PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESORA: AMAL TAARABT – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

**Teoría Espectral - MAT2820**
**Tarea 1**
**15 de septiembre de 2025**

# 1. Transformada de Fourier - Versión continua

## 1.1. Propiedades básicas

(1) Veamos que para todo $\xi \in \mathbb{R}$ se tiene que $|\mathcal{F}(f)(\xi)| < \infty$, en efecto,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left|e^{-ix\xi} f(x)\right|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty$$

donde la última desigualdad se obtiene de que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Lo anterior implica que $\hat{f}(\xi) \in \mathbb{C}$.

(2) En primer lugar, se tiene que

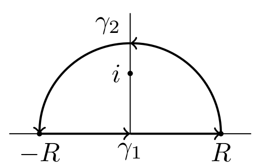
$$\mathcal{F}(g_1)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-|x|}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi - |x|}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-x-ix\xi}\, dx + \int_{\mathbb{R}_{\leq 0}} e^{x-ix\xi}\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{e^{-x(1+i\xi)}}{1+i\xi}\Big|_{x=0}^{\infty} + \frac{e^{x(1-i\xi)}}{1-i\xi}\Big|_{-\infty}^{x=0} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{1+\xi^2}$$

Por otro lado, para $g_2$, definimos la función compleja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2}$$

Supongamos que $\xi \leq 0$, consiramos el siguiente camino en $\mathbb{C}$,




donde $\gamma_1(t) = t$ con $t \in [-R, R]$ y $\gamma_2(t) = Re^{\pi i t}$ para $t \in [0, 1]$. Diremos que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Para $R > 1$ suficientemente grande se tiene que $i$ esta en la región determinada por $\gamma$, así, por teorema del residuo, se sigue que

$$2\pi i \cdot Res(f, i) = \int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-it\xi}}{1+t^2}\, dt + \int_0^1 \frac{e^{-iRe^{i\pi t}\xi}}{1+R^2 e^{2\pi i t}} \cdot Ri\pi e^{i\pi t}\, dt$$

como $i$ es un polo simple de $f$, vemos que

$$Res(f, i) = \lim_{z \to i} (z-i) f(z) = \lim_{z \to i} \frac{e^{-iz\xi}}{z+i} = -\frac{i}{2} e^{\xi}$$

Por otro lado, como $\xi \leq 0$, tenemos que

$$\left| \int_0^1 \frac{e^{-iRe^{i\pi t}\xi}}{1+R^2 e^{2\pi i t}} \cdot Ri\pi e^{i\pi t}\, dt \right| \leq \int_0^1 \frac{R\pi e^{Rsen(\pi t)\xi}}{|1+R^2 e^{2\pi i t}|}\, dt \leq \int_0^1 \frac{R\pi}{R^2-1}\, dt = \frac{R\pi}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Entonces para $\xi \leq 0$ se tiene que

$$\mathcal{F}(g_2)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} e^{\xi}$$

De manera análoga para $\xi > 0$, pero tomando $\gamma_2(t) = Re^{-\pi i t}$ con $t \in [0, 1]$, se obtiene que

$$\mathcal{F}(g_2)(\xi) = -\frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi}$$

(3) Consideremos la función

$$G(x,\xi) = e^{-ix\xi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-(ix\xi + \frac{x^2}{2})}$$

notemos que $g_{\xi_0}(x) = G(x,\xi_0)$ es continua, por ende es medible, también se tiene que $\frac{\partial G}{\partial \xi}$ existe para todo $(x,\xi) \in \mathbb{R}^2$ y además $g_0(x)$ es integrable. Veamos que

$$\left| \frac{\partial G}{\partial \xi}(x,\xi) \right| \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \in L^1(\mathbb{R})$$

Así, derivando bajo el signo de la integral se obtiene que

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(f))'(\xi) &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi}\, dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \left( -e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi}\, dx \right) \\ &= \frac{-\xi}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f)(\xi)\end{aligned}$$

Nos queda una EDO de variables separables con condición inicial $\mathcal{F}(f)(0) = 1$, resolviendo la ecuación resulta que

