Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Mauricio Bustamante – Estudiante: Benjamín Mateluna

Topología Algebraica - MAT2850
Apuntes
05 de agosto de 2025

Índice

Motivación

Dados dos espacios topológicos X e Y ¿Cuando son homeomorfos?. Decimos que dos espacios son **homeomorfos** si existe $f : X \to Y$ continua, biyectiva y con inversa constinua. La topología algebraica ataca esta pregunta de la siguiente forma:

(1) Asigna a cada espacio topológico X un objeto algebraico $G(X)$.

(2) Aigna a cada función continua $f : X \to Y$ un homomorfismo $G(f) : G(X) \to G(Y)$ tal que

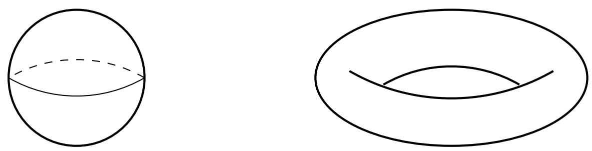
   (a) $G(f \circ g) = G(f) \circ G(g)$

   (b) $G(id_X) = id_{G(X)}$

Observación: Ambas condiciones implican que si $f : X \to Y$ es homeomorfismo, entonces $G(f) : G(X) \to G(Y)$ es isomorfismo. A veces los G que se construyen satisfacen la propiedad extra que si X se puede "deformar continuamente" en Y entonces $G(X) \cong G(Y)$.

Decimos que G es un **invariante homotópico**.
Ejemplos:

(1) Tenemos los espacios



Mas adelante veremos que la homología le asigna a la esfera el grupo $\{e\}$ y al toro $\mathbb{Z}^2$. En general, una superficie de genero g tendrá el grupo $\mathbb{Z}^{2g}$.

(2) ¿Cuando $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ son homeomorfos? Si $n \neq$, el grupo de homología de $\mathbb{R}^n$ será $\{e\}$ y por el contrario, para $\mathbb{R}^m$ va a ser $\mathbb{Z}$ y por lo tanto R^n y $\mathbb{R}^m$ son homeomorfos si y solo si $n = m$.

(3) Un ejemplo particular, para el circulo se tiene que $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ pero $\pi_1(\mathbb{S}^2) = \{e\}$ y por lo tanto los espacios no son homeomorfos.

Definición: *Una **homotopía** entre dos funciones continuas $f, g : X \to Y$ es una función continua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.*
Notación: La función $H_t : X \to Y$ esta dada por $H_t(x) := H(x, t)$. Una homotopía de f a g se denota por $f \sim g$.

Proposición 0.1: *Ser homotópico es una relación de equivalencia en $\mathcal{C}(X, Y)$.*

Demostración. Debemos probar tres cosas

(1) La relación es reflexiva. Sea $f : X \to Y$, consideramos la homotopía constante, esto es $H(x, t) := f(x)$ es continua ya que

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[rr, bend right, "H"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

(2) Simetría. Supongamos que $f \sim g$, consideramos $H'(x, t) = H(x, 1 - t)$ y es continua por que

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r, "id \times (1-t)"] \arrow[rr, bend right, "H'"'] & X \times [0,1] \arrow[r, "H"] & Y \end{tikzcd}$$

(3) Por último, la transitividad. Sean $f \sim g$ y $g \sim h$, Definimos $H * G : X \times [0,1] \to Y$ dada por

$$H * G(x, t) := \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

que resulta continua por el lema del pegado.

□

Definición: *Decimos que $f : X \to Y$ es una **equivalencia homotópica**, si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f \sim id_X$ y $f \circ g \sim id_Y$* En tal caso, X e Y se dicen homotópicamente equivalentes o que tienen el mismo tipo de homotopía y se denota por $X \sim Y$.

Ejemplo:

(1) Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo, en particular, tomando $g = f^{-1}$, se sigue que es equivalencia homotópica.

(2) Se tiene que $\{0\} \sim \mathbb{R}^n$, consideremos la inclusión $i :\to \{0\} \to \mathbb{R}^n$, afirmamos que es i es equivalencia homotópica. En efecto, se verifica que $\pi : \mathbb{R}^n \to \{0\}$ es una inversa homotópica. Por un lado $\pi \circ i = id_{\{0\}}$ y por otro $i \circ \pi = 0$. Notamos que $H(x, t) = tx$ con $t \in [0, 1]$ es una homotopía entre 0 y $id_{\mathbb{R}^n}$.

(3) Veamos que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim \mathbb{S}^{n-1}$. Probaremos que la función $i : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es equivalencia homotópica. En efecto,

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\to \mathbb{S}^{n-1} \\ x &\to \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

es inversa homotópica. Es claro que $\pi \circ i = id_{s^{n-1}}$. Definimos

$$H(x, t) := t\frac{x}{|x|} + (1 - t)x$$

Notamos que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = \frac{x}{|x|}$, es decir, H es una homotopia entre $i \circ \pi$ e $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$. Además, se verifica que $im(H) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1. Homología

Queremos asignarle a un espacio topológico X arbitrario, grupos abelianos $H_0(X), H_1(X), \cdots$ tal que si $X \sim Y$, entonces $H_i(X) \cong H_i(Y)$ para todo i. Ituitivamente, $H_k(X)$ estará generado por ciertos subespacios de X de dimensión k.

Habrá una relación de equvalencia, $A, B \subseteq X$ de dimensión k serán equivalentes si hay un subespacio de X de dimensión $k+1$ cuyo borde es $A \cup B$.

Hay que restringir la clase de espacios a una con nociones de dimensión, borde, etc. Estos serán los complejos simpliciales. Necesitamos, adicionalmente, un objeto algebraico que capture esas nociones, esto corresponde a los complejos de cadenas.

1.1. Complejos de Cadenas

Definición: *Un **complejo de cadenas** es una sucesión de grupos abelianos y homomorfismos*

$$\cdots \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

tal que $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ para todo i. Se denota por $(C_\bullet, \partial_\bullet)$.

Observación: Notemos que $im\ \partial_{i+1} \subseteq ker\ \partial_i \subseteq C_i$. Dado que los grupos son abelianos, esta observación permite definir el siguiente objeto.

Definición: *El **i-ésimo grupo de homología** de $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ se define por*

$$H_i(C_i) := \frac{ker\ \partial_i}{im\ \partial_{i+1}}$$

Ejemplos:

- Si A un grupo abeliano, entonces

  $$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0$$

  es un complejo de cadenas donde $C_i = A$. Entonces

  $$H_j(C_\bullet) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ A & \text{si } j = i \end{cases}$$

- Consideremos la cadena exacta

  $$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

  entonces $H_j(C_\bullet) = 0$ para todo i.

- Veamos que

  $$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

  es un complejo de cadenas. Los grupos de homología asociados son $H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z}$, $H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_2$ y $H_k(C_\bullet) = 0$ para $k \neq 0, 1$.

Definición: *Sean $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ y $(D_\bullet, \partial_\bullet)$ dos complejos de cadenas. Un **mapeo de cadenas** es una colección de homomorfismos $f_n : C_n \to D_n$ tal que $\partial_n f_n = f_{n-1} \partial_n$ para todo n, es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ D_n \arrow[r, "\partial_n"] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

y se denota por $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$.

Lema 1.1: *Si $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ es un mapeo de cadenas, entonces la asignación $f_* : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$ dada por*

$$f_*([x]) = [f_n(x)]$$

esta bien definida y es un homomorfismo de grupos.

