



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROFESOR: PEDRO GASPAR – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

**Geometría Diferencial - MAT2860**

**Apuntes**

**06 de Marzo de 2025**

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Curvas en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>4</b>
1.1. Curvas parametrizadas . . . . .	4
1.2. Longitud y Parametro de Arco . . . . .	4
1.3. Curvatura de una Curva Regular (Teoría Local de Curvas) . . . . .	6
1.4. Teoría Local de Curvas en el Espacio . . . . .	8
<b>2. Superficies Regulares</b>	<b>12</b>
2.1. Definición y ejemplos . . . . .	12
2.2. Cambio de Coordenadas . . . . .	13
2.3. Aplicaciones Diferenciables . . . . .	14

## Introducción

Habrán tres interrogaciones (I1, I2, I3) cada una vale un 25 % y un examen (EX) que vale un 25 %. Las fechas son 14 de abril, 19 de Mayo, 16 de Junio y 3 de Julio respectivamente.

# 1. Curvas en $\mathbb{R}^n$

## 1.1. Curvas parametrizadas

Consideramos  $\mathbb{R}^n := \{v = (v_1, \dots, v_n) : v_i \in \mathbb{R}\}$ . Un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensión  $n$ , con el producto escalar dado por

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i \quad \text{con } v, w \in \mathbb{R}^n$$

**Definición 0.1.** Una curva parametrizada en  $\mathbb{R}^n$  es una función continua  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $I$  un intervalo abierto. Escribimos  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ .

Diremos que  $\alpha$  es diferenciable si sus funciones coordenadas  $\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty$ . En tal caso, el vector  $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t))$  se llama vector tangente a la curva  $\alpha$  en  $t \in I$

**Definición 0.2.** La traza de una curva parametrizada  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es  $\alpha(I) = \text{im}(\alpha)$ .

### Ejemplos

- a) Si  $p, v \in \mathbb{R}^n$  con  $v \neq 0$ , la curva parametrizada  $\alpha(t) = tv + p$  con  $t \in \mathbb{R}$  que describe una recta que pasa por  $p = \alpha(0)$  con vector tangente  $\alpha'(t) = v$ .
- b) Sea  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\beta(t) := t^3 \cdot \vec{e}_1$  es una curva parametrizada diferenciable con  $\beta'(t) = 3t^2 \cdot \vec{e}_1$ .
- c) Sea  $p \in \mathbb{R}^2$  y  $r > 0$  consideramos  $\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t)) + p$ , una curva parametrizada diferenciable cuya traza es  $\alpha(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y) - p| = r\}$
- d) Sean  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . La curva parametrizada  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$  con  $t \in \mathbb{R}$  se llama una helice circular. Además  $\alpha'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b)$ .
- e) Sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$  es una curva parametrizada diferenciable con  $\alpha(-2) = \alpha(2) = 0$ , pero  $\alpha'(-2) \neq \alpha'(2)$ .

## 1.2. Longitud y Parametro de Arco

Sea  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva parametrizada, consideremos  $[a, b] \subseteq I$ . Buscamos medir la longitud de  $\alpha([a, b])$ . Una estrategia, dada una partición  $P := \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  de  $[a, b]$  calculamos

$$\sum_{i=1}^k |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| =: L_a^b(\alpha, P)$$

esta suma corresponde a la longitud de una curva poligonal que pasa por los puntos  $\alpha(t_i)$ . Si  $Q \supseteq P$  es otra partición de  $[a, b]$ , entonces  $L_a^b(\alpha, Q) \geq L_a^b(\alpha, P)$ .

**Definición 0.3.** La longitud de una curva parametrizada  $\alpha$  sobre  $[a, b] \subseteq I$  es

$$L_a^b(\alpha) = \sup\{L_a^b(\alpha, P) : P \text{ es partición de } [a, b]\}.$$

Si  $\alpha$  es diferenciable sobre  $[a, b]$  y hacemos  $|P| = \max\{t_i - t_{i-1}\}$  muy pequeña, esperaríamos que  $|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| \approx |\alpha'(\bar{t}_i)| (t_i - t_{i-1})$ .

**Proposición 0.1.** Si  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una curva parametrizada diferenciable sobre  $[a, b] \subseteq I$ , entonces

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

(Para la demostración revisar Montiel-Ros, página 5)

**Corolario 0.1.** Tenemos que  $|\alpha(a) - \alpha(b)| \leq L_a^b(\alpha)$ .

**Corolario 0.2.** Si  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  cumple  $|DF(p)v| = |v|$  para todo  $p, v \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $L_a^b(F \circ \alpha) = L_a^b(\alpha)$ .

De hecho,  $F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una curva parametrizada diferenciable, con

$$|(F \circ \alpha)'(t)| = |DF(\alpha(t))\alpha'(t)| = |\alpha'(t)|$$

para todo  $t \in I$ , basta con integrar sobre  $[a, b]$ . Si  $p_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una transformación lineal ortogonal, esto es,  $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$  para todo  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $F(p) = Ap + p_0$  cumple

$$DF(p)v = \frac{d}{dt}F(p + tv)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(A(p + tv) + p_0)\Big|_{t=0} = Av$$

Por lo tanto  $|DF(p)v| = |Av| = |v|$ .

**Corolario 0.3.** Si  $h : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$  es un difeomorfismo y  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  es una curva parametrizada diferenciable, entonces

$$L_a^b(\alpha \circ h) = L_c^d(\alpha)$$

donde  $h([a, b]) = [c, d]$  para todo  $[a, b] \subseteq J$ .

