Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Gregorio Moreno – Estudiante: Benjamín Mateluna

Teoría de Integración - MAT2534
Tarea 2
09 de Mayo de 2025

Problema 1

Sean f, f_n con $n \geq 1$ funciones integrables tales que $f_n \to f$ μ-ctp. Por desigualdad triangular, basta probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \ d\mu = 0$$

Notemos que $|f_n - f| \leq |f_n| + |f|$. Definimos $g_n := |f_n| + |f| - |f_n - f|$ que resulta positiva y medible para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, por lema de fatou

$$\begin{aligned} 2\int |f| \ d\mu &= \int \liminf_{n\to\infty} g_n \ d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int g_n \ d\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(\int |f_n| \ d\mu + \int |f| \ d\mu - \int |f_n - f| \ d\mu \right) \end{aligned}$$

usando que $-\inf x = \sup -x$, vemos que

$$2\int |f| \ d\mu \leq 2\int |f| \ d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \ d\mu$$

se sigue que

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int |f_n - f| \ d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \ d\mu \leq 0$$

Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \ d\mu = 0$$

Problema 2

a) Sea $0 \leq s \leq f$ simple y sea $0 < c < 1$. Definimos $E_n := \{x \in \Omega : g_n(x) \geq c \cdot s(x)\}$ para $n \in \mathbb{N}$. Consideramos la medida $\varphi : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ dada por

$$\varphi(E) = \int_E s \ d\mu \qquad \text{para } E \in \mathcal{F}$$

Luego,

$$\int g_n \ d\mu \geq \int_{E_n} g_n \ d\mu \geq \int_{E_n} c \cdot s \ d\mu = c \int_{E_n} s \ d\mu = c \cdot \varphi(E_n)$$

Como $g_n \leq g_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $E_n \subseteq E_{n+1}$. Por otra parte, como $g_n \to f$ vemos que

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = \varphi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \varphi(\Omega) = \int s \ d\mu$$

de este modo,
$$\lim_{n\to\infty}\int g_n\ d\mu \geq c\cdot \lim_{n\to\infty}\varphi(E_n) = c\int s\ d\mu$$
como c es arbitrario, tomando $c\uparrow 1$, concluimos que
$$\lim_{n\to\infty}\int g_n\ d\mu \geq \int s\ d\mu$$

b) Sea $(s_n)_n$ una sucesión de funciones simples positivas tales que $s_n\uparrow f$, por la parte anterior, tenemos que
$$\int s_n\ d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int \inf_{k\geq n} f_k\ d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n}\int f_k\ d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int f_n\ d\mu$$
lo que implica que
$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\ d\mu = \int f\ d\mu = \lim_{n\to\infty}\int s_n\ d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int f_n\ d\mu$$
se tiene el lema de fatou.

c) Sean $f, f_n : \Omega\to[0,\infty]$ funciones medibles tales que $f_n\leq f_{n+1}$ y $f_n\to f$ μ-ctp. Como $f_n\leq f$, por monotonía, sabemos que
$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\ d\mu \leq \int f\ d\mu$$
por otro lado, por el lema de fatou, tenemos que
$$\begin{aligned}\int f\ d\mu &= \int \lim_{n\to\infty} f_n\ d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} f_n\ d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int f_n\ d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty}\int f_n\ d\mu\end{aligned}$$
lo que prueba el teorema de convergencia monótona.

