



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: PEDRO GASPAR – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

Geometría Diferencial - MAT2860

Apuntes

06 de Marzo de 2025

Índice

Introducción	3
1. Curvas en \mathbb{R}^n	4
1.1. Curvas parametrizadas	4
1.2. Longitud y Parametro de Arco	4
1.3. Curvatura de una Curva Regular (Teoría Local de Curvas)	6
1.4. Teoría Local de Curvas en el Espacio	8
2. Superficies Regulares	12
2.1. Definición y ejemplos	12
2.2. Cambio de Coordenadas	13
2.3. Aplicaciones Diferenciables	14
2.4. El Plano Tangente	17
2.5. El Diferencial de una Aplicación Diferenciable	18
3. La Segunda Forma Fundamental	21
3.1. Campos Vectoriales y Orientación	21
3.2. Formas Fundamentales y Aplicación de Gauss	22

Introducción

Habrán tres interrogaciones (I1, I2, I3) cada una vale un 25 % y un examen (EX) que vale un 25 %. Las fechas son 14 de abril, 19 de Mayo, 16 de Junio y 3 de Julio respectivamente.

1. Curvas en \mathbb{R}^n

1.1. Curvas parametrizadas

Consideramos $\mathbb{R}^n := \{v = (v_1, \dots, v_n) : v_i \in \mathbb{R}\}$. Un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión n , con el producto escalar dado por

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i \quad \text{con } v, w \in \mathbb{R}^n$$

Definición 0.1. Una curva parametrizada en \mathbb{R}^n es una función continua $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con I un intervalo abierto. Escribimos $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$.

Diremos que α es diferenciable si sus funciones coordenadas $\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty$. En tal caso, el vector $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t))$ se llama vector tangente a la curva α en $t \in I$

Definición 0.2. La traza de una curva parametrizada $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es $\alpha(I) = \text{im}(\alpha)$.

Ejemplos

- a) Si $p, v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$, la curva parametrizada $\alpha(t) = tv + p$ con $t \in \mathbb{R}$ que describe una recta que pasa por $p = \alpha(0)$ con vector tangente $\alpha'(t) = v$.
- b) Sea $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\beta(t) := t^3 \cdot \vec{e}_1$ es una curva parametrizada diferenciable con $\beta'(t) = 3t^2 \cdot \vec{e}_1$.
- c) Sea $p \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$ consideramos $\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t)) + p$, una curva parametrizada diferenciable cuya traza es $\alpha(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y) - p| = r\}$
- d) Sean $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$ con $t \in \mathbb{R}$ se llama una helice circular. Además $\alpha'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b)$.
- e) Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ es una curva parametrizada diferenciable con $\alpha(-2) = \alpha(2) = 0$, pero $\alpha'(-2) \neq \alpha'(2)$.

1.2. Longitud y Parametro de Arco

Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada, consideremos $[a, b] \subseteq I$. Buscamos medir la longitud de $\alpha([a, b])$. Una estrategia, dada una partición $P := \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ de $[a, b]$ calculamos

$$\sum_{i=1}^k |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| =: L_a^b(\alpha, P)$$

esta suma corresponde a la longitud de una curva poligonal que pasa por los puntos $\alpha(t_i)$. Si $Q \supseteq P$ es otra partición de $[a, b]$, entonces $L_a^b(\alpha, Q) \geq L_a^b(\alpha, P)$.

Definición 0.3. La longitud de una curva parametrizada α sobre $[a, b] \subseteq I$ es

$$L_a^b(\alpha) = \sup\{L_a^b(\alpha, P) : P \text{ es partición de } [a, b]\}.$$

Si α es diferenciable sobre $[a, b]$ y hacemos $|P| = \max\{t_i - t_{i-1}\}$ muy pequeña, esperaríamos que $|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| \approx |\alpha'(\bar{t}_i)| (t_i - t_{i-1})$.

Proposición 0.1. Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable sobre $[a, b] \subseteq I$, entonces

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

(Para la demostración revisar Montiel-Ros, página 5)

Corolario 0.1. Tenemos que $|\alpha(a) - \alpha(b)| \leq L_a^b(\alpha)$.

Corolario 0.2. Si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cumple $|DF(p)v| = |v|$ para todo $p, v \in \mathbb{R}^n$, entonces $L_a^b(F \circ \alpha) = L_a^b(\alpha)$.

De hecho, $F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable, con

$$|(F \circ \alpha)'(t)| = |DF(\alpha(t))\alpha'(t)| = |\alpha'(t)|$$

para todo $t \in I$, basta con integrar sobre $[a, b]$. Si $p_0 \in \mathbb{R}^n$ y $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal ortogonal, esto es, $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$, entonces $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $F(p) = Ap + p_0$ cumple

$$DF(p)v = \frac{d}{dt}F(p + tv)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(A(p + tv) + p_0)\Big|_{t=0} = Av$$

Por lo tanto $|DF(p)v| = |Av| = |v|$.

Corolario 0.3. Si $h : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ es un difeomorfismo y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una curva parametrizada diferenciable, entonces

$$L_a^b(\alpha \circ h) = L_c^d(\alpha)$$

donde $h([a, b]) = [c, d]$ para todo $[a, b] \subseteq J$.

Por regla de la cadena tenemos que $(\alpha \circ h)'(t) = h'(t)\alpha'(h(t))$. La curva $\alpha \circ h$ tiene la misma traza que α , en efecto $(\alpha \circ h)(J) = \alpha(h(J)) = \alpha(I)$. Decimos que $\alpha \circ h$ es una reparametrización de la curva α .

Demostración. Como h y h^{-1} son diferenciables, se tiene que $h'(t) \neq 0$ para todo $t \in J$. Veamos que

$$1 = \frac{d}{dt}(t) = (h^{-1} \circ h)'(t) = (h^{-1})'(h(t))h'(t)$$

Luego como J es un intervalo y h' es continua, tenemos que $h' < 0$ o $h' > 0$.

- Si $h' < 0$, entonces $h(a) = c$, $h(b) = d$,

$$\int_a^b |(\alpha \circ h)'(t)| dt = \int_a^b |\alpha'(h(t))| |h'(t)| dt = \int_c^d |\alpha'(s)| ds = L_c^d(\alpha)$$

- Si $h' > 0$, entonces $h(b) = c$, $h(a) = d$,

$$\int_a^b |(\alpha \circ h)'(t)| dt = \int_a^b |\alpha'(h(t))| |h'(t)| dt = \int_d^c |\alpha'(s)| ds = \int_c^d |\alpha'(s)| ds = L_c^d(\alpha)$$

Definición 0.4. Se dice que una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Si además $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$ se dice que α está parametrizada por el arco.

Una curva α parametrizada por el arco tiene las siguientes propiedades

- $\alpha'(t)$ es ortogonal a $\alpha''(t)$ para todo $t \in I$, en efecto

$$0 = \frac{d}{dt}(|\alpha'(t)|^2) = \frac{d}{dt}(\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle) = 2 \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle$$

- Se tiene que $L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt = b - a$.

Teorema 1. Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable regular, entonces α admite una parametrización por arco. Concretamente, si $t_0 \in I$ y definimos $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$s(t) := \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$$

entonces s es un difeomorfismo sobre $J \subseteq \mathbb{R}$ y $\alpha \circ s^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ está parametrizada por el arco.

Demostración. Por TFC, sabemos que s es diferenciable, mas aun, $s'(t) = |\alpha'(t)|$ para todo $t \in I$. Luego, $s' > 0$, es decir, s es creciente y $s(I) = J$ es un intervalo abierto. Además, por teorema de la función inversa,

vemos que

$$(s^{-1})'(r) = \frac{1}{s'(s^{-1}(r))} = \frac{1}{|\alpha'(s^{-1}(r))|} \quad \forall r \in J$$

Por lo tanto $|(\alpha \circ s^{-1})'(r)| = 1$ para todo $r \in J$, luego $\alpha \circ s^{-1}$ esta parametrizada por el arco.

Ejemplos

a) Sea $\alpha(t) = tv + p_0$ con $p_0, v \in \mathbb{R}^n$ y $v \neq 0$. Como $\alpha'(t) = v$, tenemos

$$s(t) = \int_0^t |v| dx = t|v|$$

entonces $\alpha \circ s^{-1}(x) = x \cdot \frac{v}{|v|} + p_0$ es una parametrización por el arco de α .

b) Consideremos $\alpha(t) = (rcost, rsent) + p_0$ con $p_0 \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$. Como $\alpha'(t) = (-rsent, rcost)$ entonces $|\alpha'(t)| = r$, tenemos que

$$s(t) = \int_0^t r dx = rt$$

y $(\alpha \circ s^{-1})(x) = (rcos(\frac{x}{r}), rsen(\frac{x}{r})) + p_0$ es una curva parametrizada por el arco para α .

c) Definimos $\alpha(t) = (acost, asent, bt)$ con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ una curva parametrizada por el arco es

$$(\alpha \circ s^{-1})(x) = \left(acos\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), asen\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

1.3. Curvatura de una Curva Regular (Teoría Local de Curvas)

Notación: Notamos por \mathcal{J} a la función $\mathcal{J} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\mathcal{J}(x, y) = (-y, x)$ que cumple lo siguientes

- \mathcal{J} es una transformación lineal ortogonal.
- $\langle u, \mathcal{J}u, \rangle = 0$ y $\mathcal{J}(\mathcal{J}u) = -u$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$.
- Si $|u| = 1$, entonces $\{u, \mathcal{J}u\}$ es una base ortonormal positiva de \mathbb{R}^2 .
- Si $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal ortogonal, entonces $\mathcal{J}A = \det(A)A\mathcal{J}$.

Nuestro objetivo es asociar a una curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una cantidad geometrica, para ello queremos definir una función $K(= K_\alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- a) K es invariante bajo movimientos rigidos.
- b) K es invariante por parametrizaciones.
- c) $K \equiv 0$ si y solo si α corresponde a un segmento de recta.

Si tenemos $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por el arco, definimos la función $T : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(s) := \alpha'(s)$ y $N : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $N(s) := \mathcal{J}T(s)$. Recordemos que $\{T(s), N(s)\}$ es una base ortonormal en \mathbb{R}^2 para cada $s \in I$ (Diedro de Frenet).

