Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Pedro Gaspar – Estudiante: Benjamín Mateluna

Geomtría Diferencial - MAT2860
Tarea I3
26 de junio de 2025

Problema 1

Probaremos un resultado previo sobre transporte paralelo y curvas geodesicas en la esfera.

Lema 0.1. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{S}^2$ una curva de la forma $\alpha(t) = usen(t) + vcos(t)$ donde u, v son ortonormales, entonces $P_{\alpha,t_0,t_1}(w) = w + \langle w, \alpha'(t_0)\rangle (\alpha'(t_1) - \alpha'(t_0))$.*

Demostración. *Empezamos observando que α es una curva geodésica. Notemos que $\langle \alpha'(t), \alpha(t)\rangle = 0$ para todo $t \in I$ y además $\alpha'' = -\alpha$. Sea $w \in T_p\mathbb{S}^2$ donde $p = \alpha(t_0)$ y sea $Y : I \to \mathbb{S}^2$ el único campo paralelo a lo largo de α tal que $Y(t_0) = w$, como Y en particular es campo tangente se tiene que*

$$Y(t) \in T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^2 = (\alpha(t))^{\perp}$$

es decir, $\langle Y(t), \alpha(t)\rangle = 0$ para todo $t \in I$, lo que implica que $\langle Y, \alpha'\rangle = -\langle Y', \alpha\rangle$. Notemos que

$$0 = \nabla_{\alpha'} Y = Y' - \langle Y', \alpha\rangle \alpha$$

tomando producto interno con α' vemos que

$$\langle Y', \alpha'\rangle = \langle Y', \alpha\rangle \langle \alpha, \alpha'\rangle = 0$$

de este modo

$$\frac{d}{dt}(\langle Y, \alpha'\rangle) = \langle Y', \alpha'\rangle + \langle Y, \alpha''\rangle = -\langle Y, \alpha\rangle = 0$$

luego la función $\langle Y, \alpha'\rangle$ es constante, evaluando en t_0 vemos que $\langle Y', \alpha\rangle = -\langle Y, \alpha'\rangle \equiv -\langle w, \alpha'(t_0)\rangle$. Tenemos que

$$Y'(t) = \langle w, \alpha'(t_0)\rangle \alpha''(t)$$

integrando a ambos lados vemos que

$$Y(t) - Y(t_0) = Y(t) - w = \langle w, \alpha'(t_0)\rangle (\alpha'(t) - \alpha'(t_0))$$

lo que concluye la demostración.

a) Notemos que

$$\gamma_1(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} cos(s) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} sen(s) \quad \text{y} \quad \gamma_2(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} cos(s) + \begin{pmatrix} cos(\theta) \\ sen(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} sen(s)$$

además, los vectores que describen cada curva son ortonormales. Por otro lado se tiene que

$$\gamma_1'(s) = (cos(s), 0, sen(s)) \quad \text{y} \quad \gamma_2'(s) = (cos(\theta)cos(s), sen(\theta)cos(s), -sen(s))$$

Dado $w_0 \in T_{\gamma_1(0)}\mathbb{S}^2 = T_{\gamma_2(0)}\mathbb{S}^2$ entonces $w_0 = (x_0, y_0, 0)$, así, por el lema tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} w_1 = P_{\gamma_1,0,\pi}(w_0) &= w_0 + \langle w_0, \gamma_1'(0)\rangle (\gamma_1'(\pi) - \gamma_1'(0)) \\ &= w_0 + \left\langle w_0, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle \left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = w_0 + x_0\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_0\\y_0\\0\end{pmatrix} \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} w_2 = P_{\gamma_2,0,\pi}(w_0) &= w_0 + \langle w_0, \gamma_2'(0)\rangle (\gamma_2'(\pi) - \gamma_2'(0)) \\ &= w_0 + \left\langle w_0, \begin{pmatrix}cos(\theta)\\sen(\theta)\\0\end{pmatrix}\right\rangle \left(\begin{pmatrix}-cos(\theta)\\-sen(\theta)\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}cos(\theta)\\sen(\theta)\\0\end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix}x_0 - 2x_0cos^2(\theta) + y_0cos(\theta)sen(\theta)\\0\end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

