Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Pedro Gaspar – Estudiante: Benjamín Mateluna

Geometría Diferencial - MAT2860
Apuntes
06 de Marzo de 2025

Índice

Introducción

Habrán tres interrogaciones (I1, I2, I3) cada una vale un 25 % y un examen (EX) que vale un 25 %. Las fechas son 14 de abril, 19 de Mayo, 16 de Junio y 3 de Julio respectivamente.

1. Curvas en $\mathbb{R}^n$

1.1. Curvas parametrizadas

Consideramos $\mathbb{R}^n := \{v = (v_1, \cdots, v_n) : v_i \in \mathbb{R}\}$. Un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n, con el producto escalar dado por

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \quad \text{con } v, w \in \mathbb{R}^n$$

Definición 0.1. *Una curva parametrizada en $\mathbb{R}^n$ es una función continua $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con I un intervalo abierto. Escribimos $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \cdots, \alpha_n(t))$.*

Diremos que α es diferenciable si sus funciones coordenadas $\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty$. En tal caso, el vector $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \cdots, \alpha_n'(t))$ se llama vector tangente a la curva α en $t \in I$

Definición 0.2. *La traza de una curva parametrizada $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es $\alpha(I) = im(\alpha)$.*

Ejemplos

a) Si $p, v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$, la curva parametrizada $\alpha(t) = tv + p$ con $t \in \mathbb{R}$ que describe una recta que pasa por $p = \alpha(0)$ con vector tangente $\alpha'(t) = v$.

b) Sea $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $b(t) := t^3 \cdot \overrightarrow{e}_1$ es una curva parametrizada diferenciable con $\beta'(t) = 3t^2 \cdot \overrightarrow{e}_1$.

c) Sea $p \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$ consideramos $\alpha(t) = (rcos(t), rsen(t)) + p$, una curva parametrizada diferenciable cuya traza es $\alpha(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y)|\, p = r\}$

d) Sean $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (acos(t), asen(t), bt)$ con $t \in \mathbb{R}$ se llama una helice circular. Además $\alpha'(t) = (-asen(t), acos(t), b)$.

e) Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3-4t, t^2-4)$ es una curva parametrizada diferenciable con $\alpha(-2) = \alpha(2) = 0$, pero $\alpha'(-2) \neq \alpha(2)$.

1.2. Longitud y Parametro de Arco

Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada, consideremos $[a, b] \subseteq I$. Buscamos medir la longitud de $\alpha([a, b])$. Una estrategia, dada una partición $P := \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ de $[a, b]$ calculamos

$$\sum_{i=1}^{k} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| =: L_a^b(\alpha, P)$$

esta suma corresponde a la longitud de una curva poligonal que pasa por los puntos $\alpha(t_i)$. Si $Q \supseteq P$ es otra partición de $[s, b]$, entonces $L_a^b(\alpha, Q) \geq L_a^b(\alpha, P)$.

Definición 0.3. *La longitud de una curva parametrizada α sobre $[a, b] \subseteq I$ es*

$$L_a^b(\alpha) = sup\{L_a^b(\alpha, P) : P \text{ es partición de } [a, b]\}.$$

Si α es diferenciable sobre $[a, b]$ y hacemos $|P| = max\{t_i - t_{i-1}\}$ muy pequeña, esperariamos que $|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| \approx \left|\alpha'(\overline{t_i})\right| (t_i - t_{i-1})$.

Proposición 0.1. *Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable sobre $[a, b] \subseteq I$, entonces*

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt$$

(Para la demostración revisar Montiel-Ros, página 5)

Corolario 0.1. *Tenemos que $|\alpha(a) - \alpha(b)| \leq L_a^b(\alpha)$.*

Corolario 0.2. *Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cumple $|DF(p)v| = |v|$ para todo $p, v \in \mathbb{R}^n$, entonces $L_a^b(F \circ \alpha) = L_a^b(\alpha)$.*

De hecho, $F \circ \alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable, con

$$|(F \circ \alpha)'(t)| = |DF(\alpha(t))\alpha'(t)| = |\alpha'(t)|$$

para todo $t \in I$, basta con integrar sobre $[a, b]$. Si $p_0 \in \mathbb{R}^n$ y $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal ortogonal , esto es, $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$, entonces $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(p) = Ap + p_0$ cumple

$$DF(p)v = \frac{d}{dt}F(p + tv)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(A(p + tv) + p_0)\big|_{t=0} = Av$$

Por lo tanto $|DF(p)v| = |Av| = |v|$.

Corolario 0.3. *Si $h : J \subseteq \mathbb{R} \to I \subseteq \mathbb{R}$ es un difeomorfismo y $\alpha : I \to \mathbb{R}$ es una curva parametrizada diferenciable, entonces*

$$L_a^b(\alpha \circ h) = L_c^d(\alpha)$$

donde $h([a, b]) = [c, d]$ para todo $[a, b] \subseteq J$.

Por regla de la cadena tenemos que $(\alpha \circ h')(t) = h'(t)\alpha'(h(t))$. La curva $\alpha \circ h$ tiene la misma traza que α, en efecto $(\alpha \circ h)(J) = \alpha(h(J)) = \alpha(I)$. Decimos que $\alpha \circ h$ es una reparametrización de la curva *alpha*.

Demostración. *Como h y h^{-1} son diferenciables, se tiene que $h'(t) \neq 0$ para todo $t \in J$. Veamos que*

$$1 = \frac{d}{dt}(t) = (h^{-1} \circ h)'(t) = (h^{-1})'(h(t))h'(t)$$

Luego como J es un intervalo y h' es continua, tenemos que $h' < 0$ o $h > 0$.

- *Si $h' < 0$, entonces $h(a) = c$, $h(b) = d$,*

$$\int_a^b |(\alpha \circ h)'(t)|\, dt = \int_a^b |\alpha'(h(t))|\, |h'(t)|\, dt = \int_c^d |\alpha'(s)|\, ds = L_c^d(\alpha)$$

- *Si $h' > 0$, entonces $h(b) = c$, $h(a) = d$,*

$$\int_a^b |(\alpha \circ h)'(t)|\, dt = \int_a^b |\alpha'(h(t))|\, |h'(t)|\, dt = \int_d^c -|\alpha'(s)|\, ds = \int_c^d |\alpha'(s)|\, ds = L_c^d(\alpha)$$

Definición 0.4. *Se dice que una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Si además $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$ se dice que α esta parametrizada por el arco.*

Una curva α parametrizada por el arco tiene las siguientes propiedades

- $\alpha'(t)$ es ortogonal a $\alpha''(t)$ para todo $t \in I$, en efecto

$$0 = \frac{d}{dt}(|\alpha'(t)|^2) = \frac{d}{dt}(\langle\alpha'(t), \alpha'(t)\rangle) = 2\langle\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle$$

- Se tiene que $L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt = b - a$.

Teorema 1. *Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable regular, entonces α admite una parametrización por arco. Concretamente , si $t_0 \in I$ y definimos $s : I \to \mathbb{R}$ por*

$$s(t) := \int_{t_0}^t |\alpha'(t)|\, dt$$

entonces s es un difeomorfismo sobre $J \subseteq \mathbb{R}$ y $\alpha \circ s^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ esta parametrizada por el arco.

