



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: MAURICIO BUSTAMANTE – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

Topología Algebraica - MAT2850
Apuntes
05 de agosto de 2025

Índice

Motivación	3
1. Homología	5
1.1. Complejos de Cadenas	5
1.2. Complejos Simpliciales	9
1.3. Homología Simplicial	12
1.4. Resultados de Homología	17
1.5. Homología Singular	18
1.6. Homología Relativa	19
1.7. Superficies	20
2. Cohomología	22
2.1. Cohomología Singular	22
2.2. Producto Cup	23
2.3. Anillo de Cohomología	24
2.4. Dualidad de Poincaré y Fórmula de Künneth	25
3. Grupo Fundamental	26
3.1. Primer Grupo Fundamental	26

Definición: Decimos que $f : X \rightarrow Y$ es una **equivalencia homotópica**, si existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \sim id_X$ y $f \circ g \sim id_Y$. En tal caso, X e Y se dicen homotópicamente equivalentes o que tienen el mismo tipo de homotopía y se denota por $X \sim Y$.

Ejemplo:

- (1) Sea $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo, en particular, tomando $g = f^{-1}$, se sigue que es equivalencia homotópica.
- (2) Se tiene que $\{0\} \sim \mathbb{R}^n$, consideremos la inclusión $i : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, afirmamos que es equivalencia homotópica. En efecto, se verifica que $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\}$ es una inversa homotópica. Por un lado $\pi \circ i = id_{\{0\}}$ y por otro $i \circ \pi = 0$. Notamos que $H(x, t) = tx$ con $t \in [0, 1]$ es una homotopía entre 0 y $id_{\mathbb{R}^n}$.
- (3) Veamos que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim \mathbb{S}^{n-1}$. Probaremos que la función $i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es equivalencia homotópica. En efecto,

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ x &\rightarrow \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

es inversa homotópica. Es claro que $\pi \circ i = id_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Definimos

$$H(x, t) := t \frac{x}{|x|} + (1 - t)x$$

Notamos que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = \frac{x}{|x|}$, es decir, H es una homotopia entre $i \circ \pi$ e $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$. Además, se verifica que $im(H) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1. Homología

Queremos asignarle a un espacio topológico X arbitrario, grupos abelianos $H_0(X), H_1(X), \dots$ tal que si $X \sim Y$, entonces $H_i(X) \cong H_i(Y)$ para todo i . Intuitivamente, $H_k(X)$ estará generado por ciertos subespacios de X de dimensión k .

Habrà una relación de equivalencia, $A, B \subseteq X$ de dimensión k serán equivalentes si hay un subespacio de X de dimensión $k+1$ cuyo borde es $A \cup B$.

Hay que restringir la clase de espacios a una con nociones de dimensión, borde, etc. Estos serán los complejos simpliciales. Necesitamos, adicionalmente, un objeto algebraico que capture esas nociones, esto corresponde a los complejos de cadenas.

1.1. Complejos de Cadenas

Definición: Un **complejo de cadenas** es una sucesión de grupos abelianos y homomorfismos

$$\dots \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

tal que $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ para todo i . Se denota por $(C_\bullet, \partial_\bullet)$.

Observación: Notemos que $\text{im } \partial_{i+1} \subseteq \ker \partial_i \subseteq C_i$. Dado que los grupos son abelianos, esta observación permite definir el siguiente objeto.

Definición: El i -ésimo grupo de homología de $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ se define por

$$H_i(C_i) := \frac{\ker \partial_i}{\text{im } \partial_{i+1}}$$

Ejemplos:

- Si A un grupo abeliano, entonces

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0$$

es un complejo de cadenas donde $C_i = A$. Entonces

$$H_j(C_\bullet) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ A & \text{si } j = i \end{cases}$$

- Consideremos la cadena exacta

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

entonces $H_j(C_\bullet) = 0$ para todo i .

- Veamos que

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es un complejo de cadenas. Los grupos de homología asociados son $H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z}$, $H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_2$ y $H_k(C_\bullet) = 0$ para $k \neq 0, 1$.

Definición: Sean $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ y $(D_\bullet, \partial_\bullet)$ dos complejos de cadenas. Un **mapeo de cadenas** es una colección de homomorfismos $f_n : C_n \rightarrow D_n$ tal que $\partial_n f_n = f_{n-1} \partial_n$ para todo n , es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ D_n & \xrightarrow{\partial_n} & D_{n-1} \end{array}$$

y se denota por $f_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$.

Lema 1.1: Si $f_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ es un mapeo de cadenas, entonces la asignación $f_* : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$ dada por

$$f_*([x]) = [f_n(x)]$$

esta bien definida y es un homomorfismo de grupos.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{3} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & C. \\
& & \downarrow & & \downarrow id & & \downarrow \pi & & \downarrow id & & & \downarrow j \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{3} & \mathbb{Z}_3 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & D.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H_n(C_\bullet) & \xrightarrow{(g \circ f)_*} & H_n(G_\bullet) \\ & \searrow f_* \quad \nearrow g_* & \\ & H_n(D_\bullet) & \end{array}$$

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{i_n} B_n \xrightarrow{j_n} C_n \longrightarrow 0$$

Teorema 1.2 (Lema de la serpiente): Sea $0 \rightarrow A_{\bullet} \rightarrow B_{\bullet} \rightarrow C_{\bullet} \rightarrow 0$ una secuencia de complejos de cadenas, entonces existen morfismos

$$\delta_n : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(A_\bullet)$$

tal que

$$\begin{array}{ccccccc}
 \xrightarrow{\delta_{n+1}} & H_n(A_\bullet) & \xrightarrow{i_*} & H_n(B_\bullet) & \xrightarrow{j_*} & H_n(C_\bullet) & \searrow \\
 & & & \delta_n & & & \\
 \xrightarrow{\quad} & H_{n-1}(A_\bullet) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(B_\bullet) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(C_\bullet) & \longrightarrow \cdots \\
 & & & & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_0(B_\bullet) & \longrightarrow & H_0(C_\bullet) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Demostración. Vamos a hacer un cacería de diagramas (:D). Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{i} & B_{n+1} & \xrightarrow{j} & C_{n+1} & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & \\
0 \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{i} & B_n & \xrightarrow{j} & C_n & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & \\
0 \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{i} & B_{n-1} & \xrightarrow{j} & C_{n-1} & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Primero debemos definir $\delta_n : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(A_\bullet)$. Sea $[c] \in H_n(C_\bullet)$ entonces $c \in \ker \partial \subseteq C_n$. Como j es sobre, existe $b \in B_n$ tal que $j(b) = c$. Consideramos ∂b y notamos que

$$j\partial(b) = \partial j(b) = \partial c = 0$$

entonces existe un único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b$. Verificamos que $i\partial(a) = \partial i(a) = \partial^2 b = 0$ y como i es inyectiva vemos que $\partial a = 0$. Afirmamos que $\delta_n : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(A_\bullet)$ por

$$\delta_n([c]) = [a]$$

cumple lo buscado. Debemos demostrar lo siguiente

- (1) No depende de la elección de b . Sea b' tal que $j(b') = c$ entonces $j(b' - b) = c - c = 0$, existe único a_0 tal que $i(a_0) = b' - b$. Por otro lado, existe a' tal que

$$i(a') = \partial b' = \partial b + \partial i(a_0) = \partial b + i\partial(a_0)$$

entonces $i(a' - \partial a_0) = \partial b = i(a)$, por inyectividad, $a' - \partial a_0 = a$, lo que implica que $[a] = [a']$.

