Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Pedro Gaspar – Estudiante: Benjamín Mateluna

Geomtría Diferencial - MAT2860
Tarea I3
26 de junio de 2025

Problema 1

Probaremos un resultado previo sobre transporte paralelo y curvas geodésicas en la esfera.

Lema 0.1. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{S}^2$ una curva de la forma $\alpha(t) = usen(t) + vcos(t)$ donde u, v son ortonormales, entonces $P_{\alpha,t_0,t_1}(w) = w + \langle w, \alpha'(t_0)\rangle (\alpha'(t_1) - \alpha'(t_0))$.*

Demostración. *Empezamos observando que α es una curva geodésica. Notemos que $\langle \alpha'(t), \alpha(t)\rangle = 0$ para todo $t \in I$ y además $\alpha'' = -\alpha$. Sea $w \in T_p\mathbb{S}^2$ donde $p = \alpha(t_0)$ y sea $Y : I \to \mathbb{S}^2$ el único campo paralelo a lo largo de α tal que $Y(t_0) = w$, como Y en particular es campo tangente se tiene que*

$$Y(t) \in T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^2 = (\alpha(t))^{\perp}$$

es decir, $\langle Y(t), \alpha(t)\rangle = 0$ para todo $t \in I$, lo que implica que $\langle Y, \alpha'\rangle = -\langle Y', \alpha\rangle$. Notemos que

$$0 = \nabla_{\alpha'} Y = Y' - \langle Y', \alpha\rangle \alpha$$

tomando producto interno con α' vemos que

$$\langle Y', \alpha'\rangle = \langle Y', \alpha\rangle \langle \alpha, \alpha'\rangle = 0$$

de este modo

$$\frac{d}{dt}(\langle Y, \alpha'\rangle) = \langle Y', \alpha'\rangle + \langle Y, \alpha''\rangle = -\langle Y, \alpha\rangle = 0$$

luego la función $\langle Y, \alpha'\rangle$ es constante, evaluando en t_0 vemos que $\langle Y', \alpha\rangle = -\langle Y, \alpha'\rangle \equiv -\langle w, \alpha'(t_0)\rangle$. Tenemos que

$$Y'(t) = \langle w, \alpha'(t_0)\rangle \alpha''(t)$$

integrando a ambos lados vemos que

$$Y(t) - Y(t_0) = Y(t) - w = \langle w, \alpha'(t_0)\rangle (\alpha'(t) - \alpha'(t_0))$$

lo que concluye la demostración.

Sea $\{e_i\}_{i=1}^3$ la base canonica de $\mathbb{R}^3$. Sea $w_0 \in T_p\mathbb{S}^2 = (0,0,1)^{\perp}$, digamos que $w_0 = ae_1 + be_2$.

a) Notemos que

$$\gamma_1 = sen(s)e_1 + cos(s)e_3 \quad \text{y} \quad \gamma_2 = sen(s)w_1 + cos(s)e_3$$

donde $w_1 = (cos(\theta), sen(\theta), 0)$. Claramente e_3 y w_1 son ortonormales, además

$$\gamma_1' = (cos(s), 0, -sen(s)) \quad \text{y} \quad \gamma_2' = (cos(\theta)cos(s), sen(\theta)cos(s), -sen(s))$$

Como $P_{\gamma,t_0,t_1} : T_{\gamma(t_0)}\Sigma \to T_{\gamma(t_1)}\Sigma$ es una transformación lineal y $\{e_1, e_2\}$ es base de $T_p\mathbb{S}^2$, se sigue que

$$\begin{aligned} P_{\gamma_1,0,\pi}(w_o) &= P_{\gamma_1,0,\pi}(ae_1 + be_2) = aP_{\gamma_1,0,\pi}(e_1) + bP_{\gamma_1,0,\pi}(e_2) = aP_{\gamma_1,0,\pi}(\gamma_1'(0)) + bP_{\gamma_1,0,\pi}(e_2) \\ &= a\gamma_1'(\pi) + bP_{\gamma_1,0,\pi}(e_2) = -ae_1 + bP_{\gamma_1,0,\pi}(e_2) \end{aligned}$$

y usando el lema, notamos que

$$P_{\gamma_1,0,\pi}(e_2) = e_2 + \langle e_2, \gamma_1'(0)\rangle (\gamma_1'(\pi) - \gamma_1'(0)) = e_2 + 0(\gamma_1'(\pi) - \gamma_1'(0)) = e_2$$