Demostración. *Por TFC, sabemos que s es diferenciable, mas aun, $s'(t) = |\alpha'(t)|$ para todo $t \in I$. Luego, $s' > 0$, es decir, s es creciente y $s(I) = J$ es un intervalo abierto. Además, por teorema de la función inversa,* *vemos que*

$$(s^{-1})'(r) = \frac{1}{s'(s^{-1}(r))} = \frac{1}{|\alpha'(s^{-1}(r))|} \quad \forall r \in J$$

Por lo tanto $\left|(\alpha \circ s^{-1})'(r)\right| = 1$ *para todo* $r \in J$*, luego* $\alpha \circ s^{-1}$ *esta parametrizada por el arco.*

Ejemplos

a) Sea $\alpha(t) = tv + p_0$ con $p_0, v \in \mathbb{R}^n$ y $v \neq 0$. Como $\alpha'(t) = v$, tenemos

$$s(t) = \int_0^t |v|\, dx = t\, |v|$$

entonces $\alpha \circ s^{-1}(x) = x \cdot \frac{v}{|v|} + p_0$ es una parametrización por el arco de α.

b) Consideremos $\alpha(t) = (rcost, rsent) + p_0$ con $p_0 \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$. Como $\alpha'(t) = (-rsent, rcost)$ entonces $|\alpha'(t)| = r$, tenemos que

$$s(t) = \int_0^t r dx = rt$$

y $(\alpha \circ s^{-1})(x) = (rcos(\frac{x}{r}), rsen(\frac{x}{r})) + p_0$ es una curva parametrizada por el arco para α.

c) Definimos $\alpha(t) = (acost, asent, bt)$ con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$ una curva parametrizada por el arco es

$$(\alpha \circ s^{-1})(x) = \left(acos\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), asen\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

1.3. Curvatura de una Curva Regular (Teoría Local de Curvas)

Notación: Notamos por $\mathcal{J}$ a la función $\mathcal{J} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathcal{J}(x, y) = (-y, x)$ que cumple lo siguientes

- $\mathcal{J}$ es una transformación lineal ortogonal.
- $\langle u, \mathcal{J}u, =\rangle\, 0$ y $\mathcal{J}(\mathcal{J}u) = -u$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$.
- Si $|u| = 1$, entonces $\{u, \mathcal{J}u\}$ es una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^2$.
- Si $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal ortogonal, entonces $\mathcal{J}A = det(A)A\mathcal{J}$.

Nuestro objetivo es asociar a una curva parametrizada regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una cantidad geometrica, para ello queremos definir una función $K(= K_\alpha) : I \to \mathbb{R}$ tal que

a) K es invariante bajo movimientos rigidos.

b) K es invariante por parametrizaciones.

c) $K \equiv 0$ si y solo si α corresponde a un segmento de recta.

Si tenemos $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por el arco, definimos la función $T : I \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(s) := \alpha'(s)$ y $N : I \to \mathbb{R}^2$ como $N(s) := \mathcal{J}T(s)$. Recordemos que $\{T(s), N(s)\}$ es una base ortonormal en $\mathbb{R}^n$ para cada $s \in I$ (Diedro de Frenet).

Notemos que $N(s) \perp T(s)$ y $T'(s) \perp T(s)$, luego, existe un $k(s) \in \mathbb{R}$ tal que $T'(s) = K(s)N(s)$. La función $K_\alpha = K : I \to \mathbb{R}$ se llama la curva de α. Tomando el producto con $N(s)$,

$$K(s) = \langle K(s)N(s), N(s)\rangle$$

Por lo tanto $K(s) = \langle T'(s), N(s)\rangle$. Por otro lado, observemos que

$$N'(s) = \frac{d}{ds}\left(\mathcal{J}T(s)\right) = \mathcal{J}\frac{d}{ds}(T(s)) = \mathcal{J}(K(s)N(s)) = \mathcal{J}(K(s)\mathcal{J}T(s)) = -K(s)T(s)$$

Proposición 1.1. *Para una curva parametrizada por el arco $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ vale que $T' = KN$ y $N' = -KT$.*

Ejemplos:

a) Una recta parametrizada por el arco $\alpha(s) := s \cdot \frac{v}{|v|} + p_0$ con $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, tenemos que

$$T(s) = \frac{v}{|v|} \ , \ N(s) = \frac{\mathcal{J}v}{|v|} = \frac{\mathcal{J}v}{|\mathcal{J}v|} \text{ y } K(s) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

b) Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ esta parametrizada y $K \equiv 0$, entonces $T'(s) = 0$ para todo $s \in I$, es decir, $\alpha''(s) = 0$ para todo $s \in I$. Integrando dos veces concluimos que cada coordenada de α es una función lineal, luego α es un segmento de recta.

c) Sea $\alpha(s) := \left(rcos\left(\frac{s}{r}\right), rsen\left(\frac{s}{r}\right)\right) + p_0$, entonces

$$T(s) = \left(-sen\left(\frac{s}{r}\right), cos\left(\frac{s}{r}\right)\right) \text{ y } N(s) = \left(-cos\left(\frac{s}{r}\right), -sen\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

Notemos que

$$T'(s) = \left(-\frac{1}{r}cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r}sen\left(\frac{s}{r}\right)\right) = \frac{1}{r}N(s)$$

Por lo tanto $K(s) = \frac{1}{r}\langle N(s), N(s)\rangle = \frac{1}{r}$.

Consideremos ahora una curva regular $\beta : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^2$ y una reparametrización $\alpha = \beta \circ h : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada por el arco, donde $h : I \to \widetilde{I}$ es un difeomorfismo con $h' > 0$. Con esto

$$|\beta'(t)| = \left|(\beta \circ h \circ h^{-1})'(t)\right| = \left|(\alpha \circ h^{-1})'(t)\right| = (h^{-1})'(t)$$

Así, definimos el diedro de Frenet de la curva α por

$$T_\beta(t) := \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = \frac{(\alpha \circ h^{-1})'(t)}{|(\alpha \circ h^{-1})'(t)|} = \frac{\alpha'(h^{-1}(t))h^{-1}(t)}{|\alpha'(h^{-1}(t))h^{-1}(t)|} = T_\alpha(h^{-1}(t))$$

Por otro lado

$$N_\beta = \mathcal{J}T_\beta(t) = \mathcal{J}T_\alpha(h^{-1}(t)) = N_\alpha(h^{-1}(t))$$

y definimos la curvatura de la curva β por

$$K_\beta(t) := K_\alpha(h^{-1}(t)) \ , \ t \in \widetilde{I}$$

Como $\beta'(t) = |\beta'(t)|\, T_\alpha(h^{-1}(t))$ se tiene que

$$\beta'' = (|\beta'|)'T_\alpha \circ h^{-1} + |\beta'|^2 (T'_\alpha \circ h^{-1})$$

y además $N_\alpha \circ h^{-1} = \mathcal{J}T_\beta = \frac{\mathcal{J}\beta'}{|\beta'|}$ se sigue que

$$\frac{\langle \beta'', \mathcal{J}\beta'\rangle}{|\beta'|} = \left\langle (|\beta'|)'T_\alpha \circ h^{-1} + |\beta'|^2 (T'_\alpha \circ h^{-1}), N_\alpha \circ h^{-1}\right\rangle = |\beta'|^2 \left\langle T'_\alpha \circ h^{-1}, N_\alpha \circ h^{-1}\right\rangle = |\beta'|^2 K_\alpha \circ h^{-1}$$

Concluimos que $K_\beta = \frac{\langle \beta'', \mathcal{J}\beta'\rangle}{|\beta'|^3}$.

