Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Pedro Gaspar – Estudiante: Benjamín Mateluna

Geometría Diferencial - MAT2860
Interrogación 2
30 de mayo de 2025

Problema 1

Lema 0.1. *Sea Σ una superficie regular orientable. Entonces $p \in \Sigma$ es punto umbilical si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $e = \lambda E$, $f = \lambda F$ y $g = \lambda G$.*

> **Demostración.** *Supongamos que $p \in \Sigma$ es punto umbilical entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{I}(v, w) = \lambda I(v, w)$ para todo $v, w \in T_p\Sigma$, en particular se cumple para X_u, X_v y por lo tanto*
>
> $$e = \mathbb{I}(X_u, X_u) = \lambda I(X_u, X_u) = \lambda E$$
>
> *del mismo modo se obtienen las otras igualdades. Supongamos que se tienen las igualdades mencionadas, luego, como la segunda forma fundamental esta determinada por sus coeficientes e, f, g y los coeficientes E, F, G determinante la primera forma, se sigue que $\mathbb{I} = \lambda I$ y por lo tanto p es umbilical.*

Consideremos la parametrización del elipsoide $X : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = (asen(u)cos(v), bsen(u)sen(v), c \cdot cos(v))$$

Para cubrir todo el elipsoide también tomamos la parametrización

$$X^0(u, v) = (acos(u), bsen(u)sen(v), csen(u)cos(v))$$

con $(u, v) \in (0, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2})$. Además se tiene que

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = \left\langle X_{uu}, \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} \right\rangle = \frac{\langle X_{uu}, X_u \times X_v \rangle}{|X_u \times X_v|}$$

Tenemos tres casos:

a) Si $a > b > c$. Veamos las derivadas de la parametrización, esto es

$$X_u = (acos(u)cos(v), bcos(u)sen(v), -csen(u))$$
$$X_v = (-asen(u)sen(v), bsen(u)cos(v), 0)$$

Con ello calculamos los coeficientes de la primera forma fundamental,

$$E = a^2cos^2(u)cos^2(v) + b^2cos^2(u)sen^2(v) + c^2sen^2(u)$$
$$F = (b^2 - a^2)cos(u)cos(v)sen(u)sen(v)$$
$$G = a^2sen^2(u)sen^2(v) + b^2sen^2(u)cos^2(v)$$

Por otro lado vemos que

$$X_u \times X_v = (bcsen^2(u)cos(v), acsen^2(u)sen(v), abcos(u)sen(u))$$

b) Si $a = b > c$,

c) Si $a > b = c$, notemos que este caso es simetrico respecto de $a = b > c$, basta tomar una rotación que intercambie las coordenadas respectivas y como toda rotación es isometría lineal, se preserva la primera forma fundamental y por ende los puntos umbilicales, luego, en este caso solo hay dos puntos umbilicales.

d) Si $a = b = c$, entonces la superficie es una esfera y por lo visto en clases todo punto es umbilical.