Notemos que $N(s) \perp T(s)$ y $T'(s) \perp T(s)$, luego, existe un $k(s) \in \mathbb{R}$ tal que $T'(s) = K(s)N(s)$. La función $K_\alpha = K : I \rightarrow \mathbb{R}$ se llama la curva de α . Tomando el producto con $N(s)$,

$$K(s) = \langle K(s)N(s), N(s) \rangle$$

Por lo tanto $K(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$. Por otro lado, observemos que

$$N'(s) = \frac{d}{ds}(\mathcal{J}T(s)) = \mathcal{J} \frac{d}{ds}(T(s)) = \mathcal{J}(K(s)N(s)) = \mathcal{J}(K(s)\mathcal{J}T(s)) = -K(s)T(s)$$

Proposición 1.1. Para una curva parametrizada por el arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ vale que $T' = KN$ y $N' = -KT$.

Ejemplos:

a) Una recta parametrizada por el arco $\alpha(s) := s \cdot \frac{v}{|v|} + p_0$ con $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, tenemos que

$$T(s) = \frac{v}{|v|}, N(s) = \frac{\mathcal{J}v}{|v|} = \frac{\mathcal{J}v}{|\mathcal{J}v|} \text{ y } K(s) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

b) Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ esta parametrizada y $K \equiv 0$, entonces $T'(s) = 0$ para todo $s \in I$, es decir, $\alpha''(s) = 0$ para todo $s \in I$. Integrando dos veces concluimos que cada coordenada de α es una función lineal, luego α es un segmento de recta.

c) Sea $\alpha(s) := (r \cos(\frac{s}{r}), r \sin(\frac{s}{r})) + p_0$, entonces

$$T(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right) \text{ y } N(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \right)$$

Notemos que

$$T'(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right) = \frac{1}{r} N(s)$$

Por lo tanto $K(s) = \frac{1}{r} \langle N(s), N(s) \rangle = \frac{1}{r}$.

Consideremos ahora una curva regular $\beta : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$ y una reparametrización $\alpha = \beta \circ h : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por el arco, donde $h : I \rightarrow \tilde{I}$ es un difeomorfismo con $h' > 0$. Con esto

$$|\beta'(t)| = |(\beta \circ h \circ h^{-1})'(t)| = |(\alpha \circ h^{-1})'(t)| = (h^{-1})'(t)$$

Así, definimos el diedro de Frenet de la curva α por

$$T_\beta(t) := \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = \frac{(\alpha \circ h^{-1})'(t)}{|(\alpha \circ h^{-1})'(t)|} = \frac{\alpha'(h^{-1}(t))h^{-1}(t)}{|\alpha'(h^{-1}(t))h^{-1}(t)|} = T_\alpha(h^{-1}(t))$$

Por otro lado

$$N_\beta = \mathcal{J}T_\beta(t) = \mathcal{J}T_\alpha(h^{-1}(t)) = N_\alpha(h^{-1}(t))$$

y definimos la curvatura de la curva β por

$$K_\beta(t) := K_\alpha(h^{-1}(t)), \quad t \in \tilde{I}$$

Como $\beta'(t) = |\beta'(t)| T_\alpha(h^{-1}(t))$ se tiene que

$$\beta'' = (|\beta'|)' T_\alpha \circ h^{-1} + |\beta'|^2 (T'_\alpha \circ h^{-1})$$

y además $N_\alpha \circ h^{-1} = \mathcal{J}T_\beta = \frac{\mathcal{J}\beta'}{|\beta'|}$ se sigue que

$$\frac{\langle \beta'', \mathcal{J}\beta' \rangle}{|\beta'|} = \left\langle (|\beta'|)' T_\alpha \circ h^{-1} + |\beta'|^2 (T'_\alpha \circ h^{-1}), N_\alpha \circ h^{-1} \right\rangle = |\beta'|^2 \langle T'_\alpha \circ h^{-1}, N_\alpha \circ h^{-1} \rangle = |\beta'|^2 K_\alpha \circ h^{-1}$$

Concluimos que $K_\beta = \frac{\langle \beta'', \mathcal{J}\beta' \rangle}{|\beta'|^3}$.

Proposición 1.2. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular, entonces

a) Si $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$ es un difeomorfismo entonces $K_{\alpha \circ \phi} = \text{sgn}(\phi') K_\alpha \circ \phi$.

b) Si $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un movimiento rígido, entonces $K_{F \circ \alpha} = (\det DF) K_\alpha$.

Demostración. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular

a) Como $(\alpha \circ \phi)'(t) = \phi'(t) \alpha'(\phi(t))$, se sigue que $|(\alpha \circ \phi)'(t)| = |\phi'(t)| |\alpha'(\phi(t))|$, escrito de otro modo

$$|(\alpha \circ \phi)| = \text{sgn}(\phi') \cdot \phi' |\alpha' \circ \phi|$$

Luego

$$\begin{aligned} K_{\alpha \circ \phi} &= \frac{\langle (\alpha \circ \phi)'', \mathcal{J}(\alpha \circ \phi)' \rangle}{|(\alpha \circ \phi)'|^3} = \frac{\langle \phi''(\alpha' \circ \phi) + (\phi')^2 \alpha'' \circ \phi, \phi' \mathcal{J}(\alpha' \circ \phi) \rangle}{\text{sgn}(\phi')(\phi')^3 |\alpha' \circ \phi|^3} \\ &= \frac{(\phi')^3 \langle \alpha'' \circ \phi, \mathcal{J} \alpha' \circ \phi \rangle}{(\phi')^3 |\alpha' \circ \phi|^3} \text{sgn}(\phi') = \text{sgn}(\phi') K_\alpha \circ \phi \end{aligned}$$

b) Sabemos que $F(p) = Ap + p_0$, entonces $DF = A$. Luego,

$$\begin{aligned} \langle (F \circ \alpha)'', \mathcal{J}(F \circ \alpha)' \rangle &= \langle (DF(\alpha)\alpha')', \mathcal{J}(DF(\alpha)\alpha') \rangle = \langle (A\alpha')', \mathcal{J}(A\alpha') \rangle \\ &= \langle A\alpha'', (\det A)A\mathcal{J}\alpha' \rangle = \det A \langle \alpha'', \mathcal{J}\alpha' \rangle \end{aligned}$$

Además $|(F \circ \alpha)'| = |A\alpha'| = |\alpha'|$. Juntando lo anterior vemos que

$$K_{F \circ \alpha} = \frac{\langle (F \circ \alpha)'', \mathcal{J}(F \circ \alpha)' \rangle}{|(F \circ \alpha)'|^3} = \det A \cdot K_\alpha$$

Proposición 1.3. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por el arco. Supongamos que existe una función diferenciable $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$. Entonces $K_\alpha = \frac{d\theta}{ds}$.

Demostración. Recordemos que

$$K_\alpha = \langle T'_\alpha, \mathcal{J}T_\alpha \rangle = \left\langle \left(-\frac{d\theta}{ds} \sin\theta, \frac{d\theta}{ds} \cos\theta \right), (-\sin\theta, \cos\theta) \right\rangle = \frac{d\theta}{ds} |(-\sin\theta, \cos\theta)|^2 = \frac{d\theta}{ds}$$

Teorema 2. Sea $K : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces existe una única curva parametrizada por el arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, salvo por movimientos rígidos, tal que $K_\alpha = K$.

1.4. Teoría Local de Curvas en el Espacio

Definición 2.1. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco. La curvatura de α en $s \in I$ es

$$K_\alpha := |T'(s)|$$

Observación: Para curvas en \mathbb{R}^3 , $K_\alpha \geq 0$. Además, $K_\alpha \equiv 0$ si y solo si α es un segmento de recta.

Definición 2.2. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco, tal que $K_\alpha > 0$. Definimos

$$N(s) := \frac{T'(s)}{|T'(s)|}$$

Observación: Como $T(s) \perp T'(s)$, pues $|T| = 1$, esta definición se condice con el caso en \mathbb{R}^2 , además de manera directa, obtenemos que $K_\alpha N(s) = T'(s)$.

Definición 2.3. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco. Definimos el vector binormal de α en $s \in I$ por

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

Observación: Por definición del producto cruz el conjunto $\{T, N, B\}$ es una base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 para todo $s \in I$ llamada el triedro de Frenet de α en $s \in I$.

Notemos que $B'(s) = \frac{d}{ds}(T(s) \times N(s)) = T'(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s) = T(s) \times N'(s)$. Además, $|B| = |T| |N| = 1$ y por lo tanto $B' \perp B$, por otro lado $\langle B', T \rangle = \langle T \times N', T \rangle = 0$, osea $B' \perp T$. Por lo tanto, existe $\tau(s) \in I$ tal que

$$B'(s) = \tau(s)N(s)$$

Se dice que $\tau(s) =: \tau_\alpha(s)$ es la torsión de α en $s \in I$. Finalmente, como $N' \perp N$, tenemos que

$$N'(s) = aT(s) + bB(s)$$

donde

$$\begin{aligned} a \langle T, T \rangle &= \langle N', T \rangle = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle - \langle N, T' \rangle \\ &= \frac{d}{ds} \langle N, T \rangle - \langle N, T' \rangle = -\langle N, KN \rangle = -K \end{aligned}$$

y similarmente obtenemos que $b = \langle N', B \rangle = -\tau(s)$.

Proposición 2.1. *Ecuaciones de Frenet-Serret*

- $T'(s) = K(s)N(s)$
- $N'(s) = -K(s)T(s) - \tau(s)B(s)$
- $B'(s) = \tau(s)N(s)$

Ejemplos:

- a) Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco. Supongamos que $\alpha(I) \subseteq P$ con P un plano. Podemos describir el plano con la ecuación $\langle x - p_0, u \rangle = 0$, donde $p_0, u \in \mathbb{R}^3$ con u unitario y perpendicular al plano. Entonces $\langle \alpha(s) - p_0, u \rangle = 0$ para todo $s \in I$, derivando vemos que

$$\langle \alpha'(s), u \rangle = \langle T(s), u \rangle = 0 \quad \forall s \in I$$

En ese caso, $K(s)$ es el valor absoluto de la curvatura de α como una curva plana. Supongamos que $K(s) > 0$ para todo $s \in I$. Entonces

$$0 = \frac{d}{ds} \langle T, u \rangle = \langle T', u \rangle = K(s) \langle N, u \rangle$$

lo que implica que $N \perp u$ para todo $s \in I$. Luego, $B(s) = \pm u$ para todo $s \in I$, se sigue que $\tau(s) = \langle B', N \rangle = 0$.

