Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Gregorio Moreno – Estudiante: Benjamín Mateluna

Teoría de Integración - MAT2534
Tarea 3
09 de junio de 2025

Problema 1

a) Sea $t > 0$, dado que e^{-tx^2} es continua y positiva, se tiene que

$$I = \int_0^\infty e^{-tx^2} dx = \int_{(0,\infty)} e^{-tx^2} d\lambda(x)$$

entonces, por independencia,

$$I^2 = \left(\int_{(0,\infty)} e^{-tx^2} d\lambda(x) \right) \left(\int_{(0,\infty)} e^{-ty^2} d\lambda(y) \right) = \int_{(0,\infty)} e^{-ty^2} \left(\int_{(0,\infty)} e^{-tx^2} d\lambda(x) \right) d\lambda(y)$$
$$= \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(0,\infty)} e^{-t(x^2+y^2)} d\lambda(x) \right) d\lambda(y)$$

Como la función $e^{-t(x^2+y^2)}$ es continua y positiva, por tonelli vemos que

$$I^2 = \int_{(0,\infty)^2} e^{-t(x^2+y^2)} (\lambda \otimes \lambda) dxdy$$

Consideremos el cambio de variables $x = rcos(\theta)$ y $y = rsen(\theta)$ con $r \in (0, \infty)$ y $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ con determinante jacobiano igual a r, luego

$$I^2 = \int_{(0,\infty)^2} e^{-t(x^2+y^2)} (\lambda \otimes \lambda) dxdy = \int_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \times (0,\infty)} re^{-tr^2} (\lambda \otimes \lambda) d\theta dr$$

notemos que re^{-tr^2} es continua y positiva cuando $r \in (0, \infty)$, así, por tonelli vemos que

$$I^2 = \int_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} \left(\int_{(0,\infty)} re^{-tr^2} dr \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\infty re^{-tr^2} dr \right) d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty re^{-tr^2} dr$$

donde la segunda igualdad se debe a la continuidad y positividad. Utlizando el cambio de variable $u = tr^2$, observamos que

$$\int_0^\infty re^{-tr^2} dr = \frac{1}{2t} \int_0^\infty e^{-u} du = \frac{1}{2t} (-e^{-u}) \Big|_0^\infty = \frac{1}{2t} < \infty$$

De este modo,

$$I^2 = \frac{\pi}{4t}$$

concluimos que $g(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$.

b) Consideremos la función $F(x,t) = e^{-x^2} cos(tx)$. Dado $t_0 \in \mathbb{R}$ vemos que la función $F(x,t_0)$ es continua y por ende medible, además, $\frac{\partial F}{\partial t}$ existe para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Para $t = 0$ notamos que

$$f(0) = \int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

y por lo tanto $F(x,0)$ es integrable. Por otro lado,

$$\left|\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\right| = \left|-xe^{-x^2} sen(tx)\right| \leq |x|\, e^{-x^2} =: g$$

es claro que g es una función integrable, basta notar que su integral impropia es finita. Luego, la función f es diferenciable y como $|F(x,t)| \leq e^{-x^2}$ se tiene que

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^\infty e^{-x^2} cos(tx)dx\right) = \frac{d}{dt}\left(\int_{(0,\infty)} e^{-x^2} cos(tx)d\lambda(x)\right) = \int_{(0,\infty)} \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-x^2} cos(tx)\right) d\lambda(x)$$

$$= \int_{(0,\infty)} -xe^{-x^2} sen(tx)d\lambda(x) = \int_0^\infty -xe^{-x^2} sen(tx)dx$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2} sen(tx)\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{t}{2}\int_0^\infty e^{-x^2} cos(tx)dx = -\frac{t}{2} f(t)$$

