



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: MAURICIO BUSTAMANTE – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

Taller de Trabajo - MAT3094
Informe Taller de Trabajo
05 de agosto de 2025

Índice

Introducción	3
1. Homología y Cohomología	4
1.1. Complejos de Cadenas	4
1.2. Homología y Cohomología Singular	4

1. Homología y Cohomología

1.1. Complejos de Cadenas

Definición: Un *complejo de cadenas* es una secuencia de grupos abelianos y homomorfismos

$$\cdots \rightarrow C_3 \xrightarrow{d_3} C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

tales que $d_i \circ d_{i+1} = 0$ para todo i . Se denota por la tupla $(C_*, d_*)^C$

Definición: Un *complejo de cocadenas* es una secuencia de grupos abelianos y homomorfismos

$$0 \rightarrow C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \xrightarrow{d^2} C^3 \rightarrow \cdots$$

tal que $d^{i+1} \circ d^i = 0$ para todo i . Se denota por la tupla (C^*, d_C^*) .

Observación: Los morfismos d_i y d^i se conocen como diferenciales. Por la condición dada, observamos que $\text{im } d_{i+1} \subseteq \ker d_i$ (resp. $\text{im } d^i \subseteq \ker d_{i+1}$). Los elementos en $\ker d_i$ se dicen **ciclos** (resp. **cociclos**) y los elementos de $\text{im } d_i$ se llaman **fronteras** (resp. **cofronteras**).

Definición: La *homología* de un complejo de cadenas C es

$$H_i(C_*) = \frac{\ker d_i}{\text{im } d_{i+1}}$$

Un elemento en $H_i(C_*)$ se conoce como **clase de homología**.

Definición: La *cohomología* de un complejo de cocadenas C es

$$H_i(C^*) = \frac{\ker d_i}{\text{im } d_{i-1}}$$

Un elemento en $H_i(C^*)$ se conoce como **clase de cohomología**.

Definición: Sean (C, d_C) y (D, d_D) complejos de cadenas, un **mapeo de cadena**, denotado por $C_* \rightarrow D_*$ es una colección de morfismos $f_n : C_n \rightarrow D_n$ tales que $d_n^D \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n^C$. En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n \\ \downarrow d_n^C & & \downarrow d_n^D \\ C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} \end{array}$$

La definición para **mapeo de cocadena** es análogo.

Lema 1.1: Sea $f_* : C_* \rightarrow D_*$ un mapeo de cadena, entonces $f_* : H_n(C_*) \rightarrow H_n(D_*)$ dado por $[x] \rightarrow [f_n(x)]$ es un morfismo bien definido.

Demostración. En primer lugar, debemos verificar que dado un ciclo entonces f lo mapea a un ciclo. Sea $x \in \ker d_n^C$. Luego,

$$d_n^D(f_n(x)) = f_{n-1}(d_n^C(x)) = f_{n-1}(0) = 0$$

Por lo tanto, $f_n(x) \in \ker d_n^D$. Veamos que esta bien definido, sean $x, y \in \ker d_n^C$ tales que $[x] = [y]$, entonces $x - y = d_{n+1}^C(z)$ para $z \in C_{n+1}$. De este modo, $f_n(x) - f_n(y) = f_n(d_{n+1}^C(z)) = d_{n+1}^D(f_{n+1}(z))$ es una frontera. Así, $[f_n(x)] = [f_n(y)]$. \square

Un resultado análogo se tiene para un mapeo de cocadena.

1.2. Homología y Cohomología Singular

La idea ahora es definir, dado un espacio topológico X , un complejo de cadenas $C_*(X)$, y para cada función continua $f : X \rightarrow Y$, construir un mapeo de cadena $f_* : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$. Para luego, obtener los grupos de homología $H_*(X)$ de cada espacio y los mapeos $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$.

