Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Pedro Gaspar – Estudiante: Benjamín Mateluna

Geometría Diferencial - MAT2860
Resumen de Curvas en $\mathbb{R}^n$
22 de Marzo de 2025

1. Curvas en $\mathbb{R}^n$

1.1. Curvas parametrizadas

Definición 0.1. *Una curva parametrizada en $\mathbb{R}^n$ es una función continua $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con I un intervalo abierto. Escribimos $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \cdots, \alpha_n(t))$.*

Diremos que α es diferenciable si sus funciones coordenadas $\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty$. En tal caso, el vector $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \cdots, \alpha_n'(t))$ se llama vector tangente a la curva α en $t \in I$.

Definición 0.2. *La traza de una curva parametrizada $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es $\alpha(I) = im(\alpha)$.*

1.2. Longitud y Parametro de Arco

Definición 0.3. *La longitud de una curva parametrizada α sobre $[a, b] \subseteq I$ es*

$$L_a^b(\alpha) = sup\{L_a^b(\alpha, P) : P \text{ es partición de } [a, b]\}.$$

Proposición 0.1. *Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable sobre $[a, b] \subseteq I$, entonces*

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt$$

(Para la demostración revisar Montiel-Ros, página 5)

Corolario 0.1. *En general se tiene que $|\alpha(a) - \alpha(b)| \leq L_a^b(\alpha)$.*

Corolario 0.2. *Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cumple $|DF(p)v| = |v|$ para todo $p, v \in \mathbb{R}^n$, entonces $L_a^b(F \circ \alpha) = L_a^b(\alpha)$.*

Corolario 0.3. *Si $h : J \subseteq \mathbb{R} \to I \subseteq \mathbb{R}$ es un difeomorfismo y $\alpha : I \to \mathbb{R}$ es una curva parametrizada diferenciable, entonces*

$$L_a^b(\alpha \circ h) = L_c^d(\alpha)$$

donde $h([a, b]) = [c, d]$ para todo $[a, b] \subseteq J$.

La curva $\alpha \circ h$ tiene la misma traza que α, es decir, $(\alpha \circ h)(J) = \alpha(I)$. Decimos que $\alpha \circ h$ es una reparametrización de la curva *alpha*.

Definición 0.4. *Se dice que una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Si además $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$ se dice que α esta parametrizada por el arco.*

Teorema 1. *Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable regular, entonces α admite una parametrización por arco. Concretamente , si $t_0 \in I$ y definimos $s : I \to \mathbb{R}$ por*

$$s(t) := \int_{t_0}^t |\alpha'(t)|\, dt$$

entonces s es un difeomorfismo sobre $J \subseteq \mathbb{R}$ y $\alpha \circ s^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ esta parametrizada por el arco.

1.3. Curvatura de una Curva Regular (Teoría Local de Curvas)

Definición 1.1. *Notamos por $\mathcal{J}$ a la función $\mathcal{J} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathcal{J}(x, y) = (-y, x)$.*

Definición 1.2. *Dada $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por el arco, definimos las funciones*

$$\begin{aligned}
T_\alpha : I \to \mathbb{R}^2 &\quad \text{dada por} \quad T_\alpha(s) := \alpha'(s)\\
N_\alpha : I \to \mathbb{R}^2 &\quad \text{dada por} \quad N_\alpha(s) := \mathcal{J}T_\alpha(s)\\
K_\alpha : I \to \mathbb{R} &\quad \text{dada por} \quad K_\alpha(s) := \langle T_\alpha'(s), N_\alpha(s)\rangle
\end{aligned}$$

Observación: El conjunto $\{T(s), N(s)\}$ es una base ortonormal en $\mathbb{R}^n$ para cada $s \in I$, llamado Diedro de Frenet.

Proposición 1.1. *Para una curva parametrizada por el arco* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ *vale que* $T' = KN$ *y* $N' = -KT$.

Proposición 1.2. *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ *una curva regular, entonces*

a) $K_\alpha \equiv 0$ *si y solo si* α *es un segmento de recta.*

b) Si $\phi : \widetilde{I} \to I$ *es un difeomorfismo entonces* $K_{\alpha\circ\phi} = sgn(\phi')K_\alpha \circ \phi$.

c) Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *es un movimiento rigido, entonces* $K_{F\circ\alpha} = (detDF)K_\alpha$.

