



## Topología Algebraica - MAT2850

### Tarea 1

21 de agosto de 2025

## Problema 1

**Lema:** Sean  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  homotópicas y  $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$  homotópicas, entonces  $g_0 \circ f_0$  es homotópica a  $g_1 \circ f_1$ .

*Demostración.* Consideramos la función

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Z \quad \text{dada por}$$

$$(x, t) \rightarrow H_g(H_f(x, t), t)$$

donde  $H_g$  es una homotopía entre  $g_0$  y  $g_1$ , similarmente para  $H_f$ . Notemos que

$$H(x, 0) = H_g(H_f(x, 0), 0) = g_0(f_0(x)) = g_0 \circ f_0(x)$$

análogamente, se tiene que  $H(x, 1) = g_1 \circ f_1(x)$ . Veamos que  $H$  es continua, para ello tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X \times [0, 1] & \xrightarrow{id_X \times i} & X \times [0, 1]^2 & \xrightarrow{H_f \times id_{[0, 1]}} & Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H_g} & Z \\ & & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & H & & & \end{array}$$

donde  $i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  esta dada por  $i(t) = (t, t)$ , que es continua por la propiedad universal de la topología producto, de modo similar, el resto de funciones son continuas. Por lo tanto,  $H$  es continua, ya que corresponde a la composición de funciones continuas.  $\square$

Debemos probar tres puntos, que son los siguientes,

- (1) Sea  $X$  espacio topológico, veamos que  $X \sim X$ . Consideramos el homeomorfismo  $id_X : X \rightarrow X$ , en particular, se tiene que  $id_X \circ id_X = id_X$  es homotópica a  $id_X$  mediante la homotopía constante, luego  $X \sim X$ .
- (2) Debemos verificar que si  $X \sim Y$  entonces  $Y \sim X$ . Como  $X \sim Y$ , existe  $f : X \rightarrow Y$  equivalencia homotópica, sea  $g : Y \rightarrow X$  su inversa homotópica. En particular,  $g : Y \rightarrow X$  es continua y se cumple que  $g \circ f \sim id_X$  y  $f \circ g \sim id_Y$ , es decir,  $g$  es equivalencia homotópica. Por lo tanto,  $Y \sim X$ .
- (3) Sea  $f : X \rightarrow Y$  una equivalencia homotópica y sea  $f_h$  su inversa homotópica. Consideramos  $g : Y \rightarrow Z$  equivalencia homotópica. Afirmamos que  $g \circ f : X \rightarrow Z$  es equivalencia homotópica. En efecto, veamos que la función

$$f_h \circ g_h : Z \rightarrow X$$

es equivalencia homotópica. Notemos, por el lema previo, que

$$g \circ f \circ f_h \circ g_h \sim g \circ id_Y \circ g_h = g \circ g_h \sim id_Z$$

del mismo modo  $f_h \circ g_h \circ g \circ f \sim id_X$ . Concluimos que  $X \sim Z$ .

## Problema 2

Para este problema diremos que  $x \sim_p y$  si y solo si  $[x]^p = [y]^p$ , donde  $[\cdot]^p$  es la componente conexa del punto. Esta relación resulta ser de equivalencia.

**Lema:** Sea  $h : X \rightarrow X$  con  $h \sim id_X$ , entonces  $x \sim_p h_x$  para todo  $x \in X$ .

*Demostración.* Sea  $x \in X$ . Como  $h \sim id_X$ , existe  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$  una homotopía entre  $h$  e  $id_X$ . Definimos la función  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  dada por  $\gamma(t) := H(x, t)$ , que es continua por la propiedad universal de la topología de subespacio. Así,  $h(x) \in [x]^p$ , lo que implica que  $x \sim_p h(x)$ .  $\square$

Sean  $X \sim Y$ , existe  $f : X \rightarrow Y$  equivalencia homotópica y sea  $g : Y \rightarrow X$  su inversa homotópica. Afirmamos que si  $x \not\sim_p y$  entonces  $f(x) \not\sim_p f(y)$ . Supongamos que existen  $x, y \in X$  tales que  $x \not\sim_p y$  y  $f(x) \sim_p f(y)$ . Como  $g$  es continua, tenemos que  $g(f(x)) \sim_p g(f(y))$ . Por el lema, resulta que

$$x \sim_p g \circ f(x) \sim_p g \circ f(y) \sim_p y$$

lo cual es una contradicción.

Lo anterior prueba que hay una inyección de las componentes arcoconexas de  $X$  en las de  $Y$ . Por simetría, vemos que también hay una inyección de las componentes arcoconexas de  $Y$  en  $X$ , así, por cantor bernstein, ambos conjuntos estan en correspondencia uno a uno.