Problema 2

El toro, puede ser parametrizado por $X : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = ((R + rcos(u))cos(v), (R + rcos(u))sen(v), rsen(u))$$

con derivadas parciales

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (-rsen(u)cos(v), -rsen(u)sen(v), rcos(u)) \\ X_v(u, v) &= (-(R + rcos(u))sen(v), (R + rcos(u))cos(v), 0) \end{aligned}$$

entonces el campo normal definido por la parametrización es

$$(X_u \times X_v)(u, v) = (-(R + rcos(u))rcos(u)cos(v), -(R + rcos(u))rcos(u)sen(v), -(R + rcos(u))rsen(v))$$

y además $|X_u \times X_v| = r(R+rcos(u))$. Sea $u_0 \in [0, 2\pi]$ tal que $rsen(u_0) = c$, que existe pues $c \in [-r, r]$. Consideramos $\eta := (R + rcos(u_0))$, definimos la curva p.p.a $\alpha : (0, 2\pi\eta) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) := X\left(u_0, \frac{t}{\eta}\right) = \left(\eta cos\left(\frac{t}{\eta}\right), \eta sen\left(\frac{t}{\eta}\right), rsen(u_0)\right)$$

entonces, suponiendo que la parametrización es positiva

$$(N \circ \alpha)(t) = (N^x \circ X^{-1} \circ \alpha)(t) = N^x\left(u_0, \frac{t}{\eta}\right) = \left(cos(u_0)cos\left(\frac{t}{\eta}\right), cos(u_0)sen\left(\frac{t}{\eta}\right), sen(u_0)\right)$$

Por otro lado vemos que

$$\alpha' = \left(-sen\left(\frac{t}{\eta}\right), cos\left(\frac{t}{\eta}\right), 0\right) \quad \text{y entonces} \quad \alpha''(t) = -\frac{1}{\eta}\left(cos\left(\frac{t}{\eta}\right), sen\left(\frac{t}{\eta}\right), 0\right)$$

Nuestro objetivo ahora es determinar $\nabla_{\alpha'}\alpha'(t)$, para ello observemos que

$$\langle \alpha'', N \circ \alpha\rangle = \frac{1}{\eta}\begin{pmatrix}cos(t/\eta)\\sen(t/\eta)\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}cos(u_0)cos(t/\eta)\\cos(u_0)sen(t/\eta)\\sen(u_0)\end{pmatrix} = \frac{cos(u_0)}{\eta}$$

de este modo

$$\nabla_{\alpha'}\alpha' = \alpha'' - \langle \alpha'', N\circ\alpha\rangle\, N\circ\alpha = -\frac{1}{\eta}\begin{pmatrix} cos(t/\eta) \\ sen(t/\eta) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{cos(u_0)}{\eta}\begin{pmatrix} cos(u_0)cos(t/\eta) \\ cos(u_0)sen(t/\eta) \\ sen(u_0) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\eta}\begin{pmatrix} cos(t/\eta)(cos^2(u_0)-1) \\ sen(t/\eta)(cos^2(u_0)-1) \\ cos(u_0)sen(u_0) \end{pmatrix}$$

adicionalmente se tiene que

$$N\circ\alpha\times\alpha' = \begin{pmatrix} cos(t/\eta)sen(u_0) \\ sen(t/\eta)sen(u_0) \\ -cos(u_0) \end{pmatrix}$$

por último, se tiene que

$$K_g = [\nabla_{\alpha'}\alpha'] = \frac{1}{\eta}\begin{pmatrix} cos(t/\eta)(cos^2(u_0)-1) \\ sen(t/\eta)(cos^2(u_0)-1) \\ cos(u_0)sen(u_0) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} cos(t/\eta)sen(u_0) \\ sen(t/\eta)sen(u_0) \\ -cos(u_0) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\eta}\left((cos^2(u_0)-1)sen(u_0) - cos^2(u_0)sen(u_0)\right) = \frac{-sen(u_0)}{R+rcos(u_0)}$$

Problema 3

Problema 4

a) Notemos que

$$\omega_p(v) = \left\langle v, \frac{Jp}{|p|^2}\right\rangle = \frac{1}{|p|^2}\left\langle v, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{|p|^2}(-v_1y+v_2x)$$

$$= \frac{1}{|p|^2}(-dx(v)y+dy(v)x) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx(v) + \frac{x}{x^2+y^2}dy(v)$$

conlcuimos que

$$\omega_p = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

además, para $p\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ las funciones

$$\omega_1 := \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{y} \quad \omega_2 := \frac{x}{x^2+y^2}$$

son diferenciables, y por lo tanto la 1-forma ω_p es diferenciable.

b) Veamos la siguiente expresión

$$d\omega = \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega_1}{\partial y}dy\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega_2}{\partial y}dy\right)\wedge dy = \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}dx - \frac{\partial\omega_1}{\partial y}dy\right)dx\wedge dy$$

$$= \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dx\wedge dy = 0$$

c) Para finalizar, tenemos que

$$\int_0^1 \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,dt = \int_0^1 -\frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1^2(t)+\gamma_2^2(t)}\cdot\gamma_1'(t) + \frac{\gamma_1(t)}{\gamma_1^2(t)+\gamma_2^2(t)}\cdot\gamma_2'(t) = \int_0^1 F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_\gamma F(x,y)\,ds$$

es decir, la integral corresponde a la integral de línea del campo vectorial $F(x,y) = (\omega_1, \omega_2)(x,y)$ sobre la curva γ.