Por regla de la cadena tenemos que  $(\alpha \circ h')(t) = h'(t)\alpha'(h(t))$ . La curva  $\alpha \circ h$  tiene la misma traza que  $\alpha$ , en efecto  $(\alpha \circ h)(J) = \alpha(h(J)) = \alpha(I)$ . Decimos que  $\alpha \circ h$  es una reparametrización de la curva  $\alpha$ .

**Demostración.** Como  $h$  y  $h^{-1}$  son diferenciables, se tiene que  $h'(t) \neq 0$  para todo  $t \in J$ . Veamos que

$$1 = \frac{d}{dt}(t) = (h^{-1} \circ h)'(t) = (h^{-1})'(h(t))h'(t)$$

Luego como  $J$  es un intervalo y  $h'$  es continua, tenemos que  $h' < 0$  o  $h' > 0$ .

- Si  $h' < 0$ , entonces  $h(a) = c$ ,  $h(b) = d$ ,

$$\int_a^b |(\alpha \circ h)'(t)| dt = \int_a^b |\alpha'(h(t))| |h'(t)| dt = \int_c^d |\alpha'(s)| ds = L_c^d(\alpha)$$

- Si  $h' > 0$ , entonces  $h(b) = c$ ,  $h(a) = d$ ,

$$\int_a^b |(\alpha \circ h)'(t)| dt = \int_a^b |\alpha'(h(t))| |h'(t)| dt = \int_d^c |\alpha'(s)| ds = \int_c^d |\alpha'(s)| ds = L_c^d(\alpha)$$

**Definición 0.4.** Se dice que una curva parametrizada diferenciable  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es regular si  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ . Si además  $|\alpha'(t)| = 1$  para todo  $t \in I$  se dice que  $\alpha$  está parametrizada por el arco.

Una curva  $\alpha$  parametrizada por el arco tiene las siguientes propiedades

- $\alpha'(t)$  es ortogonal a  $\alpha''(t)$  para todo  $t \in I$ , en efecto

$$0 = \frac{d}{dt}(|\alpha'(t)|^2) = \frac{d}{dt}(\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle) = 2 \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle$$

- Se tiene que  $L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt = b - a$ .

**Teorema 1.** Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una curva parametrizada diferenciable regular, entonces  $\alpha$  admite una parametrización por arco. Concretamente, si  $t_0 \in I$  y definimos  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$s(t) := \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$$

entonces  $s$  es un difeomorfismo sobre  $J \subseteq \mathbb{R}$  y  $\alpha \circ s^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  está parametrizada por el arco.

**Demostración.** Por TFC, sabemos que  $s$  es diferenciable, mas aun,  $s'(t) = |\alpha'(t)|$  para todo  $t \in I$ . Luego,  $s' > 0$ , es decir,  $s$  es creciente y  $s(I) = J$  es un intervalo abierto. Además, por teorema de la función inversa,

vemos que

$$(s^{-1})'(r) = \frac{1}{s'(s^{-1}(r))} = \frac{1}{|\alpha'(s^{-1}(r))|} \quad \forall r \in J$$

Por lo tanto  $|(\alpha \circ s^{-1})'(r)| = 1$  para todo  $r \in J$ , luego  $\alpha \circ s^{-1}$  esta parametrizada por el arco.

### Ejemplos

a) Sea  $\alpha(t) = tv + p_0$  con  $p_0, v \in \mathbb{R}^n$  y  $v \neq 0$ . Como  $\alpha'(t) = v$ , tenemos

$$s(t) = \int_0^t |v| dx = t|v|$$

entonces  $\alpha \circ s^{-1}(x) = x \cdot \frac{v}{|v|} + p_0$  es una parametrización por el arco de  $\alpha$ .

b) Consideremos  $\alpha(t) = (rcost, rsent) + p_0$  con  $p_0 \in \mathbb{R}^2$  y  $r > 0$ . Como  $\alpha'(t) = (-rsent, rcost)$  entonces  $|\alpha'(t)| = r$ , tenemos que

$$s(t) = \int_0^t r dx = rt$$

y  $(\alpha \circ s^{-1})(x) = (rcos(\frac{x}{r}), rsen(\frac{x}{r})) + p_0$  es una curva parametrizada por el arco para  $\alpha$ .

c) Definimos  $\alpha(t) = (acost, asent, bt)$  con  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Como  $|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$  una curva parametrizada por el arco es

$$(\alpha \circ s^{-1})(x) = \left( acos\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), asen\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

### 1.3. Curvatura de una Curva Regular (Teoría Local de Curvas)

**Notación:** Notamos por  $\mathcal{J}$  a la función  $\mathcal{J} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\mathcal{J}(x, y) = (-y, x)$  que cumple lo siguientes

- $\mathcal{J}$  es una transformación lineal ortogonal.
- $\langle u, \mathcal{J}u, \rangle = 0$  y  $\mathcal{J}(\mathcal{J}u) = -u$  para todo  $u \in \mathbb{R}^2$ .
- Si  $|u| = 1$ , entonces  $\{u, \mathcal{J}u\}$  es una base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^2$ .
- Si  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una transformación lineal ortogonal, entonces  $\mathcal{J}A = \det(A)A\mathcal{J}$ .

Nuestro objetivo es asociar a una curva parametrizada regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una cantidad geometrica, para ello queremos definir una función  $K(= K_\alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- a)  $K$  es invariante bajo movimientos rigidos.
- b)  $K$  es invariante por parametrizaciones.
- c)  $K \equiv 0$  si y solo si  $\alpha$  corresponde a un segmento de recta.