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

(4) Supongamos que $f = \mathbb{1}_E$, para algún $E \in \mathcal{L}$. Entonces,

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx = \int_E e^{-ix\xi}\, dx$$

Supongamos que $E = I$ es un intervalo, donde $inf(I) = a$ y $sup(I) = b$, tenemos que

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_a^b e^{-ix\xi}\, dx = -\frac{e^{-ix\xi}}{i\xi}\Big|_a^b = \frac{e^{-ia\xi}}{i\xi} - \frac{e^{-ib\xi}}{i\xi} \xrightarrow[|\xi| \to +\infty]{} 0$$

Para una colección finita de intervalos disjuntos de a pares el resultado es inmediato, este se puede extender a una colección numerable de intervalos disjuntos de a pares. Sea $O \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto, luego, se escribe como unión numerable de intervalos abiertos disjuntos de a pares, se tiene que

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_O)(\xi) \xrightarrow[|\xi| \to +\infty]{} 0$$

Sea $E$ un conjunto medible, sea $\varepsilon > 0$, existe $G \supseteq E$ abierto tal que $\lambda(G \setminus E) < \varepsilon$, entonces

$$\left| \int_G e^{-ix\xi}\, dx - \int_E e^{-ix\xi}\, dx \right| = \left| \int_{G \setminus E} e^{-ix\xi}\, dx \right| \leq \lambda(G \setminus E) < \varepsilon$$

Aca estamos usando que $f \in L^1(\mathbb{R})$, es decir, $\lambda(E), \lambda(G) < \infty$. Lo anterior implica que

$$\left| \lim_{|\xi| \to +\infty} \int_E e^{-ix\xi}\, dx \right| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } \varepsilon > 0 \text{, se sigue que } \lim_{|\xi| \to +\infty} \int_E e^{-ix\xi}\, dx = 0$$

Sea $s \in L^1(\mathbb{R})$ una función simple, el resultado es directo, en efecto,

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \mathcal{F}(s)(\xi) = \lim_{|\xi| \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i}\, dx = \sum_i a_i \lim_{|\xi| \to +\infty} \int_{A_i} e^{-ix\xi}\, dx = 0$$

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces existe $(s_n)_n$ tal que $s_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f$ en $L^1(\mathbb{R})$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$ notamos que

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| - |\mathcal{F}(s_n)(\xi)| \leq |\mathcal{F}(f)(\xi) - \mathcal{F}(s_n)(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - s_n(x)|\, dx$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $|\xi| > N$ entonces $|\mathcal{F}(s_n)(\xi)| < \varepsilon/2$ y si $n \geq N$ se obtiene que $\|f - s_n\|_{L^1} < \varepsilon/2$, así

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq |\mathcal{F}(s_n)(\xi)| + \int_{\mathbb{R}} |f(x) - s_n(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo que prueba lo pedido.

(5) Veamos que es lineal, sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces por linealidad de la intregal, vemos que

$$\mathcal{F}(f+\alpha g)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}(f+\alpha g)(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx + \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} g(x)\, dx = \mathcal{F}(f)(\xi) + \alpha\mathcal{F}(g)(\xi)$$

Queda ver que $\mathcal{F}$ es continua, sean $f_n$ tales que $f_n \xrightarrow{L^1} f$, tenemos que

$$|\mathcal{F}(f)(\xi) - \mathcal{F}(f_n)(\xi)| = |\mathcal{F}(f-f_n)(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f - f_n|\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{para todo} \ \ \xi \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto $\mathcal{F}$ es una aplicación lineal continua. Además, dado $\xi \in \mathbb{R}$ se sigue que

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}$$

es decir, $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}$.

(6) No se especifica claramente como debería estar bien definida la convolución. Demostraremos que es finita c.t.p y que dadas $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. En efecto, usando tonelli obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |(f*g)(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t)\, dt \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)|\, dt\, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, |g(x-t)|\, dx\, dt = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$$

es decir, $\|f*g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1} < \infty$, lo que implica que $f*g$ es finita c.t.p. Veamos que $\mathcal{F}(f*g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$, en efecto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f*g)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}(f*g)(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\, dt\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(t) g(x-t)\, dt\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(t) g(x-t)\, dx\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-it\xi} f(t) g(x)\, dx\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} f(t)\, dt \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} g(x)\, dx = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)
\end{aligned}$$

## 1.2. Fórmula de inversión

(1) Sobre la transformada de Fourier

**Definición:** *Se define la función* $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ *y la familia de funciones* $\phi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1}\phi(x\varepsilon^{-1})$ *para* $\varepsilon > 0$.