Proposición 1.2. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular, entonces*

a) Si $\phi : \widetilde{I} \to I$ es un difeomorfismo entonces $K_{\alpha\circ\phi} = sgn(\phi')K_\alpha \circ \phi$.

b) Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un movimiento rigido, entonces $K_{F\circ\alpha} = (detDF)K_\alpha$.

Demostración. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular*

a) Como $(\alpha \circ \phi)'(t) = \phi'(t)\alpha'(\phi(t))$, se sigue que $|(\alpha \circ \phi)'(t)| = |\phi'(t)|\, |\alpha'(\phi(t))|$, escrito de otro modo

$$|(\alpha \circ \phi)| = sgn(\phi') \cdot \phi' \, |\alpha' \circ \phi|$$

Luego

$$\begin{aligned} K_{\alpha\circ\phi} &= \frac{\langle (\alpha\circ\phi)'', \mathcal{J}(\alpha\circ\phi)'\rangle}{|(\alpha\circ\phi)'|^3} = \frac{\left\langle \phi''(\alpha'\circ\phi) + (\phi')^2\alpha''\circ\phi, \phi'\mathcal{J}(\alpha'\circ\phi)\right\rangle}{sgn(\phi')(\phi')^3\,|\alpha'\circ\phi|^3} \\ &= \frac{(\phi')^3\,\langle \alpha''\circ\phi, \mathcal{J}\alpha'\circ\phi\rangle}{(\phi')^3\,|\alpha'\circ\phi|^3} sgn(\phi') = sgn(\phi')K_\alpha\circ\phi \end{aligned}$$

b) Sabemos que $F(p) = Ap + p_0$, entonces $DF = A$. Luego,

$$\begin{aligned} \langle (F\circ\alpha)'', \mathcal{J}(F\circ\alpha)'\rangle &= \langle (DF(\alpha)\alpha')', \mathcal{J}(DF(\alpha)\alpha')\rangle = \langle (A\alpha')', \mathcal{J}(A\alpha')\rangle \\ &= \langle A\alpha'', (detA)A\mathcal{J}\alpha'\rangle = detA\,\langle \alpha'', \mathcal{J}\alpha'\rangle \end{aligned}$$

Además $|(F\circ\alpha)'| = |A\alpha'| = |\alpha'|$. Juntando lo anterior vemos que

$$K_{F\circ\alpha} = \frac{\langle (F\circ\alpha)'', \mathcal{J}(F\circ\alpha)'\rangle}{|(F\circ\alpha)'|^3} = detA\cdot K_\alpha$$

Proposición 1.3. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por el arco. Supongamos que existe una función diferenciable $\theta : I \to \mathbb{R}$ tal que $T(s) = (cos(\theta(s)), sen(\theta(s)))$. Entonces $K_\alpha = \frac{d\theta}{ds}$.*

Demostración. *Recordemos que*

$$K_\alpha = \langle T_\alpha', \mathcal{J}T_\alpha\rangle = \left\langle \left(-\frac{d\theta}{ds}sen\theta, \frac{d\theta}{ds}cos\theta\right), (-sen\theta, cos\theta)\right\rangle = \frac{d\theta}{ds}\,|(-sen\theta, cos\theta)|^2 = \frac{d\theta}{ds}$$

Teorema 2. *Sea $K : I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces existe una unica curva parametrizada por el arco $\alpha : I \to \mathbb{R}$, salvo por movimientos rigidos, tal que $K_\alpha = K$.*

1.4. Teoría Local de Curvas en el Espacio

Definición 2.1. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco. La curvatura de α en $s \in I$ es*

$$K_\alpha := |T'(s)|$$

Observación: Para curvas en $\mathbb{R}^3$, $K_\alpha \geq 0$. Además, $K_\alpha \equiv 0$ si y solo si α es un segmento de recta.

Definición 2.2. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco, tal que $K_\alpha > 0$. Definimos*

$$N(s) := \frac{T'(s)}{|T'(s)|}$$

Observación: Como $T(s) \perp T'(s)$, pues $|T| = 1$, está definición se condice con el caso en $\mathbb{R}^2$, además de manera directa, obtenemos que $K_\alpha N(s) = T(s)$.

Definición 2.3. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco. Definimos el vector binormal de α en $s \in I$ por*

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

Observación: Por definición del producto cruz el conjunto $\{T, N, B\}$ es una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$ para todo $s \in I$ llamada el tiedro de Frenet de α en $s \in I$.

Notemos que $B'(s) = \frac{d}{ds}(T(s)\times N(s)) = T'(s)\times N(s) + T(s)\times N'(s) = T(s)\times N'(s)$. Además, $|B| = |T|\,|N| = 1$ y por lo tanto $B' \perp B$, por otro lado $\langle B', T\rangle = \langle T\times N', T\rangle = 0$, osea $B' \perp T$. Por lo tanto, existe $\tau(s) \in I$ tal quiero

$$B'(s) = \tau(s)N(s)$$

Se dice que $\tau(s) =: \tau_\alpha(s)$ es la torsión de α en $s \in I$. Finalmente, como $N' \perp N$, tenemos que

$$N'(s) = aT(s) + bB(s)$$

donde

$$\begin{aligned} a\langle T,T\rangle &= \langle N',T\rangle = \langle N',T\rangle + \langle N,T'\rangle - \langle N,T'\rangle \\ &= \frac{d}{ds}\langle N,T\rangle - \langle N,T'\rangle = -\langle N,KN\rangle = -K \end{aligned}$$

y similarmente obtenemos que $b = \langle N',B\rangle = -\tau(s)$.