entonces

$$w_1 = P_{\gamma_1,0,\pi}(w_o) = -ae_1 + be_2$$

Por otro lado, del mismo modo que antes, se tiene que

$$P_{\gamma_2,0,\pi}(w_o) = aP_{\gamma_2,0,\pi}(e_1) + bP_{\gamma_2,0,\pi}(e_2)$$

por el lema, observamos lo siguiente

$$P_{\gamma_2,0,\pi}(e_1) = e_1 + \langle e_1, \gamma_2'(0)\rangle (\gamma_2'(\pi) - \gamma_2'(0)) = \begin{pmatrix} 1-2cos^2(\theta) \\ -2cos(\theta)sen(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} cos(2\theta) \\ sen(2\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$P_{\gamma_2,0,\pi}(e_2) = e_2 + \langle e_2, \gamma_2'(0)\rangle (\gamma_2'(\pi) - \gamma_2'(0)) = \begin{pmatrix} -2cos(\theta)sen(\theta) \\ 1-2sen^2(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sen(2\theta) \\ cos(2\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$w_2 = P_{\gamma_2,0,\pi}(w_o) = -a\begin{pmatrix} cos(2\theta) \\ sen(2\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -sen(2\theta) \\ cos(2\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(2\theta) & -sen(2\theta) & 0 \\ sen(2\theta) & cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} w_1$$

luego el ángulo entre w_1 y w_2 es de 2θ.

b) Notemos que

$$\widehat{\gamma_2} = (cos(\theta)sen(\pi-s), sen(\theta)sen(\pi-s), cos(\pi-s)) = (cos(\theta)sen(s), sen(\theta)sen(s), -cos(s))$$

y entonces $\widehat{\gamma_2}' = (cos(\theta)cos(s), sen(\theta)cos(s), sen(s))$, además $\beta' = (-sen(s), cos(s), 0)$.
Debemos calcular

$$v_0 = P_{\widehat{\gamma_2},\pi/2,\pi}(P_{\beta,0,\theta}(P_{\gamma_1,0,\pi/2}(w_0)))$$

Por el mismo argumento que antes, notamos que

$$v_0^1 := P_{\gamma_1,0,\pi/2}(w_0) = aP_{\gamma_1,0,\pi/2}(e_1) + bP_{\gamma_1,0,\pi/2}(e_2) = a\gamma_1'(\pi/2) + be_2 = -ae_3 + be_2$$

luego

$$v_0^2 := P_{\beta,0,\theta}(v_0^1) = -aP_{\beta,0,\theta}(e_3) + bP_{\beta,0,\theta}(e_2)$$

usando el lema tenemos que $P_{\beta,0,\theta}(e_3) = e_3$ y además

$$P_{\beta,0,\theta}(e_2) = e_2 + \langle e_2, \beta'(0)\rangle (\beta'(\theta) - \beta'(0)) = e_2 + \beta'(\theta) - e_2 = \beta'(\theta)$$

entonces $v_0^2 = -ae_3 + b\beta'(\theta)$. Queda ver

$$v_0 = P_{\widehat{\gamma_2},\pi/2,\pi}(v_0^2) = -aP_{\widehat{\gamma_2},\pi/2,\pi}(e_3) + bP_{\widehat{\gamma_2},\pi/2,\pi}(\beta'(\theta))$$

usando nuevamente el lema, tenemos que

$$P_{\widehat{\gamma_2},\pi/2,\pi}(e_3) = e_3 + \left\langle e_3, \widehat{\gamma_2}'(\pi/2)\right\rangle (\widehat{\gamma_2}'(0) - \widehat{\gamma_2}'(\pi/2)) = e_3 + \widehat{\gamma_2}'(0) - e_3 = \widehat{\gamma_2}'(0)$$

y

$$P_{\widehat{\gamma_2},\pi/2,\pi}(\beta'(\theta)) = \beta'(\theta) + \left\langle \beta'(\theta), \widehat{\gamma_2}'(\pi/2)\right\rangle (\widehat{\gamma_2}'(0) - \widehat{\gamma_2}'(\pi/2)) = \beta'(\theta)$$

de este modo

$$v_0 = -a\widehat{\gamma_2}'(0) + b\beta'(\theta) = -a\begin{pmatrix} -cos(\theta) \\ -sen(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -sen(\theta) \\ cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} w_0$$

y por lo tanto el ángulo entre w_0 y v_0 es θ.