Demostración. Sea $x \in ker\partial_n$ entonces $\partial_n f_n(x) = f_{n-1}\partial_n(x) = f_{n-1}(0) = 0$. Así, $f_n(x) \in ker\ \partial_n$ y por tanto la expresión tiene sentido. Si $[x] = [y]$ entonces $x - y = \partial_n(z)$ para $z \in C_{n+1}$, se sigue que $f_n(x) - f_n(y) = f_n\partial_{n+1}(z) = \partial_{n+1}f_{n+1}(z)$. Concluimos que $[f_n(x)] = [f_n(y)]$. □

Ejemplo: Consideremos la siguiente situación

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "3"] \arrow[d, "id"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 & C_\bullet \arrow[d, "f_\bullet"] \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "3"] & \mathbb{Z}_3 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 & D_\bullet
\end{tikzcd}$$

Entonces $f_* : H_2(C_\bullet) = 0 \to H_2(D_\bullet) = \mathbb{Z}$ es el morfismo trivial. Mientras que $\pi_* : H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_3 \to H_1(D_\bullet) = \mathbb{Z}_3$ es la identidad.

Observación: Sea $g_\bullet : D_\bullet \to G_\bullet$ un mapeo de cadenas, entonces $(g \circ f)_\bullet : C_\bullet \to G_\bullet$ es un mapeo de cadenas y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
H_n(C_\bullet) \arrow[rr, "(g\circ f)_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & & H_n(G_\bullet) \\
& H_n(D_\bullet) \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\partial_n g_n f_n = g_{n-1}\partial_n f_n = g_{n-1}f_{n-1}\partial_n$. Por otro lado, tenemos que $(g\circ f)_*([x]) = [(g\circ f)(x)] = g_*([f(x)]) = (g_*\circ f_*)([x])$, lo que prueba la afirmación.

Definición: *Sean $i_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ y $j_\bullet : B_\bullet \to C_\bullet$ dos mapeos de cadenas. Decimos que forman una sucesión exacta corta si la secuencia*

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{i_n} B_n \xrightarrow{j_n} C_n \longrightarrow 0$$

es exacta y corta de grupos abelianos libres para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo denotamos como $0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$.

Teorema 1.2 (Lema de la serpiente): *Sea $0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$ una secuencia de complejos de cadenas, entonces existen morfismos*

$$\delta_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(A_\bullet) \arrow[r, "i_*"] & H_n(B_\bullet) \arrow[r, "j_*"] & H_n(C_\bullet) \arrow[dll, rounded corners, "\delta_n"'] & \\
& H_{n-1}(A_\bullet) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-1}(B_\bullet) \arrow[r, "j_*"] & H_{n-1}(C_\bullet) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(B_\bullet) \longrightarrow H_0(C_\bullet) \longrightarrow 0$$

Demostración. Vamos a hacer un cacería de diagramas (:D). Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_{n+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_n \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Primero debemos definir $\delta_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$. Sea $[c] \in H_n(C_\bullet)$ entonces $c \in ker\ \partial \subseteq C_n$. Como j es sobre, existe $b \in B_n$ tal que $j(b) = c$. Consideramos ∂b y notamos que

$$j\partial(b) = \partial j(b) = \partial c = 0$$

entonces existe un único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b$. Verificamos que $i\partial(a) = \partial i(a) = \partial^2 b = 0$ y como i es inyectiva vemos que $\partial a = 0$. Afirmamos que $\delta_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$ por

$$\delta_n([c]) = [a]$$

cumple lo buscado. Debemos demostrar lo siguiente

(1) No depende de la elección de b. Sea b' tal que $j(b') = c$ entonces $j(b' - b) = c - c = 0$, existe único a_0 tal que $i(a_0) = b' - b$. Por otro lado, existe a' tal que
$$i(a') = \partial b' = \partial b + \partial i(a_0) = \partial b + i\partial(a_0)$$
entonces $i(a' - \partial a_0) = \partial b = i(a)$, por inyectividad, $a' - \partial a_0 = a$, lo que implica que $[a] = [a']$.

(2) No depende de la elección del representante de $[c]$. Sea $c' = c + \partial c'' = j(b) + \partial j(b'') = j(b) + j\partial(b'')$, diremos $b' = b + \partial b''$, notemos que $\partial b' = \partial b + \partial^2 b'' = \partial b$. El mismo $a \in A_{n-1}$ satisface $i(a) = \partial b'$. Entonces $\delta_n[c] = [a] = \delta_n[c']$.

(3) La función δ_n es morfismo, es decir
$$\delta_n([c] + [c']) = \delta_n[c] + \delta_n[c']$$
Notar que si $j(b) = c$ y $j(b') = c'$ entonces $j(b + b') = c + c'$, existen únicos $a, a' \in A_{n-1}$ tales que $i(a + a') = \partial(b + b'')$ y así
$$\partial_n([c + c']) = [a + a'] = [a] + [a']$$

(4) Exactitud en $H_n(C_\bullet)$ y $H_n(A_\bullet)$. Veamos que $im\ j_* \subseteq ker\ \delta_n$. Sea $j_*[b]$ con $\partial b = 0$. Entonces

$$\delta_n j_*[b] = \delta_n[j(b)]$$

Existe único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b = 0$, entonces $a = 0$ y por lo tanto $\delta_n j_*[b] = [a] = 0$. Queda ver que $ker\ \delta_n \subseteq im\ j_*$. Sea $[c] \in ker\ \delta_n$ con $\partial c = 0$. Por definición de δ_n, para cada b tal que $j(b) = c$ hay un único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b$.

Como $\delta_n[c] = [a] = 0$ se sigue que $a = \partial a'$ y entonces $\partial b = i(a) = i\partial(a') = \partial i(a')$, así $b - i(a') \in ker\ \partial$, es decir $b - i(a')$ representa una clase de homología.

Ahora $j(b - i(a')) = j(b) = c$, por ende, $j_*[b - i(a')] = [c]$. Para $H_n(A_\bullet)$ la demostración es similar.

(5) Exactitud en $H_n(B_\bullet)$. Sea $[a] \in im\ i_*$ con $\partial a = 0$, entonces

$$j_* i_*[a] = [j_n i_n(a)] = 0$$

y por lo tanto $im\ i_* \subseteq ker\ j_*$. Sea $[b] \in ker\ j_*$ con $\partial b = 0$, entonces $j_*[b] = [j(b)] = 0$, lo que implica que $j(b) = \partial c' = \partial j(b') = j\partial(b')$, existe único $a \in A_{n-1}$ tal que $b - \partial b' = i(a)$, además

$$i\partial(a) = \partial i(a) = \partial b + \partial^2 b' = 0$$

entonces $\partial a = 0$. Luego $i_*[a] = [b]$. Concluimos que $im i_* = ker\ j_*$.

Lo que concluye el teorema. □

Definición: *Sean $f_\bullet, g_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ mapeos de cadenas. Una **homotopía de cadenas** es una colección de morfismos*

$$h_n : C_n \to C_{n+1} \quad \text{tal que}$$
$$f_n - g_n = \partial h_n + h_{n-1}\partial$$

Lo denotamos como $f_\bullet \sim g_\bullet$.

Proposición 1.3: *Sea $f_\bullet \sim g_\bullet$ entonces $f_* = g_*$.*

Demostración. Sea $[x] \in H_n(C_\bullet)$, por definición, sabemos que $\partial x = 0$, luego

$$(f_* - g_*)([x]) = [(f - g)(x)] = [(\partial h + h\partial)(x)] = [\partial hx] = 0$$

lo que prueba la afirmación. □

Proposición 1.4 (Lema del 5): *Considerar el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

donde las filas son secuencias exactas y cada cuadrado conmuta. Si f_1, f_2, f_4 *y* f_5 *son isomorfismos, entonces* f_3 *es isomorfismo.*

Demostración. Por simplicidad del argumento, denotaremos los morfismos $A_i \to A_{i+1}$ y $B_i \to B_{i+1}$ como ∂. Debido a que ambas secuencias son exactas, resulta que $\partial^2 a = \partial \circ \partial(a) = 0$. Veamos que $ker\ f_3 = 0$. Sea $a \in ker\ f_3$, notemos que

$$0 = \partial f_3(a) = f_4\partial(a) \quad \text{entonces} \quad \partial a = 0$$

Como $a \in ker\ \partial$, existe $a' \in A_2$ tal que $\partial a' = a$, luego $\partial f_2(a') = f_3\partial(a') = f_3(a) = 0$. Por exactitud, existe $b' \in B_1$ tal que $\partial b' = f_2(a')$, puesto que f_1 es isomorfismo, existe $a'' \in A_1$ tal que $b' = f_1(a'')$, usando que los diagramas conmutan vemos que

$$a'' = f_1^{-1}(b') \quad \text{entonces} \quad \partial a'' = \partial f_1^{-1}(b') = f_2^{-1}\partial(b')$$

recordemos que $\partial b' = f_2(a')$, es decir, $\partial a'' = a'$, luego $0 = \partial^2 a'' = \partial a' = a$.