Si tenemos  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva parametrizada por el arco, definimos la función  $T : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $T(s) := \alpha'(s)$  y  $N : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  como  $N(s) := \mathcal{J}T(s)$ . Recordemos que  $\{T(s), N(s)\}$  es una base ortonormal en  $\mathbb{R}^2$  para cada  $s \in I$  (Diedro de Frenet).

Notemos que  $N(s) \perp T(s)$  y  $T'(s) \perp T(s)$ , luego, existe un  $k(s) \in \mathbb{R}$  tal que  $T'(s) = K(s)N(s)$ . La función  $K_\alpha = K : I \rightarrow \mathbb{R}$  se llama la curva de  $\alpha$ . Tomando el producto con  $N(s)$ ,

$$K(s) = \langle K(s)N(s), N(s) \rangle$$

Por lo tanto  $K(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$ . Por otro lado, observemos que

$$N'(s) = \frac{d}{ds}(\mathcal{J}T(s)) = \mathcal{J} \frac{d}{ds}(T(s)) = \mathcal{J}(K(s)N(s)) = \mathcal{J}(K(s)\mathcal{J}T(s)) = -K(s)T(s)$$

**Proposición 1.1.** Para una curva parametrizada por el arco  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  vale que  $T' = KN$  y  $N' = -KT$ .

**Ejemplos:**

a) Una recta parametrizada por el arco  $\alpha(s) := s \cdot \frac{v}{|v|} + p_0$  con  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , tenemos que

$$T(s) = \frac{v}{|v|}, N(s) = \frac{\mathcal{J}v}{|v|} = \frac{\mathcal{J}v}{|\mathcal{J}v|} \text{ y } K(s) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

b) Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  esta parametrizada y  $K \equiv 0$ , entonces  $T'(s) = 0$  para todo  $s \in I$ , es decir,  $\alpha''(s) = 0$  para todo  $s \in I$ . Integrando dos veces concluimos que cada coordenada de  $\alpha$  es una función lineal, luego  $\alpha$  es un segmento de recta.

c) Sea  $\alpha(s) := \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right)\right) + p_0$ , entonces

$$T(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right) \text{ y } N(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

Notemos que

$$T'(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right)\right) = \frac{1}{r} N(s)$$

Por lo tanto  $K(s) = \frac{1}{r} \langle N(s), N(s) \rangle = \frac{1}{r}$ .

Consideremos ahora una curva regular  $\beta : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  y una reparametrización  $\alpha = \beta \circ h : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada por el arco, donde  $h : I \rightarrow \tilde{I}$  es un difeomorfismo con  $h' > 0$ . Con esto

$$|\beta'(t)| = |(\beta \circ h \circ h^{-1})'(t)| = |(\alpha \circ h^{-1})'(t)| = (h^{-1})'(t)$$

Así, definimos el diedro de Frenet de la curva  $\alpha$  por

$$T_\beta(t) := \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = \frac{(\alpha \circ h^{-1})'(t)}{|(\alpha \circ h^{-1})'(t)|} = \frac{\alpha'(h^{-1}(t))h^{-1}(t)}{|\alpha'(h^{-1}(t))h^{-1}(t)|} = T_\alpha(h^{-1}(t))$$

Por otro lado

$$N_\beta = \mathcal{J}T_\beta(t) = \mathcal{J}T_\alpha(h^{-1}(t)) = N_\alpha(h^{-1}(t))$$

y definimos la curvatura de la curva  $\beta$  por

$$K_\beta(t) := K_\alpha(h^{-1}(t)), \quad t \in \tilde{I}$$

Como  $\beta'(t) = |\beta'(t)| T_\alpha(h^{-1}(t))$  se tiene que

$$\beta'' = (|\beta'|)' T_\alpha \circ h^{-1} + |\beta'|^2 (T'_\alpha \circ h^{-1})$$

y además  $N_\alpha \circ h^{-1} = \mathcal{J}T_\beta = \frac{\mathcal{J}\beta'}{|\beta'|}$  se sigue que

$$\frac{\langle \beta'', \mathcal{J}\beta' \rangle}{|\beta'|} = \left\langle (|\beta'|)' T_\alpha \circ h^{-1} + |\beta'|^2 (T'_\alpha \circ h^{-1}), N_\alpha \circ h^{-1} \right\rangle = |\beta'|^2 \langle T'_\alpha \circ h^{-1}, N_\alpha \circ h^{-1} \rangle = |\beta'|^2 K_\alpha \circ h^{-1}$$

Concluimos que  $K_\beta = \frac{\langle \beta'', \mathcal{J}\beta' \rangle}{|\beta'|^3}$ .

**Proposición 1.2.** Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular, entonces

a) Si  $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$  es un difeomorfismo entonces  $K_{\alpha \circ \phi} = \text{sgn}(\phi') K_\alpha \circ \phi$ .

b) Si  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un movimiento rígido, entonces  $K_{F \circ \alpha} = (\det DF) K_\alpha$ .