- (2) No depende de la elección del representante de $[c]$. Sea $c' = c + \partial c'' = j(b) + \partial j(b'') = j(b) + j\partial(b'')$, diremos $b' = b + \partial b''$, notemos que $\partial b' = \partial b + \partial^2 b'' = \partial b$. El mismo $a \in A_{n-1}$ satisface $i(a) = \partial b'$. Entonces $\delta_n[c] = [a] = \delta_n[c']$.

- (3) La función δ_n es morfismo, es decir

$$\delta_n([c] + [c']) = \delta_n[c] + \delta_n[c']$$

Notar que si $j(b) = c$ y $j(b') = c'$ entonces $j(b + b') = c + c'$, existen únicos $a, a' \in A_{n-1}$ tales que $i(a + a') = \partial(b + b')$ y así

$$\partial_n([c + c']) = [a + a'] = [a] + [a']$$

- (4) Exactitud en $H_n(C_\bullet)$ y $H_n(A_\bullet)$. Veamos que $\text{im } j_* \subseteq \ker \delta_n$. Sea $j_*[b]$ con $\partial b = 0$. Entonces

$$\delta_n j_*[b] = \delta_n[j(b)]$$

Existe único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b = 0$, entonces $a = 0$ y por lo tanto $\delta_n j_*[b] = [a] = 0$. Queda ver que $\ker \delta_n \subseteq \text{im } j_*$. Sea $[c] \in \ker \delta_n$ con $\partial c = 0$. Por definición de δ_n , para cada b tal que $j(b) = c$ hay un único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b$.

Como $\delta_n[c] = [a] = 0$ se sigue que $a = \partial a'$ y entonces $\partial b = i(a) = i\partial(a') = \partial i(a')$, así $b - i(a') \in \ker \partial$, es decir $b - i(a')$ representa una clase de homología.

Ahora $j(b - i(a')) = j(b) = c$, por ende, $j_*[b - i(a')] = [c]$. Para $H_n(A_\bullet)$ la demostración es similar.

- (5) Exactitud en $H_n(B_\bullet)$. Sea $[a] \in \text{im } i_*$ con $\partial a = 0$, entonces

$$j_* i_*[a] = [j_* i_n(a)] = 0$$

y por lo tanto $\text{im } i_* \subseteq \ker j_*$. Sea $[b] \in \ker j_*$ con $\partial b = 0$, entonces $j_*[b] = [j(b)] = 0$, lo que implica que $j(b) = \partial c' = \partial j(b') = j\partial(b')$, existe único $a \in A_{n-1}$ tal que $b - \partial b' = i(a)$, además

$$i\partial(a) = \partial i(a) = \partial b + \partial^2 b' = 0$$

entonces $\partial a = 0$. Luego $i_*[a] = [b]$. Concluimos que $\text{im } i_* = \ker j_*$.

Lo que concluye el teorema. □

Definición: Sean $f, g : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ mapeos de cadenas. Una **homotopía de cadenas** es una colección de morfismos

$$h_n : C_n \rightarrow C_{n+1} \quad \text{tal que} \\ f_n - g_n = \partial h_n + h_{n-1} \partial$$

Lo denotamos como $f \sim g$.

Proposición 1.3: Sea $f \sim g$ entonces $f_* = g_*$.

Demostración. Sea $[x] \in H_n(C_\bullet)$, por definición, sabemos que $\partial x = 0$, luego

$$(f_* - g_*)([x]) = [(f - g)(x)] = [(\partial h + h\partial)(x)] = [\partial h x] = 0$$

lo que prueba la afirmación. □

Proposición 1.4 (Lema del 5): Considerar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\
 B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5
 \end{array}$$

donde las filas son secuencias exactas y cada cuadrado conmuta. Si f_1, f_2, f_4 y f_5 son isomorfismos, entonces f_3 es isomorfismo.

Demostración. Por simplicidad del argumento, denotaremos los morfismos $A_i \rightarrow A_{i+1}$ y $B_i \rightarrow B_{i+1}$ como ∂ . Debido a que ambas secuencias son exactas, resulta que $\partial^2 a = \partial \circ \partial(a) = 0$. Veamos que $\ker f_3 = 0$. Sea $a \in \ker f_3$, notemos que

$$0 = \partial f_3(a) = f_4 \partial(a) \quad \text{entonces} \quad \partial a = 0$$

Como $a \in \ker \partial$, existe $a' \in A_2$ tal que $\partial a' = a$, luego $\partial f_2(a') = f_3 \partial(a') = f_3(a) = 0$. Por exactitud, existe $b' \in B_1$ tal que $\partial b' = f_2(a')$, puesto que f_1 es isomorfismo, existe $a'' \in A_1$ tal que $b' = f_1(a'')$, usando que los diagramas conmutan vemos que

$$a'' = f_1^{-1}(b') \quad \text{entonces} \quad \partial a'' = \partial f_1^{-1}(b') = f_2^{-1} \partial(b')$$

recordemos que $\partial b' = f_2(a')$, es decir, $\partial a'' = a'$, luego $0 = \partial^2 a'' = \partial a' = a$.

Sea $b \in B_3$, consideramos $\partial b \in B_4$, entonces $f_4^{-1}(\partial b) \in A_4$, por conmutatividad del diagrama, se sigue que $\partial f_4^{-1}(\partial b) = f_5^{-1}(\partial^2 b) = 0$, luego, por exactitud, existe $a \in A_3$ tal que $\partial a = f_4^{-1}(\partial b)$. Observemos que,

$$\partial(f_3(a) - b) = \partial f_3(a) - \partial b = f_4 \partial(a) - \partial b = 0$$

Así, existe $b' \in B_2$ tal que $\partial b' = f_3(a) - b$, definimos $a' = f_2^{-1}(b') \in A_2$, de este modo,

$$f_3(a) - b = \partial b' = \partial f_2(a') = f_3(\partial a')$$

En resumen, $f_3(a - \partial a') = b$. Concluimos que f_3 es isomorfismo. □

Nuestro objetivo será asociar un complejo de cadenas a un espacio topológico X arbitrario, lo que nos dará un grupo de homología para cada dimensión, además dada $f : X \rightarrow Y$ una función continua, nos gustaría obtener un mapeo de cadenas y por tanto un homomorfismo entre los grupos de homología de cada espacio.

1.2. Complejos Simpliciales

Definición: Dados $n + 1$ puntos $\{v_0, \dots, v_n\} \in \mathbb{R}^w$ son **afínmente independientes**, si generan un n -plano afín, es decir, $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ es un conjunto linealmente independiente, esto es

$$\sum_{i=0}^n t_i v_i = 0 \quad y \quad \sum_{i=0}^n t_i = 0 \quad \text{entonces} \quad t_i = 0 \quad \text{para todo } i$$

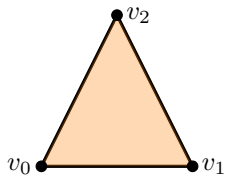
Ejemplo: Dos puntos son afínmente independientes. Tres puntos son afínmente independientes si y solo si no son colineales.

Definición: Si $\{v_0, \dots, v_n\}$ son afínmente independientes, ellos definen el **n -simplejo**

$$\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle = \left\{ x = \sum_{i=0}^n t_i v_i, \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1 \quad y \quad t_i \geq 0 \right\}$$

Decimos que σ es el n -simplejo generado por v_0, \dots, v_n . Los puntos v_i se llaman **vértices** de σ . Una **cara** de un simplejo σ es un simplejo τ generado por un subconjunto de $\{v_0, \dots, v_n\}$ y lo denotamos por $\tau \leq \sigma$. Si el subconjunto es propio, se dice que τ es una **cara propia**.