Problema 2

a) Recordemos que se tiene el resultado
$$K_\Sigma \circ X = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$
como $F \equiv 0$, vemos que
$$(K_\Sigma \circ X) \cdot EG = eg - f^2$$
Por otro lado, se tienen las siguientes identidades para E_{vv} y G_{uu},
$$\begin{aligned} E_{vv} &= \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\langle X_u, X_u\rangle\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(2\langle X_{uv}, X_u\rangle\right) = 2\left(\langle X_{uvv}, X_u\rangle + \langle X_{uv}, X_{uv}\rangle\right) \\ G_{uu} &= \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\langle X_v, X_v\rangle\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(2\langle X_{vu}, X_v\rangle\right) = 2\left(\langle X_{vuu}, X_v\rangle + \langle X_{vu}, X_{vu}\rangle\right) \end{aligned}$$
Para la expresiones $\left|(X_{uv})^T\right|^2$ y $\left\langle (X_{uu})^T, (X_{vv})^T\right\rangle$, tenemos que
$$\begin{aligned} \left|(X_{uv})^T\right|^2 &= \langle X_{uv} - \langle X_{uv}, N^x\rangle N^x, X_{uv} - \langle X_{uv}, N^x\rangle N^x\rangle \\ &= \langle X_{uv} - fN^x, X_{uv} - fN^x\rangle = |X_{uv}|^2 - f^2 - f^2 + f^2 = |X_{uv}|^2 - f^2 \end{aligned}$$
y
$$\begin{aligned} \left\langle (X_{uu})^T, (X_{vv})^T\right\rangle &= \langle X_{uu} - \langle X_{uu}, N^x\rangle N^x, X_{vv} - \langle X_{vv}, N^x\rangle N^x\rangle \\ &= \langle X_{uu} - eN^x, X_{vv} - gN^x\rangle = \langle X_{uu}, X_{vv}\rangle - eg - eg + eg = \langle X_{uu}, X_{vv}\rangle - eg \end{aligned}$$
recordando que $e = \langle N^x, X_{uu}\rangle$, $f = \langle N^x, X_{uv}\rangle$ y $g = \langle N^x, X_{vv}\rangle$. Además, tenemos lo siguiente como consecuencia de que la parametrización es ortogonal
$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\langle X_u, X_v\rangle\right) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\langle X_{uv}, X_v\rangle + \langle X_u, X_{vv}\rangle\right) \\ &= \langle X_{uvu}, X_v\rangle + \langle X_{uv}, X_{vu}\rangle + \langle X_{uu}, X_{vv}\rangle + \langle X_u, X_{vvu}\rangle \end{aligned}$$
lo que implica que
$$-\langle X_{uu}, X_{vv}\rangle = \langle X_{uvu}, X_v\rangle + \langle X_{uv}, X_{vu}\rangle + \langle X_u, X_{vvu}\rangle$$
Usando lo anterior, se sigue que
$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\left(E_{vv} + G_{uu}\right) + \left|(X_{uv})^T\right|^2 - \left\langle (X_{uu})^T, (X_{vv})^T\right\rangle \\ &= -\langle X_{uvv}, X_u\rangle - \langle X_{uv}, X_{uv}\rangle - \langle X_{vuu}, X_v\rangle - \langle X_{vu}, X_{vu}\rangle + |X_{uv}|^2 - f^2 + eg - \langle X_{uu}, X_{vv}\rangle \\ &= eg - f^2 \end{aligned}$$
y se tiene lo pedido. (Para esta parte trabaje en conjunto con Ricardo Larraín)

b) Como $\{X_u, X_v, N\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$, existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que
$$X_{uu} = aX_u + bX_v + cN$$
Notemos que $\langle X_{uu}, N^x\rangle = e$, veamos las siguientes igualdades para $\langle X_{uu}, X_u\rangle$ y $\langle X_{uu}, X_v\rangle$
$$\langle X_{uu}, X_u\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\langle X_u, X_u\rangle\right) = \frac{1}{2}E_u$$
y usando que $F \equiv 0$ vemos que
$$0 = \frac{\partial}{\partial u}\left(\langle X_u, X_v\rangle\right) = \langle X_{uu}, X_v\rangle + \langle X_u, X_{vu}\rangle = \langle X_{uu}, X_v\rangle + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\langle X_u, X_u\rangle\right) = \langle X_{uu}, X_v\rangle + \frac{1}{2}E_v$$

entonces tomando producto interno con X_u, X_v y N^x respectivamente y usando que $F \equiv 0$, N^x es unitario y ortogonal a $\{X_u,X_v\}$, tenemos que

$$a = \frac{\langle X_{uu}, X_u \rangle}{\langle X_u, X_u \rangle} = \frac{E_u}{2E} \qquad b = \frac{\langle X_{uu}, X_v \rangle}{\langle X_v, X_v \rangle} = -\frac{E_v}{2G} \qquad c = \langle X_{uu}, N^x \rangle = e$$