Problema 5

a) Veamos que ω_{ij} es una 1-forma, sea $p \in W$, sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}(\omega_{ij})_p(u+\alpha v) &= \langle DE_i(p)(u+\alpha v), E_j(p)\rangle = \langle DE_i(p)u + \alpha DE_i(p)v, E_j(p)\rangle \\ &= \langle DE_i(p)u, E_j(p)\rangle + \alpha \langle DE_i(p)v, E_j(p)\rangle = (\omega_{ij})_p(v) + \alpha(\omega_{ij})_p(v)\end{aligned}$$

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned}(\omega_{ij})_p(v) = \langle DE_i(p)v, E_j(p)\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial E_i}{\partial x_k}(p)v_k, E_j(p)\right\rangle = \sum_{i=1}^{3} \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial x_k}, E_j(p)\right\rangle v_k \\ &= \sum_{i=1}^{3} \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial x_k}, E_j\right\rangle (p)(dx_k)_p(v)\end{aligned}$$

es decir,

$$\omega_{ij} = \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial x}, E_j\right\rangle dx + \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial y}, E_j\right\rangle dy + \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial z}, E_j\right\rangle dz$$

como las funciones E_i y el producto interno son diferenciables, concluimos que ω_{ij} es una 1-forma diferenciable. Queda chequear que $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, en efecto, sea $p \in W$ y $v \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$0 = D\langle E_i, E_j\rangle (p)v = \langle DE_i(p)v, E_j(p)\rangle + \langle E_i, DE_j(p)v\rangle = \omega_{ij} + \omega_{ji}$$

lo que prueba lo pedido.

b) Sea $\{e_j\}_{j=1}^3$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. En primer lugar, tenemos que

$$E_i = \sum_{j=1}^{3} \beta_{ij} e_j \quad \text{donde } \beta_{ij}(p) = e_j^*(E_i(p))$$

además, se tiene que $D\beta_{ij} = d\beta_{ij}$, en efecto, dado $p \in W$ y $v \in \mathbb{R}^3$

$$(d\beta_{ij})_p(v) = \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x}(p)v_1 + \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial y}(p)v_2 + \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial z}(p)v_3 = D\beta_{ij}(p)v$$

lo que implica que

$$DE_i = D\left(\sum_{j=1}^{3} \beta_{ij} e_j\right) = \sum_{j=1}^{3} D\beta_{ij} e_j = \sum_{j=1}^{3} d\beta_{ij} e_j$$

Por otro lado, como $(E_j(p))_{j=1}^3$ es base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, dado $p \in W$ y $v \in \mathbb{R}^3$ se obtiene que

$$DE_i(p)v = \sum_{k=1}^{3} \langle DE_i(p)v, E_k(p)\rangle E_k(p) = \sum_{k=1}^{3} (\omega_{ik})_p(v) E_k(p) \quad \text{es decir, } DE_i = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} E_k$$

de este modo,

$$DE_i = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} E_k = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \left(\sum_{j=1}^{3} \beta_{kj} e_j\right) = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \omega_{ik}\beta_{kj}\right) e_j$$

comparando las dos expresiones para DE_i y usando que $\{e_j\}_{j=1}^3$ es base, concluimos que

$$d\beta_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik}\beta_{kj}$$

Además, por la expresión para E_i, vemos que

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{3} \beta_{ij} dx_j$$

derivando se sigue que

$$d\omega_i = d\left(\sum_{j=1}^{3} \beta_{ij} dx_j\right) = \sum_{j=1}^{3} d\beta_{ij} \wedge dx_j + \beta_{ij} d(dx_j) = \sum_{j=1}^{3} d\beta_{ij} \wedge dx_j$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \omega_{ik}\beta_{kj}\right) \wedge dx_j = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \left(\sum_{j=1}^{3} \beta_{kj} dx_j\right) = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_k = \sum_{k=1}^{3} \omega_k \wedge \omega_{ki}$$

c) Notemos lo siguiente

$$0 = d(d\beta_{ij}) = \sum_{k=1}^{3} d(\omega_{ik}\beta_{kj}) = \sum_{k=1}^{3} d\beta_{kj} \wedge \omega_{ik} + \sum_{k=1}^{3} d\omega_{ik}\beta_{kj}$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{3} d\omega_{ik}\beta_{kj} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge d\beta_{kj} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \sum_{s=1}^{3} \omega_{ks}\beta_{sj}$$

(entender mejor idea de las matrices)