Para esta construcción se utilizara homología singular. La ventaja de este vía, es que la definición es una propiedad intrínseca del espacio, sin embargo, resulta casi imposible calcular los complejos de cadenas y por ende, los grupos de homología.

Todos los resultados de la sección pueden ser dualizados, tomando el funtor Hom .

Definición: Un *n-simplex estándar* es

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0, \sum t_i = 1 \right\}$$

Observación: La **i-esima cara** de Δ^n es $\Delta_i^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n : t_i = 0\}$. Notamos que un n -simplex tiene $n + 1$ caras. Cada cara luce como un $(n - 1)$ -simplex. De hecho, mediante el mapeo

$$\begin{aligned} \delta_i : \Delta^{n-1} &\rightarrow \Delta^n \\ (t_0, \dots, t_{n-1}) &\rightarrow (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}) \end{aligned}$$

resulta ser homeomorfa a Δ^{n-1} .

Definición: Sea X un espacio topológico. Un **n -simplex singular** en X es una función continua $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

Dado un espacio X , tenemos una colección de n -simplices, vamos a considerar el grupo abeliano libre generado por este conjunto para construir un complejo de cadenas y así los grupos de homología.

Definición: (**Complejo de cadena singular**) Definimos

$$C_n(X) := \left\{ \sum n_\sigma \sigma \mid \sigma : \Delta^n \rightarrow X, n_\sigma \in \mathbb{Z} \text{ nulo salvo finitos casos} \right\}$$

Junto con los diferenciales $d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ dada por

$$\sigma \rightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \delta_i$$

que se extiende linealmente.

Para chequear que efectivamente tenemos un complejo de cadenas, tenemos los siguientes resultados

Lema 1.2: Sea $i < j$, entonces $\delta_j \circ \delta_i = \delta_i \circ \delta_{j-1}$.

Demostración. Sea $x = (t_0, \dots, t_{n-2}) \in \Delta^{n-2}$, notemos que

$$\delta_j \circ \delta_i(x) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{j-2}, 0, t_{j-1}, \dots, t_{n-2}) = \delta_i \circ \delta_{j-1}(x)$$

lo que prueba el resultado. □

Corolario: El morfismo $d_{n-1} \circ d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-2}(X)$ es trivial.

Demostración. Basta probar para cada elemento en la base, es decir, $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Tenemos que

$$d_{n-1} \circ d_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i$$

Usando el lema anterior, vemos que

$$\begin{aligned} d_{n-1} \circ d_n(\sigma) &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_i \circ \delta_{j-1} + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i \end{aligned}$$

haciendo un cambio de índice en la primera expresión, resulta que

$$d_{n-1} \circ d_n(\sigma) = \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j+1} \sigma \circ \delta_i \circ \delta_j + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i = 0$$

□

Con lo anterior podemos definir la homología singular de un espacio

Definición: La **homología singular** de un espacio topológico X es la homología del complejo de cadenas $C_*(X)$, es decir,

$$H_i(X) := H_i(C_*(X), d_*) = \frac{\ker d_i}{\operatorname{im} d_{i+1}}$$

Para definir un complejo de cocadenas debemos trabajar un poco mas. Definimos el grupo abeliano

$$C^n(X) = \operatorname{Hom}(C_n(X), \mathbb{Z})$$

con la operación de grupo dada por $(\psi + \varphi)(a) = \psi(a) + \varphi(a)$ con $\psi, \varphi \in C_n(X)$, se verifica que $\psi + \varphi$ es morfismo. Consideramos el operador dual de d_n , denotado por $d^n : C^n(X) \rightarrow C^{n+1}(X)$ y dado por $d^n(\varphi) := \varphi \circ d_{n+1}$. Observamos que

$$0 \rightarrow C^0(X) \xrightarrow{d^0} C^1(X) \xrightarrow{d^1} \dots$$

es un complejo de cocadenas, ya que $d^{n+1}(d^n(\varphi)) = \varphi \circ d_{n+1} \circ d_{n+2} = \varphi \circ 0 = 0$. Así, la **cohomología singular** se define como

$$H^i(X) := H^i(C^*(X), d^*) = \frac{\ker d^i}{\operatorname{im} d^{i-1}}$$

Proposición 1.3: Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua de espacios topológicos, entonces las funciones

$$f_n : C_n(X) \rightarrow C_n(Y) \quad \text{dada por}$$

$$\sum_{\sigma} n_{\sigma} \sigma \rightarrow \sum_{\sigma} n_{\sigma} f \circ \sigma$$

da un mapeo de cadena.