Proposición 2.1. *Ecuaciones de Frenet-Serret*

- $T'(s) = K(s)N(s)$
- $N'(s) = -K(s)T(s) - \tau(s)B(s)$
- $B'(s) = \tau(s)N(s)$

Ejemplos:

a) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco. Supongamos que $\alpha(I) \subseteq P$ con P un plano. Podemos describir el plano con la ecuación $\langle x - p_0, u\rangle = 0$, donde $p_0, u \in \mathbb{R}^3$ con u unitario y perpendicular al plano. Entonces $\langle \alpha(s) - p_0, u\rangle = 0$ para todo $s \in I$, derivando vemos que

$$\langle \alpha'(s), u\rangle = \langle T(s), u\rangle = 0 \quad \forall s \in I$$

En ese caso, $K(s)$ es el valor absoluto de la curvatura de α como una curva plana. Supongamos que $K(s) > 0$ para todo $s \in I$. Entonces

$$0 = \frac{d}{ds} = \langle T,u\rangle = \langle T',u\rangle = K(s)\langle N,u\rangle$$

lo que implica que $N \perp u$ para todo $s \in I$. Luego, $B(s) = \pm u$ para todo $s \in I$, se sigue que $\tau(s) = \langle B',N\rangle = 0$.

b) Supongamos que α es una curva parametrizada por el arco tal que $\tau_\alpha \equiv 0$, entonces $B' = \tau \cdot N = 0$ para todo $s \in I$ y por lo tanto $B = u$, con $u \in \mathbb{R}^3$ y $|u| = 1$, así $T \times N = u$ para todo $s \in I$.

Ahora, usando las ecuaciones de frenet vemos que $T \perp u$ y $N \perp u$ para todo $s \in I$ y concluimos que

$$\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), u\rangle = \left\langle \int_{s_0}^{s} T(x)dx, u \right\rangle = \int_{s_0}^{s} \langle T(x), u\rangle\, dx = 0 \quad \forall s \in I$$

Proposición 2.2. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco, $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineal, ortogonal y positiva. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $F(p) = Ap + p_0$. Entonces*

$$\begin{aligned} &K_{F\circ\alpha} = K_\alpha \quad , \quad \tau_{F\circ\alpha} = \tau_\alpha \\ &T_{F\circ\alpha} = AT_\alpha \quad , \quad N_{F\circ\alpha} = AN_\alpha \quad , \quad B_{F\circ\alpha} = AB_\alpha \end{aligned}$$

Podemos extender las definiciones de curvatura, torsión y del tiedro de frenet para curvas regulares $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ por

$$K_\beta(t) := K_\alpha(h^{-1}(t))$$

donde $\alpha = \beta \circ h$ es una parametrización por el arco, con h difeomorfismo, $h' > 0$ y $K_\beta > 0$. Se cumple lo siguiente

- $T_\beta(t) = T_\alpha(h^{-1}(t))$
- $N_\beta(t) = N_\alpha(h^{-1}(t))$
- $B_\beta(t) = B_\alpha(h^{-1}(t))$

- $\tau_\beta(t) = \tau_\alpha(h^{-1}(t))$

Proposición 2.3. *Sea $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular, entonces*

a) $K_\beta = \dfrac{|\beta' \times \beta''|}{|\beta'|^3}$

b) $\tau_\beta = \dfrac{-det(\beta', \beta'', \beta''')}{|\beta' \times \beta''|^2} = -\dfrac{\langle \beta', \beta'' \times \beta''' \rangle}{|\beta' \times \beta''|^2}$

c) $T_\beta = \dfrac{\beta'}{|\beta'|}$

d) $B_\beta = \dfrac{\beta' \times \beta''}{|\beta' \times \beta''|}$

e) $N_\beta = \dfrac{|\beta'|^2 \beta'' - \langle \beta', \beta'' \rangle \beta'}{\left| |\beta'|^2 \beta'' - \langle \beta', \beta'' \rangle \beta' \right|}$

Teorema 3. *(Teorema Fundamental de las curvas en el Espacio)*
Sea $K, \tau : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables con $K(s) > 0$ para todo $s \in I$. Entonces existe $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco tal que

$$K_\alpha = K \quad y \quad \tau_\alpha = \tau$$

Además, si $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ es parametrizada por el arco tal que $K_\beta = K$ y $\tau_\beta = \tau$. Entonces existe un movimiento rigido $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F \circ \beta = \alpha$.

Demostración. *El sistema*

$$(FS) : \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad y \quad A(s) = \begin{pmatrix} 0 & K(s) & 0 \\ -K(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

para cada $\{T_0, N_0, B_0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ y $s_0 \in I$, existe una única solución del sistema, $\{T, N, B\}$, definida en I tal que $T(s_0) = T_0$, $N(s_0) = N_0$ y $B(s_0) = B_0$. Veamos que $\{T, N, B\}$ son ortonormales para cada $s \in I$. Sea $\{T_0, N_0, B_0\}$ una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$. Consideremos la función

$$M(s) = \begin{pmatrix} \langle T, T \rangle & \langle T, N \rangle & \langle T, B \rangle \\ \langle N, T \rangle & \langle N, N \rangle & \langle N, B \rangle \\ \langle B, T \rangle & \langle B, N \rangle & \langle B, B \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} M'(s) &= \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}'^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}' \\ &= A \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} A^T \\ &= AM - MA \end{aligned}$$

La matriz $M_0(s) = I_3$ con $s \in I$ es solución del sistema, además $M_0(s_0) = I_3 = M(s_0)$ (pues T_0, N_0, B_0 son ortonormales). Por unicidad de la solución $M(s) \equiv I_3$ para todo $s \in I$.

La matriz $(T\ N\ B)$ tiene determinante 1 o -1. Como I es conexo y el determinante una función continua, entonces es constante. Como vale 1 en $s = s_0$ pues $\{T_0, N_0, B_0\}$ es base positiva, vale 1 sobre I.

Definimos $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ por

$$\alpha(x) = \int_{s_0}^{s} T(x) dx$$

Por TFC, $\alpha'(s) = T(s)$ unitario, luego α es una curva parametrizada por el arco. Además

$$K_\alpha(s) = |T'(s)| = |K(s) N(s)| = K(s) \, |N(s)| = K(s) \quad \forall s \in I$$

De ahí,

$$N_\alpha(s) = \frac{T'_\alpha(s)}{|T'_\alpha(s)|} = \frac{T'(s)}{|T'(s)|} = \frac{K(s)N(s)}{|K(s)N(s)|} = N(s)$$

y $B_\alpha(s) = T_\alpha(s) \times N_\alpha(s) = T(s) \times N(s) = B(s)$, *ya que* $T(s), N(s), B(s)$ *es base ortonormal positiva. Por tanto,*

$$\tau_\alpha = \langle B'_\alpha(s), N_\alpha(s) \rangle = \langle B'(s), N(s) \rangle = \langle \tau N, N \rangle = \tau(s)$$

Sea $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *ortogonal tal que*

$$\begin{aligned} AT_\beta(s_0) &= T_\alpha(s_0) \\ AN_\beta(s_0) &= N_\alpha(s_0) \\ AB_\beta(s_0) &= B_\alpha(s_0) \end{aligned}$$

y $p_0 = \alpha(s_0) - A\beta(s_0)$. *Luego,* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *con* $F(p) = Ap + p_0$. *Defina* $\gamma = F \circ \beta : I \to \mathbb{R}^3$. *Queremos ver que* $\gamma \equiv \alpha$. *Como* F *es movimiento rigido* α *y* γ *tienen curvatura* K *y torsión* τ *y tiedro*

$$\begin{aligned} T_\gamma &= T_{F\circ\beta} = AT_\beta \\ N_\gamma &= N_{F\circ\beta} = AN_\beta \\ B_\gamma &= B_{F\circ\beta} = AB_\beta \end{aligned}$$

Luego $f(s) = |T_\gamma(s) - T_\alpha(s)|^2 + |N_\gamma(s) - N_\alpha(s)|^2 + |B_\gamma(s) - B_\alpha(s)|^2$ *vale* 0 *en* $s = s_0$. *Por otro lado*

$$f'(s) = 2\left\langle T_\gamma - T_\alpha, T'_\gamma - T'_\alpha \right\rangle + 2\left\langle N_\gamma - N_\alpha, N'_\gamma - N'_\alpha \right\rangle + 2\left\langle B_\gamma - B_\alpha, B'_\gamma - B'_\alpha \right\rangle = 0 \quad \forall s \in I$$

por lo tanto f *es constante y por lo mencionado* $f \equiv 0$. *De este modo,* $\gamma' = T_\gamma \equiv T_\alpha = \alpha'$. *Como*

$$\gamma(s_0) = F(\beta s_0) = A\beta(s_0) + p_0 = \alpha(s_0)$$

concluimos que $\gamma \equiv \alpha$.

