



Topología Algebraica - MAT2850

Tarea 1

21 de agosto de 2025

Problema 1

Lema: Sean $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ homotópicas y $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$ homotópicas, entonces $g_0 \circ f_0$ es homotópica a $g_1 \circ f_1$.

Demostración. Consideramos la función

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Z \quad \text{dada por}$$

$$(x, t) \rightarrow H_g(H_f(x, t), t)$$

donde H_g es una homotopía entre g_0 y g_1 , similarmente para H_f . Notemos que

$$H(x, 0) = H_g(H_f(x, 0), 0) = g_0(f_0(x)) = g_0 \circ f_0(x)$$

análogamente, se tiene que $H(x, 1) = g_1 \circ f_1(x)$. Veamos que H es continua, para ello tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X \times [0, 1] & \xrightarrow{id_X \times i} & X \times [0, 1]^2 & \xrightarrow{H_f \times id_{[0, 1]}} & Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H_g} & Z \\ & & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & H & & & \end{array}$$

donde $i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ esta dada por $i(t) = (t, t)$, que es continua por la propiedad universal de la topología producto, de modo similar, el resto de funciones son continuas. Por lo tanto, H es continua, ya que corresponde a la composición de funciones continuas. \square

Debemos probar tres puntos, que son los siguientes,

- (1) Sea X espacio topológico, veamos que $X \sim X$. Consideramos el homeomorfismo $id_X : X \rightarrow X$, en particular, se tiene que $id_X \circ id_X = id_X$ es homotópica a id_X mediante la homotopía constante, luego $X \sim X$.
- (2) Debemos verificar que si $X \sim Y$ entonces $Y \sim X$. Como $X \sim Y$, existe $f : X \rightarrow Y$ equivalencia homotópica, sea $g : Y \rightarrow X$ su inversa homotópica. En particular, $g : Y \rightarrow X$ es continua y se cumple que $g \circ f \sim id_X$ y $f \circ g \sim id_Y$, es decir, g es equivalencia homotópica. Por lo tanto, $Y \sim X$.
- (3) Sea $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia homotópica y sea f_h su inversa homotópica. Consideramos $g : Y \rightarrow Z$ equivalencia homotópica. Afirmamos que $g \circ f : X \rightarrow Z$ es equivalencia homotópica. En efecto, veamos que la función

$$f_h \circ g_h : Z \rightarrow X$$

es equivalencia homotópica. Notemos, por el lema previo, que

$$g \circ f \circ f_h \circ g_h \sim g \circ id_Y \circ g_h = g \circ g_h \sim id_Z$$

del mismo modo $f_h \circ g_h \circ g \circ f \sim id_X$. Concluimos que $X \sim Z$.

Problema 2

Para este problema diremos que $x \sim_p y$ si y solo si $[x]^p = [y]^p$, donde $[\cdot]^p$ es la componente conexa del punto. Esta relación resulta ser de equivalencia.

Lema: Sea $h : X \rightarrow X$ con $h \sim id_X$, entonces $x \sim_p h_x$ para todo $x \in X$.

Demostración. Sea $x \in X$. Como $h \sim id_X$, existe $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ una homotopía entre h e id_X . Definimos la función $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ dada por $\gamma(t) := H(x, t)$, que es continua por la propiedad universal de la topología de subespacio. Así, $h(x) \in [x]^p$, lo que implica que $x \sim_p h(x)$. \square

Sean $X \sim Y$, existe $f : X \rightarrow Y$ equivalencia homotópica y sea $g : Y \rightarrow X$ su inversa homotópica. Afirmamos que si $x \not\sim_p y$ entonces $f(x) \not\sim_p f(y)$. Supongamos que existen $x, y \in X$ tales que $x \not\sim_p y$ y $f(x) \sim_p f(y)$. Como g es continua, tenemos que $g(f(x)) \sim_p g(f(y))$. Por el lema, resulta que

$$x \sim_p g \circ f(x) \sim_p g \circ f(y) \sim_p y$$

lo cual es una contradicción.