**Demostración.** Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular

a) Como  $(\alpha \circ \phi)'(t) = \phi'(t) \alpha'(\phi(t))$ , se sigue que  $|(\alpha \circ \phi)'(t)| = |\phi'(t)| |\alpha'(\phi(t))|$ , escrito de otro modo

$$|(\alpha \circ \phi)| = \text{sgn}(\phi') \cdot \phi' |\alpha' \circ \phi|$$

Luego

$$\begin{aligned} K_{\alpha \circ \phi} &= \frac{\langle (\alpha \circ \phi)'', \mathcal{J}(\alpha \circ \phi)' \rangle}{|(\alpha \circ \phi)'|^3} = \frac{\langle \phi''(\alpha' \circ \phi) + (\phi')^2 \alpha'' \circ \phi, \phi' \mathcal{J}(\alpha' \circ \phi) \rangle}{\text{sgn}(\phi')(\phi')^3 |\alpha' \circ \phi|^3} \\ &= \frac{(\phi')^3 \langle \alpha'' \circ \phi, \mathcal{J} \alpha' \circ \phi \rangle}{(\phi')^3 |\alpha' \circ \phi|^3} \text{sgn}(\phi') = \text{sgn}(\phi') K_\alpha \circ \phi \end{aligned}$$

b) Sabemos que  $F(p) = Ap + p_0$ , entonces  $DF = A$ . Luego,

$$\begin{aligned} \langle (F \circ \alpha)'', \mathcal{J}(F \circ \alpha)' \rangle &= \langle (DF(\alpha)\alpha')', \mathcal{J}(DF(\alpha)\alpha') \rangle = \langle (A\alpha')', \mathcal{J}(A\alpha') \rangle \\ &= \langle A\alpha'', (\det A)A\mathcal{J}\alpha' \rangle = \det A \langle \alpha'', \mathcal{J}\alpha' \rangle \end{aligned}$$

Además  $|(F \circ \alpha)'| = |A\alpha'| = |\alpha'|$ . Juntando lo anterior vemos que

$$K_{F \circ \alpha} = \frac{\langle (F \circ \alpha)'', \mathcal{J}(F \circ \alpha)' \rangle}{|(F \circ \alpha)'|^3} = \det A \cdot K_\alpha$$

**Proposición 1.3.** Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva parametrizada por el arco. Supongamos que existe una función diferenciable  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$ . Entonces  $K_\alpha = \frac{d\theta}{ds}$ .

**Demostración.** Recordemos que

$$K_\alpha = \langle T'_\alpha, \mathcal{J}T_\alpha \rangle = \left\langle \left( -\frac{d\theta}{ds} \sin\theta, \frac{d\theta}{ds} \cos\theta \right), (-\sin\theta, \cos\theta) \right\rangle = \frac{d\theta}{ds} |(-\sin\theta, \cos\theta)|^2 = \frac{d\theta}{ds}$$

**Teorema 2.** Sea  $K : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, entonces existe una única curva parametrizada por el arco  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , salvo por movimientos rígidos, tal que  $K_\alpha = K$ .

## 1.4. Teoría Local de Curvas en el Espacio

**Definición 2.1.** Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizada por el arco. La curvatura de  $\alpha$  en  $s \in I$  es

$$K_\alpha := |T'(s)|$$

**Observación:** Para curvas en  $\mathbb{R}^3$ ,  $K_\alpha \geq 0$ . Además,  $K_\alpha \equiv 0$  si y solo si  $\alpha$  es un segmento de recta.

**Definición 2.2.** Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por el arco, tal que  $K_\alpha > 0$ . Definimos

$$N(s) := \frac{T'(s)}{|T'(s)|}$$

**Observación:** Como  $T(s) \perp T'(s)$ , pues  $|T| = 1$ , esta definición se condice con el caso en  $\mathbb{R}^2$ , además de manera directa, obtenemos que  $K_\alpha N(s) = T'(s)$ .

**Definición 2.3.** Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizada por el arco. Definimos el vector binormal de  $\alpha$  en  $s \in I$  por

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

**Observación:** Por definición del producto cruz el conjunto  $\{T, N, B\}$  es una base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^3$  para todo  $s \in I$  llamada el triedro de Frenet de  $\alpha$  en  $s \in I$ .

Notemos que  $B'(s) = \frac{d}{ds}(T(s) \times N(s)) = T'(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s) = T(s) \times N'(s)$ . Además,  $|B| = |T| |N| = 1$  y por lo tanto  $B' \perp B$ , por otro lado  $\langle B', T \rangle = \langle T \times N', T \rangle = 0$ , osea  $B' \perp T$ . Por lo tanto, existe  $\tau(s) \in I$  tal que

$$B'(s) = \tau(s)N(s)$$



Se dice que  $\tau(s) =: \tau_\alpha(s)$  es la torsión de  $\alpha$  en  $s \in I$ . Finalmente, como  $N' \perp N$ , tenemos que

$$N'(s) = aT(s) + bB(s)$$

donde

$$\begin{aligned} a \langle T, T \rangle &= \langle N', T \rangle = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle - \langle N, T' \rangle \\ &= \frac{d}{ds} \langle N, T \rangle - \langle N, T' \rangle = -\langle N, KN \rangle = -K \end{aligned}$$

y similarmente obtenemos que  $b = \langle N', B \rangle = -\tau(s)$ .