Sea $b \in B_3$, consideramos $\partial b \in B_4$, entonces $f_4^{-1}(\partial b) \in A_4$, por conmutatividad del diagrama, se sigue que $\partial f_4^{-1}(\partial b) = f_5^{-1}(\partial^2 b) = 0$, luego, por exactitud, existe $a \in A_3$ tal que $\partial a = f_4^{-1}(\partial b)$. Observemos que,

$$\partial(f_3(a) - b) = \partial f_3(a) - \partial b = f_4\partial(a) - \partial b = 0$$

Así, existe $b' \in B_2$ tal que $\partial b' = f_3(a) - b$, definimos $a' = f_2^{-1}(b') \in A_2$, de este modo,

$$f_3(a) - b = \partial b' = \partial f_2(a') = f_3(\partial a')$$

En resumen, $f_3(a - \partial a') = b$. Concluimos que f_3 es isomorfismo. $\square$

Nuestro objetivo será asociar un complejo de cadenas a un espacio topológico X arbitrario, lo que nos dara un grupo de homología para cada dimensión, además dada $f : X \to Y$ una función continua, nos gustaría obtener un mapeo de cadenas y por tanto un homomorfismo entre los grupos de homología de cada espacio.

1.2. Complejos Simpliciales

Definición: *Dados $n+1$ puntos $\{v_0, \cdots, v_n\} \in \mathbb{R}^\omega$ son* ***afínmente independientes****, si generan un $n-$plano afín, es decir, $\{v_1 - v_0, \cdots, v_n - v_0\}$ es un conjunto linealmente independiente, esto es*

$$\sum_{i=0}^{n} t_i v_i = 0 \quad y \quad \sum_{i=0}^{n} t_i = 0 \quad entonces \quad t_i = 0 \text{ para todo } i$$

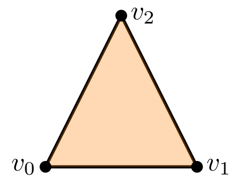
Ejemplo: Dos puntos son afínmente independientes. Tres puntos son afínmente independientes si y solo si no son colineales.

Definición: *Si $\{v_0, \cdots, v_n\}$ son afínmente independientes, ellos definen el* ***n-simplejo***

$$\sigma = \langle v_0, \cdots, v_n \rangle = \left\{ x = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i, \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \quad y \quad t_i \geq 0 \right\}$$

Decimos que σ es el $n-$simplejo generado por $v_0, \cdots, v_n$. Los puntos v_i se llaman **vértices** de σ. Una **cara** de un simplejo σ es un simplejo τ generado por un subconjunto de $\{v_0, \cdots, v_n\}$ y lo denotamos por $\tau \leq \sigma$. Si el subconjunto es propio, se dice que τ es una **cara propia**.

La **frontera** de un $n-$simplejo σ es la unión de todas sus caras propias, se denota por $\partial\sigma$, el **interior** de σ es $int(\sigma) := \sigma \setminus \partial\sigma$.



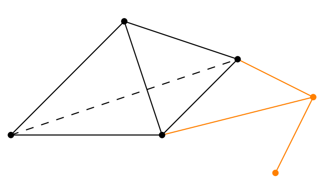
Definición: *Un* ***complejo simplicial*** *(geométrico) K es un conjunto de simplejos tales que*

(1) Si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau \in K$.

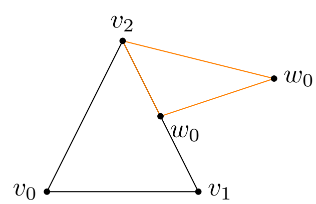
(2) Si $\sigma, \tau \in K$ entonces $\sigma \cap \tau = \emptyset$ ó $\sigma \cap \tau$ es una cara de σ y de τ.

El **poliedro** asociado a un complejo simplicial K es $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$. Un espacio topológico X se llama un poliedro si existe un complejo simplicial K y un homeomorfismo $f : |K| \to X$. Al par (K, f) se le llama una **triangulación** de X. Denotamos por V_K al conjunto de vértices de los simplices.

Observación: Si X es triangulable, entonces es Hausdorff por que $|K|$ lo es.



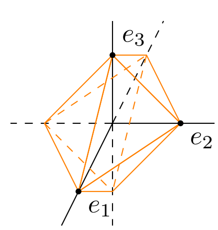
(1)



(2)

La figura (1) corresponde a un complejo simplicial, mientras que la figura (2) no es un complejo simplicial ya que los simplices que la componen no se pegan bien.

Ejemplo: Consideremos el complejo simplicial K formado por los simplices $\sigma = \langle \pm e_1, \pm e_2, \pm e_3 \rangle$ y sus respectivas caras. Consideremos $f : |K| \to \mathbb{S}^2$ por $f(x) := x/|x|$, entonces (K, f) es una triangulación de la $2-$esfera.



Definición: *Sean K y L complejos simpliciales. Un **mapeo simplicial** de K a L es una función $f : V_K \to V_L$ tal que si $\sigma = \langle v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_n} \rangle$ es un simplejo en K entonces*

$$\{f(v_{\alpha_0}), \cdots, f(v_{\alpha_n})\}$$

genera un simplice en L, al cual llamamos $f(\sigma)$. Notación $f : K \to L$.

Ejemplo: Sea $\triangle^n = \langle e_1, \cdots, e_{n+1} \rangle \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^\infty$. Entonces las funciones $f : \triangle^1 \to \triangle^2$ y $g : \triangle^2 \to \triangle^1$ dadas por $f(e_i) = e_i$ y $g(e_1) = g(e_3) = e_1$, $g(e_2) = e_2$ son mapeos simpliciales.

Lema 1.5: *Sea $f : K \to L$ un mapeo simplicial. Entonces induce una función continua $|f| : |K| \to |L|$.*

Demostración. Sea $\sigma \in K$, digamos que $\sigma = \langle v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_n} \rangle$ y Definimos

$$\begin{aligned} f_\sigma : \sigma &\to |L| \\ \sum_{i=0}^{k} t_i v_i &\to \sum_{i=0}^{k} t_i f(v_i) \end{aligned}$$

que es continua por que es lineal en los t_i. Se observa que si $\tau \leq \sigma$ entonces $f_\tau = f_\sigma\big|_\tau$. Ahora tomamos σ y σ', entonces

$$f_\sigma\big|_{\sigma\cap\sigma'} = f_{\sigma\cap\sigma'} = f_{\sigma'}\big|_{\sigma\cap\sigma'}$$

entonces $|f| := \bigcup_{\sigma\in K} f_\sigma$ es una función continua de $|K|$ en $|L|$. □

Sea $g : L \to J$ un mapeo simplicial, entonces $g \circ f$ es mapeo simplicial, ya que f mapea vértices de un simplice a vértices de un simplice y del mismo modo lo hace g, además se tiene lo siguiente

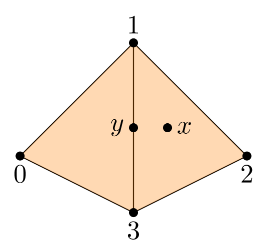
$$|g \circ f|\,(x) = |g \circ f| \left(\sum t_i v_{\alpha_i}\right) = \sum t_i (g \circ f)(v_{\alpha_i}) = \sum t_i g(f(v_{\alpha_i})) = (|g| \circ |f|)(x)$$

es decir, $|g \circ f| = |g| \circ |f|$. Un mapeo simplicial puede ser definido también como una función continua $f : |K| \to |L|$ que manda vértices en vértices y es lineal en sus caras.

