Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Mauricio Bustamante – Estudiante: Benjamín Mateluna

Topología Algebraica - MAT2850
Tarea 2
05 de septiembre de 2025

Problema 3

Por simplicidad en el argumento, denotaremos los morfismos $A_i \to A_{i+1}$ y $B_i \to B_{i+1}$ como ∂, además, como ambas secuencias son exactas, resulta que $\partial^2 a = \partial \circ \partial(a) = 0$. Veamos que $ker\ f_3 = 0$. Sea $a \in ker\ f_3$, notemos que

$$0 = \partial f_3(a) = f_4 \partial(a) = 0 \quad \text{entonces} \quad \partial a = 0$$

Como $a \in ker\ \partial$, existe $a' \in A_2$ tal que $\partial a' = a$, luego $\partial f_2(a') = f_3 \partial(a') = f_3(a) = 0$. Por exactitud, existe $b' \in B_1$ tal que $\partial b' = f_2(a')$, como f_1 es isomorfismo, existe $a'' \in A_1$ tal que $b' = f_1(a'')$, como los diagramas conmutan vemos que

$$a'' = f_1^{-1}(b') \quad \text{entonces} \quad \partial a'' = \partial f_1^{-1}(b') = f_2^{-1}\partial(b')$$

recordemos que $\partial b' = f_2(a')$, es decir, $\partial a'' = a'$, luego $0 = \partial^2 a'' = \partial a' = a$.

Sea $b \in B_3$, consideramos $\partial b \in B_4$, entonces $f_4^{-1}(\partial b) \in A_4$, por conmutatividad de los diagramas, vemos que $\partial f_4^{-1}(\partial b) = f_5^{-1}(\partial^2 b) = 0$, luego, por exactitud, existe $a \in A_3$ tal que $\partial a = f_4^{-1}(\partial b)$,

$$\partial(f_3(a) - b) = \partial f_3(a) - \partial b = f_4 \partial(a) - \partial b = 0$$

así, existe $b' \in B_2$ tal que $\partial b' = f_3(a) - b$, definimos $a' = f_2^{-1}(b') \in A_2$, de este modo,

$$f_3(a) - b = \partial b' = \partial f_2(a') = f_3(\partial a')$$

en resumen, $f_3(a - \partial a') = b$. Concluimos que f_3 es isomorfismo.

Problema 4

Asignamos el orden a los vértices tal que $i < i+1$.

(1) **Definición:** Notemos que el complejo simplicial es conexo, luego, el argumento presentado en el problema 5, es invariante del anillo utilizado, entonces $H_0(K) \cong R$ donde $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}$. Adicionalmente, $C_i = 0$ para $i > 2$, ya que no hay $i-$simplices. Basta calcular $H_i(K)$ para $i = 1, 2$. Tenemos el complejo de cadenas

$$0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

Para encontrar los grupos de homología basta calcular $ker\ \partial_2, im\ \partial_2$ y $\ker \partial_1$. A cada vértice en $C_0(K)$ le asignamos el vector canónico de la siguiente manera $i = e_{i+1}$, a cada $1-$simplice le asignamos un vector como sigue,

$$\begin{array}{llll}
\langle 0,1\rangle = e_1 & \langle 1,2\rangle = e_6 & \langle 2,3\rangle = e_{10} & \langle 3,4\rangle = e_{13} \\
\langle 0,2\rangle = e_2 & \langle 1,3\rangle = e_7 & \langle 2,4\rangle = e_{11} & \langle 3,5\rangle = e_{14} \\
\langle 0,3\rangle = e_3 & \langle 1,4\rangle = e_8 & \langle 2,5\rangle = e_{12} & \langle 4,5\rangle = e_{15} \\
\langle 0,4\rangle = e_4 & \langle 1,5\rangle = e_9 & & \\
\langle 0,5\rangle = e_5 & & &
\end{array}$$

Luego, la acción de ∂_1 esta representado por la matriz

$$\begin{pmatrix}
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

Sean c_i las columnas de la matriz, notemos que $c_i - c_1 = c_{i+4}$ para $1 < i < 6$, $c_i - c_6 = c_{i+3}$ para $6 < i < 10$, $c_i - c_{10} = c_{i+2}$ para $i = 11, 12$ y $c_{14} - c_{13} = c_{15}$. Lo anterior nos dice que las primeras cinco columnas generan la imagen de ∂_1, luego, el kernel tiene dimensión 10. Además, las relaciones nos dan los vectores que generan y tienen la forma $1, -1, -1$, no necesariamente juntos y el resto son ceros, se sigue que $ker\ \partial_1 \cong R^{10}$, donde $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}$.

Queda estudiar la acción de ∂_2.

Problema 5

Dado K un complejo simplicial finito, sean $v, w \in V_K$, decimos que $v \sim_p w$ si y solo si v esta conectado a w ó $v = w$, es decir, si existe una sucesión de $1-$simplices $\langle w_0, w_1 \rangle, \cdots, \langle w_{k-1}, w_k \rangle$ tales que $w_0 = v$ y $w_k = w$.

