Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Mauricio Bustamante – Estudiante: Benjamín Mateluna

Topología Álgebraica - MAT2850
Tarea 4
07 de noviembre de 2025

Problema 1

(1) En primer lugar veamos que $\bullet$ esta bien definida, es decir, dados α, β caminos basados en x_0 tales que $[\alpha] = [\beta]$, entonces $\widehat{x} \bullet [\alpha] = \widehat{x} \bullet [\beta]$. En efecto, por levantamiento de homotopías relativas, se sigue que $\widehat{\alpha}(1) = \widehat{\beta}(1)$, lo que implica que

$$\widehat{x} \bullet [\alpha] = \widehat{\alpha}(1) = \widehat{\beta}(1) = \widehat{x} \bullet [\beta]$$

Además, como $p\widehat{\alpha} = \alpha$, se tiene que $\widehat{\alpha}(1) \in p^{-1}(x_0)$. Veamos que $\bullet$ induce una acción por la derecha de $\pi_1(X, x_0)$ en $p^{-1}(x_0)$. Sea $\widehat{x} \in p^{-1}(x_0)$, notemos que el lazo $ct_{\widehat{x}}$ levanta al lazo constante ct_{x_0}, luego $\widehat{x} \bullet [ct_{x_0}] = ct_{\widehat{x}}(1) = \widehat{x}$.

Sean α, β lazos basados en x_0 y sea $\widehat{x} \in p^{-1}(x_0)$. Afirmamos que $[p(\widehat{\alpha}^{-1} * \widehat{\alpha * \beta})] = [\beta]$ en $\pi_1(X, x_0)$. En primer lugar, observamos que

$$p(\widehat{\alpha}^{-1} * \widehat{\alpha * \beta})(0) = \alpha(1) = x_0 \quad \text{y} \quad p(\widehat{\alpha}^{-1} * \widehat{\alpha * \beta})(1) = \beta(1) = x_0$$

por lo que la expresión tiene sentido. Por otro lado, notemos que $p(\widehat{\alpha}^{-1} * \widehat{\alpha * \beta}) = p(\widehat{\alpha}^{-1}) * \alpha * \beta$ y adicionalmente tenemos que

$$[\alpha] * [p\widehat{\alpha^{-1}}] = [ct_{x_0}] = p_*[ct_{\widehat{x}}] = p_*[\widehat{\alpha} * \widehat{\alpha}^{-1}] = [p(\widehat{\alpha} * \widehat{\alpha}^{-1})] = [p\widehat{\alpha} * p\widehat{\alpha}^{-1}] = [p\widehat{\alpha}] * [p\widehat{\alpha}^{-1}] = [\alpha] * [p\widehat{\alpha}^{-1}]$$

y por lo tanto $p\widehat{\alpha}^{-1} \sim \alpha^{-1}$, lo que prueba la afirmación. Así, se tiene lo siguiente

$$(\widehat{x} \bullet [\alpha]) \bullet [\beta] = \widehat{\alpha}(1) \bullet [\beta] = \widehat{\alpha}(1) \bullet [p(\widehat{\alpha}^{-1} * \widehat{\alpha * \beta})] = (\widehat{\alpha * \beta})(1) = \widehat{x} \bullet [\alpha * \beta]$$

Notar que $(\widehat{\alpha}^{-1} * \widehat{\alpha * \beta})(0) = \widehat{\alpha}(1)$.

(2) Supongamos que $\widehat{X}$ es arcoconexo y sean $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$, existe $\widehat{\gamma} : [0,1] \to \widehat{X}$ continua tal que $\widehat{\gamma}(0) = \widehat{x}_1$ y $\widehat{\gamma}(1) = \widehat{x}_2$. Definimos $\gamma = p\widehat{\gamma}$ que es un lazo basado en x_0, entonces

$$\widehat{x}_1 \bullet [\gamma] = \widehat{\gamma}(1) = \widehat{x}_2$$

Por otro lado, supongamos que $\bullet$ es transitiva. Sean $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{X}$, tenemos dos casos, el primero es si $\widehat{x}, \widehat{y} \in p^{-1}(x_0)$ para algún $x_0 \in X$, entonces, existe un lazo γ basado en x_0 tal que $\widehat{\gamma}(0) = \widehat{x}$ y