**Observación:** Vemos que $\|\phi\|_{L^1} = 1$.

**Lema 1.1:** *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$. *Luego,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} (f * \phi_\varepsilon)(x) = f(x)$$

*Demostración.* Veamos que

$$(f * \phi_\varepsilon)(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} f(t)\phi\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(x - t\varepsilon)\phi(t)\, dt$$

De este modo, resulta que

$$|(f * \phi_\varepsilon)(x) - f(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-t\varepsilon)\phi(t)\, dt - \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(t)\, dt\right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x-t\varepsilon) - f(x)| \cdot \phi(t)\, dt$$

Por continuidad tenemos que $f(x - t\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} f(x)$, por teorema de convergencia dominada concluimos que $|(f * \phi_\varepsilon)(x) - f(x)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0$ lo que prueba lo buscado. En esta última parte utilizamos que $\|f\|_\infty < \infty$ y que $\phi$ es integrable. □

**Lema 1.2:** *Sean* $f, g \in L^1$ *tales que* $\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \in L^1$, *entonces* $\sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$.

*Demostración.* Notemos que

$$\mathcal{F}(fg)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{ix\eta}\mathcal{F}(f)(\eta)\, d\eta\right) g(x)\, dx$$

donde usamos que $(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F})(f) = f$, que se tiene por el problema 1.2.1. Luego, por Fubini vemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(fg)(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix(\xi-\eta)}\mathcal{F}(f)(\eta)g(x)\, d\eta\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix(\xi-\eta)}\mathcal{F}(f)(\eta)g(x)\, dx\, d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\eta)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix(\xi-\eta)} g(x)\, dx\right) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\eta)\mathcal{F}(g)(\xi-\eta)\, d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g))(\xi)\end{aligned}$$

□

(a) Para probar la inyectividad basta verificar que $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = id_{L^1}$, sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Definimos

$$g_{x,\varepsilon}(t) := \phi(\varepsilon t)e^{ixt} \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \text{ y } \varepsilon > 0$$

Dado que $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $g_{x,\varepsilon} \in L^1(\mathbb{R})$, luego, su transformada de Fourier es

$$\mathcal{F}(g_{x,\varepsilon})(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi}e^{ixt}\phi(\varepsilon t)\, dt = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-it(\frac{\xi-x}{\varepsilon})}\phi(t)\, dt = \varepsilon^{-1}\mathcal{F}(\phi)\left(\frac{\xi - x}{\varepsilon}\right) = \phi_\varepsilon(x-\xi)$$

donde en el último paso usamos la paridad de $\phi$. Por otro lado, la función $G(\xi, t) := g_{x,\varepsilon}(\xi)e^{-it\xi}f(t)$ es $\lambda \otimes \lambda$ integrable por Tonelli, así, por Fubini tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g_{x,\varepsilon}(\xi)\hat{f}(\xi)\, d\xi &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g_{x,\varepsilon}(\xi)e^{-it\xi}f(t)\, dt\, d\xi = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g_{x,\varepsilon}(\xi)e^{-it\xi}f(t)\, d\xi\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(g_{x,\varepsilon})(t)f(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi_\varepsilon(x-t)\, dt = (f * \phi_\varepsilon)(x)\end{aligned}$$

Por teorema de convergencia dominada, apelando a que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ya que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y utilizando el lema 1.1, concluimos que

$$(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F})(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} g_{x,\varepsilon}(\xi)\hat{f}(\xi)\, d\xi = \lim_{\varepsilon \to 0^+}(f * \phi_\varepsilon)(x) = f(x)$$