- b) Supongamos que α es una curva parametrizada por el arco tal que $\tau_\alpha \equiv 0$, entonces $B' = \tau \cdot N = 0$ para todo $s \in I$ y por lo tanto $B = u$, con $u \in \mathbb{R}^3$ y $|u| = 1$, así $T \times N = u$ para todo $s \in I$.

Ahora, usando las ecuaciones de frenet vemos que $T \perp u$ y $N \perp u$ para todo $s \in I$ y concluimos que

$$\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), u \rangle = \left\langle \int_{s_0}^s T(x) dx, u \right\rangle = \int_{s_0}^s \langle T(x), u \rangle dx = 0 \quad \forall s \in I$$

Proposición 2.2. *Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco, $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineal, ortogonal y positiva. Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $F(p) = Ap + p_0$. Entonces*

$$\begin{aligned} K_{F \circ \alpha} &= K_\alpha & , & \quad \tau_{F \circ \alpha} = \tau_\alpha \\ T_{F \circ \alpha} &= AT_\alpha & , \quad N_{F \circ \alpha} = AN_\alpha & , \quad B_{F \circ \alpha} = AB_\alpha \end{aligned}$$

Podemos extender las definiciones de curvatura, torsión y del tiedro de frenet para curvas regulares $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$K_\beta(t) := K_\alpha(h^{-1}(t))$$

donde $\alpha = \beta \circ h$ es una parametrización por el arco, con h difeomorfismo, $h' > 0$ y $K_\beta > 0$. Se cumple lo siguiente

- $T_\beta(t) = T_\alpha(h^{-1}(t))$
- $N_\beta(t) = N_\alpha(h^{-1}(t))$
- $B_\beta(t) = B_\alpha(h^{-1}(t))$

$$\blacksquare \tau_\beta(t) = \tau_\alpha(h^{-1}(t))$$

Proposición 2.3. Sea $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular, entonces

$$\begin{aligned} a) \quad K_\beta &= \frac{|\beta' \times \beta''|}{|\beta'|^3} \\ b) \quad \tau_\beta &= \frac{-\det(\beta', \beta'', \beta''')}{|\beta' \times \beta''|^2} = -\frac{\langle \beta', \beta'' \times \beta''' \rangle}{|\beta' \times \beta''|^2} \\ c) \quad T_\beta &= \frac{\beta'}{|\beta'|} \\ d) \quad B_\beta &= \frac{\beta' \times \beta''}{|\beta' \times \beta''|} \\ e) \quad N_\beta &= \frac{|\beta'|^2 \beta'' - \langle \beta', \beta'' \rangle \beta'}{|\beta'|^2 \beta'' - \langle \beta', \beta'' \rangle \beta'|} \end{aligned}$$

Teorema 3. (Teorema Fundamental de las curvas en el Espacio)

Sea $K, \tau : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables con $K(s) > 0$ para todo $s \in I$. Entonces existe $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco tal que

$$K_\alpha = K \quad y \quad \tau_\alpha = \tau$$

Además, si $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es parametrizada por el arco tal que $K_\beta = K$ y $\tau_\beta = \tau$. Entonces existe un movimiento rígido $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F \circ \beta = \alpha$.

Demostración. El sistema

$$(FS) : \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad y \quad A(s) = \begin{pmatrix} 0 & K(s) & 0 \\ -K(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

para cada $\{T_0, N_0, B_0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ y $s_0 \in I$, existe una única solución del sistema, $\{T, N, B\}$, definida en I tal que $T(s_0) = T_0$, $N(s_0) = N_0$ y $B(s_0) = B_0$. Veamos que $\{T, N, B\}$ son ortonormales para cada $s \in I$. Sea $\{T_0, N_0, B_0\}$ una base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 . Consideremos la función

$$M(s) = \begin{pmatrix} \langle T, T \rangle & \langle T, N \rangle & \langle T, B \rangle \\ \langle N, T \rangle & \langle N, N \rangle & \langle N, B \rangle \\ \langle B, T \rangle & \langle B, N \rangle & \langle B, B \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} M'(s) &= \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}'^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}' \\ &= A \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} \\ &= AM - MA \end{aligned}$$

La matriz $M_0(s) = I_3$ con $s \in I$ es solución del sistema, además $M_0(s_0) = I_3 = M(s_0)$ (pues T_0, N_0, B_0 son ortonormales). Por unicidad de la solución $M(s) \equiv I_3$ para todo $s \in I$.

La matriz $\begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}$ tiene determinante 1 o -1. Como I es conexo y el determinante una función continua, entonces es constante. Como vale 1 en $s = s_0$ pues $\{T_0, N_0, B_0\}$ es base positiva, vale 1 sobre I .

Definimos $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\alpha(x) = \int_{s_0}^s T(x) dx$$

Por TFC, $\alpha'(s) = T(s)$ unitario, luego α es una curva parametrizada por el arco. Además

$$K_\alpha(s) = |T'(s)| = |K(s)N(s)| = K(s)|N(s)| = K(s) \quad \forall s \in I$$

De ahí,

$$N_\alpha(s) = \frac{T'_\alpha(s)}{|T'_\alpha(s)|} = \frac{T'(s)}{|T'(s)|} = \frac{K(s)N(s)}{|K(s)N(s)|} = N(s)$$

y $B_\alpha(s) = T_\alpha(s) \times N_\alpha(s) = T(s) \times N(s) = B(s)$, ya que $T(s), N(s), B(s)$ es base ortonormal positiva. Por tanto,

$$\tau_\alpha = \langle B'_\alpha(s), N_\alpha(s) \rangle = \langle B'(s), N(s) \rangle = \langle \tau N, N \rangle = \tau(s)$$

Sea $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ortogonal tal que

$$AT_\beta(s_0) = T_\alpha(s_0)$$

$$AN_\beta(s_0) = N_\alpha(s_0)$$

$$AB_\beta(s_0) = B_\alpha(s_0)$$

y $p_0 = \alpha(s_0) - A\beta(s_0)$. Luego, $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $F(p) = Ap + p_0$. Defina $\gamma = F \circ \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Queremos ver que $\gamma \equiv \alpha$. Como F es movimiento rígido α y γ tienen curvatura K y torsión τ y tiedro

$$T_\gamma = T_{F \circ \beta} = AT_\beta$$

$$N_\gamma = N_{F \circ \beta} = AN_\beta$$

$$B_\gamma = B_{F \circ \beta} = AB_\beta$$

Luego $f(s) = |T_\gamma(s) - T_\alpha(s)|^2 + |N_\gamma(s) - N_\alpha(s)|^2 + |B_\gamma(s) - B_\alpha(s)|^2$ vale 0 en $s = s_0$. Por otro lado

$$f'(s) = 2\langle T_\gamma - T_\alpha, T'_\gamma - T'_\alpha \rangle + 2\langle N_\gamma - N_\alpha, N'_\gamma - N'_\alpha \rangle + 2\langle B_\gamma - B_\alpha, B'_\gamma - B'_\alpha \rangle = 0 \quad \forall s \in I$$

por lo tanto f es constante y por lo mencionado $f \equiv 0$. De este modo, $\gamma' = T_\gamma \equiv T_\alpha = \alpha'$. Como

$$\gamma(s_0) = F(\beta s_0) = A\beta(s_0) + p_0 = \alpha(s_0)$$

concluimos que $\gamma \equiv \alpha$.

2. Superficies Regulares

2.1. Definición y ejemplos

Definición 3.1. Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, decimos que Σ es una superficie regular si para todo $p \in \Sigma$ existe un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^3$ con $p \in V$ y una función diferenciable

$$\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que

- $\varphi(\mathcal{V}) = V \cap \Sigma$
- φ es homeomorfismo de \mathcal{V} sobre $V \cap \Sigma$
- $D\varphi(q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva, es decir, si $\varphi = \varphi(u, v)$, entonces

$$D\varphi(q) \cdot e_1 = \frac{d}{dt}\varphi(q + te_1)|_{t=0} = \varphi_u(q)$$

$$D\varphi(q) \cdot e_2 = \frac{d}{dt}\varphi(q + te_2)|_{t=0} = \varphi_v(q)$$

son linealmente independientes, en otras palabras $\varphi_u(q) \times \varphi_v(q) \neq 0$. Decimos que φ es una parametrización local para Σ

Ejemplos:

- Sea $f : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, consideramos $\Sigma := \{(x, y, (f(x, y))) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{V}\}$ Tomamos $V = \mathbb{R}^3$, definimos la función $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$, entonces

a) $\varphi(\mathcal{V}) = \Sigma = \Sigma \cap V$.

b) φ tiene inversa, a saber, $\varphi^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ que es la restricción de una función continua, luego φ^{-1} es continua.

c) $\varphi_u(u, v) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\right)$ y $\varphi_v(u, v) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right)$ son linealmente independientes.

Por lo tanto, φ es una parametrización local con $\varphi(\mathcal{V}) = \Sigma$

- Veamos la esfera unitaria \mathbb{S}^2 . Si $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$, entonces $x \neq 0$ o $y \neq 0$ o $z \neq 0$. Consideramos

$$\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^2 \cap (V_1^+ \cup V_2^+ \cup V_3^+ \cup V_1^- \cup V_2^- \cup V_3^-)$$

donde $V_i^\pm := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \pm x_i > 0\}$. Definimos la función $\varphi_1^\pm : B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi_1^\pm(u, v) := (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v)$$

luego, $\varphi_1^\pm(B_1(0)) = V_1^\pm \cap \mathbb{S}^2$, $(\varphi_1^\pm)^{-1} : V_1^\pm \cap \mathbb{S}^2 \rightarrow B_1(0)$ que manda (x, y, z) en (y, z) es continua y además $(\varphi_1^\pm)_u^{-1}(q)$ y $(\varphi_1^\pm)_v^{-1}(q)$ son linealmente independientes para todo $q \in B_1(0)$. Un argumento similar se utiliza para V_2^\pm y V_3^\pm .

