Estructura de grupo topológico en S^3 y $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$

Queremos definir una operación binaria que es multiplicativa bajo la norma para ello buscamos definir un producto en $\mathbb{R}^4$, un análogo a la multiplicación compleja en $\mathbb{R}^2$. Dado $x \in \mathbb{R}^4$ lo denotamos por $x = (a, u)$ donde $a \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{R}^3$. Sean $(a, u), (b, v) \in \mathbb{R}^4$, definimos

$$(a, u)(b, v) := (a, u) \cdot (b, v) := (ab - \langle u, v\rangle, av + bu + u \times v)$$

En primer lugar, demostramos la identidad $(\lambda(a, u))(\mu(b, v)) = \lambda\mu((a, u)(b, v))$. En efecto,

$$\begin{aligned}(\lambda(a, u))(\mu(b, v)) &= (\lambda a\mu b - \langle \lambda u, \mu v\rangle, \lambda a\mu v + \mu b\lambda u + (\lambda u) \times (\mu v))\\ &= \lambda\mu((a, u)(b, v))\end{aligned}$$

Notemos que $\|(a, u)(a, -u)\|^2 = \|(a, u)\|^4$ y además

$$\begin{aligned}\|(a, u)(b, v)\|^2 &= \|(ab - \langle u, v\rangle, av + bu + u \times v)\|^2\\ &= a^2b^2 - 2ab\langle u, v\rangle + \langle u, v\rangle^2 + a^2\|v\|^2 + b^2\|u\|^2 + 2ab\langle u, v\rangle + \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2\\ &= (a^2 + \|u\|^2)(b^2 + \|v\|^2) = \|(a, u)\|^2\|(b, v)\|^2\end{aligned}$$

Ahora que tenemos las propiedades deseadas veamos que con esta operación $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ forma un grupo. Afirmamos que el elemento neutro es el $(1, 0)$. Sea $(a, u) \in \mathbb{R}^4$, entonces

$$(a, u)(1, 0) = (a - \langle u, 0\rangle, a0 + u + u \times 0) = (a, u)$$

del mismo modo se tiene que $(1, 0)(a, u) = (a, u)$. El inverso viene dado por $\frac{1}{\|(a,u)\|^2}(a, -u)$, por lo mencionado anteriormente vemos que

$$(a, u)\frac{(a, -u)}{\|(a, u)\|^2} = \frac{1}{\|(a, u)\|^2}(a, u)(a, -u) = \frac{1}{\|(a, u)\|^2}(\|(a, u)\|^2, 0) = (1, 0)$$

analogamente se tiene la otra igualdad. Resta ver la asociatividad, sean $(b, v), (c, w) \in \mathbb{R}^4$, luego

$$\begin{aligned}((a, u)(b, v))(c, w) &= (ab - \langle u, v\rangle, av + bu + u \times v)(c, w)\\ &= ((ab - \langle u, v\rangle)c - \langle (av + bu + u \times v), w\rangle,\\ &\quad (ab - \langle u, v\rangle)w + c(av + bu + u \times v) + (av + bu + u \times v) \times w)\end{aligned}$$

Usando la anticonmutatividad del producto cruz y la identidad $A \times (B \times C) = B\langle A, C\rangle - C\langle A, B\rangle$ vemos que

$$(u \times v) \times w = -w \times (u \times v) = -u\langle w, v\rangle + v\langle w, u\rangle$$

entonces $v\langle u, w\rangle - w\langle u, v\rangle = u \times (v \times w)$, usando la alternancia del determinante resulta que $\langle w, u \times v\rangle = \langle u, v \times w\rangle$ y dado que el producto cruz distribuye sobre la suma se sigue que

$$\begin{aligned}((a, u)(b, v))(c, w) &= (a(bc - \langle v, w\rangle) - \langle u, cv + bw + v \times w\rangle,\\ &\quad (bc - \langle v, w\rangle)u + a(bw + cv + v \times w) + u \times (bw + cv + v \times w))\\ &= (a, u)((b, v)(c, w))\end{aligned}$$

Con la topología usual de $\mathbb{R}^4$ probaremos que esta operación le da estructura de grupo topológico a $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$.