Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Pedro Gaspar – Estudiante: Benjamín Mateluna

Geomtría Diferencial - MAT2860
Tarea I3
26 de junio de 2025

Problema 1

Probaremos un resultado previo sobre transporte paralelo y curvas geodesicas en la esfera.

Lema 0.1. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{S}^2$ una curva de la forma $\alpha(t) = usen(t) + vcos(t)$ donde u, v son ortonormales, entonces $P_{\alpha,t_0,t_1}(w) = w + \langle w, \alpha'(t_0)\rangle (\alpha'(t_1) - \alpha'(t_0))$.*

Demostración. *Empezamos observando que α es una curva geodésica. Notemos que $\langle \alpha'(t), \alpha(t)\rangle = 0$ para todo $t \in I$ y además $\alpha'' = -\alpha$. Sea $w \in T_p\mathbb{S}^2$ donde $p = \alpha(t_0)$ y sea $Y : I \to \mathbb{S}^2$ el único campo paralelo a lo largo de α tal que $Y(t_0) = w$, como Y en particular es campo tangente se tiene que*

$$Y(t) \in T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^2 = (\alpha(t))^{\perp}$$

es decir, $\langle Y(t), \alpha(t)\rangle = 0$ para todo $t \in I$, lo que implica que $\langle Y, \alpha'\rangle = -\langle Y', \alpha\rangle$. Notemos que

$$0 = \nabla_{\alpha'}Y = Y' - \langle Y', \alpha\rangle \alpha$$

tomando producto interno con α' vemos que

$$\langle Y', \alpha'\rangle = \langle Y', \alpha\rangle \langle \alpha, \alpha'\rangle = 0$$

de este modo

$$\frac{d}{dt}(\langle Y, \alpha'\rangle) = \langle Y', \alpha'\rangle + \langle Y, \alpha''\rangle = -\langle Y, \alpha\rangle = 0$$

luego la función $\langle Y, \alpha'\rangle$ es constante, evaluando en t_0 vemos que $\langle Y', \alpha\rangle = -\langle Y, \alpha'\rangle \equiv -\langle w, \alpha'(t_0)\rangle$. Tenemos que

$$Y'(t) = \langle w, \alpha'(t_0)\rangle \alpha''(t)$$

integrando a ambos lados vemos que

$$Y(t) - Y(t_0) = Y(t) - w = \langle w, \alpha'(t_0)\rangle (\alpha'(t) - \alpha'(t_0))$$

lo que concluye la demostración.

a) Notemos que

$$\gamma_1(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} cos(s) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} sen(s) \quad \text{y} \quad \gamma_2(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} cos(s) + \begin{pmatrix} cos(\theta) \\ sen(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} sen(s)$$

además, los vectores que describen cada curva son ortonormales. Por otro lado se tiene que

$$\gamma_1'(s) = (cos(s), 0, sen(s)) \quad \text{y} \quad \gamma_2'(s) = (cos(\theta)cos(s), sen(\theta)cos(s), -sen(s))$$

Así, por el lema tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
P_{\gamma_1,0,\pi}(w_0) &= w_0 + \langle w_0, \gamma_1'(0)\rangle \left(\gamma_1'(\pi) - \gamma_1'(0)\right) \\
&= w_0 + \left\langle w_0, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle \left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = w_0 + w_{01}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} = w_1
\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
P_{\gamma_2,0,\pi}(w_0) &= w_0 + \langle w_0, \gamma_2'(0)\rangle \left(\gamma_2'(\pi) - \gamma_2'(0)\right) \\
&= w_0 + \left\langle w_0, \begin{pmatrix}cos(\theta)\\sen(\theta)\\0\end{pmatrix}\right\rangle \left(\begin{pmatrix}-cos(\theta)\\-sen(\theta)\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}cos(\theta)\\sen(\theta)\\0\end{pmatrix}\right) = w_2
\end{aligned}$$

b)

Problema 2

El toro, puede ser parametrizado por $X : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = ((R + rcos(u))cos(v), (R + rcos(u))sen(v), rsen(u))$$

Si intersectamos con el plano $z = 1$, entonces $rsen(u) = c$ y por lo tanto

$$rcos(u) = \pm\sqrt{r^2 - c^2} := c'$$

que esta bien definida pues $c \in [-r, r]$. Bajo esta restricción definimos

$$\eta := R + rcos(u) = R + c' > 0$$

Consideramos la curva $\alpha : (0, 2\pi\eta) \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco dada por

$$\alpha(t) = \left(\eta cos\left(\frac{t}{\eta}\right), \eta sen\left(\frac{t}{\eta}\right), c\right)$$

Buscamos calcular su curvatura geodésica, en primer lugar debemos calcular la aplicación de gauss de la superficie, para ello vemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
X_u(u, v) &= (-rsen(u)cos(v), -rsen(u)sen(v), rcos(u)) \\
X_v(u, v) &= (-(R + rcos(u))sen(v), (R + rcos(u))cos(v), 0)
\end{aligned}$$

entonces

$$(X_u \times X_v)(u, v) = (-(R + rcos(u))rcos(u)cos(v), -(R + rcos(u))rcos(u)sen(v), -(R + rcos(u))rsen(v))$$

y además $|(X_u \times X_v)(u, v)| = (R + rcos(u))r$. Usando que u es tal que $rsen(u) = c$, se sigue que

$$N(\alpha(t)) = -\frac{1}{r}\left(c' cos\left(\frac{t}{\eta}\right), c' sen\left(\frac{t}{\eta}\right), c\right)$$