Tenemos una EDO de variables separables $f' = -\frac{t}{2} f$ con condición inicial $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Luego

$$\int \frac{df}{f} = \int -\frac{t}{2}dt$$

se sigue que

$$log(f) = -\frac{t^2}{4} + C \quad \text{entonces} \quad f = e^{-\frac{t^2}{4}+C}$$

evaluando en la condición inicial vemos que

$$f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{t^2}{4}}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

c) Sean $0 < a < b < \infty$. Notemos que

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-tx} dt$$

La función e^{-tx} es continua y positiva, por tonelli vemos que

$$\int_{(0,\infty)\times(a,b)} e^{-tx} dtdx = \int_{(a,b)}\int_{(0,\infty)} e^{-tx} dxdt = \int_a^b \int_0^\infty e^{-tx} dxdt = \int_a^b \int_0^{-\infty} -\frac{e^u}{t} dudt$$

$$= \int_a^b -\frac{1}{t} e^u\Big|_0^{-\infty} dt = \int_a^b \frac{1}{t} dt = log\left(\frac{b}{a}\right)$$

la segunda igualdad se debe a la continuidad y que la función e^{-tx} es positiva. Por otro lado tenemos que

$$\int_{(0,\infty)\times(a,b)} e^{-tx} dtdx = \int_{(0,\infty)}\int_{(a,b)} e^{-tx} dtdx = \int_0^\infty \int_a^b e^{-tx} dtdx = h(a,b)$$

Por lo tanto $h(a,b) = log\left(\frac{b}{a}\right)$.

Problema 2

a) El cambio de variables a coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$, denotado por φ_n, esta dado por

$$\begin{aligned} x_n &= rsen(\theta_{n-1}) \\ x_{n-1} &= rcos(\theta_{n-1})sen(\theta_{n-2}) \\ &\vdots \\ x_2 &= rcos(\theta_{n-1})cos(\theta_{n-2})\cdots cos(\theta_2)sen(\theta_1) \\ x_1 &= rcos(\theta_{n-1})cos(\theta_{n-2})\cdots cos(\theta_2)cos(\theta_1) \end{aligned}$$

Afirmamos que el determinante jacobiano del cambio de variables es

$$J_{\varphi_n}(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}) = r^{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}(cos^{i-1}(\theta_i))$$

Procederemos por inducción sobre la dimensión. Para $n=1$ el resultado es inmediato, supongamos que se tiene para n. Debemos probar el resultado para $n+1$. Expandiendo por cofactores notamos que

$$J_{\varphi_n} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial r} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial r} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial r} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_n} \\ sen(\theta_n) & 0 & \cdots & 0 & rcos(\theta_n) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n sen(\theta_n)\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_n} \end{vmatrix} + rcos(\theta_n)\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial r} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} \end{vmatrix}$$

Identificamos $(x_1,\cdots,x_n)$ con $(y_1,\cdots,y_n)$ y consideramos el cambio de variable φ_n. Notemos que $\frac{\partial x_i}{\partial \theta_j} = cos(\theta_n)\frac{\partial y_i}{\partial \theta_j}$ donde $1\leq i\leq n$ y $1\leq j\leq n-1$. Además, $\frac{\partial x_i}{\partial \theta_n} = -sen(\theta_n)r\frac{\partial y_i}{\partial r}$ con $1\leq i\leq n$ y también $\frac{\partial x_i}{\partial r} = cos(\theta_n)\frac{\partial y_i}{\partial r}$ para $1\leq i\leq n$. Luego,

$$J_{\varphi_{n+1}} = (-1)^{n+1}rsen^2(\theta_n)cos^{n-1}(\theta_n)\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial y_1}{\partial r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial y_n}{\partial r} \end{vmatrix} + rcos^{n+1}(\theta_n)\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial r} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial r} & \frac{\partial y_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial \theta_{n-1}} \end{vmatrix}$$

Si permutamos $n-1$ columnas en la primera submatriz corresponde al jacobiano de φ_n, adicionalmente, la segunda submatriz es exactamente igual al jacobiano de φ_n. Entonces

$$\begin{aligned} J_{\varphi_{n+1}} &= (-1)^{n+1}rsen^2(\theta_n)cos^{n-1}(\theta_n)(-1)^{n-1}J_{\varphi_n} + rcos^{n+1}(\theta_n)J_{\varphi_n} \\ &= rcos^{n-1}(\theta_n)J_{\varphi_n}(sen^2(\theta_n)+cos^2(\theta_n)) = rcos^{n-1}(\theta_n)J_{\varphi_n} \end{aligned}$$