Definición 3.2. Una superficie parametrizada diferenciable es una aplicación diferenciable $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con \mathcal{V} abierto. Se dice que φ es regular si $D\varphi(q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $q \in \mathcal{V}$.

Ejemplos:

- Toda parametrización local de una superficie regular es una superficie parametrizada regular.
- Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada diferenciable. Definimos $\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\varphi(u, v) = (\alpha(u), v)$. Esta superficie parametrizada diferenciable se llama cilindro sobre α .

Como $\varphi_u(u, v) = (\alpha'(u), 0)$ y $\varphi_v(u, v) = (0, 0, 1)$ son linealmente independientes si y solo si $\alpha' \neq 0$, es decir, φ es regular si y solo si α es una curva regular.

- Si $I = \mathbb{R}$ y existe $T \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(t + T) = \alpha(t)$ entonces $\varphi(I \times \mathbb{R}) = \alpha(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ es una superficie regular.
- Si α es inyectiva y para todo $t \in I$ existen abiertos $V \subseteq \mathbb{R}^2$ y $J \subseteq I$ con $t \in J$ tales que $\alpha(I) \cap V = \alpha(J)$ entonces $\varphi(I \times \mathbb{R})$ es una superficie regular.

Teorema 4. (Teorema de la Función Implícita) Sea $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continua diferenciable, $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in W$ tal que $\frac{\partial h}{\partial z}(p_0) \neq 0$. Entonces existen abiertos $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f : \mathcal{V} \rightarrow I$ continua diferenciable tales que

- El punto $p_0 \in \mathcal{V} \times I$
- Se tiene la igualdad de conjuntos $h^{-1}(h_{p_0}) \cap (\mathcal{V} \times I) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathcal{V}\}$

Además se tiene que

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{-\frac{\partial h}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{\partial h}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{-\frac{\partial h}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$$

Si h es suave entonces f también lo es.

Definición 4.1. Sea $F : W \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable. Se dice que $q \in \mathbb{R}^m$ es un valor regular para F , si $F^{-1}(q) = \emptyset$ o si para todo $p \in F^{-1}(q)$ se tiene que $DF(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es sobreyectiva.

Por ejemplo si $h : W \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ entonces $Dh(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Dh(p)e_i &= \frac{d}{dt}h(p + te_i)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}h(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \dots, p_n)|_{t=0} \\ &= \frac{\partial h}{\partial x_i}(p) \end{aligned}$$

Luego $q \in \mathbb{R}$ es valor regular para h si y solo si para todo $p \in h^{-1}(q)$, $\frac{\partial h}{\partial x_i}(p) \neq 0$ para algún i , o sea, $\nabla h(p) \neq 0$ para todo $p \in h^{-1}(q)$.

Teorema 5. Sea $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $c \in \mathbb{R}$ es un valor regular para h , entonces $h^{-1}(c)$ es una superficie regular.

Demostración. Si c es valor regular, entonces para todo $p \in h^{-1}(c)$ se sigue que $\nabla h(p) \neq 0$, es decir,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(p) \neq 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(p) \neq 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial h}{\partial z}(p) \neq 0$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\frac{\partial h}{\partial z} \neq 0$. Por teo de la función Implícita, existen abiertos $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función suave $f : \mathcal{V} \rightarrow I$ tales que $p \in \mathcal{V} \times I$ y $h^{-1}(c) \cap (\mathcal{V} \times I) = \text{Graf}(f)$.

Por lo visto al inicio de la sección, existe parametrización local $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\varphi(\mathcal{V}) = h^{-1}(c) \cap (\mathcal{V} \times I)$.

2.2. Cambio de Coordenadas

Lema 5.1. Sea $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie parametrizada regular

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Entonces para todo punto $(u_0, v_0) \in \mathcal{V}$ se tiene que $D(\pi \circ \varphi)(u_0, v_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un isomorfismo lineal, donde $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una de las proyecciones a los planos xy , xz o yz .

Consecuentemente existe $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$ abierto con $(u_0, v_0) \in \mathcal{V}_0$ tal que $\pi \circ \varphi(\mathcal{V}_0) = W_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto y $\pi \circ \varphi|_{\mathcal{V}_0} : \mathcal{V}_0 \rightarrow W_0$ es un difeomorfismo.

Demostración. La matriz $D\varphi(u_0, v_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} (u_0, v_0)$$

Como la superficie es regular, las columnas son linealmente independientes. Luego la matriz tiene una submatriz 2×2 invertible. Pero estas submatrices son las matrices de

$$D(\pi \circ \varphi)(u_0, v_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

La última parte es consecuencia directa del teorema de la función inversa.

Observación: La función $\psi = \varphi \circ (\pi \circ \varphi)^{-1} : W_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es también una superficie parametrizada regular con

$$\psi(W_0) = \varphi((\pi \circ \varphi)^{-1}(W_0)) = \varphi(\mathcal{V}_0)$$

Además, $\pi \circ \psi = id_{W_0}$, osea, ψ es la grafica de una función $f : W_0 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable.

Corolario 5.1. Si $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie regular, entonces para todo $p \in \Sigma$ existe parametrización local cuya imagen contiene a p y que es grafica.

Teorema 6. Si $\varphi_i : \mathcal{V}_i \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ son parametrizaciones locales de Σ con $U := \varphi_1(\mathcal{V}_1) \cap \varphi_2(\mathcal{V}_2) \neq \emptyset$. Entonces la aplicación

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi_2^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^2$$

es un difeomorfismo. Se dice que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ es un cambio de coordenadas.

Demostración. Como φ_i son homeomorfismos, basta demostrar que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ es diferenciable en cada $p_1 \in \varphi_1^{-1}(U)$. Sean

$$q = \varphi_1(p_1) \quad \text{y} \quad p_2 = \varphi_2^{-1}(q) = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(p_1))$$

Por el lema, existe proyección $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y un abierto $V_2 \subseteq \varphi_2^{-1}(U)$ con $p_2 \in V_2$ tal que

$$\pi \circ \varphi_2 : V_2 \rightarrow \pi(\varphi_2(V_2)) =: W \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ un abierto}$$

es un difeomorfismo. Sea $V_1 := (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)^{-1}(V_2) = \varphi_1^{-1}(\varphi_2(V_2))$, entonces

- $p_1 \in V_1$ pues $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(p_1) = \varphi_2^{-1}(q) = p_2 \in V_2$.
- Si $p \in V_1$ entonces $\varphi_1(p) \in \varphi_2(V_2)$ y por ende $\pi \circ \varphi_1(p) \in \pi \circ \varphi_2(V_2) = W$
- V_1 es abierto

Por lo tanto esta bien definida la función $(\pi \circ \varphi_2)^{-1} \circ \pi \circ \varphi_1 : V_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$. La cual cumple que $(\pi \circ \varphi_2)^{-1} \circ \pi \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ en su dominio. Como $(\pi \circ \varphi_2)^{-1}$ y $(\pi \circ \varphi_1)$ son diferenciables, $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ es diferenciable en $p_1 \in V_1$.

2.3. Aplicaciones Diferenciables

Definición 6.1. Se dice que $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^d$ es diferenciable en $p \in \Sigma$ si existe una parametrización local $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ con $p \in \varphi(\mathcal{V})$ y tal que $f \circ \varphi$ es diferenciable en $\varphi^{-1}(p) \in \mathcal{V}$.

Definición 6.2. Se dice que

$$\gamma : V \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$$

con Σ una superficie parametrizada regular, es diferenciable en $q \in V$. Si existe una parametrización local $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ con $\gamma(q) \in \varphi(\mathcal{V})$ tal que

$$\varphi^{-1} \circ \gamma : \gamma^{-1}(\varphi(\mathcal{V})) \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^2$$

es diferenciable en $q \in \gamma^{-1}(\varphi(\mathcal{V}))$.

Observación:

- a) La definición de diferenciabilidad de $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^d$ no depende de la parametrización

$$f \circ \tilde{\varphi} = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})$$

entonces $f \circ \tilde{\varphi}$ es diferenciable si y solo si $f \circ \varphi$ es diferenciable.

- b) Esta noción de diferenciabilidad es local, es decir, si $p \in U \subseteq \Sigma$, con U abierto, entonces f es diferenciable si y solo si $f|_U : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ es diferenciable en p .

- c) Si $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^d$ es diferenciable entonces f es continua, en efecto

$$f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$$

es composición de mapeos continuos.

- d) Observaciones análogas se cumplen para $\gamma : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$.

Ejemplos:

- Si $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ es una parametrización local, entonces φ y φ^{-1} son diferenciables y $\varphi^{-1} \circ \varphi$ es la identidad.
- Si $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable con W abierto y si $\Sigma \subseteq W$ es una superficie parametrizada regular, entonces $h|_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable. Para toda parametrización local $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ tenemos que $h|_{\Sigma}$ es la composición de φ y h .
- Función altura, $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(p) = \langle u, p - p_0 \rangle$. Esta función mide la altura del punto $p_0 \in \Sigma$ al plano $p_0 + u^\perp$, donde $|u| = 1$.
- El cuadrado de la distancia a un $p_0 \in \mathbb{R}^3$. Es decir, $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $|p - p_0|^2$. Si $p_0 \notin \Sigma$ entonces $|p - p_0|^2$ también es diferenciable.

Lema 6.1.

- a) Sean $\gamma : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \Sigma$ y $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^m$ tales que γ es diferenciable en q y f es diferenciable en $\gamma(q)$ entonces $f \circ \gamma$ es diferenciable en q .
- b) Sean $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\phi : W \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ con $f(\Sigma) \subseteq W$ tales que f es diferenciable en p y ϕ es diferenciable en $\phi \circ f$ es diferenciable en p .

Demostración.

- a) Sea $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local con $\gamma(q) \in \varphi(\mathcal{V})$. Entonces $\varphi \circ \gamma$ es diferenciable en q y $f \circ \varphi$ es diferenciable en $\varphi^{-1}(\gamma(q))$. Luego

$$f \circ \gamma = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \gamma)$$

es diferenciable en q por ser composición de funciones diferenciables.