Del mismo modo que antes, tenemos $X_{uv} = a_0 X_u + b_0 X_v + c_0 N$, veamos que $\langle X_{uv}, N^x \rangle = f$ y además

$$\langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\langle X_v, X_v \rangle\right) = \frac{1}{2}G_u$$
$$\langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\langle X_u, X_u \rangle\right) = \frac{1}{2}E_v$$

luego

$$a_0 = \frac{\langle X_{uv}, X_u \rangle}{\langle X_u, X_u \rangle} = \frac{E_v}{2E} \qquad b_0 = \frac{\langle X_{uv}, X_v \rangle}{\langle X_v, X_v \rangle} = \frac{G_u}{2G} \qquad c_0 = \langle X_{uv}, N^x \rangle = f$$

Queda ver $X_{vv} = a_1 X_u + b_1 X_v + c_1 N$. Recordemos que $\langle X_{vv}, N^x \rangle = g$ y adicionalmente

$$\langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\langle X_v, X_v \rangle\right) = \frac{1}{2}G_v$$

por otro lado se tiene que

$$0 = \frac{\partial}{\partial v}\left(\langle X_u, X_v \rangle\right) = \langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vv} \rangle = \frac{1}{2}G_u + \langle X_u, X_{vv} \rangle$$

entonces

$$a_0 = \frac{\langle X_{vv}, X_u \rangle}{\langle X_u, X_u \rangle} = -\frac{G_u}{2E} \qquad b_0 = \frac{\langle X_{vv}, X_v \rangle}{\langle X_v, X_v \rangle} = \frac{G_v}{2G} \qquad c_0 = \langle X_{vv}, N^x \rangle = g$$

lo que demuestra lo pedido.

c) Del item anterior tenemos las siguientes igualdades

$$(X_{uu})^T = \frac{E_u}{2E}X_u - \frac{E_v}{2G}X_v$$
$$(X_{uv})^T = \frac{E_v}{2E}X_u + \frac{G_u}{2G}X_v$$
$$(X_{vv})^T = -\frac{G_u}{2E}X_u + \frac{G_v}{2G}X_v$$

Por otro lado también se tiene lo siguiente

$$\left|(X_{uv})^T\right|^2 = \left\langle \frac{E_v}{2E}X_u + \frac{G_u}{2G}X_v, \frac{E_v}{2E}X_u + \frac{G_u}{2G}X_v \right\rangle = \frac{E_v^2}{4E} + \frac{G_u^2}{4G}$$
$$\left\langle (X_{uu})^T, (X_{vv})^T \right\rangle = \left\langle \frac{E_u}{2E}X_u - \frac{E_v}{2G}X_v, -\frac{G_u}{2E}X_u + \frac{G_v}{2G}X_v \right\rangle = -\frac{E_u G_u}{4E} - \frac{E_v G_v}{4G}$$

Luego

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u+\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v\right]\\
&=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{G_{uu}\sqrt{EG}-G_u\frac{E_uG+EG_u}{2\sqrt{EG}}+E_{vv}\sqrt{EG}-E_v\frac{E_vG+EG_v}{2\sqrt{EG}}}{EG}\right)\\
&=-\frac{1}{4EG}\left(\frac{2G_{uu}EG-G_u(E_uG+EG_u)+2E_{vv}EG-E_v(E_vG+EG_v)}{EG}\right)\\
&=-\frac{1}{4EG}\left(2(E_{vv}+G_{uu})-\frac{G_uE_u}{E}-\frac{G_u^2}{G}-\frac{E_v^2}{E}-\frac{E_vG_v}{G}\right)\\
&=\frac{1}{EG}\left(-\frac{1}{2}(E_{vv}+G_{uu})+\frac{E_v^2}{4E}+\frac{G_u^2}{4G}+\frac{E_uG_u}{4E}+\frac{E_vG_v}{4G}\right)\\
&=\frac{1}{EG}\left(-\frac{1}{2}\left(E_{vv}+G_{uu}\right)+\left|(X_{uv})^T\right|^2-\left\langle (X_{uu})^T,(X_{vv})^T\right\rangle\right)=\frac{1}{EG}(K_\Sigma\circ X)EG=K_\Sigma\circ X
\end{aligned}
$$

Problema 3

a) Sea $\gamma:[a,b]\to\Sigma$ una curva continua. Definimos el conjunto

$$A:=\{c\in[a,b]:\text{Existe } N_c:[a,c]\to\mathbb{S}^2 \text{ continua, } N_c(a)=n \text{ y } N_c(t)\in(T_{\gamma(t)}\Sigma)^\perp\}$$

Notemos que A es no vacío, en efecto, $a\in A$ tomando $N_a(a)=n$ y es continua por ser constante.