Lo anterior prueba que hay una inyección de las componentes arcoconexas de X en las de Y . Por simetría, vemos que también hay una inyección de las componentes arcoconexas de Y en X , así, por cantor bernstein, ambos conjuntos estan en correspondencia uno a uno.

Notemos que D^1 es arcoconexo ya que es convexo, luego la cantidad de componentes componentes arcoconexas es uno. Por otro lado, veamos que $\{0, 1\}$ no es conexo, pues la topología topología inducida es la discreta y por lo tanto hay dos componentes conexas. De este modo, no existe equivalencia homotópica entre D^1 y S^0 .

Problema 3

Lema: Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto finito de puntos, entonces $X := \mathbb{R}^2 \setminus A$ es arcoconexo.

Demostración. Digamos que $A = \{x_1, \dots, x_n\}$. Como A es finito, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x_i) \cap A = x_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Sean $x, y \in X$, en \mathbb{R}^2 consideramos el segmento de recta $L_{xy} := \{(1-t)x + ty : t \in [0, 1]\}$. Si $L_{xy} \cap A = \emptyset$ es vacío, no hay nada que probar, supongamos que existe i tal que $x_i \in L_{xy} \cap A$.

Sea $v \in (L_{xy} - x)^\perp$ y definimos $L_{xy}^* := \{tv + x_i : t \in \mathbb{R}\}$. Existe $\delta > 0$ tal que $\overline{B_\delta(x_i)} \subseteq B_\varepsilon(x_i)$, sean $u, v \in L_{xy} \cap \partial B_\delta(x_i)$ y $w \in L_{xy}^* \cap \partial B_\delta(x_i)$ que existen pues $L_{xy} \cap L_{xy}^*$ contienen a x_i , además u, v, w no son colineales ya que $L_{xy} \cap L_{xy}^* = x_i$.

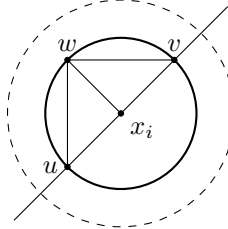
Sean $t_0 < t_1$ tales que $u = (1-t_0)x + t_0y$ y $v = (1-t_1)x + t_1y$. Consideramos

$$L = L_{xu} \cdot L_{uw} \cdot L_{wv} \cdot L_{vy}$$

donde \cdot es la operación de concatenación. Como $t_0 < t_1$, vemos que $x_i \notin L_{xu} \cup L_{vy}$. Además, como $u \in L_{xy} \cap L_{uw}$ y $v \in L_{xy} \cap L_{wv}$, entonces $x_i \notin L_{uw} \cdot L_{wv}$ y por convexidad resulta que

$$L_{uw} \cdot L_{wv} \cap A = \emptyset$$

Si $(L_{xu} \cup L_{vy}) \cap \emptyset$ entonces L es el camino buscado, de lo contrario, repetimos el procedimiento para cada punto en la intersección, por finitud, concluimos.



En la figura se muestra la situación. □

Sea $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, definimos $\mathbb{V} := \{x \in \mathbb{C}^n : f(x) = 0\}$. Notemos que

$$Conf_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i,j} \mathbb{V}(x_i - x_j)$$

Sean $x, y \in Conf_n(\mathbb{C})$, en \mathbb{C}^n consideramos la recta $L_{xy} := \{(x-y)z + y : z \in \mathbb{C}\}$, como $\mathbb{V}(x_i - x_j)$ es un hiperplano de dimensión $n-1$, se tiene que $L_{xy} \cap \mathbb{V}(x_i - x_j)$ es vacío, un punto o L_{xy} . Dado que $x, y \in Conf_n(\mathbb{C})$, vemos que $|L_{xy} \cap \mathbb{V}(x_i - x_j)| \leq 1$, así

$$\left| L_{xy} \cap \bigcup_{i,j} \mathbb{V}(x_i - x_j) \right| \leq \sum_{i,j} |L_{xy} \cap \mathbb{V}(x_i - x_j)| \leq n^2$$

Notemos que $L_{xy} \cong \mathbb{C}$ con la identificación $w \rightarrow (x-y)w + y$, pero también $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, entonces $L_{xy} \setminus \bigcup \mathbb{V}(x_i - x_j) \cong \mathbb{R}^2 \setminus A$ con A un subconjunto finito.