2. Superficies Regulares

2.1. Definición y ejemplos

Definición 3.1. *Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, decimos que Σ es una superficie regular si para todo $p \in \Sigma$ existe un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^3$ con $p \in V$ y una función diferenciable*

$$\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

tal que

- $\varphi(\mathcal{V}) = V \cap \Sigma$
- *φ es homeomorfismo de $\mathcal{V}$ sobre $V \cap \Sigma$*
- *$D\varphi(q) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva, es decir, si $\varphi = \varphi(u, v)$, entonces*

$$D\varphi(q) \cdot e_1 = \frac{d}{dt}\varphi(q + te_1)\big|_{t=0} = \varphi_u(q)$$
$$D\varphi(q) \cdot e_2 = \frac{d}{dt}\varphi(q + te_2)\big|_{t=0} = \varphi_v(q)$$

  son linealmente independientes, en otras palabras $\varphi_u(q) \times \varphi_v(q) \neq 0$. Decimos que φ es una parametrización local para Σ

Ejemplos:

- Sea $f : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, consideramos $\Sigma := \{(x, y, (f(x, y))) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{V}\}$ Tomamos $V = \mathbb{R}^3$, definimos la función $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$, entonces

  a) $\varphi(\mathcal{V}) = \Sigma = \Sigma \cap V$.
  b) φ tiene inversa, a saber, $\varphi^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ que es la restricción de una función continua, luego φ^{-1} es continua.
  c) $\varphi_u(u, v) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\right)$ y $\varphi_v(u, v) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right)$ son linealmente independientes.

  Por lo tanto, φ es una parametrización local con $\varphi(\mathcal{V}) = \Sigma$

- Veamos la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$. Si $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$, entonces $x \neq 0$ o $y \neq 0$ o $z \neq 0$. Consideramos

$$\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^2 \cap \left(V_1^+ \cup V_2^+ \cup V_3^+ \cup V_1^- \cup V_2^- \cup V_3^-\right)$$

  donde $V_i^\pm := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \pm x_i > 0\}$. Definimos la función $\varphi_1^\pm : B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi_1^\pm(u, v) := (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v)$$

  luego, $\varphi_1^\pm(B_1(0)) = V_1^\pm \cap \mathbb{S}^2$, $(\varphi_1^\pm)^{-1} : V_1^\pm \cap \mathbb{S}^2 \to B_1(0)$ que manda (x, y, z) en (y, z) es continua y además $(\varphi_1^\pm)_u^{-1}(q)$ y $(\varphi_1^\pm)_v^{-1}(q)$ son linealmente independientes para todo $q \in B_1(0)$. Un argumento similar se utiliza para $V_2^\pm$ y $V_3^\pm$.

Definición 3.2. *Una superficie parametrizada diferenciable es una aplicación diferenciable $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $\mathcal{V}$ abierto. Se dice que φ es regular si $D\varphi(q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es inyectiva para todo $q \in \mathcal{V}$.*

Ejemplos:

- Toda parametrización local de una superficie regular es una superficie parametrizada regular.
- Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada diferenciable. Definimos $\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ por $\varphi(u, v) = (\alpha(u), v)$. Esta superficie parametrizada diferenciable se llama cilindro sobre α.

  Como $\varphi_u(u, v) = (\alpha'(u), 0)$ y $\varphi_v(u, v) = (0, 0, 1)$ son linealmente independientes si y solo si $\alpha' \not\equiv 0$, es decir, φ es regular si y solo si α es una curva regular.

- Si $I = \mathbb{R}$ y existe $T \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(t + T) = \alpha(t)$ entonces $\varphi(I \times \mathbb{R}) = \alpha(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ es una superficie regular.
- Si α es inyectiva y para todo $t \in I$ existen abiertos $V \subseteq \mathbb{R}^2$ y $J \subseteq I$ con $t \in J$ tales que $\alpha(I) \cap V = \alpha(J)$ entonces $\varphi(I \times \mathbb{R})$ es una superficie regular.

Teorema 4. *(Teorema de la Función Implicita) Sea $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua diferenciable, $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in W$ tal que $\frac{\partial h}{\partial z}(p_0) \neq 0$. Entonces existen abiertos $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f : \mathcal{V} \to I$ continua diferenciable tales que*

- *El punto $p_0 \in \mathcal{V} \times I$*
- *Se tiene la igualdad de conjuntos $h^{-1}(h_{p_0}) \cap (\mathcal{V} \times I) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathcal{V}\}$*

Además se tiene que

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{-\frac{\partial h}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$$
- $$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{\partial h}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{-\frac{\partial h}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$$

Si h es suave entonces f también lo es.

Definición 4.1. *Sea $F : W \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable. Se dice que $q \in \mathbb{R}^m$ es un valor regular para F, si $F^{-1}(q) = \emptyset$ o si para todo $p \in F^{-1}(q)$ se tiene que $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es sobreyectiva.*

Por ejemplo si $h : W \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entonces $Dh(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Dh(p)e_i &= \frac{d}{dt} h(p + te_i)\big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} h(p_1, \cdots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \cdots, p_n)\big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial h}{\partial x_i}(p) \end{aligned}$$

Luego $q \in \mathbb{R}$ es valor regular par a h si y solo si para todo $p \in h^{-1}(q)$, $\frac{\partial h}{\partial x_i}(p) \neq 0$ para algún i, o sea, $\nabla h(p) \neq 0$ para todo $p \in h^{-1}(q)$.

Teorema 5. *Sea $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $c \in \mathbb{R}$ es un valor regular para h, entonces $h^{-1}(c)$ es una superficie regular.*

Demostración. *Si c es valor regular, entonces para todo $p \in h^{-1}(c)$ se sigue que $\nabla h(p) \neq 0$, es decir,*

$$\frac{\partial h}{\partial x}(p) \neq 0 \quad ó \quad \frac{\partial h}{\partial y}(p) \neq 0 \quad ó \quad \frac{\partial h}{\partial z}(p) \neq 0$$

Supongamos sin perdida de generalidad que $\frac{\partial h}{\partial z} \neq 0$. Por teo de la función Implicita, existen abiertos $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función suave $f : \mathcal{V} \to I$ tales que $p \in \mathcal{V} \times I$ y $h^{-1}(c) \cap (\mathcal{V} \times I) = Graf(f)$.