Afirmamos que A es abierto, sea $c\in A$. Existe $N_c:[a,c]\to\mathbb{S}^2$ continua tal que $N_c(a)=n$ y $N_c(t)\in(T_{\gamma(t)}\Sigma)^\perp$. Sea $(\mathcal{U},X)$ una carta de $\gamma(c)$. Sea $\varepsilon>0$ tal que $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)=:V\subseteq\gamma^{-1}(X(\mathcal{U}))$. Dado $0<\delta<\varepsilon$ definimos $N_\delta^x:\mathcal{U}\to\mathbb{S}^2$ como sigue

$$N_\delta^x(u,v):=\frac{X_u\times X_v}{|X_u\times X_v|}(u,v)$$

Consideramos la función $N_\delta^c:=N_\delta^x\circ X^{-1}\circ\gamma:V\to\mathbb{S}^2$ tal que $N_\delta^c(c)=N_c(c)$. Definimos $N_\delta:[0,\delta]\to\mathbb{S}^2$ como

$$N_\delta(t):=\begin{cases}N_c(t) & \text{si } t\in[a,c]\\ N_\delta^c(t) & \text{si } t\in[c,c+\delta]\end{cases}$$

Por lema del pegamiento N_δ es una función continua, ya que $N_\delta^c(c)=N_c(c)$. Además, por construcción, cumple las hipotesis necesarias, luego $[a,c+\varepsilon)\subset A$.

Veamos que A es cerrado. Sea $(c_n)_n\subseteq A$ tal que c_n converge a $c\in[a,b]$. Sea $(\mathcal{U},X)$ una carta de $\gamma(c)$, por continuidad, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $\gamma(c_n)\in X(\mathcal{U})$.

Definimos N_c^x del mismo modo que antes. Sea $V:=\gamma^{-1}(X(\mathcal{U}))$ consideremos $N_c^0:=N_c^x\circ X^{-1}\circ\gamma:V\to\mathbb{S}^2$ tal que $N_c^0(c_n)=N_{c_n}(c_n)$. Se define $N_c:[a,c]\to\mathbb{S}^2$ por

$$N_c(t):=\begin{cases}N_{c_n}(t) & \text{si } t\in[a,c_n]\\ N_c^0(t) & \text{si } t\in[c_n,c]\end{cases}$$

Al igual que antes, esta función es continua, por lema de pegamientos y cumple con las hipotesis necesarias por construcción y por lo tanto $c\in A$. Así, $A\subseteq[a,b]$ es clopen y por lo tanto $A=[a,b]$.

Veamos que la función N_γ es unica, supongamos que existe N' que satisface las mismas condiciones, luego $(N_\gamma-N')^{-1}(0)$ y $(N_\gamma+N')^{-1}(0)$ son cerrados disjuntos que separan $[a,b]$, pues $N_\gamma(t)=\pm N'(t)$. Como $N_\gamma(a)=N'(a)$, se sigue que $N_\gamma(t)=N'(t)$ para todo $t\in[a,b]$ lo que prueba la unicidad.

b) Supongamos que Σ es orientable, entonces existe un campo normal unitario continuo $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$. Sea $\gamma : [a,b] \to \Sigma$ una curva continua y cerrada. Por la parte anterior existe una única función continua $N_\gamma : [a,b] \to \mathbb{S}^2$ tal que

$$N(\gamma(a)) = N_\gamma(a) \quad \text{y} \quad N_\gamma(t) \in (T_{\gamma(t)}\Sigma)^\perp$$

Consideremos la función continua $N \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{S}^2$. Notemos que $N \circ \gamma$ cumple las mismas propiedades que N_γ por definición de N, luego, por unicidad se sigue que

$$N_\gamma(a) = N(\gamma(a)) = N(\gamma(b)) = N_\gamma(b)$$

Supongamos, sin perdida de generalidad, que Σ es conexa, en caso contrario basta ver el resultado para cada componente conexa. Supongamos que para toda curva γ continua y cerrada se cumple que $N_\gamma(a) = N_\gamma(b)$.