$$\widehat{\gamma}(1) = \widehat{x} \bullet [\gamma] = \widehat{y}$$

por lo tanto, $\widehat{\gamma}$ es el camino buscado. El segundo caso es cuando $\widehat{x} \in p^{-1}(x)$ e $\widehat{y} \in p^{-1}(y)$ con $x \neq y$. Como X es arcoconexo, existe un camino γ de modo que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. Por lema del levantamiento existe $\widehat{\gamma}$ un levantamiento de γ tal que $\widehat{\gamma}(0) = \widehat{x}$ y $\widehat{\gamma}(1) = \widehat{y}' \in p^{-1}(y)$ y por el caso anterior concluimos.

(3) Debemos probar que dado $\widehat{x} \in \widehat{X}$ se tiene que

$$p_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x})) = S_{\widehat{x}}$$

donde $S_{\widehat{x}}$ es el estabilizador de $\widehat{x}$. Sea $[\alpha] \in S_{\widehat{x}}$, entonces $\widehat{x} = \widehat{x} \bullet [\alpha] = \widehat{\alpha}(1)$, como $p\widehat{\alpha} = \alpha$, concluimos que $[\alpha] \in p_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}))$. Sea $[\alpha] \in p_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}))$, por ende existe un lazo basado en $\widehat{x}$, digamos $\widehat{\alpha}$, tal que $[p\widehat{\alpha}] = [\alpha]$, entonces

$$\widehat{x} \bullet [\alpha] = \widehat{x} \bullet [p\widehat{\alpha}] = \widehat{\alpha}(1) = \widehat{x}$$

(4) Usando la parte anterior y orbita establizador, resulta que

$$\left| \frac{\pi_1(X, x_0)}{p_*(\pi_1(\widehat{X}, \widehat{x}))} \right| = |O_{\widehat{x}}| = \left| p^{-1}(x_0) \right|$$

donde en la última igualdad usamos que la acción es transitiva, o equivalentemente, que $\widehat{X}$ es arcoconexo.

Problema 2

El problema planteado es similar al problema 1.IV, pero faltan condiciones.

Problema 3

Para $(x, y) \in [0,1]^2$, definimos las funciones $f_0(x,y) = (x, 2y)$ cuando $y \leq \frac{1}{2}$ y $f_1(x,y) = (1-x, 2y-1)$ cuando $y \geq \frac{1}{2}$, claramente cada una es continua en su respectivo dominio, luego, las funciones $\phi_i := \pi_K \circ f_i$ son continuas. Definimos $\phi : [0,1]^2 \to K$ por

$$\phi(x,y) = \begin{cases} \phi_0(x,y) = [x, 2y] & \text{si } 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ \phi_1(x,y) = [1-x, 2y-1] & \text{si } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Veamos que este bien definida, sea $t \in [0,1]$, entonces $\phi_0(t, \frac{1}{2}) = [t, 1]$ y $\phi_1(t, \frac{1}{2}) = [1-t, 0]$, así, por lema del pegado, la función ϕ es continua. Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} {[0,1]^2} \arrow[d, "\pi_{\mathbb{T}^2}"] \arrow[dr, "\phi"] & \\ \mathbb{T}^2 \arrow[r, dashed] & K \end{tikzcd}$$

Nos gustaría que ϕ sea constante en las fibras de $\pi_{\mathbb{T}^2}$. Sea $t \in [0,1]$, entonces $\phi(t, 0) = [t, 0]$ y $\phi(t,1) = [1-t, 1]$, es decir, $\phi(t,0) = \phi(t,1)$. Por otro lado, si $t \leq \frac{1}{2}$ vemos que $\phi(0,t) = [0, 2t]$ y $\phi(1,t) = [1, 2t]$, en otras palabras, $\phi(0,t) = \phi(1,t)$ y de manera análoga se tiene que $\phi(0,t) = \phi(1,t)$ cuando $t \geq \frac{1}{2}$. Sea $p : \mathbb{T}^2 \to K$ la función inducida por ϕ, lo anterior se resume en que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} {[0,1] \times [0, \frac{1}{2}]} \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{T}^2}"] \arrow[dr, "\phi_0"] & {[0,1]^2} \arrow[d, "\pi_K"] & {[0,1] \times [\frac{1}{2}, 1]} \arrow[l, "f_1"'] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{T}^2}"] \arrow[dl, "\phi_1"'] \\ \mathbb{T}^2 \arrow[r, "p"] & K & \mathbb{T}^2 \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd}$$

Afirmamos que $(\mathbb{T}^2, p)$ es un espacio cubriente regular de K. Bajo lo anterior, concluimos que

$$\mathbb{Z}^2 \cong \pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) \cong p_*(\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0)) \trianglelefteq \pi_1(K, y_0)$$

con $y_0 = p(x_0)$. Lo que finaliza el ejercicio.

