Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesora: Amal Taarabt – Estudiante: Benjamín Mateluna

Teoría Espectral - MAT2820
Tarea 2
04 de noviembre de 2025

Operadores compactos

(1) La función T_K es claramente lineal. Observemos que por lema del pegado la función K es continua, para ver que $T_K \in \mathcal{B}(H)$, nos damos $f \in L^2([0,1])$ y por la desigualdad de hölder, se sigue que

$$\begin{aligned}\|T_K f\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 |T_K f(x)|^2 \; dx = \int_0^1 \left| \int_0^1 K(x,y) f(y) \; dy \right|^2 \; dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x,y)|^2 \, |f(y)|^2 \; dy \right) \; dx \leq \left(\max_{(x,y)\in[0,1]^2} |K(x,y)| \right)^2 \|f\|_{L^2}^2 < \infty\end{aligned}$$

Por lo tanto, el operador T_K es acotado. Para ver que es autoadjunto en primer lugar veamos que $K(x,y) = K(y,x)$ para todo $(x,y) \in [0,1]^2$ y además $K([0,1]^2) \subseteq \mathbb{R}$, luego, por Fubini se tiene que

$$\begin{aligned}\langle T^* f, g \rangle_{L^2} &= \langle f, Tg \rangle_{L^2} = \int_0^1 \overline{f(x)} T_K g(x) \; dx = \int_0^1 \overline{f(x)} \left(\int_0^1 K(x,y) g(y) \; dy \right) \; dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \overline{f(x)} K(x,y) g(y) \; dy \; dx = \int_0^1 \int_0^1 \overline{K(y,x) f(x)} g(y) \; dx \; dy \\ &= \int_0^1 \overline{T_K f(y)} g(y) \; dy = \langle T_K f, g \rangle_{L^2}\end{aligned}$$

para toda $f, g \in L^2([0,1])$, lo que implica que T_K es autoadjunto.

(2) Sea $f \in L^2([0,1])$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in [0,1]$. Como K es continua, para todo $y \in [0,1]$, se tiene que $K(x_n, y) f(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} K(x,y) f(y)$, además

$$|K(x_n, y) f(y)| \leq \|K\|_\infty \, |f(y)| =: g$$

y como $L^2([0,1]) \subseteq L^1([0,1])$ la función g es integrable. Así, por teorema de convergencia dominada resulta que

$$\lim_{n\to\infty} T_K f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 K(x_n, y) f(y) \; dy = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} K(x_n, y) f(y) \; dy = \int_0^1 K(x,y) f(y) \; dy = T_K f(x)$$

Concluimos que $T_K(L^2) \subseteq \mathbb{C}([0,1])$.

(3)

(a) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada, entonces existe $M > 0$ tal que $\|f_n\|_{L^2} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo visto en el primer ejercicio, sabemos que

$$\|T_K f_n\|_{L^2}^2 \leq \|K\|_\infty^2 \cdot \|f_n\|_{L^2}^2 \leq \|K\|_\infty^2 \cdot M^2$$

es decir, la sucesión $(T_K f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Veamos que es equicontinua. Dado que $[0,1]^2$ es compacto, en realidad se tiene que K es uniformemente continua, sea $x_0 \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si

$$|x_0 - x| < \delta \quad \text{entonces} \quad |K(x_0, y) - K(x,y)| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{para todo } y \in [0,1]$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, observemos que

$$|T_K f_n(x_0) - T_K f_n(x)| \leq \int_0^1 |K(x_0, y) - K(x,y)| \cdot |f_n(y)| \; dy < \frac{\varepsilon}{M} \cdot \|f_n\|_{L^1} \leq \varepsilon$$

Por el teorema de Arzela Ascoli se tiene el resultado.