Problema 4

- (1) Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología discreta. Supongamos, por contradicción, que existe (K, f) tales que $f : |K| \rightarrow \mathbb{R}$ es homeomorfismo. Como $|K|$ es segundo contable, pues \mathbb{R}^∞ es segundo contable, entonces X es segundo contable, lo cual es una contradicción. Claramente X es Hausdorff.
- (2) Probaremos un resultado previo.

Lema: Sea X un espacio separable. Entonces todo conjunto discreto es numerable.

Demostración. Sea $B \subseteq X$ un denso numerable. Sea $A \subseteq X$ un subconjunto discreto. Sea $x \in A$, como A es discreto, existe $U_x \subseteq X$ vecindad de x tal que $U_x \cap A = \{x\}$. Por densidad, existe $b_x \in U_x \cap B$. Definimos la función

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\rightarrow b_x \end{aligned}$$

Si $x \neq y$ entonces $U_x \cap U_y = \emptyset$, luego la función f es inyectiva. □

Sea $X = \ell^\infty(\mathbb{N})$ con la topología inducida por la norma. Sea $S \subseteq \mathbb{N}$, definimos

$$x_S = (x_n)_n \quad \text{con} \quad x_n := \begin{cases} 1 & \text{si } n \in S \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Consideramos $A = \{x_S : S \subseteq \mathbb{N}\}$, notemos que A es no numerable y además si $S \neq T$ se tiene que

$$\|x_S - x_T\|_\infty = 1$$

es decir, A es discreto, por el lema llegamos a una contradicción, lo que concluye el resultado. Como $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es espacio métrico es Hausdorff.

- (3) Demostraremos un lema previo.

Lema: Sea K un complejo simplicial con finitos vértices. Entonces $|K|$ es localmente arcoconexo.

Demostración. Sea $x \in |K|$, existe $\varepsilon_x > 0$, tal que

$$B_{\varepsilon_x}(x) \cap \sigma \neq \emptyset \quad \text{entonces} \quad x \in \sigma, \text{ a saber} \quad \varepsilon_x := \frac{1}{2} \min_{x \notin \sigma} \{d(x, \sigma)\}$$

que está bien definido pues K es finito. Sean $x \in \sigma$ y $0 < \varepsilon < \varepsilon_x$, como σ y $B_\varepsilon(x)$ son convexos, entonces $B_\varepsilon \cap \sigma$ es convexo, en particular, es arcoconexo. Luego,

$$B_\varepsilon(x) \cap K = \bigcup_{x \in \sigma} B_\varepsilon \cap \sigma$$

es arcoconexo por ser unión de arcoconexos con x un punto común. Consideramos

$$\mathcal{B} := \{B_\varepsilon(x) : x \in |K| \text{ y } 0 < \varepsilon < \varepsilon_x\}$$

Notemos que \mathcal{B} es base y por lo dicho anteriormente cada abierto es arcoconexo. □

Consideremos el espacio

$$X := \overline{\left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) : x \in (0, 1] \right\}}$$

conocido como el seno del topólogo. Sabemos que X es conexo, pero no es arcoconexo, y por tanto no es localmente arcoconexo. Sea (K, f) una triangulación de X tal que K es finito, entonces, por el lema, $|K|$ es localmente arcoconexo, esto es una contradicción. Como X es subespacio de un espacio Hausdorff, entonces es Hausdorff.

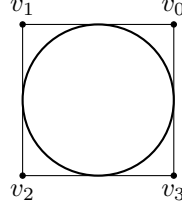
Problema 5

Debemos triangular tres espacios, que son los siguientes

- (1) En \mathbb{R}^2 consideremos los puntos y los simplices

$$\begin{array}{llll} v_0 = (1, 1) & v_1 = (-1, 1) & \sigma_0 = \langle v_0, v_1 \rangle & \sigma_1 = \langle v_1, v_2 \rangle \\ v_2 = -(1, 1) & v_3 = (1, -1) & \sigma_2 = \langle v_2, v_3 \rangle & \sigma_3 = \langle v_0, v_3 \rangle \end{array}$$

Como los puntos son distintos de a pares, los simplices están bien definidos, además es sencillo verificar que $K = \bigcup_{i \geq 0} \{\sigma_i, v_i\}$ es un complejo simplicial.