Por el mismo argumento que antes, $\mathcal{F}^{-1}$ es continua, además $L^1(\mathbb{R}) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R})} \subseteq \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \subseteq L^1(\mathbb{R})$. Por continuidad y densidad resulta que $(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F})(f) = f$ para toda $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) Supongamos, por contradicción, que $\mathcal{F}$ es sobreyectiva, por el punto anterior y el teorema del mapa abierto, resulta que $\mathcal{F}^{-1}$ es un operador lineal acotado. Definimos $f_n = \mathbb{1}_{[-n,n]} \in L^1$ para $n \in \mathbb{N}$, veamos que

$$\mathcal{F}^{-1}(f_n)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} e^{ix\xi} \, d\xi = \frac{2sen(nx)}{\sqrt{2\pi}x} \quad \text{entonces} \quad \mathcal{F}\left(\frac{2sen(nx)}{\sqrt{2\pi}x}\right) = f_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

donde usamos nuevamente que $\mathcal{F}$ es invertible. Consideramos la sucesión

$$g_n(x) := \frac{2sen(nx)}{\sqrt{2\pi}x} \cdot \frac{2sen(x)}{\sqrt{2\pi}x} \in L^1 \quad \text{para } n \in \mathbb{N}$$

Por el lema 1.2 y lo mostrado previamente, obtenemos que

$$\mathcal{F}\left(g_n\right)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\left(\frac{2sen(nx)}{\sqrt{2\pi}x}\right) * \mathcal{F}\left(\frac{2sen(x)}{\sqrt{2\pi}x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f_n * f_1)(\xi) \in \mathcal{C}_0$$

Por otro lado,

$$(f_n * f_1)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)\mathbb{1}_{[-1,1]}(\xi - t) \, dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)\mathbb{1}_{[\xi-1,\xi+1]}(t) \, dt = \lambda([-n,n] \cap [\xi-1,\xi+1]) \leq 2$$

por lo tanto $\|f_n * f_1\|_\infty \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $\|g_n\|_{L^1} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, en efecto,

$$\begin{aligned} \|g_n\|_{L^1} &= \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|sen(nx)sen(x)|}{x^2} \, dx = \frac{2n}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|sen(x)sen(\frac{x}{n})\right|}{x^2} \, dx \\ &= \frac{4n}{\pi} \int_0^\infty \frac{\left|sen(x)sen(\frac{x}{n})\right|}{x^2} \, dx \geq \frac{4n}{\pi} \int_0^n \frac{\left|sen(x)sen(\frac{x}{n})\right|}{x^2} \, dx \end{aligned}$$

Como $sen(x) \geq x - \frac{x^3}{6} \geq \frac{5}{6}t$ para $x \in [0,1]$, se sigue que $sen(\frac{x}{n}) \geq \frac{5x}{6n}$ para $x \in [0,n]$. Entonces

$$\|g_n\|_{L^1} \geq \frac{4n}{\pi} \int_0^n \frac{\left|sen(x)sen(\frac{x}{n})\right|}{x^2} \, dx \geq \frac{10}{3\pi} \int_0^n \frac{|sen(x)|}{x} \, dx \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Pero existe $C > 0$ tal que $\|g_n\|_{L^1} = \left\|(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F})(g_n)\right\|_{L^1} \leq C \left\|\mathcal{F}(g_n)\right\|_\infty = C \left\|f_n * f_1\right\|_\infty \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esta contradicción prueba la afirmación.

(2) **Aplicación a la resolución de EDP.**

(a) Como $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ se tiene que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, luego integrando por partes obtenemos que

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \frac{\partial f}{\partial x}(x) \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( e^{-ix\xi} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) \, dx \right) = i\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$$

lo que prueba lo pedido.

(b) Definimos la función $G(x,\xi) = e^{-ix\xi}f(x)$. La función $g_{\xi_0}(x) = G(x,\xi_0)$ es medible, por que es multiplicación de funciones medibles, la derivada parcial de $G$ respecto a $\xi$ existe para todo $(x,\xi) \in \mathbb{R}^2$ y $g_0(x)$ es integrable. Además,

$$\left|\frac{\partial F}{\partial \xi}(x,\xi)\right| \leq |xf(x)| \in L^1(\mathbb{R})$$

Así, derivando bajo el signo de la integral vemos que

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) \, dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} x f(x) \, dx = -i\mathcal{F}(xf)(\xi)$$

lo que concluye el ejercicio.