- b) Sea $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local de $p \in \varphi(\mathcal{V})$, entonces $f \circ \varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\varphi^{-1}(p)$. Además $f \circ \varphi(\mathcal{V}) \subseteq f(\Sigma) \subseteq W$ y ϕ es diferenciable en $f \circ \varphi(\varphi^{-1}(p)) = f(p)$. Luego

$$(\phi \circ f) \circ \varphi = \phi \circ (f \circ \varphi)$$

es diferenciable en $\varphi^{-1}(p)$. Por lo tanto, $\phi \circ f$ es diferenciable en $p \in \Sigma$.

Corolario 6.1. Una aplicación $\gamma : V \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \Sigma$ es diferenciable en $q \in V$ si y solo si sus coordenadas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ son funciones diferenciables de V a \mathbb{R} en q .

Definición 6.3. Sean Σ_1, Σ_2 superficies regulares. Se dice que

$$F : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$$

es diferenciable en $p \in \Sigma_1$. Si existen parametrizaciones locales $\varphi_i : \mathcal{V}_i \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ para Σ_i con $p \in \varphi_1(\mathcal{V}_1)$ y $F(p) \in \varphi_2(\mathcal{V}_2)$ tales que

$$\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1 : (F \circ \varphi_1)^{-1}(\varphi_2(\mathcal{V}_2)) \rightarrow \mathcal{V}_2$$

es diferenciable en q .

Proposición 6.1. Sea $F : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ y escribimos

$$F(p) = (F_1(p), F_2(p), F_3(p))$$

donde $F_i : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces F es diferenciable en $p \in \Sigma_1$ si y solo si F_i son diferenciables en $p \in \Sigma_1$.

Definición 6.4. Se dice que $F : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ entre superficies regulares es un difeomorfismo si

- F es diferenciable, es decir, F es diferenciable para todo $p \in \Sigma_1$.
- F es una biyección y F^{-1} es diferenciable

Teorema 7. Sean $F : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ y $G : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$ aplicaciones diferenciables entre superficies regulares. Si F es diferenciable en $p \in \Sigma_1$ y G es diferenciable en $F(p) \in \Sigma_2$ entonces $G \circ F$ es diferenciable en $p \in \Sigma_1$.

Demostración. Escribimos $G(p) = (G_1(p), G_2(p), G_3(p))$ donde $G_i : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables en $F(p)$ por la proposición anterior. Por el lema anterior tenemos que $G_i \circ F : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables en $p \in \Sigma_1$. Como

$$G \circ F(p) = (G_1 \circ F(p), G_2 \circ F(p), G_3 \circ F(p))$$

por la proposición anterior, $G \circ F$ es diferenciable en $p \in \Sigma_1$.

Del teorema anterior se sigue que Σ_1 es difeomorfo a Σ_2 define una relación de equivalencia entre superficies regulares. Notemos que

$$id_{\Sigma_1} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$$

es un difeomorfismo. Si φ_1, φ_2 son parametrizaciones locales entonces $\varphi_2^{-1} \circ id_{\Sigma_1} \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ es un cambio de coordenadas.

Ejemplo: Consideremos las superficies regulares \mathbb{S}^2 y

$$\Sigma := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \right\}$$

Afirmamos que \mathbb{S}^2 y Σ son difeomorfas. En efecto, definimos $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\phi(x, y, z) = (ax, by, cz)$ como ϕ es lineal e invertible ϕ y ϕ^{-1} son diferenciables y luego ϕ es un difeomorfismo. Además si $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ entonces

$$\phi(x, y, z) = (ax, by, cz) \in \Sigma$$

Por lo tanto $\phi(\mathbb{S}^2) \subseteq \Sigma$. similarmente $\phi^{-1}(\Sigma) \subseteq \mathbb{S}^2$. Claramente $\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \Sigma$ es una biyección. Además como ϕ es diferenciable en todo punto

$$\phi|_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

es diferenciable. Por la proposición anterior tenemos que $\phi|_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \Sigma$ es diferenciable. similarmente para ϕ^{-1} .

La misma idea demuestra, en general, que si $\phi : U_1 \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow U_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ es difeomorfismo entre abiertos y $\Sigma \subseteq U_1$ es una superficie regular, entonces

$$\phi|_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow \phi(\Sigma)$$

donde $\phi(\Sigma)$ es una superficie regular, es un difeomorfismo entre superficies.

2.4. El Plano Tangente

Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in \Sigma$. Si $\varphi_i : \mathcal{V}_i \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ son parametrizaciones locales para Σ con $p \in \varphi_1(\mathcal{V}_1) \cap \varphi_2(\mathcal{V}_2)$. Vimos que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ es un difeomorfismo entre abiertos de \mathbb{R}^2 .

Luego, $D(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(\varphi_1^{-1}(p))$ es un isomorfismo lineal. De ahí,

$$D\varphi_1(\varphi_1^{-1}(p))(\mathbb{R}^2) = D(\varphi_2 \circ (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1))(\mathbb{R}^2) = D\varphi_2(\varphi_2^{-1}(p)) \circ D(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(\varphi_1^{-1}(p))(\mathbb{R}^2) = D\varphi_2(\varphi_2^{-1}(p))$$

y cualquier parametrización local en p tiene derivada con la misma imagen en $\varphi^{-1}(p)$.

Definición 7.1. El plano tangente a Σ en $p \in \Sigma$ es el subespacio vectorial

$$D\varphi(\varphi^{-1}(p))(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$$

con φ una parametrización local en p . Lo denotaremos por $T_p\Sigma$.

Denotamos por $\varphi_u := D\varphi(\varphi^{-1}(p))e_1$ y $\varphi_v := D\varphi(\varphi^{-1}(p))e_2$.

Observación: Geometricamente $T_p\Sigma$ es un plano en \mathbb{R}^3 que pasa por $0 \in \mathbb{R}^3$.

Proposición 7.1. Para $p \in \Sigma$ y $w \in \mathbb{R}^3$ tenemos que $w \in T_p\Sigma$ si y solo si existe una curva parametrizada diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

- $\alpha(0) = p$.
- $\alpha(t) \in \Sigma$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
- $\alpha'(0) = w$.

Ejemplos:

- Consideremos un plano en \mathbb{R}^3 , es decir, $P = q + \text{span}\{w_1, w_2\}$. Su parametrización local es $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(u, v) = q + uw_1 + vw_2$, luego

$$\begin{aligned}\varphi_u(u, v) &= w_1 \\ \varphi_v(u, v) &= w_2\end{aligned}$$

es decir $T_{\varphi(u, v)}P = \text{span}\{w_1, w_2\}$.

- Sea $f : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Tomemos $\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2\}$. Su parametrización local es $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi_u(u, v) &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right) \\ \varphi_v(u, v) &= \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)\end{aligned}$$

se sigue que $T_{\varphi(u, v)}\text{Graf}(f) = \left\{(a, b, a\frac{\partial f}{\partial u} + b\frac{\partial f}{\partial v}) : a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

Demostración. Sea $p \in \Sigma$, $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local en p y $p_0 = \varphi^{-1}(p)$.

- \Rightarrow | Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$w = D\varphi(p_0)(a, b) = a\varphi_u(p_0) + b\varphi_v(p_0)$$

Como $p_0 \in \mathcal{V}$ y \mathcal{V} es abierto, tenemos que $p_0 + t(a, b) \in \mathcal{V}$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Definimos

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{por} \quad \alpha(t) = \varphi(p_0 + t(a, b))$$

entonces α es diferenciable y $\alpha((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq \Sigma$. Por otro lado $\alpha(0) = \varphi(p_0) = p$ y

$$\begin{aligned}\alpha'(0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(p_0 + t(a, b)) \\ &= D\varphi(p_0) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (p_0 + t(a, b)) \right) = D\varphi(p_0)(a, b) \\ &= w\end{aligned}$$

- \Leftarrow | Como $\alpha(0) = p \in \varphi(\mathcal{V})$ y $\varphi(\mathcal{V})$ es abierto en Σ , tenemos que $\alpha(t) \in \varphi(\mathcal{V})$ para t suficientemente pequeño. Luego, esta bien definida

$$\alpha_0 := \varphi^{-1} \circ \alpha$$

y es una curva diferenciable en \mathcal{V} . Sea $(a, b) = \alpha'_0(0) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$D\varphi(p_0)(a, b) = D\varphi(\alpha_0(0))\alpha'_0(0) = (\varphi \circ \alpha_0)'(0) = \alpha'(0) = w$$

Ejemplo: Sea $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y $c \in \mathbb{R}$ un valor regular para h . Vimos que $h^{-1}(c) = \Sigma$ es una superficie regular. Sea $p \in \Sigma$, y $w \in T_p\Sigma$, existe α curva diferenciable tal que $\alpha'(0) = w$, $\alpha(0) = p$ y $\alpha(t) \in \Sigma$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Veamos que $h \circ \alpha \equiv c$. Entonces

$$0 = (h \circ \alpha)'(0) = Dh(\alpha(0))\alpha'(0) = Dh(p)w$$

luego $T_p\Sigma \subseteq \ker(Dh(p)) = (\nabla h(p))^\perp$. Por lo tanto $T_p\Sigma = (\nabla h(p))^\perp$. Hemos concluido que el gradiente de la función es perpendicular al plano tangente $T_p\Sigma$.

Por ejemplo $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ entonces $\nabla h = (2x, 2y, 2z)$, es decir, $\nabla h = 2p$ para todo $p \in \mathbb{R}^3$. Como $\mathbb{S}^2 = h^{-1}(1)$ tenemos $T_p\mathbb{S}^2 = (\nabla h(p))^\perp = p^\perp$

2.5. El Diferencial de una Aplicación Diferenciable

Definición 7.2. Sea $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en $p \in \Sigma$. Definimos la derivada o diferencial de f en $p \in \Sigma$ se define por

$$\begin{aligned}Df_p : T_p\Sigma &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ w = \alpha'(0) &\rightarrow (f \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^m\end{aligned}$$

Proposición 7.2. La derivada de una función diferenciable no depende de la elección de la curva y es lineal.