Problema 3

Sean $f, f_n : \Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ funciones mediles y $g\in L^1$ tales que $f_n\to f$ μ-ctp y $|f_n|\leq g$. Notemos que $|f_n|\to|f|$ μ-ctp, luego $|f|\leq g$ μ-ctp. Dado $m\in\mathbb{N}$, por teorema de Egoroff, existe $\Omega_m^*\in\mathcal{F}$ tal que
$$\mu((\Omega_m^*)^c) < \frac{1}{m}$$
y f_n converge uniformemente a f en Ω_m^* para todo $m\in\mathbb{N}$. Definimos la sucesión
$$\Omega_m := \bigcup_{i=1}^m \Omega_i^*$$
Notemos que $\Omega_m^c\supseteq\Omega_{m+1}^c$, $\mu(\Omega_m^c)<\frac{1}{m}$ para todo $m\in\mathbb{N}$. Además, la convergencia en Ω_m sigue siendo uniforme, basta tomar máximo. Dado $m\in\mathbb{N}$, se tiene lo siguiente
$$\begin{aligned}\int |f_n - f|\ d\mu &= \int_{\Omega_m} |f_n - f|\ d\mu + \int_{\Omega_m^c} |f_n - f|\ d\mu \\ &\leq \sup_{x\in\Omega_m} |f_n - f|\,\mu(\Omega_m) + \int_{\Omega_m^c} |f_n - f|\ d\mu \\ &\leq \sup_{x\in\Omega_m} |f_n - f|\,\mu(\Omega) + 2\int_{\Omega_m^c} g\ d\mu\end{aligned}$$
Como g es positiva, consideramos la medida $\varphi:\Omega\to[0,\infty]$ sobre el espacio $(\Omega,\mathcal{F})$ dada por
$$\varphi(E) = \int_E g\ d\mu \qquad \text{para } E\in\mathcal{F}$$

que es finita, pues $g \in L^1$. Luego, como $\mu(\Omega_1^c) \leq \mu(\Omega) < \infty$ y $\varphi(\Omega_1^c) \leq \varphi(\Omega) < \infty$ tenemos

$$\mu\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \Omega_m^c\right) = \lim_{m\to\infty} \mu(\Omega_m^c) \quad \text{ y } \quad \varphi\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \Omega_m^c\right) = \lim_{m\to\infty} \varphi(\Omega_m^c)$$

Recordemos que $\mu(\Omega_m^c) < \frac{1}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, vemos que

$$\mu\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \Omega_m^c\right) = \lim_{m\to\infty} \mu(\Omega_m^c) = 0 \quad \text{lo que implica que} \quad \varphi\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \Omega_m^c\right) = 0$$

De este modo, por convergencia uniforme, para todo $m \in \mathbb{N}$ se sigue que

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \ d &\leq \limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in\Omega_m} |f_n - f|\, \mu(\Omega) + 2\varphi(\Omega_m^c)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega_m} |f_n - f|\, \mu(\Omega) + \lim_{n\to\infty} 2\varphi(\Omega_m^c) = 2\varphi(\Omega_m^c)\end{aligned}$$

entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \ d\mu = \lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \ d\mu \leq 2 \lim_{m\to\infty} \varphi(\Omega_m^c) = 0$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \ d\mu = 0$$

En particular, usando desigualdad triangular, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \ d\mu = \int f \ d\mu$$

Problema 4

a) Notemos que $\mathbb{1}_X = \mathbf{1} \in \mathcal{V}$, entonces $X \in \mathcal{G}$. Sea $E \in \mathcal{G}$, luego $\mathbb{1}_E \in \mathcal{G}$, como $\mathcal{V}$ es espacio vectorial, vemos que

$$\mathbb{1}_{E^c} = \mathbf{1} - \mathbb{1}_E \in \mathcal{V}$$

se sigue que $E^c \in \mathcal{G}$. En primer lugar veremos que si $A, B \in \mathcal{G}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{G}$. En efecto, veamos que $\mathbb{1}_{A\cup B} = \max\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\} \in \mathcal{V}$, inductivamente se tiene que $\mathcal{G}$ es cerrado bajo uniones finitas. Sea $(A_n)_n \subseteq \mathcal{G}$, definimos la sucesión

$$E_n := \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{G}$$

notemos que $E_n \subseteq E_{n+1}$ lo que implica que $\mathbb{1}_{E_n} \leq \mathbb{1}_{E_{n+1}} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} = \sup_n \mathbb{1}_{E_n} \in \mathcal{V}$$

Concluimos que $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra.