Definición: *Sea $x \in |K|$. El **portador** de x es el simplejo de K mas pequeño (en términos de inclusión) que contiene a x. Se denota por $carr(x)$.*

Definición: *Sea $w \in V_K$. El conjunto $St_K(w) := \{x \in |K| : w \in carr(x)\}$ le decimos la **estrella de** w.*

Ejemplo: Veamos el siguiente complejo



Entonces $carr(y) = \langle 1, 3 \rangle$, $carr(x) = \langle 1, 2, 3 \rangle$ y $carr(3) = \langle 3 \rangle$.

Observación: Notemos que $y \in carr(x)$ si y solo si $carr(y) \subseteq carr(x)$. Sea $\sigma \in K$, entonces $\sigma = carr(x)$ si y solo si $x \in int(\sigma)$, esto es una caracterización útil del portador.

En efecto, si $\sigma = carr(x)$, supongamos, por contradicción, que $x \in \partial\sigma$, entonces $x \in \tau < \sigma$, como K es complejo, $\tau \in K$. Por otro lado, si $x \in int(\sigma)$, sea $\tau \in K$ tal que $x \in \tau$, luego $\tau \cap \sigma$ es una cara de σ, pero $x \in \tau \cap \sigma$ lo que implica que $\sigma = \tau \cap \sigma \subseteq \tau$, es decir, $\sigma = carr(x)$.
Por otro lado, usando lo anterior vemos que $St_K(w) = \bigcup_{w\in\sigma\in K} int(\sigma)$, entonces la estrella de un vértice es un abierto en $|K|$.

Proposición 1.6: *Sea $g : K \to L$ un mapeo simplicial, entonces $g(carr(x)) = carr(g(x))$.*

Demostración. Por la observación anterior, basta probar que $g(x) \in int(g(carr(x)))$, sean $v_i \in V_K$ tales que $\langle v_1, \cdots, v_n \rangle = carr(x)$, luego

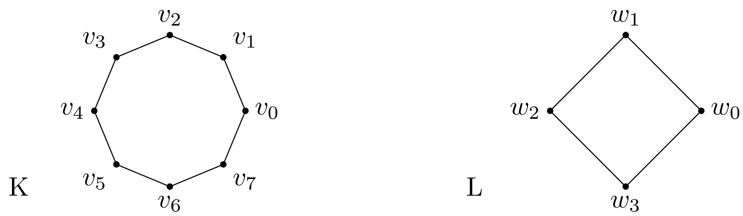
$$x = \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \quad \text{donde } t_i > 0 \text{ para todo } i\text{, entonces} \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i g(v_i) \in g(carr(x))$$

como $t_i > 0$ vemos que $g(x) \in int(g(carr(x)))$. □

Definición: *Sea $f : |K| \to |L|$ una función continua. Una **aproximación simplicial** a f es un mapeo simplicial $g : K \to L$ tal que*

$$g(x) \in carr(f(x)) \text{ para todo } x \in |K|$$

Ejemplo: Se definen los siguientes complejos simpliciales,



El poliedro asociado a cada complejo es $\mathbb{S}^1$, consideramos la función continua $f(z) = z^2$, una aproximación simplicial es $g(v_i) = g(v_{i+4}) = w_i$ para $0 \leq i \leq 3$.

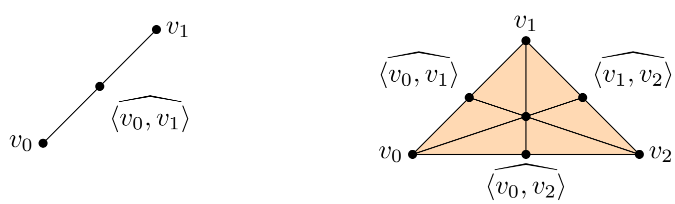
Definición: *Sea K un complejo simplicial. La **primera subdivisión baricéntrica** K' **de** K es el complejo simplicial K' cuyos*

- *Vértices son los baricentros $\hat{\sigma}$ de los simpleces σ de K.*
- *Un $n-$simplice de K' es $\langle \hat{\sigma_0}, \hat{\sigma_1}, \cdots, \hat{\sigma_n} \rangle$ si $\sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n$ (Son caras propias).*

Una $r-$ésima división baricéntrica se define recursivamente $K^{(r)} := (K^{(r-1)})'$. Recordemos que si $\sigma = \langle v_0, \cdots, v_n \rangle$ entonces $\hat{\sigma} = \frac{1}{n+1} \sum v_i$.

Proposición 1.7: *Sea K un complejo simplicial entonces $|K'| = |K|$.*

Ejemplo: Algunos ejemplos de división baricéntrica de dos simplices.



donde el punto central del segundo ejemplo es $\widehat{\langle v_0, v_1, v_2 \rangle}$.

1.3. Homología Simplicial

Dado K un complejo simplicial finito, esto es, que tiene un número finito de vértices. Elegimos un orden total en el conjunto de vértices, digamos $v_0 < v_1 < \cdots < v_n$.

Definición: *(**Complejo de cadenas simplicial**) Consideremos los grupos abelianos*

$$C_n(K) := \left\{ \sum n_\sigma \sigma : \sigma = \langle v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_n} \rangle \text{ tal que } v_{\alpha_0} < \cdots < v_{\alpha_n} \text{ y } n_\sigma \in \mathbb{Z} \text{ nulo salvo finitos casos} \right\}$$

y los diferenciales $\partial_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ se define en la base por

$$\partial_n \langle v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_n} \rangle = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle v_{\alpha_0}, \cdots, \widehat{v_{\alpha_i}}, \cdots, v_{\alpha_n} \rangle$$

donde $\langle v_{\alpha_0}, \cdots, \widehat{v_{\alpha_i}}, \cdots, v_{\alpha_n} \rangle := \left\langle v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_{i-1}}, v_{\alpha_{i+1}}, \cdots, v_{\alpha_n} \right\rangle$. Se extiende linealmente al resto del grupo.

> **Teorema 1.8:** *La tupla $(C_\bullet(K), \partial_\bullet)$ es un complejo de cadenas, además, la homología del complejo no depende del orden en el conjunto de vértices.*

Definición: *Sea K un complejo simplicial finito. El **i-ésimo grupo de homología simplicial** de K es*

$$H_i(K) := H_i(C_\bullet(K)) = \frac{ker\ \partial_i}{im\ \partial_{i+1}}$$

Ejemplos:

(1) Sea $K = \{\langle v_0, v_1 \rangle, \{v_0\}, \{v_1\}\}$ y consideramos el orden $v_0 < v_1$. El complejo corresponde a un segmento de recta, notemos que $3v_0 - 5v_1 \in C_0(K)$, con la identificación $v_0 = (1,0)$ y $v_1 = (0,1)$ vemos que $C_0(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, esta identificación no es canónica, es decir, depende de la base que escojamos y sus imagenes correspondientes.

Por otro lado, $C_1(K) \cong \mathbb{Z}$ con la identificación $\langle v_0, v_1 \rangle = 1$. Adicionalmente, se tiene que $C_i(K) = 0$ para $i > 1$. Luego,

$$0 \longrightarrow C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{0} 0$$

donde $\partial_1 \langle v_0, v_1 \rangle = v_1 - v_2 \in C_0(K)$. Con las identificaciones que hicimos resulta que $\partial_1(1) = (-1, 1)$. De este modo queda la cadena

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

Así $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(K) = 0$, $H_i(K) = 0$ para $i > 0$.