La **frontera** de un n -simplejo σ es la unión de todas sus caras propias, se denota por $\partial\sigma$, el **interior** de σ es $\text{int}(\sigma) := \sigma \setminus \partial\sigma$.

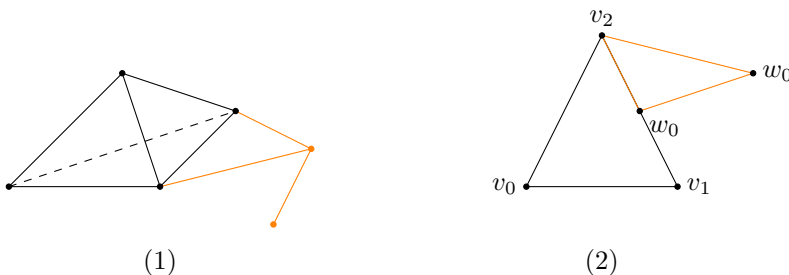


Definición: Un **complejo simplicial** (geométrico) K es un conjunto de simplejos tales que

- (1) Si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau \in K$.
- (2) Si $\sigma, \tau \in K$ entonces $\sigma \cap \tau = \emptyset$ ó $\sigma \cap \tau$ es una cara de σ y de τ .

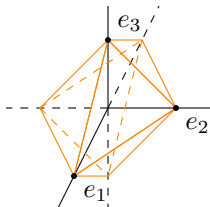
El **poliedro** asociado a un complejo simplicial K es $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$. Un espacio topológico X se llama un poliedro si existe un complejo simplicial K y un homeomorfismo $f : |K| \rightarrow X$. Al par (K, f) se le llama una **triangulación** de X . Denotamos por V_K al conjunto de vértices de los simplices.

Observación: Si X es triangulable, entonces es Hausdorff por que $|K|$ lo es.



La figura (1) corresponde a un complejo simplicial, mientras que la figura (2) no es un complejo simplicial ya que los simplices que la componen no se pegan bien.

Ejemplo: Consideremos el complejo simplicial K formado por los simplices $\sigma = \langle \pm e_1, \pm e_2, \pm e_3 \rangle$ y sus respectivas caras. Consideremos $f : |K| \rightarrow \mathbb{S}^2$ por $f(x) := x/|x|$, entonces (K, f) es una triangulación de la 2-esfera.



Definición: Sean K y L complejos simpliciales. Un **mapeo simplicial** de K a L es una función $f : V_K \rightarrow V_L$ tal que si $\sigma = \langle v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle$ es un simplejo en K entonces

$$\{f(v_{\alpha_0}), \dots, f(v_{\alpha_n})\}$$

genera un simplejo en L , al cual llamamos $f(\sigma)$. Notación $f : K \rightarrow L$.

Ejemplo: Sea $\Delta^n = \langle e_1, \dots, e_{n+1} \rangle \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^\infty$. Entonces las funciones $f : \Delta^1 \rightarrow \Delta^2$ y $g : \Delta^2 \rightarrow \Delta^1$ dadas por $f(e_i) = e_i$ y $g(e_1) = g(e_3) = e_1$, $g(e_2) = e_2$ son mapeos simpliciales.

Lema 1.5: Sea $f : K \rightarrow L$ un mapeo simplicial. Entonces induce una función continua $|f| : |K| \rightarrow |L|$.

Demostración. Sea $\sigma \in K$, digamos que $\sigma = \langle v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle$ y Definimos

$$f_\sigma : \sigma \rightarrow |L|$$

$$\sum_{i=0}^k t_i v_i \rightarrow \sum_{i=0}^k t_i f(v_i)$$

que es continua por que es lineal en los t_i . Se observa que si $\tau \leq \sigma$ entonces $f_\tau = f_\sigma|_\tau$. Ahora tomamos σ y σ' , entonces

$$f_\sigma|_{\sigma \cap \sigma'} = f_{\sigma \cap \sigma'} = f_{\sigma'}|_{\sigma \cap \sigma'}$$

entonces $|f| := \bigcup_{\sigma \in K} f_\sigma$ es una función continua de $|K|$ en $|L|$. □

Sea $g : L \rightarrow J$ un mapeo simplicial, entonces $g \circ f$ es mapeo simplicial, ya que f mapea vértices de un simplejo a vértices de un simplejo y del mismo modo lo hace g , además se tiene lo siguiente

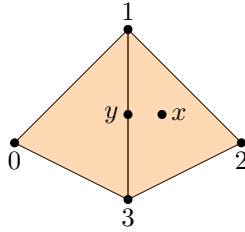
$$|g \circ f|(x) = |g \circ f|\left(\sum t_i v_{\alpha_i}\right) = \sum t_i (g \circ f)(v_{\alpha_i}) = \sum t_i g(f(v_{\alpha_i})) = (|g| \circ |f|)(x)$$

es decir, $|g \circ f| = |g| \circ |f|$. Un mapeo simplicial puede ser definido también como una función continua $f : |K| \rightarrow |L|$ que manda vértices en vértices y es lineal en sus caras.

Definición: Sea $x \in |K|$. El **portador** de x es el simplejo de K mas pequeño (en términos de inclusión) que contiene a x . Se denota por $carr(x)$.

Definición: Sea $w \in V_K$. El conjunto $St_K(w) := \{x \in |K| : w \in carr(x)\}$ le decimos la **estrella de w** .

Ejemplo: Veamos el siguiente complejo



Entonces $carr(y) = \langle 1, 3 \rangle$, $carr(x) = \langle 1, 2, 3 \rangle$ y $carr(3) = \langle 3 \rangle$.

Observación: Notemos que $y \in carr(x)$ si y solo si $carr(y) \subseteq carr(x)$. Sea $\sigma \in K$, entonces $\sigma = carr(x)$ si y solo si $x \in int(\sigma)$, esto es una caracterización útil del portador.

En efecto, si $\sigma = carr(x)$, supongamos, por contradicción, que $x \in \partial\sigma$, entonces $x \in \tau < \sigma$, como K es complejo, $\tau \in K$. Por otro lado, si $x \in int(\sigma)$, sea $\tau \in K$ tal que $x \in \tau$, luego $\tau \cap \sigma$ es una cara de σ , pero $x \in \tau \cap \sigma$ lo que implica que $\sigma = \tau \cap \sigma \subseteq \tau$, es decir, $\sigma = carr(x)$.

Por otro lado, usando lo anterior vemos que $St_K(w) = \bigcup_{w \in \sigma \in K} int(\sigma)$, entonces la estrella de un vértice es un abierto en $|K|$.

Proposición 1.6: Sea $g : K \rightarrow L$ un mapeo simplicial, entonces $g(carr(x)) = carr(g(x))$.