Afirmamos que $|K| \cong \mathbb{S}^1$. Denotaremos por $|\cdot|$ a la norma euclídea y $\|\cdot\|$ a la norma que corresponde a la norma del máximo. Consideramos la función $f : |K| \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $f(x) := x/|x|$ que resulta ser continua y esta bien definida ya que $|K| \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Afirmamos que $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow |K|$ dada por $g(x) := x/\|x\|$ es la inversa de f y es continua.

Notemos que g esta bien definida puesto que $\{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : \|x\| = 1\} = |K|$. Como $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ son normas equivalentes, inducen la misma topología y por lo tanto g es continua pues $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Luego,

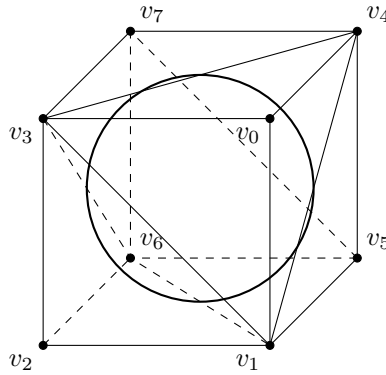
$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{\frac{x}{\|x\|}}{\left|\frac{x}{\|x\|}\right|} = x$$

es decir, $f \circ g = id_{\mathbb{S}^1}$. Del mismo modo, $g \circ f = id_{|K|}$. Lo que prueba que (K, f) es una triangulación de \mathbb{S}^1 . Así, la característica de Euler de la triangulación es $V - E + F = 4 - 4 + 0 = 0$.

- (2) En \mathbb{R}^3 definimos los simplices y sus respectivos vértices

$$\begin{array}{llll} v_0 = (1, 1, 1) & v_1 = (1, 1, -1) & \sigma_0 = \langle v_0, v_1, v_3 \rangle & \sigma_1 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle & \sigma_2 = \langle v_0, v_3, v_4 \rangle \\ v_2 = (1, -1, -1) & v_3 = (1, -1, 1) & \sigma_3 = \langle v_0, v_1, v_4 \rangle & \sigma_4 = \langle v_1, v_4, v_5 \rangle & \sigma_5 = \langle v_3, v_4, v_7 \rangle \\ v_4 = (-1, 1, 1) & v_5 = (-1, 1, -1) & \sigma_6 = \langle v_4, v_5, v_7 \rangle & \sigma_7 = \langle v_5, v_6, v_7 \rangle & \sigma_8 = \langle v_3, v_6, v_7 \rangle \\ v_6 = (-1, -1, -1) & v_7 = (-1, -1, 1) & \sigma_9 = \langle v_2, v_3, v_6 \rangle & \sigma_{10} = \langle v_1, v_2, v_6 \rangle & \sigma_{11} = \langle v_1, v_5, v_6 \rangle \end{array}$$

Dado que los puntos v_i no son colineales de a tres, vemos que cada σ_i es un simplex. Es sencillo ver que el conjunto K formado por dichos simplices y sus respectivas caras es un complejo simplicial.



Afirmamos que $|K| \cong \mathbb{S}^2$. Del mismo modo que antes definimos la función continua $f : |K| \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por

$$f(x) := \frac{x}{|x|}$$

con inversa continua $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow |K|$ dada por

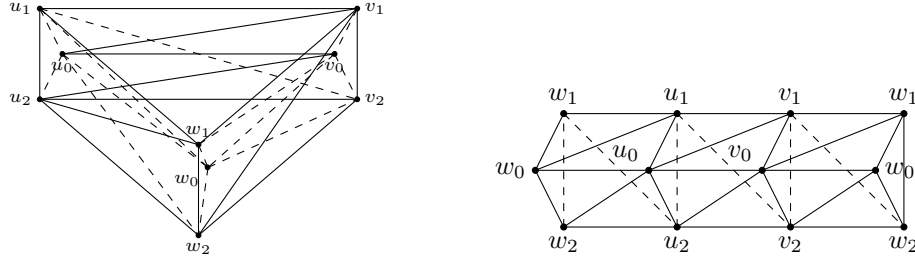
$$g(x) := \frac{x}{\|x\|}$$

donde $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$ son la norma euclídea y la norma del máximo respectivamente. Concluimos que (K, f) es una triangulación de \mathbb{S}^2 cuya característica de Euler es $V - E + F = 8 - 18 + 12 = 2$.

