

## Estructura de grupo topológico en $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$

Queremos definir una operación binaria en  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  que es multiplicativa con la norma, para ello buscamos definir un producto en  $\mathbb{R}^4$ , un análogo a la multiplicación compleja en  $\mathbb{R}^2$ . Dado  $x \in \mathbb{R}^4$  lo denotamos por  $x = (a, u)$  donde  $a \in \mathbb{R}$  y  $u \in \mathbb{R}^3$ . Sean  $(a, u), (b, v) \in \mathbb{R}^4$ , definimos

$$(a, u)(b, v) := (a, u) \cdot (b, v) := (ab - \langle u, v \rangle, av + bu + u \times v)$$

En primer lugar, demostramos la identidad  $(\lambda(a, u))(\mu(b, v)) = \lambda\mu((a, u)(b, v))$ . En efecto,

$$\begin{aligned} (\lambda(a, u))(\mu(b, v)) &= (\lambda a \mu b - \langle \lambda u, \mu v \rangle, \lambda a \mu v + \mu b \lambda u + (\lambda u) \times (\mu v)) \\ &= \lambda\mu((a, u)(b, v)) \end{aligned}$$

Por otro lado, en busca de nuestro objetivo, notemos que

$$\begin{aligned} \|(a, u)(b, v)\|^2 &= \|(ab - \langle u, v \rangle, av + bu + u \times v)\|^2 \\ &= a^2 b^2 - 2ab \langle u, v \rangle + \langle u, v \rangle^2 + a^2 \|v\|^2 + b^2 \|u\|^2 + 2ab \langle u, v \rangle + \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2 \\ &= (a^2 + \|u\|^2)(b^2 + \|v\|^2) = \|(a, u)\|^2 \|(b, v)\|^2 \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} ((a, u) + (b, v))(c, w) &= (a + b, u + v)(c, w) = ((a + b)c - \langle u + v, w \rangle, (a + b)w + c(u + v) + (u + v) \times w) \\ &= (a, u)(c, w) + (b, v)(c, w) \end{aligned}$$

Donde la última igualdad se obtiene de que el producto cruz distribuye sobre la suma. Similarmente se tiene para  $(c, w)((a, u) + (b, v)) = (c, w)(a, u) + (c, w)(b, v)$ . Ahora que tenemos las propiedades deseadas veamos que con esta operación  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  forma un grupo. Afirmamos que el elemento neutro es el  $(1, 0)$ . Sea  $(a, u) \in \mathbb{R}^4$ , entonces

$$(a, u)(1, 0) = (a - \langle u, 0 \rangle, a0 + u + u \times 0) = (a, u)$$

del mismo modo se tiene que  $(1, 0)(a, u) = (a, u)$ . El inverso viene dado por  $\frac{1}{\|(a, u)\|^2}(a, -u)$ , por lo mencionado anteriormente vemos que

$$(a, u) \frac{(a, -u)}{\|(a, u)\|^2} = \frac{1}{\|(a, u)\|^2}(a, u)(a, -u) = \frac{1}{\|(a, u)\|^2}(\|(a, u)\|^2, -au + au - u \times u) = (1, 0)$$

analogamente se tiene la otra igualdad. Resta ver la asociatividad, sean  $(b, v), (c, w) \in \mathbb{R}^4$ , luego

$$\begin{aligned} ((a, u)(b, v))(c, w) &= (ab - \langle u, v \rangle, av + bu + u \times v)(c, w) \\ &= ((ab - \langle u, v \rangle)c - \langle av + bu + u \times v, w \rangle, \\ &\quad (ab - \langle u, v \rangle)w + c(av + bu + u \times v) + (av + bu + u \times v) \times w) \end{aligned}$$

Usando la anticonmutatividad del producto cruz y la identidad  $A \times (B \times C) = B \langle A, C \rangle - C \langle A, B \rangle$  vemos que

$$(u \times v) \times w = -w \times (u \times v) = -u \langle w, v \rangle + v \langle w, u \rangle$$

entonces  $v \langle u, w \rangle - w \langle u, v \rangle = u \times (v \times w)$ , usando la alternancia del determinante resulta que  $\langle w, u \times v \rangle = \langle u, v \times w \rangle$  y dado que el producto cruz distribuye sobre la suma se sigue que

$$\begin{aligned} ((a, u)(b, v))(c, w) &= (a(bc - \langle v, w \rangle) - \langle u, cv + bw + v \times w \rangle, \\ &\quad (bc - \langle v, w \rangle)u + a(bw + cv + v \times w) + u \times (bw + cv + v \times w)) \\ &= (a, u)((b, v)(c, w)) \end{aligned}$$