Demostración. Por la observación anterior, basta probar que $g(x) \in int(g(carr(x)))$, sean $v_i \in V_K$ tales que $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = carr(x)$, luego

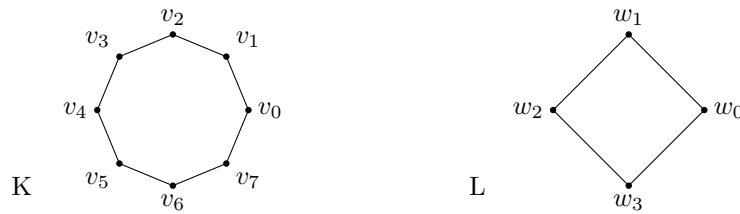
$$x = \sum_{i=1}^n t_i v_i \quad \text{donde } t_i > 0 \text{ para todo } i, \text{ entonces } g(x) = \sum_{i=1}^n t_i g(v_i) \in g(carr(x))$$

como $t_i > 0$ vemos que $g(x) \in int(g(carr(x)))$. □

Definición: Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una función continua. Una **aproximación simplicial** a f es un mapeo simplicial $g : K \rightarrow L$ tal que

$$g(x) \in \text{carr}(f(x)) \text{ para todo } x \in |K|$$

Ejemplo: Se definen los siguientes complejos simpliciales,



El poliedro asociado a cada complejo es \mathbb{S}^1 , consideramos la función continua $f(z) = z^2$, una aproximación simplicial es $g(v_i) = g(v_{i+4}) = w_i$ para $0 \leq i \leq 3$.

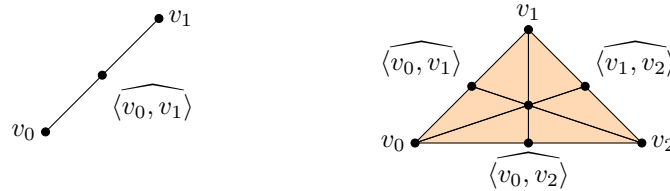
Definición: Sea K un complejo simplicial. La **primera subdivisión baricéntrica** K' de K es el complejo simplicial K' cuyos

- Vértices son los baricentros $\hat{\sigma}$ de los simpleces σ de K .
- Un n -simplex de K' es $\langle \hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n \rangle$ si $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n$ (Son caras propias).

Una r -ésima división baricéntrica se define recursivamente $K^{(r)} := (K^{(r-1)})'$. Recordemos que si $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ entonces $\hat{\sigma} = \frac{1}{n+1} \sum v_i$.

Proposición 1.7: Sea K un complejo simplicial entonces $|K'| = |K|$.

Ejemplo: Algunos ejemplos de división baricéntrica de dos simpleces.



donde el punto central del segundo ejemplo es $\widehat{\langle v_0, v_1, v_2 \rangle}$.

1.3. Homología Simplicial

Dado K un complejo simplicial finito, esto es, que tiene un número finito de vértices. Elegimos un orden total en el conjunto de vértices, digamos $v_0 < v_1 < \dots < v_n$.

Definición: (*Complejo de cadenas simplicial*) Consideremos los grupos abelianos

$$C_n(K) := \left\{ \sum n_\sigma \sigma : \sigma = \langle v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle \text{ tal que } v_{\alpha_0} < \dots < v_{\alpha_n} \text{ y } n_\sigma \in \mathbb{Z} \text{ nulo salvo finitos casos} \right\}$$

y los diferenciales $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ se define en la base por

$$\partial_n \langle v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle = \sum_{i=0}^n (-1)^i \langle v_{\alpha_0}, \dots, \widehat{v_{\alpha_i}}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle$$

donde $\langle v_{\alpha_0}, \dots, \widehat{v_{\alpha_i}}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle := \langle v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_{i-1}}, v_{\alpha_{i+1}}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle$. Se extiende linealmente al resto del grupo.

Teorema 1.8: La tupla $(C_\bullet(K), \partial_\bullet)$ es un complejo de cadenas, además, la homología del complejo no depende del orden en el conjunto de vértices.

Definición: Sea K un complejo simplicial finito. El *i-ésimo grupo de homología simplicial* de K es

$$H_i(K) := H_i(C_\bullet(K)) = \frac{\ker \partial_i}{\operatorname{im} \partial_{i+1}}$$

Ejemplos:

- (1) Sea $K = \{\langle v_0, v_1 \rangle, \{v_0\}, \{v_1\}\}$ y consideramos el orden $v_0 < v_1$. El complejo corresponde a un segmento de recta, notemos que $3v_0 - 5v_1 \in C_0(K)$, con la identificación $v_0 = (1, 0)$ y $v_1 = (0, 1)$ vemos que $C_0(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, esta identificación no es canónica, es decir, depende de la base que escojamos y sus imágenes correspondientes.

Por otro lado, $C_1(K) \cong \mathbb{Z}$ con la identificación $\langle v_0, v_1 \rangle = 1$. Adicionalmente, se tiene que $C_i(K) = 0$ para $i > 1$. Luego,

$$0 \longrightarrow C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{0} 0$$

donde $\partial_1 \langle v_0, v_1 \rangle = v_1 - v_0 \in C_0(K)$. Con las identificaciones que hicimos resulta que $\partial_1(1) = (-1, 1)$. De este modo queda la cadena

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

Así $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(K) = 0$, $H_i(K) = 0$ para $i > 0$.

- (2) Sean v_0, v_1, v_2 puntos no colineales. Consideramos $\sigma = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ y $K := \{\tau \leq \sigma\}$ definimos el orden $v_0 < v_1 < v_2$. Notemos que

$$\begin{aligned} C_0(K) &= \mathbb{Z}\{v_0, v_1, v_2\} \\ C_1(K) &= \mathbb{Z}\{\langle v_0, v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_0, v_2 \rangle\} \\ C_2(K) &= \mathbb{Z}\{\langle v_0, v_1, v_2 \rangle\} \end{aligned}$$

Entonces $\partial_0 = 0$,

$$\partial_1 = \begin{cases} \partial \langle v_0, v_1 \rangle = v_1 - v_0 \\ \partial \langle v_1, v_2 \rangle = v_2 - v_1 \\ \partial \langle v_0, v_2 \rangle = v_2 - v_0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \partial_2 \langle v_0, v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle - \langle v_0, v_2 \rangle + \langle v_0, v_1 \rangle$$

Realizando las identificaciones $v_i = e_{i+1}$ para $i = 0, 1, 2$, $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle = 1$, $\langle v_0, v_1 \rangle = e_1$, $\langle v_1, v_2 \rangle = e_2$ y $\langle v_0, v_2 \rangle = e_3$ resulta que $C_0(K) \cong \mathbb{Z}^3$, $C_1(K) \cong \mathbb{Z}^3$ y $C_2(K) \cong \mathbb{Z}$. Tenemos

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \longrightarrow 0$$

donde

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Claramente $H_i(K) = 0$ para $i > 2$. Además, $\ker \partial_2$, entonces $H_2(K) = 0$. Notemos que $\operatorname{im} \partial_2 \cong \mathbb{Z}$ y $\ker \partial_1 \cong \mathbb{Z}$, luego $H_1(K) = 0$. Por otro lado, $\operatorname{im} \partial_1 \cong \mathbb{Z}^2$. Por ende $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

Comentario: Se invita a calcular la homología de un n -simplejo. Hasta ahora hemos definido todo respecto a \mathbb{Z} , pero se puede definir homología simplicial de manera análoga para cualquier anillo R .