Por lo visto al inicio de la sección, existe parametrización local $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$ con $\varphi(\mathcal{V}) = h^{-1}(c) \cap (\mathcal{V} \times I)$.

2.2. Cambio de Coordenadas

Lema 5.1. *Sea $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie parametrizada regular*

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Entonces para todo punto $(u_0, v_0) \in \mathcal{V}$ se tiene que $D(\pi \circ \varphi)(u_0, v_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un isomorfismo lineal, donde $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una de las proyecciones a los planos xy, xz o yz.

Consecuentemente existe $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$ abierto con $(u_0, v_0) \in \mathcal{V}_0$ tal que $\pi \circ \varphi(\mathcal{V}_0) = W_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto y $\pi \circ \varphi\big|_{\mathcal{V}_0} : \mathcal{V}_0 \to W_0$ es un difeomorfismo.

Demostración. *La matriz* $D\varphi(u_0, v_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *es*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} (u_0, v_0)$$

Como la superficie es regular, las columnas son linealmente independientes. Luego la matriz tiene una submatriz 2×2 *invertible. Pero estas submatrices son las matrices de*

$$D(\pi \circ \varphi)(u_0, v_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

La última parte es consecuencia directa del teorema de la función inversa.

Observación: La función $\psi = \varphi \circ (\pi \circ \varphi)^{-1} : W_0 \to \mathbb{R}^3$ es también una superficie parametrizada regular con

$$\psi(W_0) = \varphi((\pi \circ \varphi)^{-1}(W_0)) = \varphi(\mathcal{V}_0)$$

Además, $\pi \circ \psi = id_{W_0}$, osea, ψ es la grafica de una función $f : W_0 \to \mathbb{R}$ diferenciable.

Corolario 5.1. *Si* $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ *es una superficie regular, entonces para todo* $p \in \Sigma$ *existe parametrización local cuya imagen contiene a* p *y que es grafica.*

Teorema 6. *Si* $\varphi_i : \mathcal{V}_i \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ *son parametrizaciones locales de* Σ *con* $U := \varphi_1(\mathcal{V}_1) \cap \varphi_2(\mathcal{V}_2) \neq \emptyset$. *Entonces la aplicación*

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \varphi_2^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^2$$

es un difeomorfismo. Se dice que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ *es un cambio de coordenadas.*

Demostración. *Como* φ_i *son homeomorfismos, basta demostrar que* $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ *es diferenciable en cada* $p_1 \in \varphi_1^{-1}(U)$. *Sean*

$$q = \varphi_1(p_1) \quad y \quad p_2 = \varphi_2^{-1}(q) = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(p_1))$$

Por el lema, existe proyección $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *y un abierto* $V_2 \subseteq \varphi_2^{-1}(U)$ *con* $p_2 \in V_2$ *tal que*

$$\pi \circ \varphi_2 : V_2 \to \pi(\varphi_2(V_2)) =: W \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ un abierto}$$

es un difeomorfismo. Sea $V_1 := (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)^{-1}(V_2) = \varphi_1^{-1}(\varphi_2(V_2))$, *entonces*

- $p_1 \in V_1$ *pues* $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(p_1) = \varphi_2^{-1}(q) = p_2 \in V_2$.
- *Si* $p \in V_1$ *entonces* $\varphi_1(p) \in \varphi_2(V_2)$ *y por ende* $\pi \circ \varphi_1(p) \in \pi \circ \varphi_2(V_2) = W$
- V_1 *es abierto*

Por lo tanto esta bien definida la función $(\pi \circ \varphi_2)^{-1} \circ \pi \circ \varphi_1 : V_1 \to \mathcal{V}_2$. *La cual cumple que* $(\pi \circ \varphi_2)^{-1} \circ \pi \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ *en su dominio. Como* $(\pi \circ \varphi_2)^{-1}$ *y* $(\pi \circ \varphi_1)$ *son diferenciables,* $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ *es diferenciable en* $p_1 \in V_1$.

2.3. Aplicaiones Diferenciables

Definición 6.1. *Se dice que* $f : \Sigma \to \mathbb{R}^d$ *es diferenciable en* $p \in \Sigma$ *si existe una parametrización local* $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ *con* $p \in \varphi(\mathcal{V})$ *y tal que* $f \circ \varphi$ *es diferenciable en* $\varphi^{-1}(p) \in \mathcal{V}$.

Definición 6.2. *Se dice que*

$$\gamma : V \subseteq \mathbb{R}^d \to \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$$

con Σ *una superficie parametrizada regular, es diferenciable en* $q \in V$. *Si existe una parametrización local* $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ *con* $\gamma(q) \in \varphi(\mathcal{V})$ *tal que*

$$\varphi^{-1} \circ \gamma : \gamma^{-1}(\varphi(\mathcal{V})) \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^2$$

es diferenciable en $q \in \gamma^{-1}(\varphi(\mathcal{V}))$.

Observación:

a) La definición de diferenciabilidad de $f : \Sigma \to \mathbb{R}^d$ no depende de la parametrización

$$f \circ \widetilde{\varphi} = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi})$$

entonces $f \circ \widetilde{\varphi}$ es diferenciable si y solo si $f \circ \varphi$ es diferenciable.

b) Esta noción de diferenciabilidad es local, es decir, si $p \in U \subseteq \Sigma$, con U abierto, entonces f es diferenciable si y solo si $f\big|_U : U \to \mathbb{R}^d$ es diferenciable en p.

c) Si $f : \Sigma \to \mathbb{R}^d$ es diferenciable entonces f es continua, en efecto

$$f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$$

es composición de mapeos continuos.

d) Observaciones análogas se cumplen para $\gamma : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$.

Ejemplos:

- Si $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ es una parametrización local, entonces φ y φ^{-1} son diferenciables y $\varphi^{-1} \circ \varphi$ es la identidad.
- Si $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable con W abierto y si $\Sigma \subseteq W$ es una superficie parametrizada regular, entonces $h\big|_\Sigma : \Sigma \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Para toda parametrización local $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ tenemos que $h\big|_\Sigma$ es la composición de φ y h.
- Función altura, $h : \Sigma \to \mathbb{R}$ dada por $h(p) = \langle u, p - p_0 \rangle$. Esta función mide la altura del punto $p_0\Sigma$ al plano $p_0 + u^\perp$, donde $|u| = 1$.
- El cuadrado de la distancia a un $p_0 \in \mathbb{R}^3$. Es decir, $f\Sigma \to \mathbb{R}$ dada por $|p - p_0|^2$. Si $p_0 \notin \Sigma$ entonces $|p - p_0|$ también es diferenciable.

