



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
 FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
 DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
 PROFESOR: GREGORIO MORENO – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

## Teoría de Integración - MAT2534

### Tarea 1

02 de Abril de 2025

## Problema 1

Por definición de ínfimo, dado  $\varepsilon > 0$ , existe una partición  $\Pi_\varepsilon$  de  $[a, b]$  tal que  $U(f, \Pi_\varepsilon) < \mathcal{U} + \varepsilon$ . Consideremos la colección  $(\Pi_n^*)_n$  de particiones de  $[a, b]$  tales que

$$U(f, \Pi_n^*) < \mathcal{U} + \frac{1}{n}$$

Definimos la partición

$$\Pi_n := \bigcup_{i=1}^n \Pi_i^*$$

Notemos que  $\Pi_n$  es un refinamiento de  $\Pi_n^*$ , luego  $U(f, \Pi_n) \leq U(f, \Pi_n^*)$ , por teorema del sandwich vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, \Pi_n) = \mathcal{U}$$

Además, por construcción,  $\Pi_{n+1}$  es un refinamiento de  $\Pi_n$  y por lo tanto  $U(f, \Pi_{n+1}) \leq U(f, \Pi_n)$ .

## Problema 2

a) Sea  $\varepsilon > 0$ , como  $f$  es integrable, existe una partición  $\Pi$  del intervalo  $[a, b]$  tal que

$$U(f, \Pi) - L(f, \Pi) < \varepsilon$$

Veamos que

$$\begin{aligned} U(|f|, \Pi) - L(|f|, \Pi) &= \sum \left( \sup_{x \in I_i} |f(x)| - \inf_{x \in I_i} |f(x)| \right) |I_i| = \sum \left( \sup_{x, y \in I_i} ||f(x)| - |f(y)|| \right) |I_i| \\ &\leq \sum \left( \sup_{x, y \in I_i} |f(x) - f(y)| \right) |I_i| = \sum \left( \sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right) |I_i| \\ &= U(f, \Pi) - L(f, \Pi) < \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto  $|f|$  es Riemann-integrable. Por otro lado, sabemos que  $f \leq |f|$  y  $-f \leq |f|$ , luego, dada una partición  $\Pi$  de  $[a, b]$  se sigue que

$$U(f, \Pi) \leq U(|f|, \Pi) \quad \text{y} \quad L(-f, \Pi) \leq L(|f|, \Pi)$$

Aplicando ínfimo a la izquierda, supremo a la derecha y usando que  $-\inf x = \sup -x$  tenemos lo siguiente

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{y} \quad - \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Concluimos que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

- b) En primer lugar, demostraremos que dado un conjunto  $E \subseteq [a, b]$  de medida nula, entonces  $E^c$  es denso en  $[a, b]$ . En efecto, sea  $x \in E$  y  $U$  una vecindad conexa de  $x$  de largo  $\varepsilon > 0$ . Supongamos, por contradicción, que  $U \subseteq E$ . Como  $E$  es de medida nula, existe  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$  una colección de intervalos tales que

$$E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i \quad \text{y} \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} |I_i| < \varepsilon$$

por otro lado tenemos que

$$\varepsilon = |U| = \lambda^*(U) \leq \lambda^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda^*(I_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} |I_i|$$

Lo anterior es una contradicción, lo que prueba la afirmación.

Sea  $\Pi$  una partición de  $[a, b]$ , por lo probado anteriormente, para todo  $i$  se tiene que existe  $\bar{x}_i \in E^c$  tal que  $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . De este modo, para cada partición  $\Pi$  de  $[a, b]$ , escojemos el conjunto de representantes  $C = \{\bar{x}_i\}_i$ , entonces

$$S(f, \Pi, C) = \sum_i f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) = 0$$

Como  $f$  es Riemann integrable, se sigue que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} S(f, \Pi, C) = \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} 0 = 0$$

## Problema 3

Denotaremos por  $\bar{x}_i$  a los puntos en  $C$  y  $L := \frac{b-a}{n}$ . Por TFC tenemos lo siguiente

$$f(x) - f(\bar{x}_i) = \int_{\bar{x}_i}^x f'(t) - f'(\bar{x}_i) dt + f'(\bar{x}_i)(x - \bar{x}_i)$$

Por TVM existe  $\alpha(t) \in (\bar{x}_i, t)$  tal que

$$f''(\alpha(t)) = \frac{f'(t) - f'(\bar{x}_i)}{t - \bar{x}_i}$$

para  $t = \bar{x}_i$  diremos que  $f''(\alpha(\bar{x}_i)) = f''(\bar{x}_i)$ . Luego

$$f(x) - f(\bar{x}_i) = \int_{\bar{x}_i}^x f''(\alpha(t))(t - \bar{x}_i) dt + f'(\bar{x}_i)(x - \bar{x}_i)$$

Afirmamos que la función  $f''(\alpha(t))$  es continua, en efecto

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f''(\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f'(t) - f'(\bar{x}_i)}{t - \bar{x}_i} = \frac{f'(t_0) - f'(\bar{x}_i)}{t_0 - \bar{x}_i} = f''(\alpha(t_0))$$