Sea $q \in \Sigma$ consideremos su vector normal n unitario, definimos $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ como sigue

$$N(p) := N_\gamma(1)$$

donde $\gamma : [0,1] \to \Sigma$ es una curva continua tal que $\gamma(0) = q$ y $\gamma(1) = p$, además $N_\gamma(0) = n$ para toda curva γ. Veamos que N esta bien definida, es decir, es independiente de la curva representante. Sean γ, γ_0 como antes, definimos la curva

$$\alpha(t) := \begin{cases} \gamma(1-2t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ \gamma_0(2t-1) & \text{si } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

y su campo normal $N_\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^2$ como

$$N_\alpha(t) := \begin{cases} N_\gamma(1-2t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ N_{\gamma_0}(2t-1) & \text{si } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

es continuo pues $N_\gamma(0) = N_{\gamma_0}(0)$ y es única tal que $N_\alpha(0) = N_\gamma(1)$, luego como α es cerrada

$$N_\gamma(1) = N_\alpha(0) = N_\alpha(1) = N_{\gamma_0}(1)$$

Veamos que N es continua. Sea $p_0 \in \Sigma$, sea γ un camino que une q con p_0, entonces por continuidad de N_γ se sigue que $\lim\limits_{t\to b} N(\gamma(t)) = \lim\limits_{t\to b} N_\gamma(t) = N_{\gamma(b)} = N(p_0)$. Como lo anterior es independiente del camino, conluimos que

$$\lim_{p\to p_0} N(p) = N(p_0)$$

Problema 4

Si $p \in S_r$, es claro que $\Phi(p) = \phi(p)$, adicionalmente esta es la única extensión. Veamos que $\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ es invertible, como ϕ es isometría, en particular es invertible, definimos $\psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ como sigue

$$\psi(p) := \frac{|p|}{r}\phi^{-1}\left(\frac{p}{|p|}r\right)$$

luego

$$\begin{aligned}\Phi \circ \psi(p) = \Phi(\psi(p)) = \Phi\left(\frac{|p|}{r}\phi^{-1}\left(\frac{p}{|p|}r\right)\right) &= \frac{\left|\frac{|p|}{r}\phi^{-1}\left(\frac{p}{|p|}r\right)\right|}{r}\phi\left(\frac{\frac{|p|}{r}\phi^{-1}\left(\frac{p}{|p|}r\right)}{\left|\frac{|p|}{r}\phi^{-1}\left(\frac{p}{|p|}r\right)\right|}r\right) \\ &= \frac{|p|}{r}\phi\left(\phi^{-1}\left(\frac{p}{|p|}r\right)\right) = p\end{aligned}$$

del mismo modo se sigue que $\psi \circ \Phi(p) = p$. Veamos que $D\Phi_p$ es isometría lineal y por ende un isomorfismo lineal. Sea $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ y sea $w \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\begin{aligned}
D\Phi_p w &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi(p+tw) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\frac{|p+tw|}{r} \phi\left(r\frac{p+tw}{|p+tw|} \right) \right) \\
&= \left(\frac{\langle p+tw, w\rangle}{r\,|p+tw|} \phi\left(r\frac{p+tw}{|p+tw|} \right) + \frac{|p+tw|}{r} D\phi_{\frac{p}{|p|}r} \left(r\frac{w\,|p+tw| - (p+tw)\frac{\langle p+tw,w\rangle}{|p+tw|}}{|p+tw|^2} \right) \right) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{\langle p, w\rangle}{r\,|p|} \phi\left(r\frac{p}{|p|} \right) + |p|\, D\phi_{\frac{p}{|p|}r} \left(\frac{w}{|p|} - \frac{p\,\langle p,w\rangle}{|p|^3} \right)
\end{aligned}$$