**Proposición 2.1.** *Ecuaciones de Frenet-Serret*

- $T'(s) = K(s)N(s)$
- $N'(s) = -K(s)T(s) - \tau(s)B(s)$
- $B'(s) = \tau(s)N(s)$

**Ejemplos:**

- a) Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por el arco. Supongamos que  $\alpha(I) \subseteq P$  con  $P$  un plano. Podemos describir el plano con la ecuación  $\langle x - p_0, u \rangle = 0$ , donde  $p_0, u \in \mathbb{R}^3$  con  $u$  unitario y perpendicular al plano. Entonces  $\langle \alpha(s) - p_0, u \rangle = 0$  para todo  $s \in I$ , derivando vemos que

$$\langle \alpha'(s), u \rangle = \langle T(s), u \rangle = 0 \quad \forall s \in I$$

En ese caso,  $K(s)$  es el valor absoluto de la curvatura de  $\alpha$  como una curva plana. Supongamos que  $K(s) > 0$  para todo  $s \in I$ . Entonces

$$0 = \frac{d}{ds} \langle T, u \rangle = \langle T', u \rangle = K(s) \langle N, u \rangle$$

lo que implica que  $N \perp u$  para todo  $s \in I$ . Luego,  $B(s) = \pm u$  para todo  $s \in I$ , se sigue que  $\tau(s) = \langle B', N \rangle = 0$ .

- b) Supongamos que  $\alpha$  es una curva parametrizada por el arco tal que  $\tau_\alpha \equiv 0$ , entonces  $B' = \tau \cdot N = 0$  para todo  $s \in I$  y por lo tanto  $B = u$ , con  $u \in \mathbb{R}^3$  y  $|u| = 1$ , así  $T \times N = u$  para todo  $s \in I$ .

Ahora, usando las ecuaciones de frenet vemos que  $T \perp u$  y  $N \perp u$  para todo  $s \in I$  y concluimos que

$$\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), u \rangle = \left\langle \int_{s_0}^s T(x) dx, u \right\rangle = \int_{s_0}^s \langle T(x), u \rangle dx = 0 \quad \forall s \in I$$

**Proposición 2.2.** *Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por el arco,  $p_0 \in \mathbb{R}^3$ ,  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineal, ortogonal y positiva. Sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $F(p) = Ap + p_0$ . Entonces*

$$\begin{aligned} K_{F \circ \alpha} &= K_\alpha \quad , \quad \tau_{F \circ \alpha} = \tau_\alpha \\ T_{F \circ \alpha} &= AT_\alpha \quad , \quad N_{F \circ \alpha} = AN_\alpha \quad , \quad B_{F \circ \alpha} = AB_\alpha \end{aligned}$$

Podemos extender las definiciones de curvatura, torsión y del tiedro de frenet para curvas regulares  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  por

$$K_\beta(t) := K_\alpha(h^{-1}(t))$$

donde  $\alpha = \beta \circ h$  es una parametrización por el arco, con  $h$  difeomorfismo,  $h' > 0$  y  $K_\beta > 0$ . Se cumple lo siguiente

- $T_\beta(t) = T_\alpha(h^{-1}(t))$
- $N_\beta(t) = N_\alpha(h^{-1}(t))$
- $B_\beta(t) = B_\alpha(h^{-1}(t))$

$$\blacksquare \tau_\beta(t) = \tau_\alpha(h^{-1}(t))$$

**Proposición 2.3.** Sea  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular, entonces

$$\begin{aligned} a) \quad K_\beta &= \frac{|\beta' \times \beta''|}{|\beta'|^3} \\ b) \quad \tau_\beta &= \frac{-\det(\beta', \beta'', \beta''')}{|\beta' \times \beta''|^2} = -\frac{\langle \beta', \beta'' \times \beta''' \rangle}{|\beta' \times \beta''|^2} \\ c) \quad T_\beta &= \frac{\beta'}{|\beta'|} \\ d) \quad B_\beta &= \frac{\beta' \times \beta''}{|\beta' \times \beta''|} \\ e) \quad N_\beta &= \frac{|\beta'|^2 \beta'' - \langle \beta', \beta'' \rangle \beta'}{|\beta'|^2 \beta'' - \langle \beta', \beta'' \rangle \beta'|} \end{aligned}$$

**Teorema 3.** (Teorema Fundamental de las curvas en el Espacio)

Sea  $K, \tau : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables con  $K(s) > 0$  para todo  $s \in I$ . Entonces existe  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizada por el arco tal que

$$K_\alpha = K \quad y \quad \tau_\alpha = \tau$$

Además, si  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es parametrizada por el arco tal que  $K_\beta = K$  y  $\tau_\beta = \tau$ . Entonces existe un movimiento rígido  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $F \circ \beta = \alpha$ .

**Demostración.** El sistema

$$(FS) : \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad y \quad A(s) = \begin{pmatrix} 0 & K(s) & 0 \\ -K(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

para cada  $\{T_0, N_0, B_0\} \subseteq \mathbb{R}^3$  y  $s_0 \in I$ , existe una única solución del sistema,  $\{T, N, B\}$ , definida en  $I$  tal que  $T(s_0) = T_0$ ,  $N(s_0) = N_0$  y  $B(s_0) = B_0$ . Veamos que  $\{T, N, B\}$  son ortonormales para cada  $s \in I$ . Sea  $\{T_0, N_0, B_0\}$  una base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^3$ . Consideremos la función

$$M(s) = \begin{pmatrix} \langle T, T \rangle & \langle T, N \rangle & \langle T, B \rangle \\ \langle N, T \rangle & \langle N, N \rangle & \langle N, B \rangle \\ \langle B, T \rangle & \langle B, N \rangle & \langle B, B \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} M'(s) &= \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}'^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}' \\ &= A \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} \\ &= AM - MA \end{aligned}$$

La matriz  $M_0(s) = I_3$  con  $s \in I$  es solución del sistema, además  $M_0(s_0) = I_3 = M(s_0)$  (pues  $T_0, N_0, B_0$  son ortonormales). Por unicidad de la solución  $M(s) \equiv I_3$  para todo  $s \in I$ .