Usando la hipotesis inductiva, nos queda

$$J_{\varphi_{n+1}} = r^n\prod_{i=2}^{n}(cos^{i-1}(\theta_i))$$

b) De la parte anterior consideramos el cambio de variable a coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$. Tenemos lo siguiente

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} g(|x|)d\lambda(x) = \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})^{n-2}} g(r)\left|J_{\varphi_n}\right| drd\theta_1 d\theta_2\cdots d\theta_{n-1}$$

como la función sigue siendo positiva despues de aplicar el cambio de variable, por tonelli se sigue que

$$\begin{aligned}
I &= \int_{(0,\infty)}\int_{(0,2\pi)}\int_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\cdots\int_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} g(r)\,|J_{\varphi_n}|\,d\theta_{n-1}\cdots d\theta_2 d\theta_1 dr \\
&= 2\pi\prod_{i=2}^{n-1}\left(\int_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} cos^{i-1}(\theta)d\lambda(\theta)\right)\int_{(0,\infty)} g(r)r^{n-1}d\lambda(r) \\
&= 2\pi\prod_{i=2}^{n-1}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^{i-1}(\theta)\ d\theta\right)\int_{(0,\infty)} g(r)r^{n-1}d\lambda(r) \\
&= 2\pi\prod_{i=2}^{n-1}\left(\int_{0}^{\pi} sen^{i-1}(\theta)\ d\theta\right)\int_{(0,\infty)} g(r)r^{n-1}d\lambda(r)
\end{aligned}$$

en la última igualdad utilizamos que las variables son independientes entre sí, además, para ahorrar notación eliminamos los índices de las variables θ. Definimos

$$I(m) = \int_0^\pi sen^m(\theta)\ d\theta$$

para $m \in \mathbb{N}_0$. Afirmamos que

$$I(2m) = \pi\prod_{k=1}^{m}\frac{2k-1}{2k} \quad \text{y} \quad I(2m+1) = 2\prod_{k=1}^{m}\frac{2k}{2k+1}$$

Probaremos lo anterior para el caso par, el otro caso es análogo. Sea $m = 0$, el resultado es directo. Supongamos que el resultado se tiene para m. Utilizando integración por partes se obtiene la recursión

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi sen^{2m+2}(\theta)\ d\theta &= -\frac{cos(\theta)sen^{2m-1}(\theta)}{2m+2}\Big|_0^\pi + \frac{2m+1}{2m+2}\int_0^\pi sen^{2m}(\theta)\ d\theta = \frac{2m+1}{2m+2}\int_0^\pi sen^{2m}(\theta)\ d\theta \\
&= \frac{2m+1}{2m+2}\cdot\pi\prod_{k=1}^{m}\frac{2k-1}{2k} = \pi\prod_{k=1}^{m+1}\frac{2k-1}{2k}
\end{aligned}$$

Además observamos que

$$I(2m-1)I(2m) = 2\prod_{k=1}^{m-1}\frac{2k}{2k+1}\cdot\pi\prod_{k=1}^{m}\frac{2k-1}{2k} = 2\pi\cdot\frac{2m-1}{2m}\cdot\prod_{k=1}^{m-1}\frac{2k-1}{2k+1} = 2\pi\cdot\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{1}{2m-1} = \frac{\pi}{m}$$

Regresando al problema original, tenemos dos casos, $n-1$ es impar, es decir, $n-1 = 2k-1$, entonces

$$2\pi\prod_{i=2}^{n-1}\left(\int_0^\pi sen^{i-1}(\theta)\ d\theta\right) = 2\pi\prod_{i=2}^{2k-1} I(i-1) = 2\pi\prod_{j=1}^{k-1} I(2j-1)I(2j) = 2\pi\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\pi}{j} = \frac{2\pi^k}{(k-1)!}$$