Problema 2

El toro, puede ser parametrizado por $X : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = ((R + rcos(u))cos(v), (R + rcos(u))sen(v), rsen(u))$$

con derivadas parciales

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (-rsen(u)cos(v), -rsen(u)sen(v), rcos(u)) \\ X_v(u, v) &= (-(R + rcos(u))sen(v), (R + rcos(u))cos(v), 0) \end{aligned}$$

entonces el campo normal definido por la parametrización es

$$(X_u \times X_v)(u, v) = (-(R + rcos(u))rcos(u)cos(v), -(R + rcos(u))rcos(u)sen(v), -(R + rcos(u))rsen(v))$$

y además $|X_u \times X_v| = r(R+rcos(u))$. Sea $u_0 \in [0, 2\pi]$ tal que $rsen(u_0) = c$, que existe pues $c \in [-r, r]$. Consideramos $\eta := (R + rcos(u_0))$, definimos la curva p.p.a $\alpha : (0, 2\pi\eta) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) := X\left(u_0, \frac{t}{\eta}\right) = \left(\eta cos\left(\frac{t}{\eta}\right), \eta sen\left(\frac{t}{\eta}\right), rsen(u_0)\right)$$

entonces, suponiendo que la parametrización es positiva

$$(N \circ \alpha)(t) = (N^x \circ X^{-1} \circ \alpha)(t) = N^x\left(u_0, \frac{t}{\eta}\right) = \left(cos(u_0)cos\left(\frac{t}{\eta}\right), cos(u_0)sen\left(\frac{t}{\eta}\right), sen(u_0)\right)$$

Por otro lado vemos que

$$\alpha' = \left(-sen\left(\frac{t}{\eta}\right), cos\left(\frac{t}{\eta}\right), 0\right) \quad \text{y entonces} \quad \alpha''(t) = -\frac{1}{\eta}\left(cos\left(\frac{t}{\eta}\right), sen\left(\frac{t}{\eta}\right), 0\right)$$

Nuestro objetivo ahora es determinar $\nabla_{\alpha'}\alpha'(t)$, para ello observemos que

$$\langle \alpha'', N \circ \alpha \rangle = \frac{1}{\eta}\begin{pmatrix} cos(t/\eta) \\ sen(t/\eta) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos(u_0)cos(t/\eta) \\ cos(u_0)sen(t/\eta) \\ sen(u_0) \end{pmatrix} = \frac{cos(u_0)}{\eta}$$

de este modo

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha'}\alpha' = \alpha'' - \langle \alpha'', N \circ \alpha \rangle\, N \circ \alpha &= -\frac{1}{\eta}\begin{pmatrix} cos(t/\eta) \\ sen(t/\eta) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{cos(u_0)}{\eta}\begin{pmatrix} cos(u_0)cos(t/\eta) \\ cos(u_0)sen(t/\eta) \\ sen(u_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\eta}\begin{pmatrix} cos(t/\eta)(cos^2(u_0) - 1) \\ sen(t/\eta)(cos^2(u_0) - 1) \\ cos(u_0)sen(u_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

adicionalmente tenemos que

$$N \circ \alpha \times \alpha' = \begin{pmatrix} cos(t/\eta)sen(u_0) \\ sen(t/\eta)sen(u_0) \\ -cos(u_0) \end{pmatrix}$$

por último, se tiene que

$$\begin{aligned} K_g = [\nabla_{\alpha'}\alpha'] &= \frac{1}{\eta}\begin{pmatrix} cos(t/\eta)(cos^2(u_0) - 1) \\ sen(t/\eta)(cos^2(u_0) - 1) \\ cos(u_0)sen(u_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos(t/\eta)sen(u_0) \\ sen(t/\eta)sen(u_0) \\ -cos(u_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\eta}\left((cos^2(u_0) - 1)sen(u_0) - cos^2(u_0)sen(u_0)\right) = \frac{-sen(u_0)}{R + rcos(u_0)} \end{aligned}$$

Problema 3

Proponemos la siguiente definición para un poligono geodésico.

Definición 0.1. *Decimos que $P \subseteq \Sigma$ es un n-poligono geodésico si P es homeomorfo a $D = \overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^2$ y ∂P esta parametrizada por $\gamma : I \to \Sigma$ una curva diferenciable a trozos tal que*

$$\partial P = \gamma(I) = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i([a_i, b_i])$$

donde $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \Sigma$ es una curva geodésica tal que $\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$ y $\gamma_i'(b_i^-) \neq \pm\gamma_{i+1}'(a_{i+1}^+)$ para $i = 1, \cdots, n$ con la convención de que $i + 1 = 1$ si $i = n$.