La matriz  $\begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}$  tiene determinante 1 o -1. Como  $I$  es conexo y el determinante una función continua, entonces es constante. Como vale 1 en  $s = s_0$  pues  $\{T_0, N_0, B_0\}$  es base positiva, vale 1 sobre  $I$ .

Definimos  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  por

$$\alpha(x) = \int_{s_0}^s T(x) dx$$

Por TFC,  $\alpha'(s) = T(s)$  unitario, luego  $\alpha$  es una curva parametrizada por el arco. Además

$$K_\alpha(s) = |T'(s)| = |K(s)N(s)| = K(s)|N(s)| = K(s) \quad \forall s \in I$$

De ahí,

$$N_\alpha(s) = \frac{T'_\alpha(s)}{|T'_\alpha(s)|} = \frac{T'(s)}{|T'(s)|} = \frac{K(s)N(s)}{|K(s)N(s)|} = N(s)$$

y  $B_\alpha(s) = T_\alpha(s) \times N_\alpha(s) = T(s) \times N(s) = B(s)$ , ya que  $T(s), N(s), B(s)$  es base ortonormal positiva. Por tanto,

$$\tau_\alpha = \langle B'_\alpha(s), N_\alpha(s) \rangle = \langle B'(s), N(s) \rangle = \langle \tau N, N \rangle = \tau(s)$$

Sea  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ortogonal tal que

$$AT_\beta(s_0) = T_\alpha(s_0)$$

$$AN_\beta(s_0) = N_\alpha(s_0)$$

$$AB_\beta(s_0) = B_\alpha(s_0)$$

y  $p_0 = \alpha(s_0) - A\beta(s_0)$ . Luego,  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $F(p) = Ap + p_0$ . Defina  $\gamma = F \circ \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Queremos ver que  $\gamma \equiv \alpha$ . Como  $F$  es movimiento rígido  $\alpha$  y  $\gamma$  tienen curvatura  $K$  y torsión  $\tau$  y tiedro

$$T_\gamma = T_{F \circ \beta} = AT_\beta$$

$$N_\gamma = N_{F \circ \beta} = AN_\beta$$

$$B_\gamma = B_{F \circ \beta} = AB_\beta$$

Luego  $f(s) = |T_\gamma(s) - T_\alpha(s)|^2 + |N_\gamma(s) - N_\alpha(s)|^2 + |B_\gamma(s) - B_\alpha(s)|^2$  vale 0 en  $s = s_0$ . Por otro lado

$$f'(s) = 2\langle T_\gamma - T_\alpha, T'_\gamma - T'_\alpha \rangle + 2\langle N_\gamma - N_\alpha, N'_\gamma - N'_\alpha \rangle + 2\langle B_\gamma - B_\alpha, B'_\gamma - B'_\alpha \rangle = 0 \quad \forall s \in I$$

por lo tanto  $f$  es constante y por lo mencionado  $f \equiv 0$ . De este modo,  $\gamma' = T_\gamma \equiv T_\alpha = \alpha'$ . Como

$$\gamma(s_0) = F(\beta s_0) = A\beta(s_0) + p_0 = \alpha(s_0)$$

concluimos que  $\gamma \equiv \alpha$ .

## 2. Superficies Regulares

### 2.1. Definición y ejemplos

**Definición 3.1.** Sea  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ , decimos que  $\Sigma$  es una superficie regular si para todo  $p \in \Sigma$  existe un abierto  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  con  $p \in V$  y una función diferenciable

$$\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que

- $\varphi(\mathcal{V}) = V \cap \Sigma$
- $\varphi$  es homeomorfismo de  $\mathcal{V}$  sobre  $V \cap \Sigma$
- $D\varphi(q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva, es decir, si  $\varphi = \varphi(u, v)$ , entonces

$$D\varphi(q) \cdot e_1 = \frac{d}{dt}\varphi(q + te_1)|_{t=0} = \varphi_u(q)$$

$$D\varphi(q) \cdot e_2 = \frac{d}{dt}\varphi(q + te_2)|_{t=0} = \varphi_v(q)$$

son linealmente independientes, en otras palabras  $\varphi_u(q) \times \varphi_v(q) \neq 0$ . Decimos que  $\varphi$  es una parametrización local para  $\Sigma$

**Ejemplos:**

- Sea  $f : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable, consideramos  $\Sigma := \{(x, y, (f(x, y))) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{V}\}$  Tomamos  $V = \mathbb{R}^3$ , definimos la función  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ , entonces

a)  $\varphi(\mathcal{V}) = \Sigma = \Sigma \cap V$ .

b)  $\varphi$  tiene inversa, a saber,  $\varphi^{-1}(x, y, z) = (x, y)$  que es la restricción de una función continua, luego  $\varphi^{-1}$  es continua.

c)  $\varphi_u(u, v) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\right)$  y  $\varphi_v(u, v) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right)$  son linealmente independientes.