Demostración. Sea $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización local para Σ con $p \in \varphi(\mathcal{V})$. Escriba $p_0 = \varphi^{-1}(p) \in \mathcal{V}$. Sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable, con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w \in T_p\Sigma$ y $\alpha(t) \in \varphi(\mathcal{V})$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Definimos $\alpha_0 = \varphi^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{V}$ es una curva parametrizada diferenciable con $\alpha_0(0) = \varphi^{-1}(\alpha(0)) = p_0$.

Notemos que $w = D\varphi(p_0)(\alpha'_0(0))$. Luego

$$\begin{aligned}Df_p(w) &= (f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \alpha)'(0) = ((f \circ \varphi) \circ \alpha_0)'(0) \\ &= D(f \circ \varphi)(\alpha_0(0))\alpha'_0(0) \\ &= D(f \circ \varphi)(p_0) \circ (D\varphi)^{-1}(p_0)w\end{aligned}$$

para todo $w \in T_p\Sigma$. Es decir,

$$Df_p = D(f \circ \varphi)(p_0) \circ (D\varphi)^{-1}(p_0)$$

entonces, Df_p es lineal y no depende de α .

Ejemplos:

- Sea $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $f \equiv c$. Para todo $p \in \Sigma$ y todo $w \in T_p\Sigma$, $w = \alpha'(0)$, luego

$$Df_p(w) = (f \circ \alpha)'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) = 0$$

- Sea $i_\Sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ la inclusión, es decir, $i_\Sigma(p) = p$. Para $p \in \Sigma$ con $w = \alpha'(0) \in T_p\Sigma$ tenemos que

$$D(i_\Sigma)_p w = (i_\Sigma \circ \alpha)'(0) = \alpha'(0) = w$$

- Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable, entonces $F|_\Sigma =: f$ es diferenciable. Además, si $p \in \Sigma$, $w = \alpha'(0) \in T_p\Sigma$ se sigue que

$$Df_p(w) = (f \circ \alpha)'(0) = (F \circ \alpha)'(0) = DF(\alpha(0))\alpha'(0) = DF(p)w$$

es decir, $Df_p = DF(p)|_{T_p\Sigma}$.

- Sea $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(p) = \langle p - p_0, u \rangle$ con $p_0, u \in \mathbb{R}^3$ y $|u| = 1$, entonces $Dh_p w = \langle w, u \rangle$.
- Sea $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p) = |p - p_0|^2$, luego $Df_p w = 2 \langle w, p - p_0 \rangle$.
- Sea $\pi_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección en la coordenada i -ésima, entonces $D(\pi_i|_\Sigma) w = w_i$.

(Corregir hacia atrás)

Dada $\gamma : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma$ diferenciable en $q \in \mathcal{V}$ luego su derivada está bien definida como aplicación lineal $D_\gamma(q) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$, notemos que

$$D_\gamma(q)w = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(q + tw) = (\gamma \circ \beta)'(0)$$

donde $\beta(t) = q + tw$, como $\gamma \circ \beta \in \Sigma$ vemos que $(\gamma \circ \beta)'(0) \in T_{\gamma(q)}\Sigma$, definimos su diferencial como

$$D_{\gamma_q} := D_\gamma(q) : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\gamma(q)}\Sigma$$

Definición 7.3. Sea $F : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ diferenciable en $p \in \Sigma_1$. Dado $v \in T_p\Sigma$ definimos el **diferencial F en p** como $DF_p : T_p\Sigma_1 \rightarrow T_{F(p)}\Sigma_2$ dada por

$$DF_p(v) := (F \circ \alpha)'(0)$$

donde α es una curva diferenciable tal que $\alpha \subset \Sigma_1$ y es tangente a $\alpha'(0) = v$.

Observación: El diferencial de F esta bien definido, como $\alpha \subset \Sigma_1$ se tiene que $F \circ \alpha \subset \Sigma_2$ y pasa por el punto $F(p)$, luego $(F \circ \alpha)'(0) \in T_{F(p)}\Sigma_2$. Además, por la discusión anterior, el valor no depende de la elección de la curva α y es un mapeo lineal.

Ejemplo: Sea $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineal y $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular tal que $A(\Sigma) \subseteq \Sigma$. Luego esta bien definida $A : \Sigma \rightarrow \Sigma$ y es diferenciable en $p \in \Sigma$, pues es restricción de una aplicación diferenciable. Queremos calcular

$$DA_p : T_p\Sigma \rightarrow T_{A(p)}\Sigma$$

Sea $v \in T_p\Sigma$ y $v = \alpha'(0)$ para $\alpha \subset \Sigma$ tangente a v , entonces

$$DA_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (A \circ \alpha)(t) = A \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha(t) \right) = A(\alpha'(0)) = Av$$

Por lo tanto $DA_p = A|_{T_p\Sigma}$.

Teorema 8. (Regla de la Cadena) Sean $F : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ y $G : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$ aplicaciones diferenciables en $p \in \Sigma_1$ y $F(p) \in \Sigma_2$ respectivamente, entonces

$$D(G \circ F)_p = DG_{F(p)} \circ DF(p)$$

Demostración. Sea $v \in T_p\Sigma_1$ y $\alpha \subset \Sigma_1$ tangente a $\alpha'(0) = v$. Notemos que

$$D(G \circ F)_p(\alpha'(0)) = (G \circ F \circ \alpha)'(0) = DG_{F(p)}(F \circ \alpha)'(0) = DG_{F(p)} \circ DF_p(\alpha'(0))$$

Corolario 8.1. Sea $F : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ un difeomorfismo, entonces $D(F^{-1})_{F(p)} = (DF_p)^{-1}$ para todo $p \in \Sigma_1$

Teorema 9. (Teorema de la Función Inversa) Sea $F : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ diferenciable. Sea $p \in \Sigma_1$ tal que Df_p es isomorfismo, entonces existe $U \subseteq \Sigma_1$ abierto con $p \in U$ tal que $F(U) \subseteq \Sigma_2$ es abierto y

$$F|_U : U \rightarrow F(U)$$

es un difeomorfismo.

Definición 9.1. Sea $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Decimos que $p \in \Sigma$ es un **punto crítico** de f si

$$0 \equiv Df_p : T_p \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

en otras palabras, no es sobreyectiva. Se dice que $c \in \mathbb{R}$ es un **valor regular** si $f^{-1}(c)$ no contiene puntos críticos.

Proposición 9.1. Sea $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y $p \in \Sigma$ un punto máximo o mínimo (local o global), entonces p es punto crítico.

Demostración. Sea $v \in T_p \Sigma$ y $\alpha \subset \Sigma$ tangente a $\alpha'(0) = v$, luego

$$Df_p(v) = (f \circ \alpha)'(0) = 0$$

Concluimos que p es punto crítico de f .

Teorema 10. Sea $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, si $c \in \mathbb{R}$ es valor regular de f , entonces $f^{-1}(c)$ es una curva regular.

Observación: Se dice que $S \subset \Sigma$ es una **curva regular** si para todo $p \in \Sigma$ existe un abierto $U \subseteq \Sigma$ y una curva parametrizada regular $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ tal que $\alpha(I) = U \cap S$.

Sea $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en $p \in \Sigma$. Si $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es parametrización local para Σ con $p \in \varphi(\mathcal{V})$ tenemos una base de $T_p \Sigma$, a saber, $\varphi_u(p_0), \varphi_v(p_0)$ donde $p_0 = \varphi^{-1}(p)$. Vimos que $Df_p \circ D\varphi_{p_0} = D(f \circ \varphi)_{p_0}$, luego

$$Df_p(a\varphi_u(p_0) + b\varphi_v(p_0)) = Df_p(D\varphi_{p_0}(a, b)) = D(f \circ \varphi)_{p_0}(a, b)$$

es decir, la matriz de Df_p respecto a $\{\varphi_u(p_0), \varphi_v(p_0)\}$ es la matriz jacobiana de $D(f \circ \varphi)_{p_0}$.

3. La Segunda Forma Fundamental

3.1. Campos Vectoriales y Orientación

Definición 10.1. Sea Σ una superficie regular. Una aplicación continua $V : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dice **campo vectorial**. Se dice que V es:

- a) **Campo tangente** si $V(p) \in T_p\Sigma$ para todo $p \in \Sigma$.
- b) **Campo normal** si $V(p) \in (T_p\Sigma)^\perp$ para todo $p \in \Sigma$.
- c) **Campo unitario** si $|V(p)| = 1$ para todo $p \in \Sigma$.

Ejemplo: Sea $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local para Σ y $U = \varphi(\mathcal{V})$ entonces

$$\begin{aligned}\varphi_u \circ \varphi^{-1} : U &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \varphi_v \circ \varphi^{-1} : U &\rightarrow \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

son campos tangentes. Sea $N^x : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$N^x(u, v) := \frac{\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)}{|\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)|}$$

es diferenciable y $N^x \perp T_{\varphi(u, v)}\Sigma$. Luego $N = N^x \circ \varphi^{-1}$ es campo unitario, normal y diferenciable.

Definición 10.2. Se dice que una superficie regular Σ es **orientable** si existe un campo normal, unitario y continuo $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$. En ese caso, se dice que N define una **Orientación**. Además,

- Sea $\{w_1, w_2\}$ base de $T_p\Sigma$, se dice **positiva** si $\{w_1, w_2, N(p)\}$ es una base positiva de \mathbb{R}^3 .
- Una parametrización φ es **positiva** si $N^x = N \circ \varphi$.

Observaciones:

- a) Si Σ es conexa y esta orientada por $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$, hay exactamente dos orientaciones en Σ , que son N y $-N$. En efecto, sea $V : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ normal, unitario y continuo, entonces

$$\begin{aligned}A &= \{p \in \Sigma : V(p) = N(p)\} = (V - N)^{-1}(0), \\ B &= \{p \in \Sigma : V(p) = -N(p)\} = (V + N)^{-1}(0)\end{aligned}$$

son cerrados. Dado $p \in \Sigma$ se tiene que $V(p) \in (T_p\Sigma)^\perp = \text{span}\{N(p)\}$ y $|V(p)| = 1$, luego $V(p) = N(p)$ ó $V(p) = -N(p)$, es decir $A \cup B = \Sigma$. Además, $A \cap B = \emptyset$. Así, por conexidad, tenemos que $A = \Sigma$ y por lo tanto $V \equiv N$ o bien $B = \Sigma$ y $V \equiv -N$.