Lema 6.1.

a) Sean $\gamma : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^d \to \Sigma$ y $f : \Sigma \to \mathbb{R}^m$ tales que γ es diferenciable en q y f es diferenciable en $\gamma(q)$ entonces $f \circ \gamma$ es diferenciable en q.

b) Sean $f : \Sigma \to \mathbb{R}^m$ y $\phi : W \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ con $f(\Sigma) \subseteq W$ tales que f es diferenciable en p y ϕ es diferenciable en $\phi \circ f$ es diferenciable en p.

Demostración.

a) Sea $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización local con $\gamma(q) \in \varphi(\mathcal{V})$. Entonces $\varphi \circ \gamma$ es diferenciable en q y $f \circ \varphi$ es diferenciable en $\varphi^{-1}(\gamma(q))$. Luego

$$f \circ \gamma = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \gamma)$$

es diferenciable en q por ser composición de funciones diferenciables.

b) Sea $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización local de $p \in \varphi(\mathcal{V})$, entonces $f \circ \varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\varphi^{-1}(p)$. Además $f \circ \varphi(\mathcal{V}) \subseteq f(\Sigma) \subseteq W$ y ϕ es diferenciable en $f \circ \varphi(\varphi^{-1}(p)) = f(p)$. Luego

$$(\phi \circ f) \circ \varphi = \phi \circ (f \circ \varphi)$$

es diferenciable en φ^{-1}. Por lo tanto, $\phi \circ f$ es diferenciable en $p \in \Sigma$.

Corolario 6.1. *Una aplicación $\gamma : V \subseteq \mathbb{R}^d \to \Sigma$ es diferenciable $q \in V$ si y solo si sus coordenadas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ son funciones diferenciables de V a $\mathbb{R}$ en q.*

Definición 6.3. *Sean Σ_1, Σ_2 superficies regulares. Se dice que*

$$F : \Sigma_1 \to \Sigma_2$$

es diferenciable en $p \in \Sigma_1$. Si existen parametrizaciones locales $\varphi_i : \mathcal{V}_i \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ para Σ_i con $p \in \varphi_1(\mathcal{V}_1)$ y $F(p) \in \varphi_2(\mathcal{V}_2)$ tales que

$$\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1 : (F \circ \varphi_1)^{-1}(\varphi(\mathcal{V}_2)) \to \mathcal{V}_2$$

es diferenciable en q.

Proposición 6.1. *Sea $F : \Sigma_1 \to \Sigma_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ y escribimos*

$$F(p) = (F_1(p), F_2(P), F_3(p))$$

donde $F_i : \Sigma \to \mathbb{R}$. Entonces F es diferenciable en $p \in \Sigma_1$ si y solo si F_i son diferenciables en $p \in \Sigma_1$.

Definición 6.4. *Se dice que $F : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ entre superficies regulares es un difeomorfismo si*

- *F es diferenciable, es decir, F es diferenciable para todo $p \in \Sigma_1$.*
- *F es una biyección y F^{-1} es diferenciable*

Teorema 7. *Sean $F : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ y $G : \Sigma_2 \to \Sigma_3$ aplicaciones diferenciables entre superficies regulares. Si F es diferenciable en $p \in \Sigma_1$ y G es diferenciable en $F(p) \in \Sigma_2$ entonces $G \circ F$ es diferenciable en $p \in \Sigma_1$.*

Demostración. *Escribimos $G(p) = (G_1(p), G_2(p), G_3(p))$ donde $G_i : \Sigma_2 \to \mathbb{R}$ son diferenciables en $F(p)$ por la proposición anterior. Por el lema anterior tenemos que $G_i \circ F : \Sigma_1 \to \mathbb{R}$ son diferenciables en $p \in \Sigma_1$. Como*

$$G \circ F(p) = (G_1 \circ F(p), G_2 \circ F(p), G_3 \circ F(p))$$

por la proposición anterior, $G \circ F$ es diferenciable en $p \in \Sigma_1$.

Del teorema anterior se sigue que Σ_1 es difeomorfo a Σ_2 define una relación de equivalencia entre superficies regulares. Notemos que

$$id_{\Sigma_1} : \Sigma_1 \to \Sigma_1$$

es un difeomorfismo. Si φ_1, φ_2 son parametrizaciones locales entonces $\varphi_2^{-1} \circ id_{\Sigma_1} \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ es un cambio de coordenadas.

Ejemplo: Consideremos las superficies regulares $\mathbb{S}^2$ y

$$\Sigma := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \right\}$$

Afirmamos que $\mathbb{S}^2$ y Σ son difeomorfas. En efecto, definimos $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $\phi(x, y, z) = (ax, by, cz)$ como ϕ es lineal e invertible ϕ y ϕ^{-1} son diferenciables y luego ϕ es un difeomorfismo. Además si $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ entonces

$$\phi(x, y, z) = (ax, by, cz) \in \Sigma$$

Por lo tanto $\phi(\mathbb{S}^2) \subseteq \Sigma$. similarmente $\phi^{-1}(\Sigma) \subseteq \mathbb{S}^2$. Claramente $\phi : \mathbb{S}^2 \to \Sigma$ es una biyección. Además como ϕ es diferenciable en todo punto

$$\phi\big|_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$$

es diferenciable. Por la proposición anterior tenemos que $\phi\big|_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \to \Sigma$ es diferenciable. similarmente para ϕ^{-1}.

La misma idea demuestra, en general, que si $\phi : U_1 \subseteq \mathbb{R}^3 \to U_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ es difeomorfismo entre abiertos y $\Sigma \subseteq U_1$ es una superficie regular, entonces

$$\phi\big|_{\Sigma} : \Sigma \to \phi(\Sigma)$$

donde $\phi(\Sigma)$ es una superficie regular, es un difeomorfismo entre superficies.

2.4. El Plano Tangente

Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in \Sigma$. Si $\varphi_i : \mathcal{V}_i \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ son parametrizaciones locales para Σ con $p \in \varphi_1(\mathcal{V}_1) \cap \varphi_2(\mathcal{V}_2)$. Vimos que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^2$.

Luego, $D(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(\varphi_1^{-1}(p))$ es un isomorfismo lineal. De ahí,

$$D\varphi_1(\varphi_1^{-1}(p))(\mathbb{R}^2) = D(\varphi_2 \circ (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1))(\mathbb{R}^2) = D\varphi_2(\varphi_2^{-1}(p)) \circ D(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(\varphi_1^{-1}(p))(\mathbb{R}^2) = D\varphi_2(\varphi_2^{-1}(p))$$

y cualquier parametrización local en p tiene derivada con la misma imagen en $\varphi^{-1}(p)$.

Definición 7.1. *El plano tangente a Σ en $p \in \Sigma$ es el subespacio vectorial*

$$D\varphi(\varphi^{-1}(p))(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$$

con φ una parametrización local en p. Lo denotaremos por $T_p\Sigma$.

Denotamos por $\varphi_u := D\varphi(\varphi^{-1}(p))e_1$ y $\varphi_v := D\varphi(\varphi^{-1}(p))e_2$.

Observación: Geometricamente $T_p\Sigma$ es un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $0 \in \mathbb{R}^3$.