Supongamos que $n-1$ es par y por tanto $n-1 = 2k$, así

$$\begin{aligned}
2\pi\prod_{i=2}^{n-1}\left(\int_0^\pi sen^{i-1}(\theta)\ d\theta\right) &= 2\pi\prod_{i=2}^{2k} I(i-1) = 2\pi\cdot I(2k-1)\prod_{i=2}^{2k-1} I(i-1) = \frac{2\pi^k}{(k-1)!}\cdot 2\prod_{j=1}^{k-1}\frac{2j}{2j+1} \\
&= 4\pi^k\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\frac{2}{2j+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k-1)!!}
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$I = S_{n-1}\int_{(0,\infty)} g(r)r^{n-1}d\lambda(r)$$

Problema 3

En primer lugar, notemos que

$$I=\int_{[0,1]^2}\frac{1}{1-xy}(\lambda\otimes\lambda)(dxdy)=\int_{[0,1]^2}\sum_{n\geq 1}(xy)^{n-1}(\lambda\otimes\lambda)(dxdy)$$

como xy es positiva en $[0,1]^2$, por convergencia monótona y tonelli se sigue que

$$I=\sum_{n\geq 1}\int_{[0,1]^2}(xy)^{n-1}(\lambda\otimes\lambda)(dxdy)=\sum_{n\geq 1}\int_{[0,1]}\int_{[0,1]}x^{n-1}y^{n-1}dxdy=\sum_{n\geq 1}\left(\int_{[0,1]}x^{n-1}dx\right)\left(\int_{[0,1]}y^{n-1}dy\right)$$

La última igualdad se debe a la independencia entre las variables. Por continuidad, vemos que

$$I=\sum_{n\geq 1}\left(\int_0^1 x^{n-1}dx\right)\left(\int_0^1 y^{n-1}dy\right)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$$

Por otro lado, consideremos el cambio de variable $x=u+v$ e $y=u-v$ con determinante jacobiano igual a 2, luego la nueva región de integración $\mathcal{R}$ esta determinado por

$$\mathcal{R}:=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: 0\leq u\leq\frac{1}{2}, -u\leq v\leq u\right\}\cup\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\frac{1}{2}\leq u\leq 1, u-1\leq v\leq 1-u\right\}$$

Así,

$$I=\int_{\mathcal{R}}\frac{2}{1-(u+v)(u-v)}(\lambda\otimes\lambda)(dxdy)=2\int_{\mathcal{R}}\frac{1}{1-u^2+v^2}(\lambda\otimes\lambda)(dxdy)$$

Diremos que $\mathcal{R}_+:=\mathcal{R}\cap\{v\geq 0\}$. Por simetría respecto a v, vemos que

$$I=4\int_{\mathcal{R}_+}\frac{1}{1-u^2+v^2}(\lambda\otimes\lambda)(dxdy)=4\int_{[0,1]\times(R_+)^2(u)}\frac{1}{1-u^2+v^2}(\lambda\otimes\lambda)(dxdy)$$

donde $(R_+)^2(u)$ es la sección de R_+ respecto de u. Como $1-u^2+v^2$ es continua salvo un conjunto de medida nula y positiva, por tonelli se sigue que

$$I=4\int_{[0,1]}\int_{(R_+)^2(u)}\frac{1}{1-u^2+v^2}d\lambda(v)d\lambda(u)=4\int_0^1\int_0^{f(u)}\frac{1}{1-u^2+v^2}dvdu$$

con f función que describe el contorno superior de $\mathcal{R}_+$ en función de u. Luego

$$I=4\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^u\frac{1}{1-u^2+v^2}dvdu+\int_{\frac{1}{2}}^1\int_0^{1-u}\frac{1}{1-u^2+v^2}dvdu\right)$$

consideramos $a=\sqrt{1-u^2}$ que esta bien definido pues $0\leq u\leq 1$, así

$$\begin{aligned}I&=4\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^u\frac{1}{a^2+v^2}dvdu+\int_{\frac{1}{2}}^1\int_0^{1-u}\frac{1}{a^2+v^2}dvdu\right)\\&=4\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{a}arctan\left(\frac{v}{a}\right)\Big|_0^u du+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{a}arctan\left(\frac{v}{a}\right)\Big|_0^{1-u}du\right)\\&=4\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du\right)=4(I_1+I_2)\end{aligned}$$