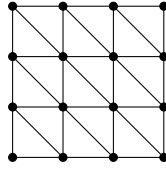
(3) Consideramos los puntos

$$\begin{array}{lll} v_0 = (1, 0, 0) & u_0 = (-1, 0, 0) & w_0 = (0, 1, 0) \\ v_1 = (2, -\frac{1}{2}, 1) & u_1 = (-2, -\frac{1}{2}, 1) & w_1 = (0, 2, 1) \\ v_2 = (2, -\frac{1}{2}, -1) & u_2 = (-2, -\frac{1}{2}, -1) & w_2 = (0, 2, -1) \end{array}$$

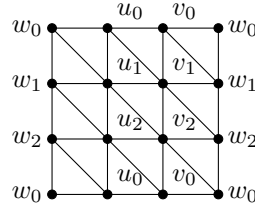
A partir de estos puntos definimos el complejo simplicial K que se muestra en la siguiente figura. Se toman en cuenta tanto vértices, como aristas y caras.



En la segunda figura se muestra el complejo simplicial cortándolo en los vértices w_0, w_1 y w_2 . Como los puntos de a ternas no son colineales vemos que cada simplex está bien definido, además, cada simplex se pega bien. Por lo tanto K está bien definido. Por otro lado, triangulamos el cuadrado $\square := [-1, 1]^2$ del siguiente modo



Donde cada vértice corresponde a un par ordenado con coordenadas en el conjunto $\{0, 1/3, 2/3, 1\}$, denotaremos por V_\square al conjunto de vértices. Definimos el mapeo simplicial $f : V_\square \rightarrow V_K$ de modo que cada vértice en V_\square se mapea a $|K|$ como en la siguiente figura,



Luego, f induce una función continua de \square a $|K|$, que llamaremos f . Notemos que f es sobreyectiva en vértices, afirmamos que f es sobreyectiva, en efecto, dado $x \in |K|$ se tiene que

$$x = \sum t_i q_i \quad \text{entonces} \quad x = f(y) = f\left(\sum t_i p_i\right)$$

donde $q_i \in \{u_j, v_j, w_j\}_{j=0}^2$ y tal que $f(p_i) = q_i$. Como \square es compacto y $|K|$ es Hausdorff, concluimos que f es cociente.

Sea π la proyección de \square a \mathbb{T}^2 . Veamos que f es constante en las fibras de π y viceversa. Sea $t \in [0, 1]$, notemos que $f(1, t) = f(0, t)$ y $f(t, 0) = f(t, 1)$, lo que prueba la doble contención. Así, por propiedad universal de topología cociente, f induce una función continua $\rho : |K| \rightarrow \mathbb{T}^2$ y del mismo modo π induce una función $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow |K|$ también continua. Tenemos el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} & [0, 1]^2 & \\ \pi \swarrow & & \searrow f \\ \mathbb{T}^2 & \xrightleftharpoons[\rho]{h} & |K| \end{array}$$

Veamos que h es la inversa de ρ . Sabemos que $\rho \circ f = \pi$ y $h \circ \pi = f$. Luego, sea $y \in |K|$, existe $x \in \square$ tal que $y = f(x)$, así $h \circ \rho(y) = h \circ \rho \circ f(x) = h \circ \pi(x) = f(x) = y$, por otro lado, $\rho \circ h([x]) = \rho \circ h \circ \pi(x) = \rho \circ f(x) = [x]$. Por lo tanto, (K, ρ) es una triangulación del toro. La característica de Euler es $V - E + F = 9 - 27 + 18 = 0$.