Para el caso  $t_0 = \bar{x}_i$  en la segunda expresión nos queda exactamente la definición de la segunda derivada de  $f''$  en el punto  $\bar{x}_i$ , por lo tanto  $f''(\alpha)$  es continua en  $[\bar{x}_i, x]$ . Como  $x \geq \bar{x}_i$ , por TVM para integrales existe  $\alpha(t_0)$  tal que

$$f(x) - f(\bar{x}_i) = f''(\alpha(t_0)) \int_{\bar{x}_i}^x (t - \bar{x}_i) dt + f'(\bar{x}_i)(x - \bar{x}_i) = f''(\alpha(t_0)) \frac{(x - \bar{x}_i)^2}{2} + f'(\bar{x}_i)(x - \bar{x}_i)$$

De este modo

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) L \right| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) - f(\bar{x}_i) dx \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\alpha(t_0)) \frac{(x - \bar{x}_i)^2}{2} + f'(\bar{x}_i)(x - \bar{x}_i) dx \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n f''(\alpha(t_0)) \frac{(x - \bar{x}_i)^3}{6} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \right| = \left| \sum_{i=1}^n f''(\alpha(t_0)) \frac{L^3}{24} \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{24n^2} \end{aligned}$$

## Problema 4

En primer lugar demostraremos que si  $x_0 < a$  entonces  $F(x_0) \leq F(a^-)$  donde  $F(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ . En efecto, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$F(x_0) \leq F(a - \delta/2) < F(a^-) + \varepsilon$$

esto implica que  $F(x_0) \leq F(a^-)$ .

- a) Sea  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $-F(a - \delta/2) < -F(a^-) + \varepsilon$ . Consideremos el cubrimiento  $(a - \delta/2, a]$  de  $\{a\}$ , luego

$$\mu_F^*(\{a\}) \leq F(a) - F(a - \delta/2) < F(a) - F(a^-) + \varepsilon$$

es decir,

$$\mu_F^*(\{a\}) < F(a) - F(a^-) + \varepsilon$$

como  $\varepsilon$  es arbitrario, se sigue que  $\mu_F^*(\{a\}) \leq F(a) - F(a^-)$ .

Sea  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un cubrimiento de  $\{a\}$ , donde  $I_n = (a_n, b_n]$ . Existe  $n_0$  tal que  $a \in I_{n_0}$ , así

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(I_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}, n \neq n_0} \tau(I_n) + \tau(I_{n_0}) \geq \tau(I_{n_0}) = F(b_{n_0}) - F(a_{n_0}) \geq F(a) - F(a^-)$$

concluimos que  $\mu_F^*(\{a\}) = F(a) - F(a^-)$ .

- b) Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $-F(a - \delta/2) < -F(a^-) + \varepsilon$ . Consideramos el cubrimiento  $(a - \delta/2, b]$  de  $[a, b]$ , entonces

$$\mu_F^*([a, b]) \leq \tau((a - \delta/2, b]) = F(b) - F(a - \delta/2) < F(b) - F(a^-) + \varepsilon$$

como  $\varepsilon$  es arbitrario, vemos que  $\mu_F^*([a, b]) \leq F(b) - F(a^-)$ .

Sea  $(I_n)_n$  un cubrimiento de  $[a, b]$ , diremos que  $I_n = (a_n, b_n]$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , dado  $n \in \mathbb{N}$  existe  $\delta_n > 0$  tal que

$$F(b_n + \delta_n/2) - F(b_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Consideramos  $(I_n^*)_n$  un cubrimiento de  $[a, b]$  donde  $I_n^* := (a_n, b_n + \delta_n/2]$ . Como  $F$  es creciente notemos que  $\tau(A) \leq \tau(B)$  para todo  $A \subseteq B$  con  $A, B \in \mathcal{C}$ , luego

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(I_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(I_n^*)$$

por otro lado

$$0 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(I_n^*) - \tau(I_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} F(b_n + \delta_n/2) - F(b_n) < \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

nuevamente, como  $\varepsilon$  es arbitrario, se tiene que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(I_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(I_n^*)$$

Definimos un cubrimiento abierto de  $[a, b]$  dado por  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  donde  $U_n := \text{int}(I_n^*)$ , por compacidad existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $(U_n)_{n=1}^N$  cubre  $[a, b]$ , sin pérdida de generalidad podemos suponer que

- $a \in U_1$  y  $b \in U_N$ .
- $a_{n+1} < b_n + \delta_n/2$  para todo  $1 \leq n \leq N-1$ .

Entonces, como  $F$  es creciente y  $U_n \subseteq I_n^*$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(I_n) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(I_n^*) \geq \sum_{n=1}^N \tau(I_n^*) = \sum_{n=1}^N F(b_n + \delta_n/2) - F(a_n) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} F(b_n + \delta_n/2) - F(a_{n+1}) + F(b_N + \delta_N/2) - F(a_1) \\ &\geq F(b_N + \delta_N/2) - F(a_1) \geq F(b) - F(a^-) \end{aligned}$$

es decir,  $\mu_F^*([a, b]) \geq F(b) - F(a^-)$ . Por lo tanto  $\mu_F^*([a, b]) = F(b) - F(a^-)$ .

c) Consideremos el cubrimiento  $(a, b]$  de  $(a, b]$ , luego

$$\mu_F^*((a, b]) \leq \tau((a, b]) = F(b) - F(a)$$

Por otro lado, por subaditividad de la medida exterior vemos que

$$\mu_F^*([a, b]) \leq \mu_F^*([a]) + \mu_F^*((a, b])$$

entonces

$$F(b) - F(a^-) \leq F(a) - F(a^-) + \mu_F^*((a, b])$$

es decir,  $F(b) - F(a) \leq \mu_F^*((a, b])$ . Concluimos que  $\mu_F^*((a, b]) = F(b) - F(a)$ .