## 1.3. La transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$

(No realice este ejercicio)

## 1.4. La transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Sea $f \in S(\mathbb{R})$.

**Lema 1.3:** *Sea $g \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces $(f * g)^{'}(x) = (f' * g)(x)$.*

*Demostración.* la función que mapea $t$ a $F(x,t) := f(x-t)g(t)$ es medible para todo $t \in \mathbb{R}$, la derivada parcial de $F$ respecto a $x$ existe para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ y como la convolución esta bien definida, existe $x_0$ tal que $F(x_0, t)$ es integrable, es decir, $(f * g)(x_0) < \infty$. Además, observamos que

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x-t)g(t)\right| \leq \|f\|_\infty |g(t)| \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

Derivando bajo el signo de la integral, se tiene lo pedido

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) = \frac{d}{dx}\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(x-t)g(t)\,dt = (f' * g)(x)$$

□

**Observación:** Iterando el argumento, llegamos a que $(f * g)^{(n)}(x) = (f^{(n)} * g)(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(1) Sean $f, g \in S(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, dados $k, l \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^k \frac{\partial^l}{\partial x^l}(f + \alpha g)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^k \frac{\partial^l f}{\partial x^l} + \alpha \cdot x^k \frac{\partial^l g}{\partial x^l}\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^k \frac{\partial^l f}{\partial x^l}\right| + |\alpha| \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^k \frac{\partial^l g}{\partial x^l}\right| < \infty$$

Por lo tanto $S(\mathbb{R})$ es espacio vectorial.

(2) Notemos que

$$\phi'(x) = -2xze^{-zx^2}$$
$$\phi''(x) = -2ze^{-zx^2} + 4x^2z^2e^{-zx^2}$$

Luego, inductivamente,

$$\phi^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i e^{-zx^2} \quad \text{donde} \ \ a_i \in \mathbb{C}$$

Así, dados $k, l \in \mathbb{N}$

$$\left|x^k \frac{\partial^l \phi}{\partial x^l}(x)\right| = \left|x^k \cdot \sum_{i=0}^{l} a_i x^i e^{-zx^2}\right| \leq \sum_{i=0}^{l} |a_i| \left|x^{i+k}\right| e^{-Re(z)x^2} \quad \text{entonces} \quad \left|x^k \frac{\partial^l \phi}{\partial x^l}(x)\right| \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$$

Donde utilizamos que $Re(z) > 0$. Existe $M > 0$ tal que $\left|x^k \frac{\partial^l \phi}{\partial x^l}(x)\right| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}\backslash[-M, M]$, además, por continuidad y compacidad se sigue que

$$\sup_{x\in[-M,M]}\left|x^k \frac{\partial^l \phi}{\partial x^l}\right| < \infty$$

Por lo tanto $\phi \in S(\mathbb{R})$.

(3) Sea $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, notemos que para $|x| > 1$ se tiene lo siguiente

$$\left|\frac{x^3}{1+x^2}\right| \geq \frac{|x|^3}{2|x|^2} = \frac{|x|}{2} \xrightarrow[|x|\to\infty]{} \infty$$

Luego $g \notin S(\mathbb{R})$.

(4) Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, entonces $K := \overline{\varphi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}$ es compacto, además, para $x \in \mathbb{R} \setminus K$ tenemos que

$$x^k \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^l} = 0$$

para todo $k, l \in \mathbb{N}$, ya que $\overline{\left(\frac{\partial^l \varphi}{\partial x^l}\right)^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} \subseteq K$. Luego, por continuidad y compacidad, vemos que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^k \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^l}\right| = \sup_{x\in K}\left|x^k \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^l}\right| < \infty$$

Esto prueba que $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq S(\mathbb{R})$. Sean $p \geq 1$ y $f \in S(\mathbb{R})$, definimos

$$C := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(1+|x|)^2 f(x)\right|$$

que es finito, ya que $f \in S(\mathbb{R})$. En particular, se tiene que $C \geq (1+|x|)^2 |f(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{C^p}{(1+|x|)^{2p}} \, dx = 2C^p \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \frac{1}{(1+x)^{2p}} \, dx = 2C^p \int_1^\infty \frac{1}{x^{2p}} \, dx < \infty$$

donde lo último se debe a que $2p \geq 2$. Si $p = \infty$, como $f$ es continua $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f| < \infty$. Concluimos que $S(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$.