Por definición resulta que $x \sim_p x$, además, notemos que si $v \sim_p w$ entonces $w \sim_p v$ basta tomar $\omega_i := w_{k-i}$. Por otro lado, si $v \sim_p w$ y $w \sim_p u$, entonces la sucesión

$$\langle w_0, w_1 \rangle, \cdots, \langle w_{k-1}, w_k \rangle, \langle \omega_0, \omega_1 \rangle, \cdots, \langle \omega_{j-1}, \omega_j \rangle$$

donde $w_0 = v$, $w_k = w$, $\omega_0 = w$ y $\omega_j = u$ es una sucesión que conecta v con u, en otras palabras, $v \sim_p u$.

Definición (Componente Conexa): *Sea K un complejo simplicial finito y $v \in V_K$, definimos su componente conexa como*

$$[v]_c := \{\sigma \in K : \sigma = \langle v_0, v_1, \cdots, v_r \rangle \quad y \quad v \sim_p v_i\}$$

Observación: Si $[v]_c = K$, entonces el complejo simplicial es conexo. Sea $w \in V_K$ tal que $w \in [v]_c$, entonces $v \sim_p w$. Luego, dado $\sigma = \langle v_0, \cdots, v_r \rangle \in [w]_c$ se tiene que $v \sim_p v_i$, se sigue que $[w]_c \subseteq [v]_c$, de manera similar obtenemos que $[v]_c \subseteq [w]_c$. Por lo tanto $[w]_c = [v]_c$.

Veamos que dado $v \in V_K$, se tiene que $[v]_c$ es un subcomplejo simplicial de K. En efecto, sea $\sigma \in [v]_c$ y $\tau \leq \sigma$, si v_i es un vértice de τ entonces es vértice de σ, luego $v \sim_p v_i$, lo que implica que $\tau \in [v]_c$. La segunda propiedad se cumple trivialmente. Por lo tanto, una componente conexa es un subcomplejo simplicial conexo de K y la unión de dos componentes conexas también es subcomplejo simplicial, puesto que un simplice esta en una componente conexa o en la otra, pero no en ambas.

Como $\sim_p$ es una relación de equivalencia, particiona el conjunto de vértices, junto con lo anterior hemos probado que las componentes conexas particionan al complejo simplicial.

Debemos probar lo siguiente:

(1) **Si K es conexo, entonces $|K|$ arcoconexo**. Sean $x, y \in |K|$, existen $\sigma_x, \sigma_y \in K$ tales que $x \in \sigma_x$ e $y \in \sigma_y$, sean $v_x \in \sigma_x$ y $v_y \in \sigma_y$ vértices de K. Existe una sucesión

$$\langle w_0, w_1 \rangle, \cdots, \langle w_{k-1}, w_k \rangle$$

tal que $w_0 = v_x$ y $w_k = v_y$, consideramos la función $f_i : [0,1] \to |K|$ dada por $f_i(t) := (1-t)w_i + t w_{i+1}$ que esta bien definida por que $\langle w_i, w_{i+1} \rangle$ es convexo y es continua. Del mismo modo, como σ_x es convexo, la función $f_x : [0,1] \to |K|$ dada por $f_x(t) := (1-t)x + t v_x$ esta bien definida. De manera análoga definimos f_y, pero $f_y(0) = v_y$ y $f_y(1) = y$. Luego,

$$f := f \bullet f_0 \bullet f_1 \bullet \cdots \bullet f_{k-1} \bullet f_y$$

donde $\bullet$ es la operación de concatenación. Es una función continua, por lema del pegamiento, y tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

Concluimos que $|K|$ es arcoconexo.

(2) **Probar que $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^{\#\text{componentes conexas}}$**. Como K es finito, hay finitas componentes conexas, procederemos por inducción en el número de componentes conexas.

Supongamos que K tiene una componente conexa, entonces K es conexo. Dado $v \in V_K$, basta probar que $[v] = [w]$ en $H_0(K)$ para todo $w \in V_K$. Como K es conexo, existe una sucesión

$$\langle w_0, w_1 \rangle, \cdots, \langle w_{k-1}, w_k \rangle$$

tal que $w_0 = v$ y $w_k = w$, entonces

$$\partial \left(\sum_{i=0}^{k-1} \langle w_i, w_{i+1} \rangle \right) = \sum_{i=0}^{k-1} \partial \langle w_i, w_{i+1} \rangle = \sum_{i=0}^{k-1} w_{i+1} - w_i = w_k - w_0 = w - v$$

luego $w - v \in im\ \partial$. Entonces $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

Sea n el número de componentes conexas. Sean M_i las componentes conexas de K, consideramos los subcomplejos simpliciales

$$M = M_n \quad \text{y} \quad N = \bigcup_{i=1}^{n-1} M_i$$

Por Mayer-Vietoris, se tiene la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow H_0(M) \oplus H_0(N) \longrightarrow H_0(K) \longrightarrow 0$$

entonces

$$H_0(K) \cong H_0(M) \oplus H_0(N) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-1} \cong \mathbb{Z}^n$$