- b) Dada $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ una orientación. Veamos que N es diferenciable. Sea $p \in \Sigma$, existe una parametrización local $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ para Σ con $p \in \varphi(\mathcal{V})$ y $\varphi(\mathcal{V})$ conexo. De ahí, $N|_{\varphi(\mathcal{V})}$ define una orientación para $\varphi(\mathcal{V})$. Por (a) tenemos que $(N^x \circ \varphi^{-1}) \equiv N$ ó $(N^x \circ \varphi^{-1}) \equiv -N$ y por lo tanto $N|_{\varphi(\mathcal{V})}$ es diferenciable. Concluimos que N es diferenciable.

- c) Si Σ_1 y Σ_2 son difeomorfos. Entonces Σ_1 es orientable si y solo si Σ_2 es orientable.

Ejemplos:

- Si $\Sigma = \varphi(\mathcal{V})$ para una parametrización, entonces Σ es orientable.
- Sea $\Sigma = \text{Graf}(f)$ con $f : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable, entonces $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ es parametrización local y $\varphi(\mathcal{V}) = \Sigma$. Luego

$$\begin{aligned}\varphi_u(u, v) &= (1, 0, \partial_u f) \\ \varphi_v(u, v) &= (0, 1, \partial_v f)\end{aligned}$$

entonces

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-\partial_u f, -\partial_v f, 1) = (-\nabla f, 1)$$

consideramos

$$N^x(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}(-\nabla f, 1)$$

se sigue que $N^x \circ \varphi^{-1}$ define una orientación para Σ .

- (Niveles Regulares) Sea $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y $c \in \mathbb{R}$ un valor regular para h , luego $\Sigma = h^{-1}(c)$ es superficie regular. Sabemos que $T_p \Sigma = (\nabla h(p))^\perp$. Si $W_0 = \{p \in W : \nabla h(p) \neq 0\}$, entonces W_0 es abierto y $\Sigma \subset W_0$. Definimos $N : W_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$N(p) := \frac{\nabla h(p)}{|\nabla h(p)|}$$

es continua y dado $p \in \Sigma$ se tiene que $N(p) \perp T_p \Sigma$. Por lo tanto $N|_\Sigma$ define una orientación.

Proposición 10.1. Sea Σ una superficie regular. Entonces Σ es orientable si y solo si existen $\{\varphi_i : \mathcal{V}_i \subseteq \mathbb{R}^2\}_i$ parametrizaciones locales para Σ tales que

- $\bigcup_i \varphi_i(\mathcal{V}_i) = \Sigma$
- $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ tiene determinante jacobiano positivo para todo i, j .

3.2. Formas Fundamentales y Aplicación de Gauss

Definición 10.3. Sea Σ una superficie regular. La **primera forma fundamental** de Σ en $p \in \Sigma$ es la restricción del producto interno a $T_p \Sigma$,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = I_p : T_p \Sigma \times T_p \Sigma \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle w_1, w_2 \rangle_p = I_p(w_1, w_2) \rightarrow \langle w_1, w_2 \rangle$$

Sea $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local para Σ , entonces las funciones diferenciables $E, F, G : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$E(u, v) := |\varphi_u(u, v)|^2, \quad F(u, v) := \langle \varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v) \rangle, \quad G(u, v) := |\varphi_v(u, v)|^2,$$

se llaman los **coeficientes de la primera forma fundamental** en las coordenadas (u, v) . Se dice que φ es una parametrización ortogonal si $F \equiv 0$. Podemos escribir $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en $p = \varphi(p_0)$ en términos de la base $\{\varphi_u(p_0), \varphi_v(p_0)\}$ como

$$I_p(w_1, w_2) = \langle a_1 \varphi_u(p_0) + a_2 \varphi_v(p_0), b_1 \varphi_u(p_0) + b_2 \varphi_v(p_0) \rangle = a_1 b_1 E(p_0) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) F(p_0) + a_2 b_2 G(p_0)$$

Observación: Si denotamos las variables de φ por x_i también se usa la notación $g_{ij} := \langle \varphi_{x_i}, \varphi_{x_j} \rangle$, es decir, $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$ y $g_{22} = G$.

Ejemplos:

- Sea $P = p_0 + w^\perp \subseteq \mathbb{R}^3$ un plano, podemos escoger $w_1, w_2 \in w^\perp$ ortonormales y definir una parametrización $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\varphi(u, v) := p_0 + uw_1 + vw_2$, con lo cual $\varphi_u \equiv w_1$ y $\varphi_v \equiv w_2$. Luego

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} (u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

- Para una gráfica $\Sigma = \text{Graf}(f)$ de una función $f : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable la parametrización local $\varphi_u = (1, 0, \partial_u f)$ y $\varphi_v = (0, 1, \partial_v f)$, luego

$$E(u, v) = 1 + (\partial_u f(u, v))^2, \quad F(u, v) = \langle \partial_u f(u, v), \partial_v f(u, v) \rangle, \quad G(u, v) = 1 + (\partial_v f(u, v))^2$$

- Considere el cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$ con parametrización local $\varphi(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$. Tenemos $\varphi_u(u, v) = (-r \sin u, r \cos u, 0)$ y $\varphi_v(u, v) = (0, 0, 1)$, luego

$$E(u, v) = r^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = 1$$

Vemos que la parametrización es ortogonal.

Observación: Veamos lo siguiente

$$\begin{aligned} |\varphi_u \times \varphi_v|^2(u, v) &= |\varphi_u(u, v)|^2 \cdot |\varphi_v(u, v)|^2 - \langle \varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v) \rangle^2 \\ &= E(u, v) \cdot G(u, v) - F^2(u, v) = \det \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}(u, v) \end{aligned}$$

Luego, la matriz $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ es invertible y es definida positiva.

Proposición 10.2. Sea $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Existe un campo tangente diferenciable $\nabla^\Sigma f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\langle \nabla^\Sigma f(p), w \rangle_p = Df_p(w) \quad \forall w \in T_p \Sigma$$

Definición 10.4. El campo $\nabla^\Sigma f$ se llama **campo gradiente** de f .

Observación: Para una parametrización local $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de Σ , se escribe como

$$\nabla^\Sigma f(p) = \frac{f_u \cdot G - f_v \cdot F}{EG - F^2}(p_0) \cdot \varphi_u(p_0) + \frac{f_v \cdot E - f_u \cdot F}{EG - F^2}(p_0) \cdot \varphi_v(p_0)$$

para todo $p = \varphi(p_0) \in \varphi(\mathcal{V})$, donde $f_u = (f \circ \varphi)_u$ y $f_v = (f \circ \varphi)_v$.

Supongamos que Σ es una superficie regular orientable y sea $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo normal unitario diferenciable. Observe que N define una aplicación $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ llamada la **aplicación de Gauss** de Σ . Como en el caso de curvas, esperamos describir la geometría de Σ usando la derivada de N .

Proposición 10.3. Sea $p \in \Sigma$, tenemos $T_p \Sigma$ y la derivada de N es una aplicación lineal $DN_p : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$ la cual es simétrica (autoadjunta) respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$.

Demostración. La primera afirmación es consecuencia de $T_p \Sigma = N(p)^\perp = T_{N(p)} \mathbb{S}^2$, donde usamos que $T_q \mathbb{S}^2 = q^\perp$ para todo $q \in \mathbb{S}^2$. Resta ver que $DN(p)$ es simétrica. Sea $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización local de Σ con $p = \varphi(p_0)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle DN_p(\varphi_u(p_0)), \varphi_v(p_0) \rangle_p &= \langle D(N \circ \varphi)_{p_0} e_1, \varphi_v(p_0) \rangle = \langle (N \circ \varphi)_u, \varphi_v \rangle(p_0) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \langle N, \varphi_v \rangle(p_0) - \langle N, \varphi_{vu} \rangle(p_0) = -\langle N, \varphi_{vu} \rangle(p_0) \end{aligned}$$

del mismo modo se tiene que $\langle DN_p(\varphi_v(p_0)), \varphi_u(p_0) \rangle_p = -\langle N, \varphi_{uv} \rangle(p_0)$. Como $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$ y $\{\varphi_u(p_0), \varphi_v(p_0)\}$ es una base para $T_p \Sigma$, concluimos que DN_p es simétrica.

Definición 10.5. Se dice que $A_p := -DN_p : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$ es el **operador de Weingarten** de Σ en p . La forma bilineal $\mathbb{I}_p : T_p \Sigma \times T_p \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ asociada al operador A_p mediante $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ se llama la **segunda forma fundamental** de Σ en p . Concretamente

$$\mathbb{I}_p(w_1, w_2) = \langle A_p w_1, w_2 \rangle = -\langle DN_p w_1, w_2 \rangle = -\langle w_1, DN_p w_2 \rangle$$

para todo $w_1, w_2 \in T_p \Sigma$.

Ejemplos:

- Para un plano $P = p_0 + w^\perp \subseteq \mathbb{R}^3$ la aplicación de Gauss $N : P \rightarrow \mathbb{S}^2$ es constante y vale $N(p) = \frac{w}{|w|}$. Luego $A_p = -DN_p \equiv 0$ y $\mathbb{I}_p \equiv 0$ para todo $p \in \Sigma$.