(2) Sean v_0, v_1, v_2 puntos no colineales. Consideramos $\sigma = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ y $K := \{\tau \leq \sigma\}$ definimos el orden $v_0 < v_1 < v_2$. Notemos que

$$\begin{aligned} C_0(K) &= \mathbb{Z}\{v_0, v_1, v_2\} \\ C_1(K) &= \mathbb{Z}\{\langle v_0, v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_0, v_2 \rangle\} \\ C_2(K) &= \mathbb{Z}\{\langle v_0, v_1, v_2 \rangle\} \end{aligned}$$

Entonces $\partial_0 = 0$,

$$\partial_1 = \begin{cases} \partial \langle v_0, v_1 \rangle = v_1 - v_0 \\ \partial \langle v_1, v_2 \rangle = v_2 - v_1 \\ \partial \langle v_0, v_3 \rangle = v_3 - v_0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \partial_2 \langle v_0, v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle - \langle v_0, v_2 \rangle + \langle v_0, v_1 \rangle$$

Realizando las identificaciones $v_i = e_{i+1}$ para $i = 0, 1, 2$, $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle = 1$, $\langle v_0, v_1 \rangle = e_1$, $\langle v_1, v_2 \rangle = e_2$ y $\langle v_0, v_2 \rangle = e_3$ resulta que $C_0(K) \cong \mathbb{Z}^3, C_1(K) \cong \mathbb{Z}^3$ y $C_2(K) \cong \mathbb{Z}$. Tenemos

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \longrightarrow 0$$

donde

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Claramente $H_i(K) = 0$ para $i > 2$. Además, $ker\ \partial_2$, entonces $H_2(K) = 0$. Notemos que $im\ \partial_2 \cong \mathbb{Z}$ y $ker\ \partial_1 \cong \mathbb{Z}$, luego $H_1(K) = 0$. Por otro lado, $im\ \partial_1 \cong \mathbb{Z}^2$. Por ende $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

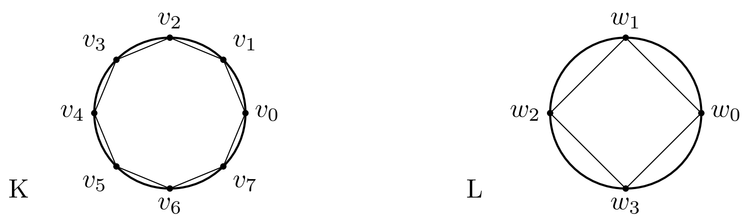
Comentario: Se invita a calcular la homología de un $n-$simplejo. Hasta ahora hemos definido todo respecto a $\mathbb{Z}$, pero se puede definir homología simplicial de manera análoga para cualquier anillo R.

Lema 1.9: *Sea $f : K \to L$ un mapeo simplicial, definimos los morfismos*

$$f_n : C_n(K) \to C_n(L)$$
$$\langle v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_n} \rangle \to \begin{cases} sign(\varphi) \left\langle f(v_{\varphi(\alpha_0)}), \cdots, f(v_{\varphi(\alpha_n)}) \right\rangle & \textit{si son distintos} \\ 0 & \textit{si no lo son} \end{cases}$$

donde φ es una permutación tal que $f(v_{\varphi(\alpha_0)}) < \cdots < f(v_{\varphi(\alpha_n)})$. Entonces, la colección, es un mapeo de cadena.
Por lo tanto, f induce un morfismo entre los grupos de homología de los complejos simpliciales

Ejemplo: Definimos los siguientes complejos simpliciales



Para cada complejo se da el orden que sigue $v_0 < v_1 < \cdots < v_7$ y $w_0 < w_1 < w_2 < w_3$ y definimos $f : K \to L$ por $f(v_i) = f(v_{i+4}) = w_i$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Veamos quien es $f_* : H_1(K) \to H_1(L)$. En primer lugar, sabemos que

$$H_1(K) = ker(C_1(K) \to C_0(K)) = ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathbb{Z}$$

Similarmente $H_1(K) \cong \mathbb{Z}$. Entonces

$$f_*(\langle v_0, v_1 \rangle + \cdots + \langle v_6, v_7 \rangle - \langle v_0, v_7 \rangle) = 2(\langle w_0, w_1 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle + \langle w_2, w_3 \rangle - \langle w_0, w_3 \rangle)$$

luego $f_* : H_1(K) \xrightarrow{\cdot 2} H_1(L)$. Por otro lado, notemos que $H_0(K) \cong H_0(L) \cong \mathbb{Z}$, ya que todo par de vértices en el complejo esta conectado por una secuencia de aristas, luego $f_*([v_0]) = [w_0]$, entonces $f_* : H_0(K) \to H_0(L)$ es isomorfismo.

Teorema 1.10 (Mayer-Vietoris): *Sea K un complejo simplicial y M, N subcomplejos de K que cubren a K, es decir, $M \cup N = K$. Se tienen los mapeos*

$$\begin{tikzcd} M \cap N \arrow[r, "i_N"] \arrow[d, "i_M"] & N \arrow[d, "j_N"] \\ M \arrow[r, "j_M"] & K \end{tikzcd}$$

Existen morfismos $\delta_n : H_n(K) \to H_{n-1}(K)$ tales que la secuencia

$$\xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(M \cap N) \xrightarrow{i_{M*} \oplus i_{N*}} H_n(M) \oplus H_n(N) \xrightarrow{j_{M*} - j_{N*}} H_n(K) \xrightarrow{\delta_n}$$
$$\longrightarrow H_{n-1}(M \cap N) \xrightarrow{i_{M*} \oplus i_{N*}} H_{n-1}(M) \oplus H_{n-1}(N) \xrightarrow{j_{M*} - j_{N*}} H_{n-1}(K) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(M) \oplus H_0(N) \xrightarrow{j_{M*} - j_{N*}} H_0(K) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Verificaremos que

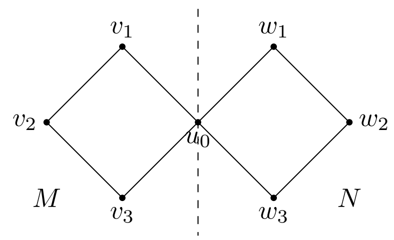
$$0 \longrightarrow C_n(M \cap N) \xrightarrow{i_M \oplus i_N} C_n(M) \oplus C_n(N) \xrightarrow{j_M - j_N} C_n(K) \longrightarrow 0$$

es una secuencia exacta corta de grupos abelianos para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, como C_n es libremente generado por los $n-$simplices e i es inyectiva, entonces $i_{M*} \oplus i_{N*}$ es inyectiva. Además, $j_{M*} - j_{N*}$ es sobreyectiva por hipotesis y es directo que $im\ i_{M*} \oplus i_{N*} \subseteq ker\ j_{M*} - j_{N*}$. Resta ver que

$$ker\ j_{M*} - j_{N*} \subseteq im\ i_{M*} \oplus i_{N*}$$

Sea $(x, y) \in ker\ j_{M*} - j_{N*}$ entonces $j_{M*}(x) = j_{N*}(y)$, es decir, x e y se escriben como suma de simplices en N y M respectivamente, entonces $(x, y) \in im\ i_{M*} \oplus i_{N*}$. Así, usando el lema de la serpiente, concluimos. $\square$

Ejemplo: Consideremos la siguiente situación



$= K$

Notemos que $H_1(M) \cong \mathbb{Z}$ y $H_1(N) \cong \mathbb{Z}$, además $M \cap N = \{u_0\}$, entonces usando mayer vietoris nos queda que

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r] & H_1(K) \arrow[dll] & \\
 & \mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "\phi"] & H_0(K) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Para $i > 2$ notamos que $H_i(K) = 0$, por otro lado el morfismo $\varphi(1) = (1, 1)$ ya que manda generador en generador, esto por que todo par de puntos en M y N estan relacionados por un camino de aristas. De este modo,

$$H_0(K) \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\ker \phi} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{im\ \varphi} \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

donde el último isomorfismo se da por que φ es inyectiva, es decir, el morfismo $H_1(K) \to \mathbb{Z}$ es trivial.

Teorema 1.11: *Sea $f : |K| \to |L|$ una función continua. Entonces f induce un homomorfismo*

$$f_* : H_*(K) \to H_*(L)$$

tal que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ e $id_* = id_{H_*(K)}$, donde $g : |L| \to |M|$ es continua.

