Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Gregorio Moreno – Estudiante: Benjamín Mateluna

Teoría de Integración - MAT2534
Tarea 1
02 de Abril de 2025

Problema 1

Por definición de infimo, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición Π_ε de $[a,b]$ tal que $U(f,\Pi_\varepsilon) < \mathcal{U} + \varepsilon$. Consideremos la colección $(\Pi_n^*)_n$ de particiones de $[a,b]$ tales que

$$U(f,\Pi_n^*) < \mathcal{U} + \frac{1}{n}$$

Definimos la partición

$$\Pi_n := \bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i^*$$

Notemos que Π_n es un refinamiento de Π_n^*, luego $U(f,\Pi_n) \leq U(f,\Pi_n^*)$, por teorema del sandwich vemos que

$$\lim_{n\to\infty} U(f,\Pi_n) = \mathcal{U}$$

Además, por construcción Π_{n+1} es un refinamiento de Π_n y por lo tanto $U(f,\Pi_{n+1}) \leq U(f,\Pi_n)$.

Problema 2

a) Sea $\varepsilon > 0$, como f es integrable, existe una partición Π del intervalo $[a,b]$ tal que

$$U(f,\Pi) - L(f,\Pi) < \varepsilon$$

Veamos que

$$\begin{aligned} U(|f|,\Pi) - L(|f|,\Pi) &= \sum \left(\sup_{x\in I_i} |f(x)| - \inf_{x\in I_i} |f(x)| \right) |I_i| = \sum \left(\sup_{x,y\in I_i} ||f(x)| - |f(y)|| \right) |I_i| \\ &\leq \sum \left(\sup_{x,y\in I_i} |f(x) - f(y)| \right) |I_i| = \sum \left(\sup_{x\in I_i} f(x) - \inf_{x\in I_i} f(x) \right) |I_i| \\ &= U(f,\Pi) - L(f,\Pi) < \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $|f|$ es Riemann-integrable. Por otro lado sabemos que $f \leq |f|$ y $-f \leq |f|$, luego, dada una partición Π de $[a,b]$ se sigue que

$$U(f,\Pi) \leq U(|f|,\Pi) \quad \text{y} \quad L(-f,\Pi) \leq L(|f|,\Pi)$$

Aplicando ínf a la izquierda, sup a la derecha y usando que $-\inf x = \sup -x$, tenemos lo siguiente

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \quad \text{y} \quad -\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Concluimos que

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

b) En primer lugar, demostraremos que dado un conjunto $E \subseteq [a,b]$ de medida nula, entonces E^c es denso en $[a,b]$. En efecto, sea $x \in E$ y U una vecindad conexa de x de largo $\varepsilon > 0$. Supongamos, por contradicción, que $U \subseteq E$. Como E es de medida nula, existe $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de intervalos tales que

$$E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i \quad \text{y} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} |I_i| < \varepsilon$$

por otro lado tenemos que

$$\varepsilon = |U| = \lambda^*(U) \leq \lambda^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda^*(I_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} |I_i|$$

Lo anterior es una contradicción, lo que prueba la afirmación.

Sea Π una partición de $[a,b]$, por lo probado anteriormente, para todo i se tiene que existe $\overline{x_i} \in E^c$ tal que $\overline{x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$. De este modo, para cada partición Π de $[a,b]$, escojemos el conjunto de representantes $\overline{C} = \{\overline{x_i}\}_i$, entonces

$$S(f,\Pi,C) = \sum_i f(\overline{x_i})(x_i - x_{i-1}) = 0$$

Como f es Riemann integrable, se sigue que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Pi|\to 0} S(f,\Pi,C) = \lim_{|\Pi|\to 0} 0 = 0$$

Problema 3

Problema 4

- (a) Dado $\varepsilon > 0$, notemos que un cubrimiento de $\{a\}$ es $(a, a+\varepsilon]$, luego

  $$\mu_F^*(\{a\}) \leq \tau_F((a, a+\varepsilon]) = F(a+\varepsilon) - F(a)$$

  tomando límite por la derecha y usando que F es continua por la derecha se tiene que $\mu_F^*(\{a\}) \leq 0$, y por lo tanto $\mu_F^*(\{a\}) = 0$.

- (c)

- (b) Usando monotonía de la medida exterior vemos que $F(b) - F(a) = \mu_F^*((a,b]) \leq \mu_F^*([a,b])$, por otro lado, como μ_F^* es subaditiva se tiene que

  $$\mu_F^*([a,b]) = \mu_F^*(\{a\} \cup (a,b]) \leq \mu_F^*(\{a\}) + \mu_F^*((a,b]) = F(b) - F(a)$$