Para I_1 integramos por partes, en efecto

$$\begin{aligned}I_1&=arcsen(u)arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}arcsen(u)\frac{1}{1+\frac{u^2}{1-u^2}}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{1}{1-u^2}du\\&=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{6}-\int_0^{\frac{1}{2}}arcsen(u)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\frac{\pi^2}{36}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}t\;dt=\frac{\pi^2}{36}-\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi^2}{72}\end{aligned}$$

donde realizamos el cambio de variable $t = arcsen(u)$. Por otra parte, para I_2 consideramos el cambio de variable $u = cos(\theta)$ y entonces

$$I_2 = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{1}{sen(\theta)} arctan\left(\frac{1-cos(\theta)}{sen(\theta)}\right) sen(\theta)\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} arctan\left(tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} arctan(tan(w))\, dw = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} w\, dw = w^2\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{36}$$

Luego

$$I = 4(I_1 + I_2) = \left(\frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi^2}{36}\right) = 4 \cdot \frac{3\pi^2}{72} = \frac{\pi^2}{6}$$

Problema 4

Afirmamos que $f_{\alpha,\beta}$ es de variación acotada si y solo si $\alpha > \beta$. En efecto, supongamos que $\alpha \leq \beta$, definimos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$x_n := \frac{1}{(\frac{\pi}{2}n)^{\frac{1}{\beta}}}$$

con $x_0 := 0$. Notemos que $x_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además

$$f_{\alpha,\beta}(x_n) = \frac{2^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\pi^{\frac{\alpha}{\beta}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}} sen\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

si n es par entonces $f_{\alpha,\beta}(x_n) = 0$, de lo contrario,

$$f_{\alpha,\beta}(x_n) = \frac{2^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\pi^{\frac{\alpha}{\beta}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}$$

Consideramos la partición $\Pi_n = \{y_i\}_{i=0}^n$ donde $y_0 = x_0$ e $y_i = x_{n+1-i}$, sin perdida de generalidad, supongamos que n es impar, entoces $n = 2k-1$, luego

$$V(f, \Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(y_{i-1})| \geq \sum_{j=1}^{k} |f(x_{2j-1})| = \sum_{j=1}^{k} \frac{2^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\pi^{\frac{\alpha}{\beta}}} \cdot \frac{1}{(2j-1)^{\frac{\alpha}{\beta}}} = \frac{2^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\pi^{\frac{\alpha}{\beta}}} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(2j-1)^{\frac{\alpha}{\beta}}}$$

$$\geq \frac{2^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\pi^{\frac{\alpha}{\beta}}} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(2j)^{\frac{\alpha}{\beta}}} = \frac{1}{\pi^{\frac{\alpha}{\beta}}} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^{\frac{\alpha}{\beta}}}$$

como $\alpha \leq \beta$, la última suma diverge cuando $n \to \infty$ y por lo tanto $f_{\alpha,\beta}$ no es de variación acotada.

Supongamos que $\alpha > \beta$. Definimos $f_n := \mathbb{1}_{\{0\}\cup[\frac{1}{n},1]} f_{\alpha,\beta}$. Es claro que f_n converge puntualmente a $f_{\alpha,\beta}$, así

$$V(f, [0,1]) \leq \liminf_{n\to\infty} V(f_n, [0,1])$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, notemos que $V(f_n, [0,1]) = V(f_n, \left[0, \frac{1}{n}\right]) + V(f_n, \left[\frac{1}{n}, 1\right]) = V(f_n, \left[\frac{1}{n}, 1\right])$. La función f_n se puede extender de modo que sea diferenciable en $(\frac{1}{n} - \varepsilon, 1+\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Luego, se tiene que

$$V\left(f_n, \left[\frac{1}{n}, 1\right]\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left|f'_{\alpha,\beta}(x)\right| dx \leq \int_0^1 \left|f'_{\alpha,\beta}(x)\right| dx$$

donde la segunda integral es impropia, que esta bien definida ya que $f'_{\alpha,\beta}$ es Riemann integrable en todo intervalo de la forma $[b,1]$ con $b > 0$, por continuidad. Veamos que

$$\int_0^1 \left|f'_{\alpha,\beta}(x)\right| dx = \int_0^1 \left|\alpha x^{\alpha-1} sen(x^{-\beta}) - \beta x^{\alpha-\beta-1} cos(x^{-\beta})\right|\, dx \leq \alpha \int_0^1 x^{\alpha-1}\, dx + \beta \int_0^1 x^{\alpha-\beta-1}\, dx$$