(5) Debemos probar una serie de propiedades del espacio de Schwartz respecto a algunas operaciones:

- Sea $f \in S(\mathbb{R})$. Veamos que $S(\mathbb{R})$ es cerrado bajo derivación, sea $n \in \mathbb{N}$, consideramos $g(x) = f^{(n)}(x)$. Dados $k, l \in \mathbb{N}$ observamos que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l g}{\partial x^l} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^{n+l} f}{\partial x^{n+l}} \right| < \infty$$

  lo que prueba que $g \in S(\mathbb{R})$.

- Sea $g \in S(\mathbb{R})$, afirmamos que $fg \in S(\mathbb{R})$, en efecto, en primer lugar notemos que

$$\frac{\partial^l}{\partial x^l}(fg)(x) = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x) \cdot \frac{\partial^{l-i} g}{\partial x^{l-i}}(x)$$

  para todo $l \in \mathbb{N}$, dado $k \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l}{\partial x^l}(fg) \right| \leq \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^i f}{\partial x^i} \right| \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^{l-i} g}{\partial x^{l-i}} \right| < \infty$$

  donde la última desigualdad se debe a que $f, g \in S(\mathbb{R})$.

- Sea $p \in \mathbb{C}[x]$, luego

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l f}{\partial x^l} \cdot p \right| \leq \sum_{j=0}^{deg(p)} |a_i| \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^{k+j} \frac{\partial^l f}{\partial x^l} \right| < \infty \quad \text{donde} \quad p(x) = \sum_{j=0}^{deg(p)} a_j x^j$$

  usando lo probado, la fórmula anterior para la derivada $n-$ésima del producto y que la derivada de un polinomio es un polinomio, se obtiene que $fp \in S(\mathbb{R})$.

- Dado $k \in \mathbb{R}$, definimos lo siguiente

$$C_l := \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |g(x)| < \infty \quad \text{para } g \in S(\mathbb{R})$$

  y para $x, t \in \mathbb{R}$ tenemos la siguiente desigualdad

$$|x|^k \leq (|x-t| + |t|)^k \leq (2\max\{|x-t|, |t|\})^k \leq 2^k |x-t|^k + 2^k |t|^k$$

  Dada $g \in S(\mathbb{R})$, usando lo anterior, para todo $t \in \mathbb{R}$, vemos lo siguiente

$$|x|^k |g(x-t)| \leq 2^k |x-t|^k |g(x-t)| + 2^k |t|^k |g(x-t)| \leq 2^k C_k + 2^k C_0 |t|^k \leq 2^k (C_k + C_0)(1+|t|)^k$$

  Definimos la constante $A_k := 2^k(C_k + C_0)$. Así, dado $g \in S(\mathbb{R})$ obtenemos lo siguiente

$$|x|^k |(f*g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |x|^k |g(x-t)| |f(t)| \, dt \leq A_k \int_{\mathbb{R}} (1+|t|)^{k+2} \cdot \frac{|f(t)|}{(1+|t|)^2} \, dt \leq A_k \mathcal{C}_{k+2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|t|)^2} \, dt < \infty$$

  Donde $\mathcal{C}_{k+2} := \sup_{t\in\mathbb{R}} (1+|t|)^{k+2} |f(t)|$ que es finito por que $f \in S(\mathbb{R})$. Como $g \in S(\mathbb{R})$ entonces $g^{(l)} \in S(\mathbb{R})$, usando el mismo argumento y el lema inicial, concluimos que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l}{\partial x^l}(f*g) \right| < \infty \quad \text{para todo} \quad k, l \in \mathbb{N}$$