b) Veamos que dadas $f, g \in \mathcal{V}$ se tiene que $\min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\} \in \mathcal{V}$. Sea $f \in \mathcal{V}$, basta ver que $A := f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{G}$ para todo $a \in \mathbb{R}$, es decir, $\mathbb{1}_A \in \mathcal{V}$. Definimos

$$f_n := \min\{\mathbf{1}, \max\{\mathbf{0}, n(f - \mathbf{a})\}\} \in \mathcal{V}$$

donde $\mathbf{0} = \mathbb{1}_\emptyset$ y $\mathbf{a} = a\mathbf{1}$, ambos en $\mathcal{V}$. Notemos que $f_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $f_n \leq f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos dos casos. Sea $x \in A$, entonces $f(x) - a > 0$ y luego $n(f(x) - a) \leq (n + 1)$. Si $x \notin A$, entonces $f_n(x) = 0$, con $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto $\sup_n f_n \in \mathcal{V}$. Afirmamos que $\mathbb{1}_A = \sup_n f_n$. Sea $x \in A$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq n(f(x) - a)$ y por ende $f_n(x) = 1$, se sigue que $\sup_n f_n(x) = 1$. Concluimos que f es $\mathcal{G}$- medible.

c) Definimos $\mu : X \to [0,\infty]$ sobre el espacio $(X,\mathcal{G})$ como $\mu(E) := I(\mathbb{1}_E)$ con $E \in \mathcal{G}$. Afirmamos que μ es una medida, en efecto, como $I(f) \geq 0$ para toda $f \in \mathcal{V}$ con $f \geq 0$, entonces dado $E \in \mathcal{G}$ vemos que $\mu(E) = I(\mathbb{1}_E) \geq 0$. Por otro lado, $\mu(\emptyset) = I(\mathbb{1}_\emptyset) = I(\mathbf{1} - \mathbf{1}) = I(\mathbf{1}) - I(\mathbf{1}) = 0$.

Sea $(A_n)_n \subseteq \mathcal{G}$ disjuntos de a pares, entonces

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$$

de este modo, para $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= I\left(\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}\right) = I\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}\right) = I\left(\sum_{n=1}^{m} \mathbb{1}_{A_n}\right) + I\left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{m} I(\mathbb{1}_{A_n}) + I\left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}\right)\end{aligned}$$

Consideremos la sucesión $f_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}$, luego $f_m \geq f_{m+1}$ y como $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$, se sigue que $\lim\limits_{m\to\infty} f_m = 0$ y por lo tanto $\lim\limits_{m\to\infty} I(f_m) = 0$, así

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} I(\mathbb{1}_{A_n}) + I(f_m) = \sum_{n\in\mathbb{N}} I(\mathbb{1}_{A_n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Por otro lado, μ es de medida finita, en efecto, $\mu(X) = I(\mathbf{1}) \in \mathbb{R}$. En particular, μ es una medida sobre el álgebra $\mathcal{G}$, por teorema de Caratheodory, $\mu^*\big|_{\mathcal{F}}$ es la unica extensión de μ a $\sigma(\mathcal{G})$. Sin embargo, $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ ya que $\mathcal{G}$ es σ-álgebra y por ende $\mu^*\big|_{\mathcal{F}} = \mu$ en $\mathcal{G}$.

Falta ver que dada $f \in \mathcal{V}$ se tiene que

$$I(f) = \int f\, d\mu$$

Sea $s \in \mathcal{V}$ simple y sea $\sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$ una representación, vemos que

$$\int s\, d\mu = \sum a_i \mu(A_i) = \sum a_i I(\mathbb{1}_{A_i}) = I\left(\sum a_i \mathbb{1}_{A_i}\right) = I(s)$$

Sean $f, g \in \mathcal{V}$ tales que $f \leq g$, entonces $0 \leq I(g-f) = I(g) - I(f)$, es decir, I es creciente. Sea $f \in \mathcal{V}$ tal que $f \geq 0$, sea $(s_n)_n$ una sucesión de funciones simples positivas tales que $s_n \uparrow f$, de este modo la sucesión $g_n = f - s_n$ es decreciente y $g_n \to 0$, entonces $I(g_n) \to 0$. Además

$$I(s_n) \leq I(s_{n+1}) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

así, la expresión $\lim\limits_{n\to\infty} I(s_n)$ existe. Se sigue que

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I(s_n) = \lim_{n\to\infty} \int s_n\, d\mu = \int f\, d\mu$$

Sea $f \in \mathcal{V}$, luego

$$\int f\, d\mu = \int f_+\, d\mu - \int f_-\, d\mu = I(f_+) - I(f_-) = I(f)$$