(b) Sabemos que $\mathcal{B} = \{\varphi_n = e^{2\pi i n x} : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2([0,1])$, dado $n \in \mathbb{Z}$, vemos que

$$T_K\varphi_n(x) = \int_0^1 K(x,y)\varphi_n(y)\,dy = \int_0^x y(1-x)e^{2\pi i n y}\,dy + \int_x^1 x(1-y)e^{2\pi i n y}\,dy =: I_1 + I_2$$

Por un lado tenemos que

$$I_1 = (1-x)\int_0^x ye^{2\pi i n y}\,dy = (1-x)\left(\frac{ye^{2\pi i n y}}{2\pi i n}\Big|_0^x - \frac{1}{2\pi i n}\int_0^x e^{2\pi i n y}\,dy\right) = (1-x)\left(\frac{xe^{2\pi i n x}}{2\pi i n} - \frac{e^{2\pi i n x}-1}{(2\pi i n)^2}\right)$$

y por el otro lado

$$I_2 = x\int_x^1 (1-y)e^{2\pi i n y}\,dy = x\left(\frac{(1-y)e^{2\pi i n y}}{2\pi i n}\Big|_x^1 + \frac{1}{2\pi i n}\int_x^1 e^{2\pi i n y}\,dy\right) = x\left(-\frac{(1-x)e^{2\pi i n x}}{2\pi i n} + \frac{e^{2\pi i n} - e^{2\pi i n x}}{(2\pi i n)^2}\right)$$

entonces

$$T_K\varphi_n(x) = \frac{c_n(x)}{(2\pi i n)^2} \quad \text{donde } |c_n(x)| \leq 4 \quad \text{para todo } x \in [0,1]$$

de este modo obtenemos que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|T_K\varphi_n\|_{L^2} \leq 16\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2\pi i n)^4} < \infty$$

Por lo tanto T_K es un operador de Hilbert Schmidt, por ejercicio de la guía, concluimos que es compacto.

(4)

(5) De la parte anterior sabemos que si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ es autovalor y f su correspondiente autovector, entonces satisface la EDO,

$$f'' + \frac{1}{\lambda}f = 0$$

de ayudantía, sabemos que una solución de la EDO anterior se ve como $f(x) = Acos(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}) + Bsen(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})$, como $f(0) = 0$ se tiene que $A = 0$, por otro lado, si $\varphi(x) = sen(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})$ entonces

$$T_K\varphi(x) = \int_0^1 K(x,y)sen\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right)\,dy = \int_0^x y(1-x)sen\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right)\,dy + \int_x^1 x(1-y)sen\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right)\,dy =: I_1 + I_2$$

donde,

$$I_1 = (1-x)\left(-\sqrt{\lambda}ycos\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right)\Big|_0^x + \sqrt{\lambda}\int_0^x cos\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right)\,dy\right) = (1-x)\left(-\sqrt{\lambda}xcos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + \lambda sen\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$$

y

$$I_2 = x\left(-(1-y)\sqrt{\lambda}cos\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right)\Big|_x^1 + \sqrt{\lambda}\int_x^1 cos\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right)\,dy\right) = x\left((1-x)\sqrt{\lambda}cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + \lambda sen\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$$

(6)

(7) Usando lo anterior y el hecho de que T_K es autoadjunto, resulta que

$$\|T_K\|_{\mathcal{B}(L^2)} = r(T_K) = \sup_{\lambda\in\sigma(T_K)} |\lambda| = \sup_{\lambda\in\sigma_p(T_K)} |\lambda| = \frac{1}{\pi^2}$$

(8)

(9) **Teorema de Mercer**

(a) (Pendiente)

(b) Sabemos que

$$\sigma_p(T_K) = \left\{\lambda_n = \frac{1}{k^2\pi^2} : k \in \mathbb{N}\right\}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\int_0^1 K(x,x)\,dx = \int_0^1 x(1-x)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

así, por el teorema de Mercer, concluimos que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \pi^2\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n = \pi^2\int_0^1 K(x,x)\,dx = \frac{\pi^2}{6}$$