FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Pontificia Universidad Católica de Chile

Algebras de Banach de Operadores

Benjamín Mateluna

Docente: Amal Taarabt

11 de diciembre de 2025

ÍNDICE

Resumen.

En el presente informe estudiaremos las Algebras de Banach, que resultarán ser una generalización de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, el espacio de operadores lineales acotados con dominio $\mathcal{H}$. Muchos de los resultados vistos en clases se extenderán a estos espacios, adicionalmente, estudiaremos la transformada de Gelfand y como coincide con la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$. Por último, exploraremos las $\mathbb{C}^*-$algebras y el teorema de Gelfand-Naimark, que relaciona las $\mathbb{C}^*-$algebras con las funciones continuas de un espacio compacto.

1. Preliminares: Topología débil.

Dado X un espacio de Banach, recordemos que X^* simboliza el espacio dual de X, que corresponde al espacio de funcionales lineales acotados de X, y que también es un espacio de Banach. El problema de este espacio es que la bola unitaria, denotada por $\mathcal{B}_{X^*}$, no es compacta bajo la topología inducida por la norma, por eso, nos gustaría encontrar una topología tal que $\mathcal{B}_{X^*}$ sea un conjunto compacto.

Para cada $x \in X$, definimos el funcional lineal $\varphi_x : X^* \to \mathbb{C}$ definido por $f \mapsto \varphi_x(f) = f(x)$, notar que estos mapas son continuos con la norma usual en X^*. Consideramos la colección $(\varphi_x)_{x\in X}$ para la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.1. La topologíá débil$-^*$, denotada por $\sigma(X^*, X)$, es la topología más pequeña tal que la colección $(\varphi_x)_{x\in X}$ de funcionales lineales es continua. En otras palabras, es la topología generada por la sub-base

$$\mathcal{C} = \{\varphi_x^{-1}(U) : x \in X \quad \text{y} \quad U \subseteq \mathbb{C} \text{ es abierto}\}$$

En un momento veremos que $\mathcal{B}_{X^*}$ es un conjunto compacto con esta topología, la ventaja de esto es garantizar la existencia de funciones, por ejemplo, en problemas de minimización.

PROPOSICIÓN 1.2. *La topología débil$-^*$ $\sigma(X^*, X)$ es Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f_1, f_2 \in X^*$ tal que $f_1 \neq f_2$, entonces existe $x \in X$ tal que $f_1(x) \neq f_2(x)$. Como $\mathbb{C}$ es Hausdorff, existen vecindades disjuntas $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}$ de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ respectivamente. Luego, los abiertos

$$f_1 \in \varphi_x^{-1}(U_1) \qquad \text{y} \qquad f_2 \in \varphi_x^{-1}(U_2)$$

son abiertos disjuntos, y por lo tanto, la topología débil$-^*$ $\sigma(X^*, X)$ es Hausdorff. □

PROPOSICIÓN 1.3. *Sean $(f_n)_n \subseteq X^*$, entonces $f_n \to f$ con la topología débil$-^*$ si y solo si $f_n(x) \to f_n(x)$ para todo $x \in X$.*

La demostración de este resultado se encuentra en [2] (*Brezis, Proposición 3.13*).

TEOREMA 1.4 (Banach-Alaoglu). *La bola unitaria $\mathcal{B}_{X^*}$ es un conjunto compacto con la topología débil$-^*$ $\sigma(X^*, X)$.*

La demostración de este teorema se encuentra en [2] (*Brezis, Teorema 3.16*).

2. Algebras de Banach.

En esta sección hablaremos sobre las algebras de Banach, que son espacio de Banach equipados con una multiplicación que también es un morfismo bilineal. Además, veremos como resultados vistos en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, el espacio de operadores lineales y acotados sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, se extienden naturalmente a estos espacios.

2.1. Definiciones.

Un álgebra sobre $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$ que viene dotado de una multiplicación de modo que $\mathcal{A}$ es un anillo, más aún, esta operación es un morfismo bilineal, notar que $\mathbb{C}$ puede ser considerada como un álgebra sobre $\mathbb{C}$. Un morfismo de algebras es un morfismo de anillos y un morfismo lineal.

DEFINICIÓN 2.1. Un álgebra de Banach es un álgebra $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$ que posee una norma, $\|\cdot\|$, como espacio vectorial con la cual es un espacio de Banach tal que para todo $a, b \in \mathcal{A}$ se cumple

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

Decimos que la norma es multiplicativa. Si $\mathcal{A}$ tiene una unidad, e, entonces $\|e\| = 1$.

OBSERVACIÓN. Notar que si $x_n \to x$ e $y_n \to y$ entonces $x_n y_n \to xy$, en efecto, observemos que

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y)$$

Y usando desigualdad triangular y que la norma es multiplicativa se tiene la afirmación. Lo anterior muestra que la multiplicación es un mapa continuo.