Por lo tanto,  $\varphi$  es una parametrización local con  $\varphi(\mathcal{V}) = \Sigma$

- Veamos la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2$ . Si  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ , entonces  $x \neq 0$  o  $y \neq 0$  o  $z \neq 0$ . Consideramos

$$\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^2 \cap (V_1^+ \cup V_2^+ \cup V_3^+ \cup V_1^- \cup V_2^- \cup V_3^-)$$

donde  $V_i^\pm := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \pm x_i > 0\}$ . Definimos la función  $\varphi_1^\pm : B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\varphi_1^\pm(u, v) := (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v)$$

luego,  $\varphi_1^\pm(B_1(0)) = V_1^\pm \cap \mathbb{S}^2$ ,  $(\varphi_1^\pm)^{-1} : V_1^\pm \cap \mathbb{S}^2 \rightarrow B_1(0)$  que manda  $(x, y, z)$  en  $(y, z)$  es continua y además  $(\varphi_1^\pm)_u^{-1}(q)$  y  $(\varphi_1^\pm)_v^{-1}(q)$  son linealmente independientes para todo  $q \in B_1(0)$ . Un argumento similar se utiliza para  $V_2^\pm$  y  $V_3^\pm$ .

**Definición 3.2.** Una superficie parametrizada diferenciable es una aplicación diferenciable  $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\mathcal{V}$  abierto. Se dice que  $\varphi$  es regular si  $D\varphi(q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva para todo  $q \in \mathcal{V}$ .

**Ejemplos:**

- Toda parametrización local de una superficie regular es una superficie parametrizada regular.
- Sea  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva parametrizada diferenciable. Definimos  $\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  por  $\varphi(u, v) = (\alpha(u), v)$ . Esta superficie parametrizada diferenciable se llama cilindro sobre  $\alpha$ .

Como  $\varphi_u(u, v) = (\alpha'(u), 0)$  y  $\varphi_v(u, v) = (0, 0, 1)$  son linealmente independientes si y solo si  $\alpha' \neq 0$ , es decir,  $\varphi$  es regular si y solo si  $\alpha$  es una curva regular.

- Si  $I = \mathbb{R}$  y existe  $T \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha(t + T) = \alpha(t)$  entonces  $\varphi(I \times \mathbb{R}) = \alpha(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$  es una superficie regular.
- Si  $\alpha$  es inyectiva y para todo  $t \in I$  existen abiertos  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  y  $J \subseteq I$  con  $t \in J$  tales que  $\alpha(I) \cap V = \alpha(J)$  entonces  $\varphi(I \times \mathbb{R})$  es una superficie regular.

**Teorema 4.** (Teorema de la Función Implícita) Sea  $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  continua diferenciable,  $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in W$  tal que  $\frac{\partial h}{\partial z}(p_0) \neq 0$ . Entonces existen abiertos  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  y  $f : \mathcal{V} \rightarrow I$  continua diferenciable tales que

- El punto  $p_0 \in \mathcal{V} \times I$
- Se tiene la igualdad de conjuntos  $h^{-1}(h_{p_0}) \cap (\mathcal{V} \times I) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathcal{V}\}$

Además se tiene que

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{-\frac{\partial h}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{\partial h}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{-\frac{\partial h}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$$

Si  $h$  es suave entonces  $f$  también lo es.

**Definición 4.1.** Sea  $F : W \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciable. Se dice que  $q \in \mathbb{R}^m$  es un valor regular para  $F$ , si  $F^{-1}(q) = \emptyset$  o si para todo  $p \in F^{-1}(q)$  se tiene que  $DF(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es sobreyectiva.

Por ejemplo si  $h : W \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  entonces  $Dh(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Dh(p)e_i &= \frac{d}{dt}h(p + te_i)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}h(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \dots, p_n)|_{t=0} \\ &= \frac{\partial h}{\partial x_i}(p) \end{aligned}$$

Luego  $q \in \mathbb{R}$  es valor regular para  $h$  si y solo si para todo  $p \in h^{-1}(q)$ ,  $\frac{\partial h}{\partial x_i}(p) \neq 0$  para algún  $i$ , o sea,  $\nabla h(p) \neq 0$  para todo  $p \in h^{-1}(q)$ .

**Teorema 5.** Sea  $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Si  $c \in \mathbb{R}$  es un valor regular para  $h$ , entonces  $h^{-1}(c)$  es una superficie regular.

**Demostración.** Si  $c$  es valor regular, entonces para todo  $p \in h^{-1}(c)$  se sigue que  $\nabla h(p) \neq 0$ , es decir,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(p) \neq 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(p) \neq 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial h}{\partial z}(p) \neq 0$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\frac{\partial h}{\partial z} \neq 0$ . Por teo de la función Implícita, existen abiertos  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  y una función suave  $f : \mathcal{V} \rightarrow I$  tales que  $p \in \mathcal{V} \times I$  y  $h^{-1}(c) \cap (\mathcal{V} \times I) = \text{Graf}(f)$ .

Por lo visto al inicio de la sección, existe parametrización local  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\varphi(\mathcal{V}) = h^{-1}(c) \cap (\mathcal{V} \times I)$ .

## 2.2. Cambio de Coordenadas

**Lema 5.1.** Sea  $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  superficie parametrizada regular

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Entonces para todo punto  $(u_0, v_0) \in \mathcal{V}$  se tiene que  $D(\pi \circ \varphi)(u_0, v_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un isomorfismo lineal, donde  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una de las proyecciones a los planos  $xy$ ,  $xz$  o  $yz$ .

Consecuentemente existe  $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$  abierto con  $(u_0, v_0) \in \mathcal{V}_0$  tal que  $\pi \circ \varphi(\mathcal{V}_0) = W_0 \subseteq \mathbb{R}^2$  es abierto y  $\pi \circ \varphi|_{\mathcal{V}_0} : \mathcal{V}_0 \rightarrow W_0$  es un difeomorfismo.