Demostración. Debemos chequear que $d_n^D \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n^C$. Basta probar para la base, notemos que

$$d_n^D(f_n(\sigma)) = d_n^D(f \circ \sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (f \circ \sigma) \circ \delta_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i f \circ (\sigma \circ \delta_i) = f(d_n^C(\sigma)) = f_{n-1}(d_n^C(\sigma))$$

□

Observación: Por el primer lema, obtenemos una colección de morfismos entre los grupos de homología. Por otro lado, dada $g : Y \rightarrow Z$ una función continua, afirmamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} H_n(X) & \xrightarrow{(g \circ f)_*} & H_n(Z) \\ f_* \downarrow & \nearrow g_* & \\ H_n(Y) & & \end{array}$$

En efecto, sea $\sigma \in C_n(X)$ un elemento de la base, entonces $(g \circ f)_*(\sigma) = g \circ f \circ \sigma = g(f_*(\sigma)) = g_*(f_*(\sigma))$. Adicionalmente, directo de la definición, se obtiene que

$$(id_X)_* = id_{H_n(X)} : H_n(X) \rightarrow H_n(X)$$

De lo anterior, se deduce la siguiente proposición.

Proposición 1.4: Sea $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo, entonces $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ es un isomorfismo de grupos abelianos.

Ejemplo: Consideremos el espacio de un punto $pt = \{*\}$. Existe un único simple singular $\sigma_n : \Delta^n \rightarrow pt$, lo que implica que $\sigma_n \circ \delta_i = \sigma_{n-1}$. Entonces, el grupo libre $C_n(pt) \cong \mathbb{Z}$ y esta generado por σ_n . Notemos que

$$d_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_n \circ \delta_i = \begin{cases} \sigma_{n-1} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Luego, el complejo de cadenas se ve como sigue,

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

El grupo de homología y cohomología del complejo es como sigue

$$H^n(pt) = H_n(pt) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Lema 1.5: Sea X un espacio arcoconexo y no vacío, entonces $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Demostración. Se define el morfismo $\varphi : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ dado por

$$\sum n_{\sigma} \sigma \rightarrow \sum n_{\sigma}$$

Como X es no vacío el morfismo es sobreyectivo. Afirmamos que $\ker \varphi = \operatorname{im} d_1$, en efecto, sea $\sigma \in C_1(X)$, luego

$$\varphi(d_1(\sigma)) = \varphi(\sigma \circ \delta_0 - \sigma \circ \delta_1) = 1 - 1 = 0$$

Por otro lado, supongamos que $\sum n_{\sigma} \sigma \in \ker \varphi$. Sea $x_0 \in X$, consideremos el 0-simple singular $\sigma : \Delta^0 \rightarrow X$. Como el espacio es arcoconexo existe $\tau_{\sigma} : \Delta^1 \rightarrow X$ tal que $\tau_{\sigma} \circ \delta_0 = \sigma$ y $\tau_{\sigma} \circ \delta_1 = x_0$, así

$$d_1\left(\sum n_{\sigma} \tau_{\sigma}\right) = \sum n_{\sigma} (\sigma - x_0) = \sum n_{\sigma} \sigma - \left(\sum n_{\sigma}\right) x_0 = \sum n_{\sigma} \sigma$$

| Por lo tanto, por primer teorema de isomorfismo, se tiene el resultado.

□