(6) Para $n \in \mathbb{N}$ por lo visto anteriormente resulta que $x^n f(x) \in S(\mathbb{R})$, entonces $x^n f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$ y además por el problema 1.2.2.b tenemos una derivada $l-$ésima explícita para $\hat{f}$. Sean $k, l \in \mathbb{N}$, intengrando por partes notamos lo siguiente

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi} \cdot \xi^k \frac{\partial^l \hat{f}}{\partial \xi^l}(\xi) &= \xi^k \cdot (-i)^l \mathcal{F}(x^l f(x))(\xi) = \xi^k (-i)^l \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} x^l f(x)\, dx \\ &= \xi^k (-i)^l \left( i \cdot \frac{e^{-ix\xi} x^l f(x)}{\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i}{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \frac{\partial}{\partial x}(x^l f(x))\, dx \right) \\ &= \xi^{k-1} (-i)^{l+1} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \frac{\partial}{\partial x}(x^l f(x))\, dx = \cdots = (-i)^{l+k} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \frac{\partial^k}{\partial x^k}(x^l f(x))\, dx\end{aligned}$$

Como $S(\mathbb{R})$ es cerrado bajo derivación y multiplicación por un polinomio se tiene que

$$\left| \xi^k \frac{\partial^l \hat{f}}{\partial \xi^l}(\xi) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k}(x^l f(x)) \right|\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left\| \frac{\partial^k}{\partial x^k}(x^l f(x)) \right\|_{L^1} < \infty$$

lo que prueba que $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$. Donde usamos que $S(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$.

(7) Debemos probar los siguientes puntos:

- Integrando por partes se tiene que

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f'(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( e^{-ix\xi} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx \right) = \frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx = i\xi \hat{f}(\xi)$$

- Derivando bajo el signo de la integral obtenemos que (lo mismo que en 1.2.2.b)

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} (-ixf(x))\, dx = \mathcal{F}(-ixf(x))(\xi)$$

- Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces haciendo cambio de variable se tiene que

$$\mathcal{F}(f(x-a))(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x-a)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x+a)\xi} f(x)\, dx = e^{-ia\xi} \mathcal{F}(f)(\xi)$$

- Dado $a \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\mathcal{F}(e^{iax} f(x))(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(\xi - a)} f(x)\, dx = \mathcal{F}(f)(\xi - a)$$

# 2. Transformada de Fourier - Versión discreta

**Lema 2.1:** *Definimos* $\varphi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\xi}$ *para* $n \in \mathbb{Z}$. *Entonces* $\mathcal{B} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ *es una base ortonormal de* $L^2([0, 2\pi))$.

*Demostración.* En primer lugar probaremos que $\mathcal{B}$ es un conjunto ortonormal, sean $n, m \in \mathbb{N}$, luego

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\xi} e^{in\xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\xi}\, d\xi$$

si $n = m$ entonces $\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = 1$, pero si $n \neq m$ se tiene que $\gamma = e^{i(n-m)\xi}$ es una parametrización de $\mathbb{S}^1$, así por el teorema integral de cauchy $\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = 0$.

Basta probar que *span* $\mathcal{B}$ es denso en el conjunto de las funciones continuas soporte compacto. Sea $K \subsetneq [0, 2\pi)$ un conjunto compacto, probaremos que *span* $\mathcal{B}$ es denso en $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ usando Stone-Weierstrass. Claramente *span* $\mathcal{B}$ es una subálgebra de $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ en la cual $\overline{f} \in$ *span* $\mathcal{B}$ si $f \in$ *span* $\mathcal{B}$. Veamos que separa puntos, sean $x, y \in K$ distintos, consideramos la función

$$f(\xi) = e^{-ix} e^{i\xi} \in span\, \mathcal{B}$$

como $x, y \in [0, 2\pi)$, entonces $y - x < 2\pi$ lo que implica que $f(x) \neq f(y)$. Por lo tanto *span* $\mathcal{B}$ es denso $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ según la norma uniforme. Sea $f \in \mathcal{C}_c([0, 2\pi), \mathbb{C})$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $g \in$ *span* $\mathcal{B}$ tal que

$$\|f - g\|_\infty < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{entonces} \quad \|f - g\|_{L^2}^2 = \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2\, dx \leq 2\pi \|f - g\|_\infty^2 < \varepsilon$$

lo que concluye la demostración del lema. $\square$

**Observación:** Como el producto interno es continuo respecto a la norma tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n \, d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \varphi \cdot \psi_n \, d\lambda \quad \text{para toda } \varphi \in L^2([0,2\pi)) \text{ y } (\psi_n)_n \subset L^2([0,2\pi))$$