- Sea $\mathbb{S}^2(r) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$. Luego $N(f) = -\frac{1}{r}p$. Sea $w \in T_p\mathbb{S}^2(r)$, con $w = \alpha'(0)$ y $\alpha \subset \mathbb{S}^2(r)$, entonces

$$DN_p(w) = (N \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(-\frac{1}{r}p\right) = -\frac{1}{r}\alpha'(0) = -\frac{1}{r}w$$

Por lo tanto $A_p w = \frac{1}{r}w$, entonces la segunda forma fundamental tiene la forma $\mathbb{I}_p(v, w) = \frac{1}{r} \langle v, w \rangle_p$ y

$$A_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

- Consideremos $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\} = h^{-1}(r^2)$ con $h(x, y, z) = x^2 + y^2$, luego $T_p C = (\nabla h(p))^\perp = (2x, 2y, 0)^\perp$. Sean $w_1 = (-y, x, 0) = \alpha'(0)$ y $w_2 = (0, 0, 1) = \beta'(0)$ donde

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \left(\cos\left(\frac{t}{r}\right)x - \sin\left(\frac{t}{r}\right)y, \sin\left(\frac{t}{r}\right)x + \cos\left(\frac{t}{r}\right)y, z \right) \\ \beta(t) &= (x, y, z + t) \end{aligned}$$

Tomamos $N(p) = -\frac{1}{r}(x, y, 0)$, luego

$$\begin{aligned} DN_p w_1 &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N(\alpha(t)) = -\frac{1}{r}w_1 \\ DN_p w_2 &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N(\beta(t)) = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$A_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 10.6. Los autovalores de A_p se llaman las **curvaturas principales** de Σ en p y las denotamos $k_1(p) \leq k_2(p)$. Los autovectores $\{e_1, e_2\}$ que corresponden a k_1, k_2 se llaman **direcciones principales** de Σ en p . Además se definen

$$k_\Sigma(p) := \det(A_p) \quad H_\Sigma(p) := \frac{1}{2} \text{tr}(A_p)$$

la **curvatura gaussiana** y **curvatura media** respectivamente.

Observación: La curvatura gaussiana es la única que no depende de la orientación, además, se tiene lo siguiente

$$k_1 = H_\Sigma - \sqrt{H_\Sigma^2 - k_\Sigma} \quad \text{y} \quad k_2 = H_\Sigma + \sqrt{H_\Sigma^2 - k_\Sigma}$$

lo anterior está bien definido gracias a la desigualdad de las medias.

Proposición 10.4. Sea Σ una superficie regular. Sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ una curva parametrizada por el arco con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) \in T_p\Sigma$. Sea k_α la curvatura de α en p y N_α el normal unitario. Entonces

$$\mathbb{I}_p(\alpha'(0), \alpha'(0)) = \langle N_\Sigma(p), k_\alpha N_\alpha \rangle$$

Demostración. Como $\alpha'(t) \in T_p\Sigma$ se sigue que $\langle N \circ \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = 0$, entonces

$$\langle DN_{\alpha(t)}(\alpha'(t)), \alpha'(t) \rangle + \langle N(\alpha(t)), \alpha''(t) \rangle = 0$$

lo que implica la afirmación.

Veamos que $\langle N(\alpha(t)), \alpha''(t) \rangle$ solo depende de la dirección tangente $\alpha'(0) \in T_p\Sigma$.

Definición 10.7. Sea $v \in T_p\Sigma$ unitario, definimos la **curvatura normal** de Σ en p en la dirección de v por $k_v := \mathbb{I}_p(v, v)$.

Sea $\{e_1, e_2\}$ base ortonormal de $T_p\Sigma$ tal que $A_p(e_i) = k_i(p)e_i$. Entonces $v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2$ y también

$$\begin{aligned} k_v &= \mathbb{I}_p(v, v) = \mathbb{I}_p(\langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2, \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2) \\ &= \langle v, e_1 \rangle^2 \mathbb{I}_p(e_1, e_1) + 2 \langle v, e_1 \rangle \langle v, e_2 \rangle \mathbb{I}_p(e_1, e_2) + \langle v, e_2 \rangle^2 \mathbb{I}_p(e_2, e_2) \\ &= \langle v, e_1 \rangle^2 k_1 + \langle v, e_2 \rangle^2 k_2 \end{aligned}$$

Corolario 10.1. $k_1(p)$ y $k_2(p)$ son el máximo y mínimo de las curvaturas normales k_v , para $v \in T_p\Sigma$ unitario.

Definición 10.8. Sea Σ una superficie regular y $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ aplicación de Gauss. Dado $p \in \Sigma$ se dice un punto

- **elíptico** si $k_\Sigma(p) > 0$.
- **hiperbólico** si $k_\Sigma(p) < 0$.
- **parabólico** si $k_\Sigma(p) = 0$ y $H_\Sigma(p) \neq 0$.
- **plano** si $k_1(p) = 0$ y $k_2(p) = 0$

Observación:

- a) Si p es elíptico entonces todas las curvaturas normales en p tienen el mismo signo y toda sección normal en p esta contenida en un lado de $T_p\Sigma$.
- b) Si p es hiperbólico, $k_1(p) < 0 < k_2(p)$ y Σ tiene puntos en ambos lados de $T_p\Sigma$.

Estas conclusiones se pueden profundizar estudiando la hessiana en p de la función $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(q) := \langle q - p, N(p) \rangle$.

Sea $\varphi = \varphi(u, v) : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización local. Luego $\varphi_u(u, v)$ y $\varphi_v(u, v)$ son campos tangentes, definimos

$$\begin{aligned} e(u, v) &:= \mathbb{I}_{\varphi(u, v)}(\varphi_u(u, v), \varphi_u(u, v)) = \langle A_{\varphi(u, v)}\varphi_u(u, v), \varphi_u(u, v) \rangle \\ &= -\langle DN_{\varphi(u, v)}(\varphi_u(u, v)), \varphi_u(u, v) \rangle = -\langle (N \circ \varphi)_u(u, v), \varphi_u(u, v) \rangle \\ &= \langle N \circ \varphi(u, v)(u, v), \varphi_{uu}(u, v) \rangle \end{aligned}$$

Del mismo modo se tiene que

$$\begin{aligned} f(u, v) &:= \mathbb{I}_{\varphi(u, v)}(\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)) = \langle N \circ \varphi(u, v), \varphi_{uv}(u, v) \rangle \\ g(u, v) &:= \mathbb{I}_{\varphi(u, v)}(\varphi_v(u, v), \varphi_v(u, v)) = \langle N \circ \varphi(u, v), \varphi_{vv}(u, v) \rangle \end{aligned}$$

Estas funciones se llaman **coeficientes de la segunda forma fundamental** en $\varphi(u, v) \in \Sigma$ respecto a φ .

Teorema 11. Se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} k_\Sigma \circ \varphi &= \det \left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \right) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ H_\Sigma \circ \varphi &= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \right) = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{EG - F^2} \end{aligned}$$

Demostración. Sea $p = \varphi(p_0)$ con $p_0 \in \mathcal{V}$ y escribamos

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

para la matriz de A_p en la base $\{\varphi_u(p_0), \varphi_v(p_0)\}$. Basta demostrar

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$A_p(\varphi_u(p_0)) = a_{11}\varphi_u(p_0) + a_{21}\varphi_v(p_0) \quad y \quad A_p(\varphi_v(p_0)) = a_{12}\varphi_u(p_0) + a_{22}\varphi_v(p_0)$$

Tomando producto interno de cada ecuación con φ_u y φ_v vemos que

$$\begin{aligned} e(p_0) &= \langle A_p(\varphi_u(p_0)), \varphi_u(p_0) \rangle = \langle a_{11}\varphi_u(p_0) + a_{21}\varphi_v(p_0), \varphi_u(p_0) \rangle \\ &= a_{11}E(p_0) + a_{21}F(p_0) \end{aligned}$$

Del mismo modo vemos que

$$\begin{aligned} f(p_0) &= \langle A_p(\varphi_u(p_0)), \varphi_v(p_0) \rangle = a_{11}F(p_0) + a_{21}G(p_0) \\ f(p_0) &= \langle A_p(\varphi_v(p_0)), \varphi_u(p_0) \rangle = a_{12}E(p_0) + a_{22}F(p_0) \\ g(p_0) &= \langle A_p(\varphi_v(p_0)), \varphi_v(p_0) \rangle = a_{12}F(p_0) + a_{22}G(p_0) \end{aligned}$$

Corolario 11.1. Como resultado se tiene que $k_1, k_2 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas y son diferenciables en todo $p \in \Sigma$ donde $k_1(p) \neq k_2(p)$.

Ejemplo: Sea $\Sigma = \text{Graf}(h)$ con $h : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable con parametrización $\varphi(u, v) = (u, v, h(u, v))$. Recordemos que

$$\varphi_u = (1, 0, h_u) , \quad \varphi_v = (0, 1, h_v) , \quad N = (-\nabla h, 1) \frac{1}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}(-h_u, h_v, 1)$$

Además, tenemos que

$$E = 1 + h_u^2 , \quad F = h_u h_v , \quad G = 1 + h_v^2$$

y por lo tanto

$$EG - F^2 = (1 + h_u^2)(1 + h_v^2) - (h_u h_v)^2 = 1 + h_u^2 + h_v^2$$

Buscamos calcular e, g, f , para ello veamos que

$$\varphi_{uu} = (0, 0, h_{uu}) , \quad \varphi_{uv} = (0, 0, h_{uv}) , \quad \varphi_{vv} = (0, 0, h_{vv})$$

luego

$$e = \langle N, \varphi_{uu} \rangle = \frac{h_{uu}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}} , \quad f = \langle N, \varphi_{uv} \rangle = \frac{h_{uv}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}} , \quad g = \langle N, \varphi_{vv} \rangle = \frac{h_{vv}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}} ,$$

entonces

$$eg - f^2 = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}$$

Concluimos que

$$k_\Sigma = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{3/2}}$$

por otro lado

$$eG + gE - 2Ff = \frac{h_{uu}(1 + h_v^2)}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}} + \frac{h_{vv}(1 + h_u^2)}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}} - \frac{2h_u h_v h_{uv}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}$$

y Finalmente

$$H_\Sigma = \frac{h_{uu}(1 + h_v^2) + h_{vv}(1 + h_u^2) - 2h_u h_v h_{uv}}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{3/2}}$$

Ejemplo: Sea $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ luego $E = 1$, $F = 0$ y $G = 1 + u^2$. Además, $\varphi_{uu} = (0, 0, 0)$, $\varphi_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$ y $\varphi_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0)$. Lo que implica que $e = g = 0$ y $f = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$. Finalmente

$$k_\Sigma = \frac{0 - \left(\frac{1}{1+u^2}\right)}{1 + u^2} = -\frac{1}{(1 + u^2)^2} < 0 , \quad H_\Sigma = 0$$