Lema 1.9: Sea $f : K \rightarrow L$ un mapeo simplicial, definimos los morfismos

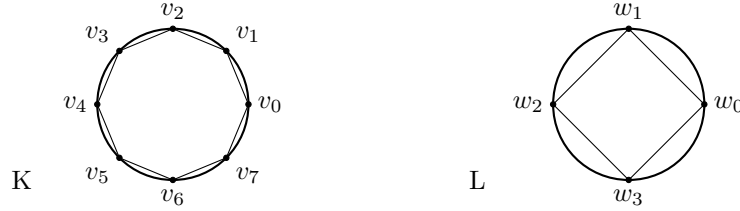
$$f_n : C_n(K) \rightarrow C_n(L)$$

$$\langle v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_n} \rangle \rightarrow \begin{cases} \text{sign}(\varphi) \langle f(v_{\varphi(\alpha_0)}), \dots, f(v_{\varphi(\alpha_n)}) \rangle & \text{si son distintos} \\ 0 & \text{si no lo son} \end{cases}$$

donde φ es una permutación tal que $f(v_{\varphi(\alpha_0)}) < \dots < f(v_{\varphi(\alpha_n)})$. Entonces, la colección, es un mapeo de cadena.

Por lo tanto, f induce un morfismo entre los grupos de homología de los complejos simpliciales

Ejemplo: Definimos los siguientes complejos simpliciales



Para cada complejo se da el orden que sigue $v_0 < v_1 < \dots < v_7$ y $w_0 < w_1 < w_2 < w_3$ y definimos $f : K \rightarrow L$ por $f(v_i) = f(v_{i+4}) = w_i$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Veamos quien es $f_* : H_1(K) \rightarrow H_1(L)$. En primer lugar, sabemos que

$$H_1(K) = \ker(C_1(K) \rightarrow C_0(K)) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathbb{Z}$$

Similarmente $H_1(L) \cong \mathbb{Z}$. Entonces

$$f_*(\langle v_0, v_1 \rangle + \dots + \langle v_6, v_7 \rangle - \langle v_0, v_7 \rangle) = 2(\langle w_0, w_1 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle + \langle w_2, w_3 \rangle - \langle w_0, w_3 \rangle)$$

luego $f_* : H_1(K) \xrightarrow{2} H_1(L)$. Por otro lado, notemos que $H_0(K) \cong H_0(L) \cong \mathbb{Z}$, ya que todo par de vértices en el complejo esta conectado por una secuencia de aristas, luego $f_*([v_0]) = [w_0]$, entonces $f_* : H_0(K) \rightarrow H_0(L)$ es isomorfismo.

Teorema 1.10 (Mayer-Vietoris): Sea K un complejo simplicial y M, N subcomplejos de K que cubren a K , es decir, $M \cup N = K$. Se tienen los mapeos

$$\begin{array}{ccc} M \cap N & \xrightarrow{i_N} & N \\ \downarrow i_M & & \downarrow j_N \\ M & \xrightarrow{j_M} & K \end{array}$$

Existen morfismos $\delta_n : H_n(K) \rightarrow H_{n-1}(K)$ tales que la secuencia

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\delta_{n+1}} & H_n(M \cap N) & \xrightarrow{i_{M*} \oplus i_{N*}} & H_n(M) \oplus H_n(N) & \xrightarrow{j_{M*} - j_{N*}} & H_n(K) & \\ & & & \delta_n & & & \\ \xrightarrow{\quad} & H_{n-1}(M \cap N) & \xrightarrow{i_{M*} \oplus i_{N*}} & H_{n-1}(M) \oplus H_{n-1}(N) & \xrightarrow{j_{M*} - j_{N*}} & H_{n-1}(K) & \longrightarrow \dots \\ & & & & & & \\ \dots & \longrightarrow & H_0(M) \oplus H_0(N) & \xrightarrow{j_{M*} - j_{N*}} & H_0(K) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

es exacta.

Demostración. Verificaremos que

$$0 \longrightarrow C_n(M \cap N) \xrightarrow{i_M \oplus i_N} C_n(M) \oplus C_n(N) \xrightarrow{j_M - j_N} C_n(K) \longrightarrow 0$$

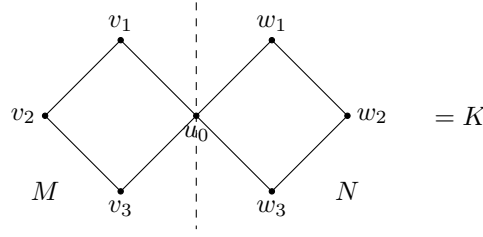
es una secuencia exacta corta de grupos abelianos para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, como C_n es libremente generado por los n -simplices e i es inyectiva, entonces $i_{M*} \oplus i_{N*}$ es inyectiva. Además, $j_{M*} - j_{N*}$ es sobreyectiva por hipótesis y es directo

que $\text{im } i_{M*} \oplus i_{N*} \subseteq \ker j_{M*} - j_{N*}$. Resta ver que

$$\ker j_{M*} - j_{N*} \subseteq \text{im } i_{M*} \oplus i_{N*}$$

Sea $(x, y) \in \ker j_{M*} - j_{N*}$ entonces $j_{M*}(x) = j_{N*}(y)$, es decir, x e y se escriben como suma de simplices en N y M respectivamente, entonces $(x, y) \in \text{im } i_{M*} \oplus i_{N*}$. Así, usando el lema de la serpiente, concluimos. \square

Ejemplo: Consideremos la siguiente situación



Notemos que $H_1(M) \cong \mathbb{Z}$ y $H_1(N) \cong \mathbb{Z}$, además $M \cap N = \{u_0\}$, entonces usando mayer vietoris nos queda que

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & H_1(K) \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} H_0(K) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Para $i > 2$ notamos que $H_i(K) = 0$, por otro lado el morfismo $\varphi(1) = (1, 1)$ ya que manda generador en generador, esto por que todo par de puntos en M y N estan relacionados por un camino de aristas. De este modo,

$$H_0(K) \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\ker \phi} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\text{im } \varphi} \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

donde el último isomorfismo se da por que φ es inyectiva, es decir, el morfismo $H_1(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ es trivial.

Teorema 1.11: Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una función continua. Entonces f induce un homomorfismo

$$f_* : H_*(K) \rightarrow H_*(L)$$

tal que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ e $\text{id}_* = \text{id}_{H_*(K)}$, donde $g : |L| \rightarrow |M|$ es continua.

Observación: Con esto se tendría que $H_*(K)$ es invariante topológico. Se probara en dos pasos. Veremos que toda función f continua se puede “aproximar” a una función g simplicial, también hay que comprobar que $f_* := g_*$ es independiente de la función simplicial escogida.

Teorema 1.12 (Aproximación Simplicial): Sean K, L complejos simpliciales finitos y $f : |K| \rightarrow |L|$ una función continua. Entonces existe $r \in \mathbb{N}$ y una aproximación simplicial a f

$$g : K^{(r)} \rightarrow L$$

A partir de esta aproximación simplicial, se cumplen dos propiedades importantes, que son

- (1) f es homotópica a g . Notemos que $g(x), f(x) \in \text{carr}(f(x))$, entonces el segmento entre $g(x)$ y $f(x)$ está en $\text{carr}(f(x))$ porque es un conjunto convexo. Definimos

$$\begin{array}{l} |K| \times [0, 1] \rightarrow |L| \\ (x, t) \rightarrow tg(x) + (1 - t)f(x) \end{array}$$

- (2) Sean $f_1 : |K| \rightarrow |L|$, $f_2 : |L| \rightarrow |M|$ continuas y $g_1 : K \rightarrow L$, $g_2 : L \rightarrow M$ aproximaciones simpliciales de f_i , entonces $g_2 \circ g_1$ es aproximación simplicial de $f_2 \circ f_1$.

