Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesora: Amal Taarabt – Estudiante: Benjamín Mateluna

Teoría Espectral - MAT2820
Tarea 1
15 de septiembre de 2025

1. Transformada de Fourier - Versión continua

1.1. Propiedades básicas

(1) Veamos que para todo $\xi \in \mathbb{R}$ se tiene que $|\mathcal{F}(f)(\xi)| < \infty$, en efecto,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-ix\xi} f(x) \right|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty$$

donde la última desigualdad se obtiene de que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Lo anterior implica que $\hat{f}(\xi) \in \mathbb{C}$.

(2) En primer lugar, se tiene que

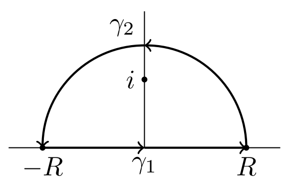
$$\mathcal{F}(g_1)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-|x|}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi - |x|}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-x-ix\xi}\, dx + \int_{\mathbb{R}_{\leq 0}} e^{x-ix\xi}\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{e^{-x(1+i\xi)}}{1+i\xi} \Big|_0^{\infty} + \frac{e^{x(1-i\xi)}}{1-i\xi} \Big|_{-\infty}^{0} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{1+\xi^2}$$

Por otro lado, para g_2, definimos la función compleja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2}$$

Consiramos el siguiente camino en $\mathbb{C}$,



donde $\gamma_1(t) = t$ con $t \in [-R, R]$ y $\gamma_2(t) = Re^{\pi i t}$ para $t \in [0, 1]$. Diremos que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Para $R > 1$ suficientemente grande se tiene que i esta en la región determinada por γ, así, por teorema del residuo, se sigue que

$$2\pi i \cdot Res(f, i) = \int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-it\xi}}{1+t^2}\, dt + \int_0^1 \frac{e^{-iRe^{i\pi t}\xi}}{1+R^2 e^{2\pi i t}} \cdot Ri\pi e^{i\pi t}\, dt$$

como i es un polo simple de f, vemos que

$$Res(f, i) = \lim_{z \to i} (z - i) f(z) = \lim_{z \to i} \frac{e^{-iz\xi}}{z+i} = -\frac{i}{2} e^{\xi}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\left| \int_0^1 \frac{e^{-iRe^{i\pi t}\xi}}{1+R^2 e^{2\pi i t}} \cdot Ri\pi e^{i\pi t}\, dt \right| \leq \int_0^1 \frac{R\pi e^{Rsen(\pi t)\xi}}{|1+R^2 e^{2\pi i t}|}\, dt \leq \int_0^1 \frac{R\pi e^{Rsen(\pi t)\xi}}{R^2 - 1}\, dt$$

(3) Consideremos la función

$$G(x,\xi) = e^{-ix\xi}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-(ix\xi+\frac{x^2}{2})}$$

notemos que $g_{\xi_0}(x) = G(x,\xi_0)$ es continua, por ende es medible, también se tiene que $\frac{\partial G}{\partial \xi}$ existe para todo $(x,\xi)\in\mathbb{R}^2$ y además $g_0(x)$ es integrable. Veamos que

$$\left|\frac{\partial G}{\partial \xi}(x,\xi)\right| \le e^{-\frac{x^2}{2}} \in L^1(\mathbb{R})$$

Así, derivando bajo el signo de la integral se obtiene que

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(f))'(\xi) &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} xe^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ix\xi}\,dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ix\xi}\Big|_{-\infty}^{\infty} - i\xi\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ix\xi}\,dx\right)\\ &= \frac{-\xi}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f)(\xi)\end{aligned}$$

Nos queda una EDO de variables separables con condición inicial $\mathcal{F}(f)(0)=1$, resolviendo la ecuación resulta que

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

(4) (Reescribir) Supongamos que f es indicatriz de algún $E\subseteq\mathbb{R}$ medible, luego,

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,dx = \int_E e^{-ix\xi}\,dx$$

Supongamos que $E = I = (a,b)$ donde $a<b$, entonces

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_a^b e^{-ix\xi}\,dx = -\frac{e^{-ix\xi}}{i\xi}\Big|_a^b = \frac{e^{-ia\xi}}{i\xi} - \frac{e^{-ib\xi}}{i\xi} \xrightarrow[|\xi|\to+\infty]{} 0$$

Para una colección finita de intervalos disjuntos de a pares el resultado es inmediato, este se puede extender a una colección numerable de intervalos disjuntos de a pares. Sea $O\subseteq\mathbb{R}$ un conjunto abierto, luego, se escribe como unión numerable de intervalos disjuntos de a pares, entonces

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_O)(\xi) \xrightarrow[|\xi|\to+\infty]{} 0$$

Sea E un conjunto medible, sea $\varepsilon>0$, existe $G\supseteq E$ abierto tal que $\lambda(G\setminus E)<\varepsilon$, entonces

$$\left|\int_G e^{-ix\xi}\,dx - \int_E e^{-ix\xi}\,dx\right| = \left|\int_{G\setminus E} e^{-ix\xi}\,dx\right| \le \lambda(G\setminus E) < \varepsilon$$

lo que implica que

$$\left|\lim_{|\xi|\to+\infty}\int_E e^{-ix\xi}\,dx\right| \le \varepsilon$$

para todo $\varepsilon>0$, se sigue que

$$\lim_{|\xi|\to+\infty}\int_E e^{-ix\xi}\,dx = 0$$

Sea $s\in L^1(\mathbb{R})$ una función simple, el resultado es directo, en efecto,

$$\lim_{|\xi|\to+\infty}\mathcal{F}(s)(\xi) = \lim_{|\xi|\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\sum_i a_i\mathbb{1}_{A_i}\,dx = \sum_i a_i\lim_{|\xi|\to+\infty}\int_{A_i} e^{-ix\xi}\,dx = 0$$

Sea $f\in L^1(\mathbb{R})$, entonces existe $(s_n)_n$ tal que $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ en $L^1(\mathbb{R})$, notemos que

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| - |\mathcal{F}(s_n)(\xi)| \le |\mathcal{F}(f)(\xi) - \mathcal{F}(s_n)(\xi)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)-s_n(x)|\,dx$$

Luego, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{F}(f)(\xi)|$

(5) Veamos que es lineal, sean $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ y $\alpha\in\mathbb{C}$, entonces por linealidad de la intregal, vemos que

$$\mathcal{F}(f+\alpha g)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}(f+\alpha g)(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)\,dx + \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}g(x)\,dx = \mathcal{F}(f)(\xi)+\alpha\mathcal{F}(g)(\xi)$$

Queda ver que $\mathcal{F}$ es continua, en efecto, sean f_n tales que $f_n \xrightarrow{L^1} f$, tenemos que

$$|\mathcal{F}(f)(\xi) - \mathcal{F}(f_n)(\xi)| = |\mathcal{F}(f - f_n)(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f - f_n| \ dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Por lo tanto $\mathcal{F}$ es una aplicación lineal continua. Además, dado $\xi \in \mathbb{R}$ se sigue que

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}$$

es decir, $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}$.

(6)

1.2. Fórmula de inversión

(1) Sobre la transformada de Fourier

(a)

(b)

(2) **Aplicación a la resolución de EDP.**

(a)

(b)

1.3. La transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$

1.4. La transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

2. Transformada de Fourier - Versión discreta

(1)

(2)

(3)