Por otro lado vemos que

$$\alpha'(t) = \left(-sen\left(\frac{t}{\eta}\right), cos\left(\frac{t}{\eta}\right), 0\right) \quad \text{y entonces} \quad \alpha''(t) = -\frac{1}{\eta}\left(cos\left(\frac{t}{\eta}\right), sen\left(\frac{t}{\eta}\right), 0\right)$$

Nuestro objetivo ahora es determinar $\nabla_{\alpha'}\alpha'(t)$, para ello observemos que

$$\langle \alpha'', N \circ \alpha \rangle (t) = \frac{c'}{r\eta}$$

de este modo

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha'}\alpha'(t) &= \alpha''(t) - \langle \alpha'', N\circ\alpha\rangle (t) N(\alpha(t)) \\
&= -\frac{1}{\eta}\left(cos\left(\frac{t}{\eta}\right), sen\left(\frac{t}{\eta}\right), 0\right) + \frac{c'}{r^2\eta}\left(c' cos\left(\frac{t}{\eta}\right), c' sen\left(\frac{t}{\eta}\right), c\right) \\
&= \left(\frac{-c^2}{r^2\eta} cos\left(\frac{t}{\eta}\right), \frac{-c^2}{r^2\eta} sen\left(\frac{t}{\eta}\right), \frac{cc'}{r^2\eta}\right)
\end{aligned}$$

donde usamos que

$$\frac{c'^2}{r^2\eta} - \frac{1}{\eta} = \frac{r^2 - c^2 - r^2}{r^2\eta} = \frac{-c^2}{r^2\eta}$$

adicionalmente se tiene que

$$N(\alpha(t)) \times \alpha'(t) = -\frac{1}{r}\left(-ccos\left(\frac{t}{\eta}\right), csen\left(\frac{t}{\eta}\right), c\right)$$

por último, se tiene que

$$K_g = [\nabla_{\alpha'}\alpha'] = -\frac{1}{r}\cdot\frac{-c}{r^2\eta}\left(-c^2cos^2\left(\frac{t}{\eta}\right) + c^2sen^2\left(\frac{t}{\eta}\right) - c'^2\right) = -\frac{c}{r^3\eta}\left(c^2 cos\left(\frac{2t}{\eta}\right) + c'^2\right)$$

Problema 3

Problema 4

a) Notemos que

$$\begin{aligned}
\omega_p(v) &= \left\langle v, \frac{Jp}{|p|^2}\right\rangle = \frac{1}{|p|^2}\left\langle v, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{|p|^2}(-v_1 y + v_2 x) \\
&= \frac{1}{|p|^2}(-dx(v)y + dy(v)x) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx(v) + \frac{x}{x^2+y^2}dy(v)
\end{aligned}$$

conlcuimos que

$$\omega_p = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

además, para $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ las funciones

$$\omega_1 := \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{y} \quad \omega_2 := \frac{x}{x^2+y^2}$$

son diferenciables, y por lo tanto la 1-forma ω_p es diferenciable.

b) Veamos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
d\omega &= \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega_1}{\partial y}dy\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega_2}{\partial y}dy\right)\wedge dy = \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}dx - \frac{\partial\omega_1}{\partial y}dy\right)dx\wedge dy \\
&= \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dx\wedge dy = 0
\end{aligned}$$

c) Para finalizar, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,dt &= \int_0^1 -\frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1^2(t)+\gamma_2^2(t)}\cdot\gamma_1'(t) + \frac{\gamma_1(t)}{\gamma_1^2(t)+\gamma_2^2(t)}\cdot\gamma_2'(t) = \int_0^1 F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \\
&= \int_\gamma F(x,y)\,ds
\end{aligned}$$

es decir, la integral corresponde a la integral de línea del campo vectorial $F(x,y) = (\omega_1, \omega_2)(x,y)$ sobre la curva γ.

Problema 5

a) Se tiene lo siguiente

$$(\omega_{ij})_p(v) = \langle DE_i(p)v, E_j(p)\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial E_i}{\partial x_k}(p)v_k, E_j(p) \right\rangle = \sum_{k=1}^{3} \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial x_k}, E_j(p) \right\rangle v_k$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial x_k}, E_j \right\rangle (p)(dx_k)_p(v) = \left(\sum_{k=1}^{3} \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial x_k}, E_j \right\rangle (p)(dx_k)_p \right)(v)$$

es decir,

$$\omega_{ij} = \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial x}, E_j \right\rangle dx + \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial y}, E_j \right\rangle dy + \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial z}, E_j \right\rangle dz$$

como las funciones E_i y el producto interno son diferenciables, concluimos que ω_{ij} es una 1-forma diferenciable.

b) Se sigue que

$$(\omega_i)_p(v) = \langle v, E_i(p)\rangle = \sum_{k=1}^{3}(E_i)_k(p)v_k = \sum_{k=1}^{3}(E_i)_k(p)(dx_k)(v)$$

entonces

$$\omega_i = (E_i)_1 dx + (E_i)_2 dy + (E_i)_3 dz$$

por la misma razón que antes, la 1-forma ω_i es diferenciable. Por otro lado ...

c)