Observación: Con esto se tendría que $H_*(K)$ es invariante topológico. Se probara en dos pasos. Veremos que toda función f continua se puede "aproximar" a una función g simplicial, también hay que comprobar que $f_* := g_*$ es independiente de la función simplicial escogida.

Teorema 1.12 (Aproximación Simplicial): *Sean K, L complejos simpliciales finitos y $f : |K| \to |L|$ una función continua. Entonces existe $r \in \mathbb{N}$ y una aproximación simplicial a f*

$$g : K^{(r)} \to L$$

A partir de esta aproximación simplicial, se cumplen dos propiedades importantes, que son

(1) f es homotópica a g. Notemos que $g(x), f(x) \in carr(f(x))$, entonces el segmento entre $g(x)$ y $f(x)$ está en $carr(f(x))$ porque es un conjunto convexo. Definimos

$$\begin{aligned} |K| \times [0, 1] &\to |L| \\ (x, t) &\to tg(x) + (1 - t)f(x) \end{aligned}$$

(2) Sean $f_1 : |K| \to |L|$, $f_2 : |L| \to |M|$ continuas y $g_1 : K \to L$, $g_2 : L \to M$ aproximaciones simpliciales de f_i, entonces $g_2 \circ g_1$ es aproximación simplicial de $f_2 \circ f_1$.

Se tiene que

$$g_2 g_1(x) \in g_2(carr(f_1(x))) = carr(g_2 f_1(x)) \subseteq carr(f_2 f_1(x))$$

Proposición 1.13: *Sea $id : |K'| \to |K|$, la función $a : V_{K'} \to V_K$ dada por $a(\hat{\sigma}) = v \in V_\sigma$ cumple que*

(1) Define una aproximación simplicial de la identidad.

(2) Toda aproximación simplicial $g : K' \to K$ de la identidad es de esta forma.

Demostración. Veamos que a es un mapeo simplicial. Sea $\sigma = \langle \hat{\sigma_0}, \cdots, \hat{\sigma_n} \rangle \in K'$, entonces $a(\hat{\sigma_i}) = v_i \in V_{\sigma_i}$. Sabemos que $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ para $0 \leq i \leq n-1$, lo que implica que $V_{\sigma_i} \subset V_{\sigma_{i+1}}$, en particular, $V = \{v_0, \cdots, v_n\} \subseteq V_{\sigma_n}$, luego, V genera una cara de σ_n, es decir, un simplice en $|K|$.

Sea $x \in |K'|$, sean $\hat{\sigma_i} \in K'$ tales que $\langle \hat{\sigma_1}, \cdots, \hat{\sigma_n} \rangle = carr(x)$, luego,

$$x = \sum_{i=1}^{n} t_i \hat{\sigma_i} \quad \text{donde } t_i > 0 \text{ para todo } i$$

en particular, $t_n > 0$, como $\hat{\sigma_n} = \frac{1}{n+1} \sum v_i$ donde $\langle v_1, \cdots, v_n \rangle = \sigma_n$, entonces x se escribe como combinación convexa de los v_i donde cada poderación es positiva, luego $x \in int(\sigma_n)$, en otras palabras, $carr(id(x)) = \sigma_n$.

Lo anterior prueba que a es una aproximación de la identidad. Por otro lado, si g es una aproximación simplicial de la identidad, entonces

$$g(\hat{\sigma}) \in carr(id(\hat{\sigma})) = \sigma$$

entonces $g(\hat{\sigma}) \in V_\sigma$, por que g es mapeo simplicial. ☐

Lema 1.14 (Lema del número de Lebesgue): *Sea X un espacio métrico compacto y $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ se tiene que $B_\delta(x) \subseteq U$ para algún $U \in \mathcal{U}$.*

Lema 1.15: *Si $f, g : K \to L$ son aproximaciones simpliciales de alguna función continua $|K| \to |L|$ entonces $g_* = f_*$.*

Demostración. Sea $h_n : C_n(K) \to C_{n+1}(L)$ dada por $h_n(\langle v_0, \cdots, v_n \rangle) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_i$ donde

$$\sigma_i = \begin{cases} sign(\varphi_i) \left\langle f(v_{\varphi_i(0)}), \cdots, f(v_{\varphi_i(i)}), g(v_{\varphi_i(i)}), \cdots, g(v_{\varphi_i(n)}) \right\rangle & \text{si son distintos} \\ 0 & \text{si no lo son} \end{cases}$$

y φ_i es una permutación tal que $f(v_{\varphi_i(0)}) < \cdots < f(v_{\varphi_i(i)}) < g(v_{\varphi_i(i)}) < \cdots < g(v_{\varphi_i(n)})$. Así, la colección de morfismos $(h_n)_n$ define una homotopía de cadenas entre f y g. ☐

Lema 1.16: *Sea $a : K' \to K$ una aproximación simplicial de $id : |K'| \to |K|$. Entonces $a_* : H_i(K') \to H_i(K)$ es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Procederemos por doble inducción en

$$m = dim\ K \quad \text{y} \quad n = \#\text{de simplices de K de dim maximal}$$

Supongamos que $m = 0$, es directo que a_* es isomorfismo. Por otro lado, si $n = 1$, entonces K es un simplice ☐

Si iteramos, $a_r : K^{(r)} \to K$ entonces $a_{r*} : H_n(K^{(r)}) \to H_n(K)$ es isomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.17: *Sea $f : |K| \to |L|$ una función continua, entonces el homomorfismo*

$$f_* := s_* \circ a_{r*}^{-1} : H_n(K) \to H_n(L)$$

donde s es aproximación simplicial de f. Cumple que

(1) No depende de s ni de r.

(2) Si $g : |L| \to |M|$ es continua, entonces $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

Demostración. (Pendiente) ☐

Lema 1.18: *Sea K un complejo simplicial finito. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $f, g : |K| \to |L|$ son funciones continuas que satisfacen*

$$\sup_{x \in |K|} \|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$$

entonces $f_* = g_*$.

Demostración. Sea $\{St_L(w)\}_{w \in V_K}$, que es un cubrimiento abierto de $|L|$. Por el lema de Lebesgue, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_{2\varepsilon}(y) \subseteq St_L(w) \quad \text{para todo } w \in V_L$$

Sean f, g continuas como en el enunciado. Consideramos $\{f^{-1}(B_\varepsilon(y))\}$, que es un cubrimiento abierto de $|K|$, entonces, existe

$\delta > 0$ tal que
$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(y) \subseteq St_L(w) \quad \text{y} \quad g(B_\delta(x)) \subseteq B_{2\varepsilon}(y) \subseteq St_L(w)$$
Subdividimos K de modo que
$$\text{máx}\{|v_i - v_j| : v_i, v_j \in V_{K^{(r)}}\} < \frac{\delta}{2}$$
entonces
$$f(St_{K^{(r)}}(v)) \subseteq B_\varepsilon(y) \subseteq St_L(w) \quad \text{y} \quad g(St_{K^{(r)}}(v)) \subseteq B_{2\varepsilon}(y) \subseteq St_L(w)$$
Sea $s : V_{K^{(r)}} \to V_L$ dada por $s(v) = w$, luego, define una aproximación simplicial de f y de g. □

Teorema 1.19 (Invarianza Homotópica): *Sean $f, g : |K| \to |L|$ funciones continuas homotópicas, entonces $f_* = g_*$.*

Demostración. Sea $H\,|K| \times [0,1] \to |L|$ una homotopía de f a g. Entonces H es uniformemente continua. Sea $\varepsilon > 0$ como en el lema, existe $\delta > 0$ tal que
$$\text{si } \ |t-s| < \delta \quad \text{entonces} \quad \|H(x,t) - H(x,s)\| < \varepsilon$$
Sea $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1$ tal que $|t_i - t_{i-1}| < \delta$. Definimos $h_i(x) := H(x, t_i)$ entonces como $\|h_i(x) - h_{i-1}(x)\| < \varepsilon$ por el lema $(h_i)_* = (h_{i-1})_*$. □