Siempre que $\sum \psi_n$ converja en $L^2$. Esto se usará en múltiples ocasiones.

(1) Basta probar que $\mathcal{F}$ es isometría con inversa por la derecha, esto es, que sea sobreyectiva. Veamos lo primero, sea $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$, entonces

$$\|\mathcal{F}(\psi)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-in\xi}\psi(n)\right\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left\|e^{-in\xi}\psi(n)\right\|_{L^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\psi(n)|^2 = \|\psi\|_{\ell^2}^2$$

En la segunda igualdad usamos teorema de pitágoras y que $\sqrt{2\pi}\cdot\mathcal{B}$ es conjunto ortogonal, por lo tanto $\mathcal{F}$ es isometría. Queda ver el segundo punto, sea $f \in L^2([0,2\pi))$, entonces por el lema

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \qquad \text{esta identidad se usará en múltiples ocasiones}$$

luego,

$$(\mathcal{F}\circ\mathcal{F}^{-1})(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-inx}\int_0^{2\pi} e^{in\xi} f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-inx}\int_0^{2\pi} e^{in\xi}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{a_m}{\sqrt{2\pi}}e^{im\xi}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{-inx}\int_0^{2\pi} e^{in\xi}e^{im\xi}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\pi\cdot a_{-n}e^{-inx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx} = f(x)$$

Lo que prueba lo pedido. Por otro lado, la identidad de Plancherel es inmediata del hecho de que $\mathcal{F}$ es isometría.

(2) Sea $f \in L^2([0,2\pi))$, entonces

$$(\mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1})(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-inx}(\Delta\mathcal{F}^{-1})(f)(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-inx}\left(\mathcal{F}^{-1}(f)(n+1) + \mathcal{F}^{-1}(f)(n-1) - 2\mathcal{F}^{-1}(f)(n)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-inx}\left(\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\xi}f(\xi)\, d\xi + \int_0^{2\pi} e^{i(n-1)\xi}f(\xi)\, d\xi - 2\int_0^{2\pi} e^{in\xi}f(\xi)\, d\xi\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-inx}\left(\int_0^{2\pi} e^{in\xi}f(\xi)[e^{i\xi}+e^{-i\xi}-2]\, d\xi\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-inx}\left(\int_0^{2\pi} e^{in\xi}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{a_m}{\sqrt{2\pi}}e^{im\xi}[e^{i\xi}+e^{-i\xi}-2]\, d\xi\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-inx}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m\left(\int_0^{2\pi} e^{i(n+m+1)\xi} + e^{i(n+m-1)\xi} - 2e^{i(n+m)\xi}\, d\xi\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-inx}\cdot 2\pi(a_{-n-1}+a_{-n+1}-2a_{-n}) = (e^{ix}+e^{-ix}-2)f(x) = (2cos(x)-2)f(x)$$

(3) Notemos que

$$(S\mathcal{F}^{-1})(f)(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} e^{i(n-1)\xi}f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} e^{i(n-1)\xi}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{a_m}{\sqrt{2\pi}}e^{im\xi}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m\int_0^{2\pi} e^{i(n+m-1)\xi}\, d\xi = a_{-n+1}$$

entonces

$$(\mathcal{F}S\mathcal{F}^{-1})(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-inx}a_{-n+1} = e^{-ix}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{a_n}{\sqrt{2\pi}}e^{inx} = e^{-ix}f(x)$$

Concluimos que $S$ es unitariamente equivalente al operador de multiplicación $\mathcal{M}_h$, donde $h(x) = e^{-ix}$.