Para probar la afirmación, demostramos los siguientes puntos:

(1) La tupla $(\mathbb{T}^2, p)$ es un espacio cubriente de K. Usaremos fuertemente el lema que nos dice que una función continua y sobreyectiva es cociente si y solo si la imagen de un abierto saturado es un abierto. Esto fue probado en el curso de Topología. Una definición de conjunto saturado es que se puede escribir como unión de fibras y una propiedad importante es $q^{-1}(q(U)) = U$ para toda función q sobreyectiva y todo conjunto saturado.

Consideremos el abierto $(0,1)^2 \subseteq [0,1]^2$ que es saturado bajo π_K, por que las relaciones se encuentran en $\partial[0,1]^2$. Entonces $U = \pi_K((0,1)^2)$ es abierto en K. Por otro lado, los abiertos

$$f_0^{-1}((0,1)^2) = (0,1) \times (0, 1/2) = U_0 \quad \text{y} \quad f_1^{-1}((0,1)^2) = (0,1) \times (1/2, 1) = U_1$$

son saturados bajo $\pi_{\mathbb{T}^2}$.

Sean $V_0 = \pi_{\mathbb{T}^2}(U_0)$ y $V_1 = \pi_{\mathbb{T}2}(U_1)$, afirmamos que $p^{-1}(U) = V_0 \sqcup V_1$. Notemos, por conmutatividad de los diagramas, que

$$\begin{aligned} p^{-1}(U) &= \pi_{\mathbb{T}^2}(\phi^{-1}(U)) = \pi_{\mathbb{T}^2}(\phi_0^{-1}(U) \cup \phi_1^{-1}(U)) = \pi_{\mathbb{T}^2}(f_0^{-1}(\pi_K^{-1}(U)) \cup f_1^{-1}(\pi_K^{-1}(U))) \\ &= \pi_{\mathbb{T}^2}(f_0^{-1}((0,1)^2) \cup f_1^{-1}((0,1)^2)) = \pi_{\mathbb{T}^2}(U_0 \cup U_1) = V_0 \cup V_1 \end{aligned}$$

La unión es disjunta por que si $[x,y] \in V_0 \cap V_1$, entonces $(x,y) \in U_0 \cap U_1$, lo que es imposible.

Un conjunto cerrado en $(0,1)^2$ es acotado y por lo tanto compacto, entonces la función $\pi_K\big|_{(0,1)^2} : (0,1)^2 \to U$ es cociente. Como la función $f_i : U_i \to (0,1)^2$ es homeomorfismo con inversa constante en las fibras de $\pi_K\big|_{(0,1)^2}$, se sigue que $p : V_i \to U$ es homeomorfismo. La discusión anterior muestra que se cumple la condición de cubriente para todo punto $[x,y] \in U$, es decir, $(x,y) \in (0,1)^2$.

El conjunto $W = ([0, \frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{4}, 1]) \times (0, 1)$ es un abierto saturado en $[0, 1]^2$ bajo π_K por que $(0, t), (1, t) \in W$ para todo $t \in (0, 1)$, entonces $U = \pi_K(W)$ es abierto en K. Luego, los abiertos

$$V_0 = \pi_{\mathbb{T}^2}(([0, 1/4) \cup (3/4, 1]) \times (0, 1/2)) \quad \text{y} \quad V_1 = \pi_{\mathbb{T}^2}(([0, 1/4) \cup (3/4, 1]) \times (1/2, 1))$$

cumplen que $p^{-1}(U) = V_0 \sqcup V_1$ con $p : V_i \to U$ homeomorfismo. El argumento es idéntico al anterior.