Con la topología usual de  $\mathbb{R}^4$  probaremos que esta operación le da estructura de grupo topológico a  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ . Como este último, en particular es espacio métrico inducido por la norma euclídeana, dotamos al espacio  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  de la métrica del máximo. Sea  $\tau_{max}$  la topología inducida por esta métrica, adicionalmente, consideramos  $\tau_{prod}$  la topología producto inducida por el espacio topológico  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ . Probaremos que estas topologías son iguales.

Sea  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  y  $r, r' \in \mathbb{R}^+$ . En primer lugar, afirmamos que  $B_r(x_0, y_0) = B_r(x_0) \times B_r(y_0)$  según las métricas correspondientes. En efecto, se tiene que  $(x, y) \in B_r(x_0, y_0)$  si y solo si  $\|x_0 - x\| < r$  y  $\|y_0 - y\| < r$  o equivalentemente  $(x, y) \in B_r(x_0) \times B_r(y_0)$ . Lo anterior implica que  $\tau_{max} \subseteq \tau_{prod}$ . Por otro lado, consideramos el abierto básico de  $\tau_{prod}$  dado por  $B_r(x_0) \times B_{r'}(y_0)$  veamos que es abierto según  $\tau_{max}$ , sea  $(x, y) \in B_r(x_0) \times B_{r'}(y_0)$ , existe  $d \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$B_d(x) \subseteq B_r(x_0) \quad \text{y además} \quad B_d(y) \subseteq B_{r'}(y_0)$$

de este modo  $B_d(x, y) \subseteq B_r(x_0) \times B_{r'}(y_0)$ . Concluimos que  $\tau_{max} = \tau_{prod}$ .

Sean  $(x_0, y_0), (x, y) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ . Notemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \|(a_0, u_0)(b_0, v_0) - (a, u)(b, v)\| &= \|(a_0, u_0)(b_0, v_0) + (a_0, u_0)(b, v) - (a_0, u_0)(b, v) - (a, u)(b, v)\| \\ &\leq \|(a_0, u_0)\| \cdot \|(b_0, v_0) - (b, v)\| + \|(b, v)\| \cdot \|(a_0, u_0) - (a, u)\| \end{aligned}$$

así, tomando

$$\delta := \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2 \|(a_0, u_0)\|}, \frac{\varepsilon}{2(\|(b_0, v_0)\| + 1)}, 1 \right\}$$

se tiene la continuidad de la función  $m : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  dada por  $m(x, y) := xy$ . Por otro lado, como la proyección es continua, la norma también y esta no se anula en  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  entonces la función  $\varphi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  dada por  $\varphi(x) := x^{-1}$  es continua.

En  $\mathbb{S}^3$  definimos  $m : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  por  $m(x, y) = xy$  que esta bien definida ya que  $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\| = 1$  y resulta continua por la propiedad universal de la topología de subespacio. Por otro lado consideramos  $\varphi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  dada por  $\varphi(x) = x^{-1}$  que esta bien definida puesto que

$$1 = \|(1, 0)\| = \|x \cdot x^{-1}\| = \|x\| \cdot \|x^{-1}\| = \|x^{-1}\|$$

y por la misma razón que  $m$  es una función continua.

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} & & \\ \pi \times \pi \downarrow & \searrow \pi \circ m & \\ \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 & & \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \end{array}$$

Notemos que la función  $\pi \times \pi$  es cociente y sabemos que  $(\lambda x)(\mu y) = \lambda \mu(xy)$ , luego la función  $\pi \circ m$  es constante en las fibras de  $\pi \times \pi$  y por la propiedad universal de la topología cociente, existe  $\tilde{m} : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$  continua tal que  $\tilde{m}([x], [y]) = [xy]$ . Del mismo modo la función  $\tilde{\varphi} : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$  dada por  $\tilde{\varphi}([x]) = [x^{-1}]$  es continua.

La estructura de grupo en ambos casos se tiene del hecho de que  $\cdot$  da estructura de grupo a  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ .