pero esto viene con un precio a pagar, es prácticamente imposible calcular estos grupos usando únicamente la definición. Sin embargo, podemos calcular unos pocos ejemplos que resultarán útiles mas adelante.

EJEMPLO. Sea $X = pt = \{*\}$, el espacio que consiste de un punto. Entonces, existe un único simplice singular, digamos, $\sigma_n : \Delta^n \to pt$, lo que implica que $\sigma_n \circ \delta_i = \sigma_{n-1}$, luego

$$\partial_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_n \circ \delta_i = \begin{cases} \sigma_{n-1} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

para $i > 0$, vemos que

$$\cdots \longrightarrow C_{i+1}(pt) \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i(pt) \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1}(pt) \longrightarrow \cdots$$

entonces

$$H_i(pt) = \frac{ker\ \partial_i}{im\ \partial_{i+1}} = \frac{C_i(pt)}{C_i(pt)} = 0 \quad \text{si } \ i \text{ es impar}$$

y $H_i(pt) = 0$ para i par, ya que ∂_i es inyectivo. Para $i = 0$ se tiene que $H_0(pt) = \mathbb{Z}$, por que $C_0(pt) \cong \mathbb{Z}$.

LEMA 3.17. *Sea X un espacio arcoconexo no vacío, entonces $H_0(X) = \mathbb{Z}$.*

DEMOSTRACIÓN. Se define el morfismo $\varphi : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ dado por

$$\varphi\left(\sum n_\sigma \sigma\right) = \sum n_\sigma$$

Como X es no vacío, el morfismo es sobreyectivo. Afirmamos que $ker\ \varphi = im\ \partial_1$, en efecto, sea $\sigma \in C_1(X)$, luego

$$\varphi(\partial_1(\sigma)) = \varphi(\sigma \circ \delta_0 - \sigma \circ \delta_1) = 1 - 1 = 0$$

Por otro lado, supongamos que $\sum n_\sigma \sigma \in ker\ \varphi$. Sea $x_0 \in X$, consideremos el $0-$simplice singular $\sigma : \Delta^0 \to X$. Como el espacio es arcoconexo, existe $\tau_\sigma : \Delta^1 \to X$ de modo que $\tau_\sigma \circ \delta_0 = \sigma$ y $\tau_\sigma \circ \delta_1 = x_0$, así

$$\partial_1\left(\sum n_\sigma \tau_\sigma\right) = \sum n_\sigma(\sigma - x_0) = \sum n_\sigma \sigma - \left(\sum n_\sigma\right) x_0 = \sum n_\sigma \sigma$$

por lo tanto,

$$H_0(X) = \frac{C_0(X)}{im\ \partial_1} = \frac{C_0(X)}{ker\ \varphi} \cong \mathbb{Z}$$

□

Lo anterior da pie a la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.18. *Sea $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ es la unión disjunta de componentes arcoconexas, entonces*

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha \in A} H_n(X_\alpha)$$

DEMOSTRACIÓN. La inclusión $i_\alpha : X_\beta \to X$ es continua para todo $\alpha \in A$, por propiedad universal de topología disjunta, luego tenemos la colección de morfismos,

$$i_{\alpha *} : H_n(X_\alpha) \to H_n(X)$$

por la propiedad universal de la suma directa, se induce un único morfismo

$$i_* : \bigoplus_{\alpha \in A} H_n(X_\alpha) \to H_n(X)$$

por continuidad, es isomorfismo. □

4. Herramientas de Homología Singular. En esta sección veremos sin demostración, o al menos no detallada, teoremas que son fundamentales en la teoría de homología de espacios topológicos, como lo son la secuencia de Mayer-Vietoris, homología relativa, escición e invarianza homotópica.

4.1. Invarianza Homotópica.

TEOREMA 4.1. *Sean $f, g : X \to Y$ funciones homotópicas. Entonces, inducen el mismo morfismo en homología, es decir,*

$$f_* = g_* : H_*(X) \to H_*(Y)$$

COROLARIO 4.2. *Sea $f : X \to Y$ una equivalencia homotópica, entonces*

$$f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$$

es isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $g : Y \to X$ una inversa homotópica, entonces

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (id_X)_* = id_{H_*(X)}$$

Igualmente, tenemos que $f_* \circ g_* = id_{H_*(Y)}$. Entonces f_* es un isomorfismo con inversa g_*. □

EJEMPLO. Como $\mathbb{R}^n$ es homotópico a un punto, resulta que

$$H_i(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

4.2. Mayer-Vietoris.

TEOREMA 4.3 (Mayer-Vietoris). *Sea $X = A \cup B$ con A y B conjuntos abiertos. Se tienen las inclusiones*

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "i_B"] & A \arrow[d, "j_A"] \\ B \arrow[r, "j_B"] & X \end{tikzcd}$$