Corolario: *Sea $f : |K| \to |L|$ una equivalencia homotópica, entonces $f_* : H_i(K) \to H_i(Y)$ es isomorfismo para todo i.*

Definición: *Sea X un espacio topológico. Una* ***triangulación homotópica*** *es un par (K, h) donde K es un complejo simplicial finito y $h : |K| \to X$ es una equivalencia homotópica.*

Definición: *Sea X un espacio con triangulación homotópica, definimos $H_i(X) := H_i(K)$.*

Lema 1.20: *Esta definición no depende de la triangulación homotópica.*

Ejemplo: Tenemos que
$$H_i(\mathbb{R}^n) = H_i(\{pt\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

1.4. Resultados de Homología

Teorema 1.21 (Invarianza del Dominio): *$\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^m$ si y solo si $n = m$.*

Demostración. El resultado es conocido y sencillo de probar para $n = 1$. Supongamos que $n > 1$. Entonces

$$H_i(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H_i(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, n-1 \\ 0 & \text{si } i \neq 0, 2 \end{cases}$$

lo que prueba el resultado. □

Teorema 1.22 (Teorema Fundamental del Álgebra): *Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ no constante. Entonces existe una raíz en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Supongamos, por contradicción, que p no posee raices. Sea $r > 0$, definimos

$$\begin{aligned} p : S^1_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\} &\to \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z &\to p(z) \end{aligned}$$

Sea $H : S^1_r \times [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por $H(z,t) = p(tz)$, resulta ser una homotopía de $p(z)$ a la función constante $cta_0(z) = a_0$, entonces

$$p_* = 0 : H_1(\mathbb{S}^1) \to H_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

Buscamos que la función $S^1_{r_0} \times [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que

$$G(z,t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0)$$

este bien definida para algún r_0 y $t \in [0,1]$. Notemos que si

$$z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0) = 0 \quad \text{entonces} \quad t = \frac{|z|^n}{|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0|}$$

luego, si $r_0 > \text{máx}\{1, \sum |a_i|\}$, entonces

$$t = \frac{|z|^n}{|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0|} \geq \frac{r_0^n}{r_0^{n-1}(\sum |a_i|)} = \frac{r_0}{\sum |a_i|} > 1$$

que es lo que queriamos. Así, G define una homotopía entre $p(z)$ a $q(z) = z^n$. Luego, $q : S^1_{r_0} \to \mathbb{C} \setminus \{0\} \sim S^1_{r_0}$ induce multiplicación por n en H_1, entonces $p_* = 0$ y $p_* = q_* = n$, entonces $n = 0$. □

Teorema 1.23 (Teorema del Punto Fijo de Brower): *Sea $f : D^n \to D^n$ una función continua, entonces tiene un punto fijo.*

Demostración. (Pendiente) □

Teorema 1.24 (Borsuk-Ulam): *Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua, entonces existe $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Demostración. (Pendiente) □

Corolario: *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{S}^n$ no se puede encajar en $\mathbb{R}^n$.*

1.5. Homología Singular

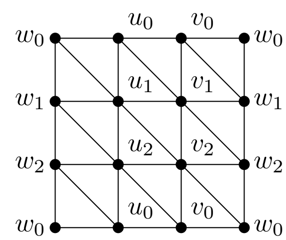
1.6. Homología Relativa

1.7. Superficies

Definición: *Una* $2-$*variedad se dice* ***superficie***.

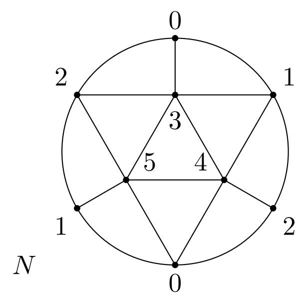
Ejemplos:

- $\mathbb{S}^2$ es una superficie triangulable, donde $K = \partial\Delta^3$ da una triangulación.
- T^2 es una superficie triangulable, donde



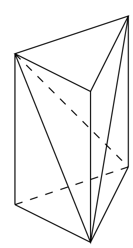
  es una triangulación.

- $\mathbb{RP}^2$ es una superficie triangulable, con



  una triangulación.

A partir de estas superficies podemos construir otras superficies, las sumas conexas. Sean X_1 y X_2 superficies triangulables. Sean K_1, K_2 complejos simpliciales tales que $|K_i| \cong X_i$. Consideramos $\varphi_i : \Delta^2 \to |K_i|$ encajes simpliciales, es decir, φ_i es un mapeo simplicial tal que $\varphi_i(\Delta^2)$ es homeomorfo a un $2-$simplice de K_i. Consideramos la triangulación de $\partial\Delta^2 \times \Delta^1$ como sigue



$=: \tau$

Definimos $X_1 \# X_2$, la suma conexa, como el espacio homeomorfo a $|K_1 \# K_2|$ donde

$$K_1 \# K_2 := (K_1 \setminus \varphi_1(\Delta^2)) \sqcup \tau \sqcup (K_2 \setminus \varphi(\Delta^2))/\sim$$

y $\sim$ es tal que $\varphi_1(x) \sim (x, 0)$ y $\varphi_2(x) \sim (x, 1)$ para $x \in \partial\Delta^2$.

Proposición 1.25: *$K_1 \# K_2$ es un complejo simplicial. Mas aún, su realización geométrica, $X_1 \# X_2$ es una superficie.*

Definición: *Sea $S_1 := T^2$ y $S_g := S_{g-1} \# T^2$ para $g > 1$. Del mismo modo, $N_0 := \mathbb{RP}^2$ y $N_g := N_{g-1} \# \mathbb{RP}^2$.*
Luego, usando Mayer-Vietoris es fácil verificar que

$$H_i(S_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i > 2 \end{cases} \qquad H_i(S_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^g & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

Teorema 1.26 (Teorema de Clasificación de Superficies): *Sean X, Y superficies triangulables compactas. Entonces X es homeomorfa a Y si y solo si $H_i(X) \cong H_i(Y)$ para todo i.*

Definición: *Sea X una superficie compacta. Es **orientable** si $H_2(X) \cong \mathbb{Z}$ y es **no orientable** si $H_2(X) \cong 0$. El **género** de una superficie es*

$$\begin{cases} \frac{rango(H_1)}{2} & \textit{si es orientable} \\ rango(H_2) & \textit{si no es orientable} \end{cases}$$

Corolario: *Sean X, Y superficies orientables. Entonces $X \cong Y$ si y solo si $\chi(X) = \chi(Y)$.*

A partir de lo anterior, Poincaré se pregunto si sucedia lo mismo para variedades de dimensión 3, en otras palabras $X \cong Y$ si y solo si $H_i(X) \cong H_i(Y)$ para todo i. La respuesta es no, el mismo dio un ejemplo. Existe una $3-$variedad Σ compacta tal que $H_i(\Sigma) \cong H_i(\mathbb{S}^3)$ que no es homeomorfa a $\mathbb{S}^3$.

Para distinguir Σ de $\mathbb{S}^3$ se invento el grupo fundamental.

2. Cohomología

2.1. Cohomología Singular

Definición: *Un **complejo de cocadenas** es una secuencia de grupos de abelianos y homomorfismos*

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\partial^0} C^1 \xrightarrow{\partial^1} C^2 \xrightarrow{\partial^2} C^3 \xrightarrow{\partial^3} \cdots$$

tales que $\partial^{i+1} \circ \partial^i = 0$. Se denota por $(C^\bullet, \partial^\bullet)$.

Observación: Al igual que en complejos de cadenas, los morfismos ∂^i se llaman **diferenciales**, los elementos en $im\ \partial^i$ se dicen **cofronteras** y en $\ker \partial^i$ se dicen **cociclos**. Además, es claro que $im\ \partial^i \subseteq ker\ \partial^{i+1}$.