Proposición 7.1. *Para $p \in \Sigma$ y $w \in \mathbb{R}^3$ tenemos que $w \in T_p\Sigma$ si y solo si existe una curva parametrizada diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que*

- $\alpha(0) = p$.
- $\alpha(t) \in \Sigma$ *para todo* $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
- $\alpha'(0) = w$.

Ejemplos:

- Consideremos un plano en $\mathbb{R}^3$, es decir, $P = q + span\{w_1, w_2\}$. Su parametrización local es $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(u, v) = q + uw_1 + vw_2$, luego

$$\varphi_u(u, v) = w_1$$
$$\varphi_v(u, v) = w_2$$

  es decir $T_{\varphi(u,v)}P = span\{w_1, w_2\}$.

- Sea $f : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Tomemos $Graf(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2\}$. Su parametrización local es $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$, entonces

$$\varphi_u(u, v) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right)$$
$$\varphi_v(u, v) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

  se sigue que $T_{\varphi(u,v)}Graf(f) = \left\{(a, b, a\frac{\partial f}{\partial u} + b\frac{\partial f}{\partial v}) : a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

Demostración. *Sea $p \in \Sigma$, $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización local en p y $p_0 = \varphi^{-1}(p)$.*

- $\Rightarrow$ | *Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que*

$$w = D\varphi(p_0)(a, b) = a\varphi_u(p_0) + b\varphi_v(p_0)$$

Como $p_0 \in \mathcal{V}$ y $\mathcal{V}$ es abierto, tenemos que $p_0 + t(a, b) \in \mathcal{V}$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Definimos

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3 \quad \textit{por} \quad \alpha(t) = \varphi(p_0 + t(a, b))$$

entonces α es diferenciable y $\alpha((-\varepsilon,\varepsilon)) \subseteq \Sigma$. Por otro lado $\alpha(0) = \varphi(p_0) = p$ y

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(p_0 + t(a,b)) \\ &= D\varphi(p_0)\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(p_0 + t(a,b))\right) = D\varphi(p_0)(a,b) \\ &= w \end{aligned}$$

- $\Leftarrow$ | *Como $\alpha(0) = p \in \varphi(\mathcal{V})$ y $\varphi(\mathcal{V})$ es abierto en Σ, tenemos que $\alpha(t) \in \varphi(\mathcal{V})$ para t suficientemente pequeño. Luego, esta bien definida*

$$\alpha_0 := \varphi^{-1} \circ \alpha$$

y es una curva diferenciable en $\mathcal{V}$. Sea $(a,b) = \alpha_0'(0) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$D\varphi(p_0)(a,b) = D\varphi(\alpha_0(0))\alpha_0'(0) = (\varphi \circ \alpha_0)'(0) = \alpha'(0) = w$$

Ejemplo: Sea $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable y $c \in \mathbb{R}$ un valor regular para h. Vimos que $h^{-1}(c) = \Sigma$ es una superficie regular. Sea $p \in \Sigma$, y $w \in T_p\Sigma$, existe α curva diferenciable tal que $\alpha'(0) = w$, $\alpha(0) = p$ y $\alpha(t) \in \Sigma$ para todo $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Veamos que $h \circ \alpha \equiv c$. Entonces

$$0 = (h \circ \alpha)'(0) = Dh(\alpha(0))\alpha'(0) = Dh(p)w$$

luego $T_p\Sigma \subseteq ker(Dh(p)) = (\nabla h(p))^{\perp}$. Por lo tanto $T_p\Sigma = (\nabla h(p))^{\perp}$. Hemos concluido que el gradiente de la función es perpendicular al plano tangente $T_p\Sigma$.

Por ejemplo $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ entonces $\nabla h = (2x, 2y, 2z)$, es decir, $\nabla h = 2p$ para todo $p \in \mathbb{R}^3$. Como $\mathbb{S}^2 = h^{-1}(1)$ tenemos $T_p\mathbb{S}^2 = (\nabla h(p))^{\perp} = p^{\perp}$

Definición 7.2. *Sea $f : \Sigma \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $p \in \Sigma$. Definimos la derivada o diferencial de f en $p \in \Sigma$ se define por*

$$\begin{aligned} &Df_p : T_p\Sigma \to \mathbb{R}^m \\ &w = \alpha'(0) \to (f \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Proposición 7.2. *La derivada de una función diferenciable no depende de la elección de la curva y es lineal.*

Demostración. *Sea $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrización local para Σ con $p \in \varphi(\mathcal{V})$. Escriba $p_0 = \varphi^{-1}(p) \in \mathcal{V}$. Sea $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable, con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w \in T_p\Sigma$ y $\alpha(t) \in \varphi(\mathcal{V})$ para todo $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Definimos $\alpha_0 = \varphi^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathcal{V}$ es una curva parametrizada diferenciable con $\alpha_0(0) = \varphi^{-1}(\alpha(0)) = p_0$.*

Notemos que $w = D\varphi(p_0)(\alpha_0'(0))$. Luego

$$\begin{aligned} Df_p(w) = (f \circ \alpha)'(0) &= (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \alpha)'(0) = ((f \circ \varphi) \circ \alpha_0)'(0) \\ &= D(f \circ \varphi)(\alpha_0(0))\alpha_0'(0) \\ &= D(f \circ \varphi)(p_0) \circ (D\varphi)^{-1}(p_0)w \end{aligned}$$

para todo $w \in T_p\Sigma$. Es decir,

$$Df_p = D(f \circ \varphi)(p_0) \circ (D\varphi)^{-1}(p_0)$$

entonces, Df_p es lineal y no depende de α.

Ejemplos:

- Sea $f : \Sigma \to \mathbb{R}^m$ dada por $f \equiv c$. Para todo $p \in \Sigma$ y todo $w \in T_p\Sigma$, $w = \alpha'(0)$, luego

$$Df_p(w) = (f \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ \alpha)(t) = 0$$

- Sea $i_\Sigma : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ la inclusión, es decir, $i_\Sigma(p) = p$. Para $p \in \Sigma$ con $w = \alpha'(0) \in T_p\Sigma$ tenemos que

$$D(i_\Sigma)_p w = (i_\Sigma \circ \alpha)'(0) = \alpha'(0) = w$$

- Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, entonces $F\big|_{\Sigma} =: f$ es diferenciable. Además, si $p \in \Sigma$, $w = \alpha'(0) \in T_p\Sigma$ se sigue que
$$Df_p(w) = (f \circ \alpha)'(0) = (F \circ \alpha)'(0) = DF(\alpha(0))\alpha'(0) = DF(p)w$$
es decir, $Df_p = DF(p)\big|_{T_p\Sigma}$.
- Sea $h : \Sigma \to \mathbb{R}$ dada por $h(p) = \langle p - p_0, u\rangle$ con $p_0, u \in \mathbb{R}^3$ y $|u| = 1$, entonces $Dh_p w = \langle w, u\rangle$.
- Sea $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = |p - p_0|^2$, luego $Df_p w = 2\langle w, p - p_0\rangle$.
- Sea $\pi_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la proyección en la coordenada i-esima, entonces $D\left(\pi_i\big|_{\Sigma}\right) w = w_i$.