



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROFESOR: GIANCARLO URZÚA – AYUDANTE: BENJAMÍN MATELUNA

### Introducción a la Geometría - MAT1304

#### Ayudantía 6

27 de agosto de 2025

**Problema 1.** Sean  $A$  y  $B$  puntos en la circunferencia. Sean  $P$  y  $Q$  puntos en el arco  $\frown BA$  y sea  $X$  el punto en  $\frown AB$  donde la bisectriz del ángulo  $\angle APB$  corta a la circunferencia. Demuestre que  $\overline{QX}$  es la bisectriz del ángulo  $\angle AQB$ .

**Problema 2.** Dada una circunferencia, la cuerda  $\overline{AB}$  es tal que la recta  $\overleftrightarrow{AB}$  y la tangente a la circunferencia en un punto  $T$  se intersectan en un punto  $C$ . Demuestre que  $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{CT}^2$ .

**Problema 3.** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo equilátero. Si  $P$  es un punto en el circuncírculo de  $\triangle ABC$ , muestre que el mayor entre  $\overline{AP}$ ,  $\overline{BP}$  y  $\overline{CP}$  es siempre igual a la suma de los otros dos.

**Problema 4.** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo escaleno, sea  $D$  en  $\overline{AC}$  tal que  $\overline{BD}$  es bisectriz del ángulo en  $B$  y sean  $E, F, M$  las proyecciones de  $A, C, D$  en  $\overline{BD}$ ,  $\overline{BD}$  y  $\overline{BC}$  respectivamente. Demuestre que  $\angle DME = \angle DMF$ .

**Problema 5.** Sea  $\triangle ABC$  escaleno. Sean  $P$  y  $Q$  en  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  respectivamente tales que  $\overline{PQ}$  es paralela a  $\overline{BC}$ . La circunferencia que pasa por  $P$  y es tangente a  $\overline{AC}$  en  $Q$  intersecta nuevamente a  $\overline{AB}$  en  $R$ . Demuestre que  $RQCB$  es cíclico.