Entonces, existen homomorfismos $\delta : H_n(X) \to H_{n-1}(A \cap B)$ tales que la siguiente secuencia es exacta

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\delta"] & H_n(A\cap B) \arrow[r, "i_{A*}\oplus i_{B*}"] & H_n(A)\oplus H_n(B) \arrow[r, "j_{A*}-j_{B*}"] & H_n(X) \arrow[dlll, "\delta"] \\
& H_{n-1}(A\cap B) \arrow[r, "i_{A*}\oplus i_{B*}"] & H_{n-1}(A)\oplus H_{n-1}(B) \arrow[r, "j_{A*}-j_{B*}"] & H_{n-1}(X) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(A)\oplus H_0(B) \xrightarrow{j_{A*}-j_{B*}} H_0(X) \longrightarrow 0$$

Es mas, la secuencia de Mayer-Vietoris es natural, es decir, si $f : X = A\cup B \to Y = U\cap V$ cumple que $f(A)\subseteq U$ y $f(B)\subseteq V$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(A\cap B) \arrow[r, "i_{A*}\oplus i_{B*}"] \arrow[d, "f|_{A\cap B*}"] & H_n(A)\oplus H_n(B) \arrow[r, "j_{A*}-j_{B*}"] \arrow[d, "f|_{A*}\oplus f|_{B*}"] & H_n(X) \arrow[d, "f_*"] \\
H_{n+1}(Y) \arrow[r, "\delta"] & H_n(U\cap V) \arrow[r, "i_{U*}\oplus i_{V*}"] & H_n(U)\oplus H_n(V) \arrow[r, "j_{U*}-j_{V*}"] & H_n(Y)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

DEMOSTRACIÓN. Basta notar la siguiente secuencia

$$0 \longrightarrow C_n(A\cap B) \xrightarrow{i_A\oplus i_B} C_n(A)\oplus C_n(B) \xrightarrow{j_B-j_A} C_n(X) \longrightarrow 0$$

es exacta para todo $n\in\mathbb{N}$. Luego, aplicar el lema de la serpiente y naturalidad del mismo. □

4.3. Homología Relativa.

La inclusión $i : A\to X$ induce un morfismo a nivel de cadenas que resulta ser inyectivo, así, podemos ver $C_n(A)$ como un subgrupo de $C_n(X)$, además, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_n(A) \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & C_n(X) \arrow[d, "\partial_n"] \\
C_{n-1}(A) \arrow[r, "i_{n-1}"] & C_{n-1}(X)
\end{tikzcd}$$

conmuta, lo que motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.4. Sea $A\subseteq X$. Definimos

$$C_n(X,A) := \frac{C_n(X)}{C_n(A)}$$

el diferencial $\partial_n : C_n(X,A)\to C_{n-1}(X,A)$, dado por $\partial_n([c]) := [\partial_n(c)]$. Del complejo de cadenas $(C_\bullet(X,A),\partial_\bullet)$, definimos la homología relativa de X respecto a A como

$$H_n(X,A) := H_n(C_\bullet(X,A))$$

TEOREMA 4.5. *Existen homomorfismos $\delta : H_n(X,A)\to H_{n-1}(A)$. Mas aún, la siguiente secuencia es exacta*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta"] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] & H_n(X) \arrow[r, "q_*"] & H_n(X,A) \arrow[dll, rounded corners, "\delta"] \\
& H_{n-1}(A) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-1}(X) \arrow[r, "q_*"] & H_{n-1}(X,A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(X) \xrightarrow{q_*} H_0(X,A) \longrightarrow 0$$

donde q_* es el morfismo inducido por la proyección $q : C_\bullet(X) \to C_\bullet(X,A)$.

DEMOSTRACIÓN. La siguiente secuencia

$$0 \longrightarrow C_n(A) \xrightarrow{i_n} C_n(X) \xrightarrow{q_n} C_n(X,A) \longrightarrow 0$$

es exacta para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluimos por el lema de la serpiente. □

DEFINICIÓN 4.6. Una tupla (X,A) se dice par de espacios si X y A son espacios topológicos tales que $A \subseteq X$ y A con la topología de subespacio. Sean (X,A) y (Y,B) pares de espacios. Un mapeo de pares es una función continua $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subseteq B$.

Tales mapas inducen un morfismo $f_* : H_n(X,A) \to H_n(X,A)$ tal que la secuencia exacta de homología relativa es natural.

TEOREMA 4.7 (Teorema de Escisión). *Sea (X,A) un par de espacios y $Z \subseteq A$ tal que $\overline{Z} \subseteq int(A)$ tomando la clausura en X. Entonces*

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \cong H_n(X,A)$$

REFERENCIAS

[1] BILLINGSLEY, P. (1999). *Convergence of Probability Measures*, 2nd ed. Wiley, New York.