Sea $P \subseteq S^2(r)$ un n-poligono geodésico. Como D no es homeomorfo a la $\mathbb{S}^2$, pues esta última es una variedad sin borde, se tiene que $P \neq S^2(r)$, así, existe $p \in S^2(r) \setminus P$.

Consideremos $O \in O(3)$ tal que $O(0, 0, r) = p$ y la proyección estereográfica $\overline{X} : \mathbb{R}^2 \to S^2(r) \setminus \{(0, 0, r)\}$. Definimos $X := O \circ \overline{X} : \mathbb{R}^2 \to S^2(r)$, notemos que X es parametrización ortogonal de $S^2(r)$, pues $\overline{X}$ es parametrización ortogonal de $S^2(r)$ y O es una transformación lineal ortogonal, luego, por gauss bonnet, vemos que

$$2\pi = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} K_g \, ds + \iint_P (K_{S^2(r)} \circ X)\sqrt{EG} \, dudv + \sum_{i=1}^{n} \theta_i$$

donde $\theta_i \in [-\pi, \pi]$ es el ángulo orientado de $\gamma_i'(b_i) \in T_{\gamma_i(b_i^-)}S^2(r)$ a $\gamma_{i+1}(a_{i+1}^+) \in T_{\gamma_{i+1}}S^2(r)$. Como la curvatura gaussiana es independiente de la parametrización, sabemos que $K_{S^2(r)} \circ X = 1/r^2$, además, por lo visto en clases, obtenemos que

$$2\pi = \iint_P \frac{1}{r^2}\sqrt{EG} \, dudv + \sum_{i=1}^{n} \theta_i = \frac{1}{r^2} Area(P) + \sum_{i=1}^{n} \pi - \alpha_i$$

donde α_i son los ángulos interiores del n-poligono geodesico, así

$$2\pi + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \frac{1}{r^2} Area(P) + n\pi$$

Problema 4

a) Notemos que

$$\omega_p(v) = \left\langle v, \frac{Jp}{|p|^2} \right\rangle = \frac{1}{|p|^2} \left\langle v, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{|p|^2}(-v_1 y + v_2 x)$$
$$= \frac{1}{|p|^2}(-dx(v)y + dy(v)x) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx(v) + \frac{x}{x^2 + y^2} dy(v)$$

conlcuimos que

$$\omega_p = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

además, para $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ las funciones

$$\omega_1 := \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \omega_2 := \frac{x}{x^2 + y^2}$$

son diferenciables, y por lo tanto la 1-forma ω es diferenciable.

b) Veamos la siguiente expresión

$$d\omega = \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} dy \right) \wedge dy = \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x} dx - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} dy \right) dx \wedge dy$$
$$= \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx \wedge dy = 0$$

c) Para finalizar, tenemos que

$$\int_0^1 \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\, dt = \int_0^1 -\frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1^2(t)+\gamma_2^2(t)}\cdot\gamma_1'(t) + \frac{\gamma_1(t)}{\gamma_1^2(t)+\gamma_2^2(t)}\cdot\gamma_2'(t) = \int_0^1 F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\, dt$$
$$= \int_\gamma F(x,y)\, ds$$

es decir, la integral corresponde a la integral de línea del campo vectorial $F(x,y) = (\omega_1,\omega_2)(x,y)$ sobre la curva γ.

Problema 5

a) Veamos que ω_{ij} es una 1-forma, sea $p \in W$, sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$(\omega_{ij})_p(u+\alpha v) = \langle DE_i(p)(u+\alpha v), E_j(p)\rangle = \langle DE_i(p)u + \alpha DE_i(p)v, E_j(p)\rangle$$
$$= \langle DE_i(p)u, E_j(p)\rangle + \alpha\,\langle DE_i(p)v, E_j(p)\rangle = (\omega_{ij})_p(v) + \alpha(\omega_{ij})_p(v)$$

Por otro lado, notemos que

$$(\omega_{ij})_p(v) = \langle DE_i(p)v, E_j(p)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^3 \frac{\partial E_i}{\partial x_k}(p)v_k, E_j(p)\right\rangle = \sum_{i=1}^3 \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial x_k}, E_j(p)\right\rangle v_k$$
$$= \sum_{i=1}^3 \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial x_k}, E_j\right\rangle (p)(dx_k)_p(v)$$

es decir,

$$\omega_{ij} = \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial x}, E_j\right\rangle dx + \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial y}, E_j\right\rangle dy + \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial z}, E_j\right\rangle dz$$

como las funciones E_i y el producto interno son diferenciables, concluimos que ω_{ij} es una 1-forma diferenciable. Queda chequear que $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, en efecto, sea $p \in W$ y $v \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$0 = D\,\langle E_i, E_j\rangle\,(p)v = \langle DE_i(p)v, E_j(p)\rangle + \langle E_i, DE_j(p)v\rangle = (\omega_{ij})_p(v) + (\omega_{ji})_p(v)$$

lo que prueba lo pedido.