### Problema 3

**Lema:** Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto finito de puntos, entonces  $X := \mathbb{R}^2 \setminus A$  es arcoconexo.

*Demostración.* Digamos que  $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Como  $A$  es finito, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(x_i) \cap A = x_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Sean  $x, y \in X$ , en  $\mathbb{R}^2$  consideremos el segmento de recta  $L_{xy} := (1-t)x + ty$  con  $t \in [0, 1]$ . Si  $L_{xy} \cap A = \emptyset$  no hay nada que probar, supongamos que existe  $i$  tal que  $x_i \in L_{xy} \cap A$ .

Sea  $v \in (L_{xy} - x)^\perp$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\overline{B_\delta(x_i)} \subseteq B_\varepsilon(x_i)$  y  $\delta v$  □

Nuevamente, por finitud, resulta que  $|L_{xy} \cap A| < \infty$ .

Sea  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , definimos  $\mathbb{V}(f) := \{x \in \mathbb{C}^n : f(x) = 0\}$ . Notemos que

$$\text{Conf}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i,j} \mathbb{V}(x_i - x_j)$$

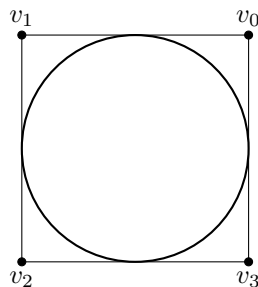
Sean  $x, y \in \text{Conf}_n(\mathbb{C})$ , en  $\mathbb{C}^n$  consideremos la recta  $L_{xy} := \mathbb{V}()$

### Problema 4

### Problema 5

Debemos triangular tres espacios, que son los siguientes

- (1) En  $\mathbb{R}^2$  consideramos los puntos  $v_0 = (1, 1)$ ,  $v_1 = (-1, 1)$ ,  $v_2 = (-1, -1)$  y  $v_3 = (1, -1)$ . Y sean  $\sigma_0 = \langle v_0, v_1 \rangle$ ,  $\sigma_1 = \langle v_0, v_3 \rangle$ ,  $\sigma_2 = \langle v_2, v_1 \rangle$  y  $\sigma_3 = \langle v_2, v_3 \rangle$  los 1-simplices generados por los vértices. Sea  $K := \bigcup \{\sigma_i, v_i\}$ , es claro que  $K$  es complejo simplicial.



Probaremos que  $|K| \cong \mathbb{S}^1$ . Denotamos por  $|\cdot|$  la norma euclidea y  $\|\cdot\|$  a la norma que corresponde al máximo del valor absoluto de cada entrada. Consideramos la función

$$f : |K| \rightarrow \mathbb{S}^1 \quad \text{dada por}$$

$$x \rightarrow \frac{x}{\|x\|}$$

que resulta ser continua ya que  $|K| \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Afirmamos que  $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow |K|$  dada por

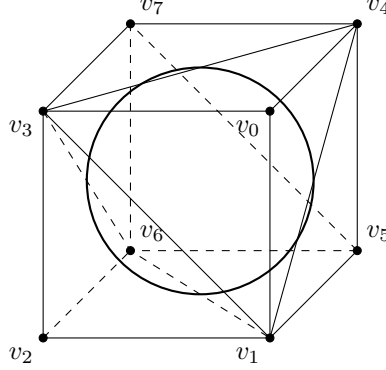
$$g(x) := \frac{x}{\|x\|}$$

Notemos que  $g$  esta bien definida, ya que  $\{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : \|x\| = 1\} = |K|$ . Como  $\|\cdot\|$  y  $|\cdot|$  son normas equivalentes, inducen la misma topología y por lo tanto  $g$  es continua ya que  $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Luego,

$$f \circ g(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{\frac{x}{\|x\|}}{\left|\frac{x}{\|x\|}\right|} = x$$

es decir,  $f \circ g = id_{\mathbb{S}^1}$ . Del mismo modo,  $g \circ f = id_{|K|}$ . Lo que prueba que  $(K, f)$  es una triangulación de  $\mathbb{S}^1$ . Así, la característica de Euler de la triangulación es  $V - E + F = 4 - 4 + 0 = 0$ .