Teorema 2. *Sea* $K : I \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable, entonces existe una unica curva parametrizada por el arco* $\alpha : I \to \mathbb{R}$*, salvo por movimientos rigidos, tal que* $K_\alpha = K$.

1.4. Teoría Local de Curvas en el Espacio

Definición 2.1. *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva parametrizada por el arco. La curvatura de* α *en* $s \in I$ *es*

$$K_\alpha := |T'_\alpha(s)|$$

donde $T_\alpha(s) = \alpha'(s)$.

Definición 2.2. *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva parametrizada por el arco, tal que* $K_\alpha > 0$*. Definimos*

$$N_\alpha(s) := \frac{T'_\alpha(s)}{|T'_\alpha(s)|}$$

Definición 2.3. *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva parametrizada por el arco. Definimos el vector binormal de* α *en* $s \in I$ *por*

$$B_\alpha(s) = T_\alpha(s) \times N_\alpha(s)$$

Definición 2.4. *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva parametrizada por el arco. Su torsión es*

$$\tau_\alpha := \langle B'_\alpha(s), N_\alpha(s)\rangle$$

Observación: El conjunto $\{T, N, B\}$ es una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$ para todo $s \in I$ llamada el tiedro de Frenet de α en $s \in I$.

Proposición 2.1. *Dada* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva parametrizada por el arco, se verifican las siguientes ecuaciones*

- $T'(s) = K(s)N(s)$
- $N'(s) = -K(s)T(s) - \tau(s)B(s)$
- $B'(s) = \tau(s)N(s)$

llamadas ecuaciones de Frenet-Serret.

Proposición 2.2. *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva parametrizada por el arco,* $p_0 \in \mathbb{R}^3$*,* $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *lineal, ortogonal y positiva. Sea* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *con* $F(p) = Ap + p_0$*. Entonces*

$$\begin{array}{lll} K_{F\circ\alpha} = K_\alpha \quad , & \tau_{F\circ\alpha} = \tau_\alpha & \\ T_{F\circ\alpha} = AT_\alpha \quad , & N_{F\circ\alpha} = AN_\alpha \quad , & B_{F\circ\alpha} = AB_\alpha \end{array}$$

Definición 2.5. *Sea* $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva regular. Consideremos* $\alpha = \beta \circ h$ *una parametrización por el arco de* β*, con* $h : J \to I$ *un difeomorfismo tal que* $h' > 0$*. Definimos su curvatura como*

$$K_\beta(t) := K_\alpha(h^{-1}(t))$$

Si $K_\beta > 0$*, también definimos*

- $T_\beta(t) = T_\alpha(h^{-1}(t))$

- $N_\beta(t) = N_\alpha(h^{-1}(t))$
- $B_\beta(t) = B_\alpha(h^{-1}(t))$
- $\tau_\beta(t) = \tau_\alpha(h^{-1}(t))$

Proposición 2.3. *Sea $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular, entonces*

a) $K_\beta = \dfrac{|\beta' \times \beta''|}{|\beta'|^3}$

b) $\tau_\beta = \dfrac{-det(\beta', \beta'', \beta''')}{|\beta' \times \beta''|^2} = -\dfrac{\langle \beta', \beta'' \times \beta''' \rangle}{|\beta' \times \beta''|^2}$

c) $T_\beta = \dfrac{\beta'}{|\beta'|}$

d) $B_\beta = \dfrac{\beta' \times \beta''}{|\beta' \times \beta''|}$

e) $N_\beta = \dfrac{|\beta'|^2 \beta'' - \langle \beta', \beta'' \rangle \beta'}{\left| |\beta'|^2 \beta'' - \langle \beta', \beta'' \rangle \beta' \right|}$

Teorema 3. *(Teorema Fundamental de las curvas en el Espacio)*
Sea $K, \tau : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables con $K(s) > 0$ para todo $s \in I$. Entonces existe $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco tal que

$$K_\alpha = K \quad y \quad \tau_\alpha = \tau$$

Además, si $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ es parametrizada por el arco tal que $K_\beta = K$ y $\tau_\beta = \tau$. Entonces existe un movimiento rigido $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F \circ \beta = \alpha$.