La integral que esta a la izquierda es convergente, ya que $\alpha > 0$ y por ende $\alpha - 1 > -1$. Por otro lado, como $\alpha > \beta$, se tiene que $\alpha - \beta - 1 > -1$ lo que implica que la integral de la derecha es convergente. De este modo,

$$V(f, [0,1]) \leq \liminf_{n\to\infty} V(f_n, [0,1]) \leq \int_0^1 \left|f'_{\alpha,\beta}(x)\right| dx < \infty$$

Concluimos que $f_{\alpha,\beta}$ es de variación acotada.

Problema 5

Lema 0.1. *Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente y absolutamente continua. Sea $E \subseteq [a, b]$ un conjunto de medida nula, entonces $\lambda(g(E)) = 0$.*

> **Demostración.** *Sea $\varepsilon > 0$, como E es medible, existe $G \supseteq E$ abierto tal que $\lambda(G) < \delta$ para todo $\delta > 0$, como g es creciente y absolutamente continua, existe $\delta > 0$ y G abierto tal que $\lambda(g(E)) \leq \lambda(g(G)) < \varepsilon$. Dado que ε es arbitrario, concluimos que $\lambda(g(E)) = 0$.*

Sea $I \subseteq [a, b]$ un intervalo con extremos $c < d$. Como g es continua y creciente $g(I) = (g(c), g(d))$, además, por absoluta continuidad y TFC se sigue que , como g es absolutamente continua, por TFC se sigue que

$$\lambda(g(I)) = \lambda((g(c), g(d))) = g(d) - g(c) = \int_{(c,d)} g' d\lambda$$

Sea $(I_n)_n$ intervalos disjuntos de a pares contenidos en $[a, b]$, entonces como g es estrictamente creciente, en particular, es inyectiva lo que implica que $g(I_n)$ son disjuntos de a pares. Notemos que

$$\lambda\left(g\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right)\right) = \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} g(I_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(g(I_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{I_n} g' d\lambda = \int \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_n g' d\lambda = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n} g' d\lambda$$

en donde para intercambiar la serie con la integral usamos teorema de convergencia dominada. Como todo abierto se puede escribir como unión numerable de intervalos abiertos disjuntos de a pares, lo anterior prueba el argumento para abiertos $U \subseteq [a, b]$.

Sea $G \in G_\delta$, existen $(U_n)_n$ abiertos tales que

$$G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

sin perdida de generalidad podemos suponer que estos abiertos estan encajonados. Como $[a, b]$ es compacto entonces $g([a, b])$ es compacto y entonces $g(U_1) < \infty$, así

$$\lambda(g(G)) = \lambda\left(g\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right)\right) = \lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} g(U_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(g(U_n)) = \lim_{n\to\infty} \int_{U_n} g' d\lambda = \int_G g' d\lambda$$

donde la última igualdad se debe al teorema de convergencia dominada, notando que $\mathbb{1}_{U_n}$ converge a $\mathbb{1}_G$.

Sea $E \subseteq [a, b]$ medible, existe $G \in G_\delta$ tal que $\lambda(G \setminus E) = 0$, por el lema tenemos que $\lambda(g(G \setminus E)) = 0$, como g es continua, inyectiva y $[a, b]$ es compacto se tiene que $\lambda(g(E)) = \lambda(g(G))$, entonces

$$\lambda(g(E)) = \lambda(g(G)) = \int_G g'\, d\lambda = \int_E g'\, d\lambda + \int_{G\setminus E} g'\, d\lambda = \int_E g'\, d\lambda$$