- (2) En  $\mathbb{R}^3$  tomemos los puntos de la forma  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  que en total son 8 y son vértices del cubo  $[-1, 1]^3$ . Definimos el complejo simplicial  $K$  que tiene por poliedro al cubo y que esta representado en la siguiente figura



Los puntos  $v_i$  corresponden a los vértices del complejo, los segmentos a los 1-simplejos y también se consideran los 2-simplejos encerrados por tres segmentos, por ejemplo, el simplejo  $\sigma = \langle v_0, v_3, v_4 \rangle$ . Afirmamos que  $|K| \cong \mathbb{S}^2$ . Del mismo modo que antes definimos la función continua  $f : |K| \rightarrow \mathbb{S}^2$  dada por

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

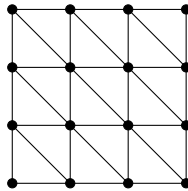
con inversa continua  $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow |K|$  dada por

$$g(x) := \frac{x}{\|x\|}$$

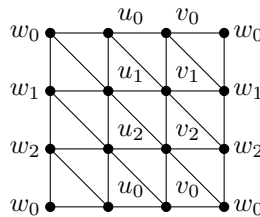
donde  $|\cdot|$  y  $\|\cdot\|$  son la norma euclídeana y la norma del máximo respectivamente. Concluimos que  $(K, f)$  es una triangulación de  $\mathbb{S}^2$  cuya característica de Euler es  $V - E + F = 8 - 18 + 12 = 2$ .

(3) -

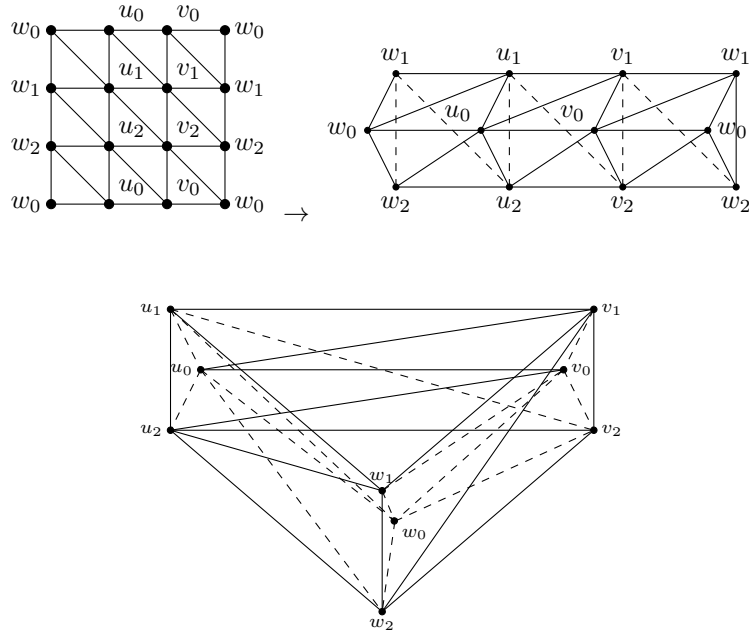
Triangulamos  $[0, 1]^2$  del siguiente modo,



Donde cada vértice corresponde a un par ordenado con coordenadas en el conjunto  $\{0, 1/3, 2/3, 1\}$ , denotaremos por  $V_{\square}$  al conjunto de vértices. Definimos  $f : V_{\square} \rightarrow V$  de modo que cada vértice en  $V_{\square}$  se mapea a  $|K|$  como en la siguiente figura,



Luego,  $f$  se extiende linealmente a una función continua de  $[0, 1]^2$  a  $|K|$ . Como  $f$  es sobreyectiva en vértices, se tiene que  $f$  es cociente. Así, la función realiza las siguientes acciones sobre  $[0, 1]^2$



Sea  $\pi$  la proyección a  $\mathbb{T}^2$ . Veamos que  $f$  es constante en las fibras de  $\pi$  y viceversa. (...). Así, por propiedad universal de topología cociente,  $f$  induce una función continua  $\rho : |K| \rightarrow \mathbb{T}^2$  y del mismo modo  $\pi$  induce una función  $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow |K|$  también continua. Tenemos el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc}
 [0, 1]^2 & & \\
 \downarrow \pi & \searrow f & \\
 \mathbb{T}^2 & \xrightarrow[\rho]{h} & |K|
 \end{array}$$

Veamos que  $h$  es la inversa de  $\rho$ . Sabemos que  $\rho \circ f = \pi$  y  $h \circ \pi = f$ . Luego, sea  $y \in |K|$ , existe  $x \in [0, 1]^2$  tal que  $y = f(x)$ , así  $h \circ \rho(y) = h \circ \rho \circ f(x) = h \circ \pi(x) = f(x) = y$ , por otro lado,  $\rho \circ h([x]) = \rho \circ h \circ \pi(x) = \rho \circ f(x) = [x]$ . Por lo tanto,  $(K, \rho)$  es una triangulación del toro. La característica de Euler es  $V - E + F = 9 -$ .