Tomamos el abierto saturado $W = [0, 1] \times ([0, \frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{4}, 1])$, para el abierto $U = \pi_K(W)$ definimos los abiertos

$$V_0 = \pi_{\mathbb{T}^2}([0, 1] \times (3/8, 5/8)) \quad \text{y} \quad V_1 = \pi_{\mathbb{T}^2}([0, 1] \times ([0, 1/8) \cup (7/8, 1]))$$

de manera similar, se obtiene que $p^{-1}(U) = V_0 \sqcup V_1$. Sin embargo, no es tan claro que $p : V_i \to U$ es homeomorfismo. Definimos la función $g : W \to V_0$ dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} [1 - x, \frac{1}{2}(y + 1)] & \text{si } 0 \leq y < \frac{1}{4} \\ [x, \frac{1}{2}y] & \text{si } \frac{3}{4} < y \leq 1 \end{cases}$$

que es continua por lema del pegado. Un argumento idéntico al utilizado previamente nos dice que g es constante en las fibras de $\pi_K : W \to U$. Sea $\varphi : U \to V_0$ la función inducida por g, veamos que φ es la inversa de $p : V_0 \to U$. Claramente $\varphi(U) \subseteq V_0$, por otro lado, dado $[x, y]$ con $y \leq \frac{1}{2}$ implica

$$p \circ \varphi([x, y]) = p([1 - x, 1/2(y + 1)]) = [x, y] \quad \text{y} \quad \varphi \circ p([x, y]) = \varphi([x, 2y]) = [x, y]$$

de manera similar resulta que $p \circ \varphi = id_U$ y $\varphi \circ p = id_{V_0}$ para $y \geq \frac{1}{2}$, concluimos que $p : V_0 \to U$ es homeomorfismo. Análogamente obtenemos que $p : V_1 \to U$ es homeomorfismo.

(2) El cubrimiento es regular, esto es equivalente a probar que el grupo $\triangle(\mathbb{T}^2, p)$ actúa transitivamente en $p^{-1}(x_0)$ para algún $x_0 \in K$. Definimos la función $\psi : [0, 1]^2 \to \mathbb{T}^2$ por

$$\psi(x, y) = \begin{cases} [1 - x, y + \frac{1}{2}] & \text{si } 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ [1 - x, y - \frac{1}{2}] & \text{si } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Veamos que esta bien definida, en efecto, dado $t \in [0, 1]$ vemos que $\psi(t, \frac{1}{2}) = [1 - t, 0]$ y $\psi(t, \frac{1}{2}) = [1 - t, 1]$. Por la misma razón que antes, la función ψ es continua. Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]^2} \arrow[d, "\pi_{\mathbb{T}^2}"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
\mathbb{T}^2 \arrow[r, dashed] & \mathbb{T}^2
\end{tikzcd}$$

Sea $t \in [0, 1]$, luego $\psi(t, 0) = [1 - t, \frac{1}{2}]$ y $\psi(t, 1) = [1 - t, \frac{1}{2}]$, lo que implica que $\psi(t, 0) = \psi(t, 1)$. Si $t \leq \frac{1}{2}$ notamos que $\psi(0, t) = [1, t + \frac{1}{2}]$ y $\psi(1, t) = [0, t + \frac{1}{2}]$, es decir, $\psi(0, t) = \psi(1, t)$, del mismo modo se tiene el resultado cuando $t \geq \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, la función ψ desciende a una función continua $h : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ que verifica $h^2 = id$. Afirmamos que $h \in \triangle(\mathbb{T}^2, p)$, en efecto, para $y \leq \frac{1}{2}$ se sigue que

$$ph([x, y]) = p([1 - x, y + 1/2]) = [x, 2y] = p([x, y])$$

similarmente se tiene para $t \geq \frac{1}{2}$. Consideramos el punto $x_0 = [0, 0] \in K$. Luego,

$$p^{-1}(x_0) = \left\{ [0, 0] , \left[1, \frac{1}{2}\right] \right\} \subseteq \mathbb{T}^2$$

Notar que $h([0, 0]) = [1, \frac{1}{2}]$ y $h([1, \frac{1}{2}]) = [0, 0]$, Por ende, $\triangle(\mathbb{T}^2, p)$ actúa transitivamente en $p^{-1}(x_0)$.