notemos que

$$\begin{aligned}
|D\Phi_p w|^2 &= \left| \frac{\langle p, w\rangle}{r\,|p|} \phi\left(r\frac{p}{|p|} \right) + |p|\, D\phi_{\frac{p}{|p|}r} \left(\frac{w}{|p|} - \frac{p\,\langle p,w\rangle}{|p|^3} \right) \right|^2 \\
&= \frac{\langle p,w\rangle^2}{|p|^2} + \left| w - p\frac{\langle p,w\rangle}{|p|^2} \right|^2 = \frac{\langle p,w\rangle^2}{|p|^2} + |w|^2 - 2\frac{\langle p,w\rangle^2}{|p|^2} + \frac{\langle p,w\rangle^2}{|p|^2} = |w|^2
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se debe a que dado $v \in S_r$ se tiene que $\langle D\phi_v w, v\rangle = 0$, además usamos el hecho de que $D\phi_v$ es isometría lineal. Por teorema de la función inversa se sigue que Φ es difeomorfismo local y como es biyectiva es difeomorfismo, así por ejercicio visto en clase existe un único movimiento rígido $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\Phi = F\big|_{\mathbb{R}^3\setminus\{0\}}$.
Notemos que $F(S_r) = \Phi(S_r) = \phi(S_r) = S_r$ y por lo tanto F es una isometría lineal de $\mathbb{R}^3$ y $\phi = \Phi\big|_{S_r} = F\big|_{S_r}$. Por otro lado por un ejemplo visto en clase, dada una isometría lineal F tenemos que $F(S_r) = S_r$ lo que implica que $\phi := F\big|_{S_r}$ es un difeomorfismo y $D\phi_p$ es isometría lineal.

Por último, queda ver que esta correspondencia es, de hecho, un morfismo de grupos. Sean ϕ, ψ isometrías de S_r y F, G sus correspondientes isometrías lineales de $\mathbb{R}^3$, es claro que $F \circ G$ es isometría y dado $p \in S_r$ notamos que $(F \circ G)(p) = F(G(p)) = F(\psi(p)) = \phi(\psi(p))$, por unicidad $F \circ G$ es la isometría que corresponde a $\phi \circ \psi$. Concluimos que $Isom(S_r)$ es isomorfo al grupo de isometrías lineales de $\mathbb{R}^3$.

Problema 5

a) Consideramos la parametrización $X : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u,v) := ((R + rcos(u))cos(v), (R + rcos(u))sen(v), rsen(u))$$

calculamos sus derivadas parciales para encontrar los coeficientes de la primera forma fundamental

$$F = \langle X_u, X_v\rangle = (R + rcos(u))rsen(u)cos(v)sen(v) - (R + rcos(u))rsen(u)cos(v)sen(v) = 0$$

$$E = \langle X_u, X_u\rangle = r^2 sen^2(u)cos^2(v) + r^2 sen^2(u)sen^2(v) + r^2 cos^2(u) = r^2 sen(u) + r^2 cos(u) = r^2$$

$$G = \langle X_v, X_v\rangle = (R + rcos(u))^2 sen^2(v) + (R + rcos(u))^2 cos^2(v) = (R + rcos(u))^2$$

Como $F \equiv 0$, la parametrización es ortogonal y por el problema tenemos que

$$(K_\Sigma \circ X)\sqrt{EG} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v \right]$$

donde $E_v \equiv 0$, pues E es constante, además $\sqrt{EG} = (R + rcos(u))r$ y $G_u = -2(R + rcos(u))rsen(u)$, luego

$$\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u = \left(\frac{-2(R + rcos(u))rsen(u)}{(R + rcos(u))r} \right)_u = (-2sen(u))_u = -2cos(u)$$

Utilizando lo anterior, vemos que

$$(K_\Sigma \circ X)\sqrt{EG} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v\right] = -\frac{1}{2}(-2cos(u) + 0) = cos(u)$$

b) Así

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(K_\Sigma \circ X)\sqrt{EG}\; dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} cos(u)\; du\; dv = 0$$