Se tiene que

$$g_2 g_1(x) \in g_2(\text{carr}(f_1(x))) = \text{carr}(g_2 f_1(x)) \subseteq \text{carr}(f_2 f_1(x))$$

Proposición 1.13: Sea $\text{id} : |K'| \rightarrow |K|$, la función $a : V_{K'} \rightarrow V_K$ dada por $a(\hat{\sigma}) = v \in V_\sigma$ cumple que

- (1) Define una aproximación simplicial de la identidad.
- (2) Toda aproximación simplicial $g : K' \rightarrow K$ de la identidad es de esta forma.

Demostración. Veamos que a es un mapeo simplicial. Sea $\sigma = \langle \hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_n \rangle \in K'$, entonces $a(\hat{\sigma}_i) = v_i \in V_{\sigma_i}$. Sabemos que $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ para $0 \leq i \leq n-1$, lo que implica que $V_{\sigma_i} \subset V_{\sigma_{i+1}}$, en particular, $V = \{v_0, \dots, v_n\} \subseteq V_{\sigma_n}$, luego, V genera una cara de σ_n , es decir, un simplex en $|K|$.

Sea $x \in |K'|$, sean $\hat{\sigma}_i \in K'$ tales que $\langle \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n \rangle = \text{carr}(x)$, luego,

$$x = \sum_{i=1}^n t_i \hat{\sigma}_i \quad \text{donde } t_i > 0 \text{ para todo } i$$

en particular, $t_n > 0$, como $\hat{\sigma}_n = \frac{1}{n+1} \sum v_i$ donde $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \sigma_n$, entonces x se escribe como combinación convexa de los v_i donde cada ponderación es positiva, luego $x \in \text{int}(\sigma_n)$, en otras palabras, $\text{carr}(\text{id}(x)) = \sigma_n$.

Lo anterior prueba que a es una aproximación de la identidad. Por otro lado, si g es una aproximación simplicial de la identidad, entonces

$$g(\hat{\sigma}) \in \text{carr}(\text{id}(\hat{\sigma})) = \sigma$$

entonces $g(\hat{\sigma}) \in V_\sigma$, por que g es mapeo simplicial. □

Lema 1.14 (Lema del número de Lebesgue): Sea X un espacio métrico compacto y \mathcal{U} un cubrimiento abierto de X . Entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ se tiene que $B_\delta(x) \subseteq U$ para algún $U \in \mathcal{U}$.

Lema 1.15: Si $f, g : K \rightarrow L$ son aproximaciones simpliciales de alguna función continua $|K| \rightarrow |L|$ entonces $g_* = f_*$.

Demostración. Sea $h_n : C_n(K) \rightarrow C_{n+1}(L)$ dada por $h_n(\langle v_0, \dots, v_n \rangle) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_i$ donde

$$\sigma_i = \begin{cases} \text{sign}(\varphi_i) \langle f(v_{\varphi_i(0)}), \dots, f(v_{\varphi_i(i)}), g(v_{\varphi_i(i)}), \dots, g(v_{\varphi_i(n)}) \rangle & \text{si son distintos} \\ 0 & \text{si no lo son} \end{cases}$$

y φ_i es una permutación tal que $f(v_{\varphi_i(0)}) < \dots < f(v_{\varphi_i(i)}) < g(v_{\varphi_i(i)}) < \dots < g(v_{\varphi_i(n)})$. Así, la colección de morfismos $(h_n)_n$ define una homotopía de cadenas entre f y g . □

Lema 1.16: Sea $a : K' \rightarrow K$ una aproximación simplicial de $\text{id} : |K'| \rightarrow |K|$. Entonces $a_* : H_i(K') \rightarrow H_i(K)$ es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Procederemos por doble inducción en

$$m = \dim K \quad \text{y} \quad n = \# \text{de simplices de } K \text{ de dim maximal}$$

Supongamos que $m = 0$, es directo que a_* es isomorfismo. Por otro lado, si $n = 1$, entonces K es un simplex □

Si iteramos, $a_r : K^{(r)} \rightarrow K$ entonces $a_{r*} : H_n(K^{(r)}) \rightarrow H_n(K)$ es isomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.17: Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una función continua, entonces el homomorfismo

$$f_* := s_* \circ a_{r*}^{-1} : H_n(K) \rightarrow H_n(L)$$

donde s es aproximación simplicial de f . Cumple que

- (1) No depende de s ni de r .
- (2) Si $g : |L| \rightarrow |M|$ es continua, entonces $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

Demostración. (Pendiente) □

Lema 1.18: Sea K un complejo simplicial finito. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $f, g : |K| \rightarrow |L|$ son funciones continuas que satisfacen

$$\sup_{x \in |K|} \|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$$

entonces $f_* = g_*$.

Demostración. Sea $\{St_L(w)\}_{w \in V_K}$, que es un cubrimiento abierto de $|L|$. Por el lema de Lebesgue, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_{2\varepsilon}(y) \subseteq St_L(w) \quad \text{para todo } w \in V_L$$

Sean f, g continuas como en el enunciado. Consideramos $\{f^{-1}(B_\varepsilon(y))\}$, que es un cubrimiento abierto de $|K|$, entonces, existe

$\delta > 0$ tal que

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(y) \subseteq St_L(w) \quad y \quad g(B_\delta(x)) \subseteq B_{2\varepsilon}(y) \subseteq St_L(w)$$

Subdividimos K de modo que

$$\max\{|v_i - v_j| : v_i, v_j \in V_{K(r)}\} < \frac{\delta}{2}$$

entonces

$$f(St_{K(r)}(v)) \subseteq B_\varepsilon(y) \subseteq St_L(w) \quad y \quad g(St_{K(r)}(v)) \subseteq B_{2\varepsilon}(y) \subseteq St_L(w)$$

Sea $s : V_{K(r)} \rightarrow V_L$ dada por $s(v) = w$, luego, define una aproximación simplicial de f y de g . □

Teorema 1.19 (Invarianza Homotópica): Sean $f, g : |K| \rightarrow |L|$ funciones continuas homotópicas, entonces $f_* = g_*$.

Demostración. Sea $H : |K| \times [0, 1] \rightarrow |L|$ una homotopía de f a g . Entonces H es uniformemente continua. Sea $\varepsilon > 0$ como en el lema, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } |t - s| < \delta \quad \text{entonces} \quad \|H(x, t) - H(x, s)\| < \varepsilon$$

Sea $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$ tal que $|t_i - t_{i-1}| < \delta$. Definimos $h_i(x) := H(x, t_i)$ entonces como $\|h_i(x) - h_{i-1}(x)\| < \varepsilon$ por el lema $(h_i)_* = (h_{i-1})_*$. □

Corolario: Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una equivalencia homotópica, entonces $f_* : H_i(K) \rightarrow H_i(Y)$ es isomorfismo para todo i .

Definición: Sea X un espacio topológico. Una **triangulación homotópica** es un par (K, h) donde K es un complejo simplicial finito y $h : |K| \rightarrow X$ es una equivalencia homotópica.

Definición: Sea X un espacio con triangulación homotópica, definimos $H_i(X) := H_i(K)$.

Lema 1.20: Esta definición no depende de la triangulación homotópica.

Ejemplo: Tenemos que

$$H_i(\mathbb{R}^n) = H_i(\{pt\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

1.4. Resultados de Homología

Teorema 1.21 (Invarianza del Dominio): \mathbb{R}^n es homeomorfo a \mathbb{R}^m si y solo si $n = m$.