b) Sea $\{e_j\}_{j=1}^3$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. En primer lugar, tenemos que

$$E_i = \sum_{j=1}^3 \beta_{ij}e_j \quad \text{donde } \beta_{ij}(p) = e_j^*(E_i(p))$$

además, se tiene que $D\beta_{ij} = d\beta_{ij}$, en efecto, dado $p \in W$ y $v \in \mathbb{R}^3$

$$(d\beta_{ij})_p(v) = \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x}(p)v_1 + \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial y}(p)v_2 + \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial z}(p)v_3 = D\beta_{ij}(p)v$$

lo que implica que

$$DE_i = D\left(\sum_{j=1}^3 \beta_{ij}e_j\right) = \sum_{j=1}^3 D\beta_{ij}e_j = \sum_{j=1}^3 d\beta_{ij}e_j$$

Por otro lado, como $(E_j(p))_{j=1}^3$ es base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, dado $p \in W$ y $v \in \mathbb{R}^3$ se obtiene que

$$DE_i(p)v = \sum_{k=1}^3 \langle DE_i(p)v, E_k(p)\rangle\, E_k(p) = \sum_{k=1}^3 (\omega_{ik})_p(v)E_k(p) \quad \text{es decir, } DE_i = \sum_{k=1}^3 \omega_{ik}E_k$$

de este modo,

$$DE_i = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} E_k = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \left(\sum_{j=1}^{3} \beta_{kj} e_j \right) = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \beta_{kj} \right) e_j$$

comparando las dos expresiones para DE_i y usando que $\{e_j\}_{j=1}^3$ es base, concluimos que

$$d\beta_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \beta_{kj}$$

Además, por la expresión para E_i, vemos que

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{3} \beta_{ij} dx_j$$

derivando se sigue que

$$d\omega_i = d\left(\sum_{j=1}^{3} \beta_{ij} dx_j \right) = \sum_{j=1}^{3} d\beta_{ij} \wedge dx_j + \beta_{ij} d(dx_j) = \sum_{j=1}^{3} d\beta_{ij} \wedge dx_j$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \beta_{kj} \right) \wedge dx_j = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \left(\sum_{j=1}^{3} \beta_{kj} dx_j \right) = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_k = \sum_{k=1}^{3} \omega_k \wedge \omega_{ki}$$

c) Notemos lo siguiente

$$0 = d(d\beta_{ij}) = \sum_{k=1}^{3} d(\omega_{ik} \beta_{kj}) = \sum_{k=1}^{3} d\beta_{kj} \wedge \omega_{ik} + \sum_{k=1}^{3} d\omega_{ik} \beta_{kj}$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{3} d\omega_{ik} \beta_{kj} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge d\beta_{kj} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \sum_{s=1}^{3} \omega_{ks} \beta_{sj} = \sum_{s=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{ks} \right) \beta_{sj} \quad (*)$$

Sea $p \in W$ y $v \in \mathbb{R}^3$, definimos las matrices $d\Omega := ((d\omega_{ik})_p(v))_{i,k=1}^3$ y $B := (\beta_{rj}(p))_{r,j=1}^3$, como $\{E_r\}_{r=1}^3$ forma una base ortonormal para todo $p \in W$, la matriz B es ortogonal para todo $p \in W$, en particular tenemos que es invertible. Consideremos además la matriz

$$\Omega = \left(\sum_{k=1}^{3} (\omega_{ik})_p(v) \wedge (\omega_{ks})_p(v) \right)_{i,s=1}^{3}$$

luego el producto en $(*)$ puede ser resumido como $(d\Omega B)_{ij} = (\Omega B)_{ij}$, y por ende tenemos la igualdad de matrices $d\Omega B = \Omega B$, lo que implica que $d\Omega = \Omega$ y dado que p y v son arbitrarios concluimos que

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$$

y se tiene lo pedido.

Colaboradores: Sergio Peña, Ricardo Larraín y Felipe Inostroza. Queria dar especiales agradeciemientos a Felipe Inostroza por el Lema 0.1.