Definición: *El $i-$**ésimo grupo de cohomología** de $(C^\bullet, \partial^\bullet)$ se define por*

$$H^i(C^\bullet) := \frac{ker\ \partial^i}{im\ \partial^{i-1}}$$

*Un elemento en $H^i(C^\bullet)$ se conoce como **clase de cohomología**.*

Ejemplo: Recordemos el complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Donde $H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z}$, $H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_2$ y $H_k(C_\bullet) = 0$. Definimos $C^i := Hom(C_i, \mathbb{Z})$ y los diferenciales $\partial^i(\varphi) := \varphi \circ \partial_{i+1}$, notemos que $\partial^{i+1} \circ \partial^i(\varphi) = \varphi \circ \partial_{i+1} \circ \partial_{i+2} = 0$. Así, tenemos el complejo de cocadenas

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\cdot 0} C^1 \xrightarrow{\cdot 2} C^2 \xrightarrow{\cdot 0} 0 \longrightarrow \cdots$$

Como $C^i \cong \mathbb{Z}$ para $i = 0, 1, 2$, entonces $H^0(C^\bullet) = \mathbb{Z}$, $H^1(C^\bullet) = 0$ y $H^2(C^\bullet) = \mathbb{Z}_2$.

Definición: *Sean $(C^\bullet, \partial^\bullet)$ y $(D^\bullet, \partial^\bullet)$ complejos de cocadenas, un **mapeo de cocadenas**, es una colección $(f^n)_n$ de morfismos $f_n : C_n \to D_n$ tales que $\partial^n \circ f^n = f^{n+1} \circ \partial^n$. En otras palabras, el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} C^n & \xrightarrow{f^n} & D^n \\ \downarrow{\scriptstyle \partial^n} & & \downarrow{\scriptstyle \partial^n} \\ C^{n+1} & \xrightarrow{f^{n+1}} & D^{n+1} \end{array}$$

conmuta.

Lema 2.1: *Sea $(f^n)_n$ un mapeo de cocadenas, entonces $f^* : H^n(C^\bullet) \to H^n(D^\bullet)$ dado por $[x] \to [f^n(x)]$ es un morfismo que está bien definido.*

La demostración de este lema es análoga al caso de complejo de cadenas. Previamente, definimos el complejo de cadenas singular y los respectivos diferenciales. Usando la idea vista en el ejemplo vamos a definir la cohomología singular.

Definición: *Sea X un espacio topológico. Definimos los grupos $C^i(X) := Hom(C_i(X), \mathbb{Z})$ y los diferenciales $\partial^i : C^i(X) \to C^{i+1}(X)$ dados por $\partial^i(\varphi) := \varphi \circ \partial_{i+1}$. El **complejo de cocadenas singular** es*

$$0 \longrightarrow C^0(X) \xrightarrow{\partial^0} C^1(X) \xrightarrow{\partial^1} C^2(X) \xrightarrow{\partial^2} C^3(X) \xrightarrow{\partial^3} \cdots$$

*El $i-$**ésimo grupo de cohomología** esta dado por*

$$H^i(X) := H^i(C^\bullet(X))$$

Observación: No es cierto en general que $H^i(X) = Hom(H_i(X), \mathbb{Z})$, basta regresar al ejemplo y notar que $H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_2 \neq 0 = H^1(C^\bullet)$.

2.2. Producto Cup

2.3. Anillo de Cohomología

2.4. Dualidad de Poincaré y Fórmula de Künneth

3. Grupo Fundamental

3.1. Primer Grupo Fundamental

Sea $I = [0,1]$ y X un espacio topológico.

Definición: *Un **camino** entre x_0 y x_1 en X es una función continua $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$. Si $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ se dice **lazo basado** en x_0.*

Denotamos por ctx_0 al lazo constante basado en x_0. Los caminos se pueden **concatenar**, si α y β son caminos, entonces

$$(\alpha * \beta)(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es un camino entre $\alpha(0)$ y $\beta(1)$.

Definición: *Una **homotopía relativa** a $\{0,1\}$ entre caminos $\alpha, \beta : I \to X$ de x_0 a x_1 es una homotopía $H : I \times [0,1] \to X$ entre α y β tal que $H(0,t) = x_0$ y $H(1,t) = x_1$ para todo $t \in [0,1]$.*

Definición: *Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Sea $\pi_1(X, x_0)$ el conjunto de clases de homotopía relativa a $\{0,1\}$ de lazos en X basados en x_0.*

Teorema 3.1: *Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. La operación*

$$\begin{aligned} * : \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(X,x_0) &\to \pi_1(X,x_0) \\ [\alpha] * [\beta] &\to [\alpha * \beta] \end{aligned}$$

está bien definida y junto con el elemento $e := [ctx_0]$ dan estructura de grupo a $\pi_1(X, x_0)$.

Demostración. Debemos probar cuatro puntos

- La operación esta bien definida. Sean $\alpha \sim \alpha'$ y $\beta \sim \beta'$ lazos basados en x_0, entonces $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$. Definimos $F : I \times [0,1] \to X$

$$F(s,t) := \begin{cases} H(2s,t) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s-1,t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

  donde H y G son homotopías relativas entre α, α' y β, β' respectivamente. Luego, $F(s,0) = (\alpha * \beta)(s)$ y $F(s,1) = (\alpha' * \beta')(s)$, es decir, F es una homología relativa entre $\alpha * \beta$ y $\alpha' * \beta'$.

- El elemento e es neutro. Sea α un lazo basado en x_0. Definimos

$$H(s,t) := \begin{cases} \alpha\left(\frac{2s}{t+1}\right) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ x_0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

  Es directo que H es una homotopía relativa entre $\alpha * ctx_0$ y α.

- Existencia de inverso. Definimos $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1-s)$, por demostrar que $[\alpha]*[\alpha^{-1}] = e$, esto es, $\alpha*\alpha^{-1} \sim ctx_0$. Definimos

$$H(s,t) := \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ \alpha(1-t) & \text{si } \frac{1-t}{2} \leq s \leq \frac{1+t}{2} \\ \alpha^{-1}(2s-1) & \text{si } \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

  Se verifica que H es una homotopía relativa entre ambos lazos.

- Sean α, β, γ lazos basos en x_0, entonces la función

$$H(s,t) := \begin{cases} \alpha\left(\frac{4s}{1+t}\right) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1+t}{4} \\ \beta\left(4s-1-t\right) & \text{si } \frac{1+t}{4} \leq s \leq \frac{2+t}{4} \\ \gamma\left(1-4\frac{1-s}{2-t}\right) & \text{si } \frac{2+t}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

  es una homotopía relativa entre $(\alpha * \beta) * \gamma$ y $\alpha * (\beta * \gamma)$.

□

Definición: *El **grupo fundamental** de X en x_0 es $\pi_1(X, x_0)$.*

Definición: *Un **espacio punteado** es una tupla (X, x_0) donde $x_0 \in X$. Un **morfismo** entre espacios punteados (X, x_0) y (Y, y_0) es una función continua*

$$f : X \to Y \quad \text{tal que } f(x_0) = y_0$$

*Una **homotopía punteada** es una homotopía H entre X e Y tal que $H(x_0, t) = y_0$ para todo $t \in [0, 1]$.*

Observación: Sea f un morfismo, entonces induce un homomorfismo

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] &\to [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

Además, $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ y $id_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$, entonces π_1 es invariante topológico.

Teorema 3.2 (Invarianza Homotópica): *Sea $f : X \to Y$ equivalencia homotópica, entonces*

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

es isomorfismo.

Lema 3.3: *Sea $\gamma : [0, 1] \to X$ camino tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$. Entonces la función*

$$\begin{aligned} \gamma_\# : \pi(X, x_0) &\to \pi_1(X, x_1) \\ [\alpha] &\to [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] \end{aligned}$$

esta bien definida y es isomorifsmo. Es más, si $\gamma \sim \gamma'$ entonces $\gamma_\# = \gamma'_\#$

Demostración. □

Demostración. (Teorema)

□

Definición: *Un espacio X se dice simplemente conexo, si es arcoconexo y $\pi_1(X, x_0) = 0$ para algún $x_0 \in X$.*