Demostración. El resultado es conocido y sencillo de probar para $n = 1$. Supongamos que $n > 1$. Entonces

$$H_i(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H_i(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, n-1 \\ 0 & \text{si } i \neq 0, 2 \end{cases}$$

lo que prueba el resultado. □

Teorema 1.22 (Teorema Fundamental del Álgebra): Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ no constante. Entonces existe una raíz en \mathbb{C} .

Demostración. Supongamos, por contradicción, que p no posee raíces. Sea $r > 0$, definimos

$$p : S_r^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z \mapsto p(z)$$

Sea $H : S_r^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por $H(z, t) = p(tz)$, resulta ser una homotopía de $p(z)$ a la función constante $cta_0(z) = a_0$, entonces

$$p_* = 0 : H_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

Buscamos que la función $S_{r_0}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que

$$G(z, t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0)$$

este bien definida para algún r_0 y $t \in [0, 1]$. Notemos que si

$$z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0) = 0 \quad \text{entonces} \quad t = \frac{|z|^n}{|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0|}$$

luego, si $r_0 > \max\{1, \sum |a_i|\}$, entonces

$$t = \frac{|z|^n}{|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0|} \geq \frac{r_0^n}{r_0^{n-1}(\sum |a_i|)} = \frac{r_0}{\sum |a_i|} > 1$$

que es lo que queríamos. Así, G define una homotopía entre $p(z)$ a $q(z) = z^n$. Luego, $q : S_{r_0}^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \sim S_{r_0}^1$ induce multiplicación por n en H_1 , entonces $p_* = 0$ y $p_* = q_* = n$, entonces $n = 0$. □

Teorema 1.23 (Teorema del Punto Fijo de Brower): Sea $f : D^n \rightarrow D^n$ una función continua, entonces tiene un punto fijo.

Demostración. (Pendiente) □

Teorema 1.24 (Borsuk-Ulam): Sea $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua, entonces existe $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.

Demostración. (Pendiente) □

Corolario: Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces \mathbb{S}^n no se puede encajar en \mathbb{R}^n .

1.5. Homología Singular

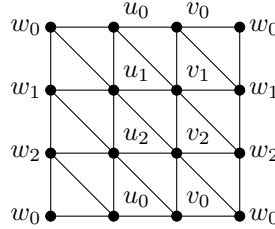
1.6. Homología Relativa

1.7. Superficies

Definición: Una 2-variedad se dice *superficie*.

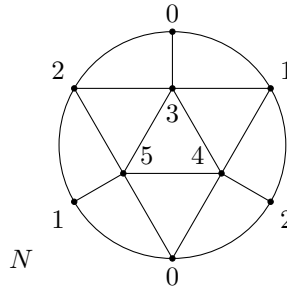
Ejemplos:

- \mathbb{S}^2 es una superficie triangulable, donde $K = \partial\Delta^3$ da una triangulación.
- T^2 es una superficie triangulable, donde



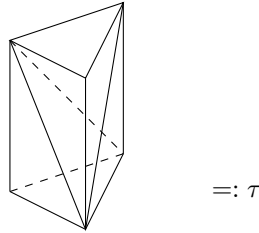
es una triangulación.

- \mathbb{RP}^2 es una superficie triangulable, con



una triangulación.

A partir de estas superficies podemos construir otras superficies, las sumas conexas. Sean X_1 y X_2 superficies triangulables. Sean K_1, K_2 complejos simpliciales tales que $|K_i| \cong X_i$. Consideramos $\varphi_i : \Delta^2 \rightarrow |K_i|$ encajes simpliciales, es decir, φ_i es un mapeo simplicial tal que $\varphi_i(\Delta^2)$ es homeomorfo a un 2-simplice de K_i . Consideramos la triangulación de $\partial\Delta^2 \times \Delta^1$ como sigue



Definimos $X_1 \# X_2$, la suma conexa, como el espacio homeomorfo a $|K_1 \# K_2|$ donde

$$K_1 \# K_2 := (K_1 \setminus \varphi_1(\Delta^2)) \sqcup \tau \sqcup (K_2 \setminus \varphi_2(\Delta^2)) / \sim$$

y \sim es tal que $\varphi_1(x) \sim (x, 0)$ y $\varphi_2(x) \sim (x, 1)$ para $x \in \partial\Delta^2$.

Proposición 1.25: $K_1 \# K_2$ es un complejo simplicial. Mas aún, su realización geométrica, $X_1 \# X_2$ es una superficie.

Definición: Sea $S_1 := T^2$ y $S_g := S_{g-1} \# T^2$ para $g > 1$. Del mismo modo, $N_0 := \mathbb{RP}^2$ y $N_g := N_{g-1} \# \mathbb{RP}^2$.

Luego, usando Mayer-Vietoris es fácil verificar que

$$H_i(S_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i > 2 \end{cases} \quad H_i(S_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^g & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

Teorema 1.26 (Teorema de Clasificación de Superficies): Sean X, Y superficies triangulables compactas. Entonces X es homeomorfa a Y si y solo si $H_i(X) \cong H_i(Y)$ para todo i .

Definición: Sea X una superficie compacta. Es **orientable** si $H_2(X) \cong \mathbb{Z}$ y es **no orientable** si $H_2(X) \cong 0$. El **género** de una superficie es

$$\begin{cases} \frac{\text{rango}(H_1)}{2} & \text{si es orientable} \\ \text{rango}(H_2) & \text{si no es orientable} \end{cases}$$

Corolario: Sean X, Y superficies orientables. Entonces $X \cong Y$ si y solo si $\chi(X) = \chi(Y)$.

A partir de lo anterior, Poincaré se pregunto si sucedia lo mismo para variedades de dimensión 3, en otras palabras $X \cong Y$ si y solo si $H_i(X) \cong H_i(Y)$ para todo i . La respuesta es no, el mismo dio un ejemplo. Existe una 3-variedad Σ compacta tal que $H_i(\Sigma) \cong H_i(\mathbb{S}^3)$ que no es homeomorfa a \mathbb{S}^3 .

Para distinguir Σ de \mathbb{S}^3 se invento el grupo fundamental.

2. Cohomología

2.1. Cohomología Singular

Definición: Un **complejo de cocadenas** es una secuencia de grupos de abelianos y homomorfismos

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\partial^0} C^1 \xrightarrow{\partial^1} C^2 \xrightarrow{\partial^2} C^3 \xrightarrow{\partial^3} \dots$$

tales que $\partial^{i+1} \circ \partial^i = 0$. Se denota por $(C^\bullet, \partial^\bullet)$.

Observación: Al igual que en complejos de cadenas, los morfismos ∂^i se llaman **diferenciales**, los elementos en $\text{im } \partial^i$ se dicen **cofronteras** y en $\ker \partial^i$ se dicen **cociclos**. Además, es claro que $\text{im } \partial^i \subseteq \ker \partial^{i+1}$.

Definición: El i -ésimo grupo de cohomología de $(C^\bullet, \partial^\bullet)$ se define por

$$H^i(C^\bullet) := \frac{\ker \partial^i}{\text{im } \partial^{i-1}}$$

Un elemento en $H^i(C^\bullet)$ se conoce como **clase de cohomología**.