**Demostración.** La matriz  $D\varphi(u_0, v_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} (u_0, v_0)$$

Como la superficie es regular, las columnas son linealmente independientes. Luego la matriz tiene una submatriz  $2 \times 2$  invertible. Pero estas submatrices son las matrices de

$$D(\pi \circ \varphi)(u_0, v_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

La última parte es consecuencia directa del teorema de la función inversa.

**Observación:** La función  $\psi = \varphi \circ (\pi \circ \varphi)^{-1} : W_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es también una superficie parametrizada regular con

$$\psi(W_0) = \varphi((\pi \circ \varphi)^{-1}(W_0)) = \varphi(\mathcal{V}_0)$$

Además,  $\pi \circ \psi = id_{W_0}$ , osea,  $\psi$  es la grafica de una función  $f : W_0 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable.

**Corolario 5.1.** Si  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  es una superficie regular, entonces para todo  $p \in \Sigma$  existe parametrización local cuya imagen contiene a  $p$  y que es grafica.

**Teorema 6.** Si  $\varphi_i : \mathcal{V}_i \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$  son parametrizaciones locales de  $\Sigma$  con  $U := \varphi_1(\mathcal{V}_1) \cap \varphi_2(\mathcal{V}_2) \neq \emptyset$ . Entonces la aplicación

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi_2^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^2$$

es un difeomorfismo. Se dice que  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  es un cambio de coordenadas.

**Demostración.** Como  $\varphi_i$  son homeomorfismos, basta demostrar que  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  es diferenciable en cada  $p_1 \in \varphi_1^{-1}(U)$ . Sean

$$q = \varphi_1(p_1) \quad \text{y} \quad p_2 = \varphi_2^{-1}(q) = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(p_1))$$

Por el lema, existe proyección  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y un abierto  $V_2 \subseteq \varphi_2^{-1}(U)$  con  $p_2 \in V_2$  tal que

$$\pi \circ \varphi_2 : V_2 \rightarrow \pi(\varphi_2(V_2)) =: W \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ un abierto}$$

es un difeomorfismo. Sea  $V_1 := (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)^{-1}(V_2) = \varphi_1^{-1}(\varphi_2(V_2))$ , entonces

- $p_1 \in V_1$  pues  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(p_1) = \varphi_2^{-1}(q) = p_2 \in V_2$ .
- Si  $p \in V_1$  entonces  $\varphi_1(p) \in \varphi_2(V_2)$  y por ende  $\pi \circ \varphi_1(p) \in \pi \circ \varphi_2(V_2) = W$
- $V_1$  es abierto

Por lo tanto esta bien definida la función  $(\pi \circ \varphi_2)^{-1} \circ \pi \circ \varphi_1 : V_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ . La cual cumple que  $(\pi \circ \varphi_2)^{-1} \circ \pi \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  en su dominio. Como  $(\pi \circ \varphi_2)^{-1}$  y  $(\pi \circ \varphi_1)$  son diferenciables,  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  es diferenciable en  $p_1 \in V_1$ .

## 2.3. Aplicaciones Diferenciables

**Definición 6.1.** Se dice que  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^d$  es diferenciable en  $p \in \Sigma$  si existe una parametrización local  $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$  con  $p \in \varphi(\mathcal{V})$  y tal que  $f \circ \varphi$  es diferenciable en  $\varphi^{-1}(p) \in \mathcal{V}$ .

**Definición 6.2.** Se dice que

$$\gamma : V \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$$

con  $\Sigma$  una superficie parametrizada regular, es diferenciable en  $q \in V$ . Si existe una parametrización local  $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$  con  $\gamma(q) \in \varphi(\mathcal{V})$  tal que

$$\varphi^{-1} \circ \gamma : \gamma^{-1}(\varphi(\mathcal{V})) \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^2$$

es diferenciable en  $q \in \gamma^{-1}(\varphi(\mathcal{V}))$ .

**Observación:**

- a) La definición de diferenciabilidad de  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^d$  no depende de la parametrización

$$f \circ \tilde{\varphi} = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})$$

entonces  $f \circ \tilde{\varphi}$  es diferenciable si y solo si  $f \circ \varphi$  es diferenciable.

- b) Esta noción de diferenciabilidad es local, es decir, si  $p \in U \subseteq \Sigma$ , con  $U$  abierto, entonces  $f$  es diferenciable si y solo si  $f|_U : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  es diferenciable en  $p$ .

- c) Si  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^d$  es diferenciable entonces  $f$  es continua, en efecto

$$f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$$

es composición de mapeos continuos.

- d) Observaciones análogas se cumplen para  $\gamma : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ .

**Ejemplos:**

- Si  $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$  es una parametrización local, entonces  $\varphi$  y  $\varphi^{-1}$  son diferenciables y  $\varphi^{-1} \circ \varphi$  es la identidad.
- Si  $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable con  $W$  abierto y si  $\Sigma \subseteq W$  es una superficie parametrizada regular, entonces  $h|_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable. Para toda parametrización local  $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$  tenemos que  $h|_{\Sigma}$  es la composición de  $\varphi$  y  $h$ .
- Función altura,  $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(p) = \langle u, p - p_0 \rangle$ . Esta función mide la altura del punto  $p_0 \Sigma$  al plano  $p_0 + u^\perp$ , donde  $|u| = 1$ .
- El cuadrado de la distancia a un  $p_0 \in \mathbb{R}^3$ . Es decir,  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $|p - p_0|^2$ . Si  $p_0 \notin \Sigma$  entonces  $|p - p_0|$  también es diferenciable.