Ejemplo: Recordemos el complejo de cadenas

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Donde $H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z}$, $H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_2$ y $H_k(C_\bullet) = 0$. Definimos $C^i := \text{Hom}(C_i, \mathbb{Z})$ y los diferenciales $\partial^i(\varphi) := \varphi \circ \partial_{i+1}$, notemos que $\partial^{i+1} \circ \partial^i(\varphi) = \varphi \circ \partial_{i+1} \circ \partial_{i+2} = 0$. Así, tenemos el complejo de cocadenas

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\cdot 0} C^1 \xrightarrow{\cdot 2} C^2 \xrightarrow{\cdot 0} 0 \longrightarrow \dots$$

Como $C^i \cong \mathbb{Z}$ para $i = 0, 1, 2$, entonces $H^0(C^\bullet) = \mathbb{Z}$, $H^1(C^\bullet) = 0$ y $H^2(C^\bullet) = \mathbb{Z}_2$.

Definición: Sean $(C^\bullet, \partial^\bullet)$ y $(D^\bullet, \partial^\bullet)$ complejos de cocadenas, un **mapeo de cocadenas**, es una colección $(f^n)_n$ de morfismos $f_n : C_n \rightarrow D_n$ tales que $\partial^n \circ f^n = f^{n+1} \circ \partial^n$. En otras palabras, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C^n & \xrightarrow{f^n} & D^n \\ \downarrow \partial^n & & \downarrow \partial^n \\ C^{n+1} & \xrightarrow{f^{n+1}} & D^{n+1} \end{array}$$

conmuta.

Lema 2.1: Sea $(f^n)_n$ un mapeo de cocadenas, entonces $f^* : H^n(C^\bullet) \rightarrow H^n(D^\bullet)$ dado por $[x] \rightarrow [f^n(x)]$ es un morfismo que está bien definido.

La demostración de este lema es análoga al caso de complejo de cadenas. Previamente, definimos el complejo de cadenas singular y los respectivos diferenciales. Usando la idea vista en el ejemplo vamos a definir la cohomología singular.

Definición: Sea X un espacio topológico. Definimos los grupos $C^i(X) := \text{Hom}(C_i(X), \mathbb{Z})$ y los diferenciales $\partial^i : C^i(X) \rightarrow C^{i+1}(X)$ dados por $\partial^i(\varphi) := \varphi \circ \partial_{i+1}$. El **complejo de cocadenas singular** es

$$0 \longrightarrow C^0(X) \xrightarrow{\partial^0} C^1(X) \xrightarrow{\partial^1} C^2(X) \xrightarrow{\partial^2} C^3(X) \xrightarrow{\partial^3} \dots$$

El i -ésimo grupo de cohomología esta dado por

$$H^i(X) := H^i(C^\bullet(X))$$

Observación: No es cierto en general que $H^i(X) = \text{Hom}(H_i(X), \mathbb{Z})$, basta regresar al ejemplo y notar que $H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_2 \neq 0 = H^1(C^\bullet)$.

2.2. Producto Cup

2.3. Anillo de Cohomología

2.4. Dualidad de Poincaré y Fórmula de Künneth

3. Grupo Fundamental

3.1. Primer Grupo Fundamental

Sea $I = [0, 1]$ y X un espacio topológico.

Definición: Un **camino** entre x_0 y x_1 en X es una función continua $\alpha : I \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$. Si $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ se dice **lazo basado** en x_0 .

Denotamos por ctx_0 al lazo constante basado en x_0 . Los caminos se pueden **concatenar**, si α y β son caminos, entonces

$$(\alpha * \beta)(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es un camino entre $\alpha(0)$ y $\beta(1)$.

Definición: Una **homotopía relativa** a $\{0, 1\}$ entre caminos $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ de x_0 a x_1 es una homotopía $H : I \times [0, 1] \rightarrow X$ entre α y β tal que $H(0, t) = x_0$ y $H(1, t) = x_1$ para todo $t \in [0, 1]$.

Definición: Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Sea $\pi_1(X, x_0)$ el conjunto de clases de homotopía relativa a $\{0, 1\}$ de lazos en X basados en x_0 .

Teorema 3.1: Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. La operación

$$\begin{aligned} * : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [\alpha] * [\beta] &\rightarrow [\alpha * \beta] \end{aligned}$$

está bien definida y junto con el elemento $e := [ctx_0]$ dan estructura de grupo a $\pi_1(X, x_0)$.

Demostración. Debemos probar cuatro puntos

- La operación está bien definida. Sean $\alpha \sim \alpha'$ y $\beta \sim \beta'$ lazos basados en x_0 , entonces $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$. Definimos $F : I \times [0, 1] \rightarrow X$

$$F(s, t) := \begin{cases} H(2s, t) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s - 1, t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

donde H y G son homotopías relativas entre α, α' y β, β' respectivamente. Luego, $F(s, 0) = (\alpha * \beta)(s)$ y $F(s, 1) = (\alpha' * \beta')(s)$, es decir, F es una homología relativa entre $\alpha * \beta$ y $\alpha' * \beta'$.

- El elemento e es neutro. Sea α un lazo basado en x_0 . Definimos

$$H(s, t) := \begin{cases} \alpha\left(\frac{2s}{t+1}\right) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ x_0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Es directo que H es una homotopía relativa entre $\alpha * ctx_0$ y α .

- Existencia de inverso. Definimos $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1 - s)$, por demostrar que $[\alpha] * [\alpha^{-1}] = e$, esto es, $\alpha * \alpha^{-1} \sim ctx_0$. Definimos

$$H(s, t) := \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ \alpha(1-t) & \text{si } \frac{1-t}{2} \leq s \leq \frac{1+t}{2} \\ \alpha^{-1}(2s-1) & \text{si } \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Se verifica que H es una homotopía relativa entre ambos lazos.

- Sean α, β, γ lazos basos en x_0 , entonces la función

$$H(s, t) := \begin{cases} \alpha\left(\frac{4s}{1+t}\right) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1+t}{4} \\ \beta(4s - 1 - t) & \text{si } \frac{1+t}{4} \leq s \leq \frac{2+t}{4} \\ \gamma\left(1 - 4\frac{1-s}{2-t}\right) & \text{si } \frac{2+t}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

es una homotopía relativa entre $(\alpha * \beta) * \gamma$ y $\alpha * (\beta * \gamma)$.

□

Definición: El *grupo fundamental* de X en x_0 es $\pi_1(X, x_0)$.

Definición: Un *espacio punteado* es una tupa (X, x_0) donde $x_0 \in X$. Un *morfismo* entre espacios punteados (X, x_0) y (Y, y_0) es una función continua

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{tal que } f(x_0) = y_0$$

Una *homotopía punteada* es una homotopía H entre X e Y tal que $H(x_0, t) = y_0$ para todo $t \in [0, 1]$.

Observación: Sea f un morfismo, entonces induce un homomorfismo

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] &\rightarrow [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

Además, $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ y $id_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$, entonces π_1 es invariante topológico.

Teorema 3.2 (Invarianza Homotópica): Sea $f : X \rightarrow Y$ equivalencia homotópica, entonces

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

es isomorfismo.

Lema 3.3: Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ camino tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$. Entonces la función

$$\begin{aligned} \gamma_{\#} : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [\alpha] &\rightarrow [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] \end{aligned}$$

esta bien definida y es isomorfismo. Es más, si $\gamma \sim \gamma'$ entonces $\gamma_{\#} = \gamma'_{\#}$

| Demostración.

□

| Demostración. (Teorema)

□

Definición: Un espacio X se dice simplemente conexo, si es arcoconexo y $\pi_1(X, x_0) = 0$ para algún $x_0 \in X$.