Notemos que $\mathbb{C}$ puede ser visto como una subálgebra de $\mathcal{A}$ vía la identificación $\alpha \mapsto \alpha e$ que satisface $\|\alpha e\| = |\alpha|$, es decir, el mapa es un isomorfismo isométrico. A partir de este momento, denotaremos la unidad en un álgebra por 1 y a un elemento αe como α.

La ausencia de identidad en un álgebra se puede "arreglar" y la siguiente proposición nos dice como.

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach sin unidad, sea $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \times \mathbb{C}$. Definimos las operaciones algebraicas en $\mathcal{A}_1$ como sigue*

1. $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$
2. $\beta(a, \alpha) = (\beta a, \beta\alpha)$
3. $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)$

Se define la norma $\|(a, \alpha)\| := \|a\| + |\alpha|$. Entonces $\mathcal{A}_1$ es un álgebra de Banach con unidad $(0, 1)$ y $a \mapsto (a, 0)$ un isomorfismo isométrico de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}_1$.

DEMOSTRACIÓN. Verificar las propiedades para ser álgebra es un cálculo sencillo. Veamos que la norma es multiplicativa. Sean $(a, \alpha), (b, \beta) \in \mathcal{A}_1$, entonces

$$\begin{aligned} \|(a, \alpha)(b, \beta)\| &= \|(ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)\| = \|ab + \alpha b + \beta a\| + |\alpha\beta| \\ &\leq \|a\| \, \|b\| + |\beta| \, \|a\| + |\alpha| \, \|b\| + |\alpha| \, |\beta| = \|(a, \alpha)(b, \beta)\| \end{aligned}$$

Tampoco es díficil chequear que $\mathcal{A}_1$ es un espacio de Banach. Que el mapa $a \mapsto (a, 0)$ es un isomorfismo isométrico es directo. $\square$

La anterior proposición nos permite asumir, a partir de ahora, que toda álgebra de Banach tiene una unidad. En caso contrario, siempre existe una álgebra de Banach con unidad, que contiene al álgebra original como subálgebra.

EJEMPLO. Sea X un espacio compacto, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X)$ es un álgebra de Banach con la multiplicación dada por $(fg)(x) = f(x)g(x)$ para todo $f, g \in \mathcal{A}$ y $x \in X$. El álgebra $\mathcal{A}$ es abelina y posee una unidad, que corresponde a la función constante 1.

EJEMPLO. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida $\sigma-$finita. El espacio $L^\infty(\mu)$ es un álgebra de Banach conmutativa con unidad si la multiplicación esta definida igual que en el ejemplo anterior.

EJEMPLO. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un álgebra de Banach, donde la multiplicación corresponde a la composición de operadores y tiene una unidad que es el operador identidad. Para $dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}) \geq 2$ el espacio no es conmutativo.
El espacio $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, el conjunto de operadores compactos, es un álgebra de Banach sin unidad si $\mathcal{H}$ es un espacio de dimensión infinita.

EJEMPLO. Consideremos el espacio $L^1(\mathbb{R})$. Definimos la multiplicación en L^1 como

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\, dt$$

para $f, g \in L^1$. Sabemos que L^1 es un espacio de Banach y que la convolución cumple con las propiedades de un álgebra conmutativa, también recordemos que

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$

es decir, L^1 es un álgebra de Banach conmutativa. Más aún, por la proposición 2.2, el espacio $L^1 \times \mathbb{C}$ es un álgebra de Banach conmutativa con unidad.

2.2. *Ideales y elementos invertibles.*

Exploraremos más en profundidad la estructura algebraica de un álgebra de Banach, especificamente, veremos la noción de ideal, que será idéntica a la que encontramos en anillos. Además, estudiaremos resultados relacionados a elementos invertibles.

DEFINICIÓN 2.3. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra. Un ideal por la izquierda (resp. derecha) es una subálgebra $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ tal que $ax \in \mathcal{M}$ (resp. $xa \in \mathcal{M}$) para todo $a \in \mathcal{A}$ y $x \in \mathcal{M}$. Un ideal bilateral es una subálgebra de $\mathcal{A}$ que es ideal por la izquierda y por la derecha.
Decimos que un ideal es maximal, si no existe un ideal propio que lo contenga.

Un resultado algebraico que será útil más adelante es el siguiente

PROPOSICIÓN 2.4. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach, entonces todo ideal propio por izquierda, por derecha o bilateral esta contenido en un ideal maximal del mismo tipo.*

Esta proposición es una aplicación del lema Zorn y es un resultado meramente algebraico y por lo tanto no se demostrará en este infrome, ya que no es nuestro propósito.

DEFINICIÓN 2.5. Sea $a \in \mathcal{A}$ con $\mathcal{A}$ un álgebra, se dice que a es invertible por la izquierda (resp. derecha) si existe un elemento $x \in \mathcal{A}$ tal que $xa = 1$ (resp. $ax = 1$). Decimos que es invertible si es invertible por izquierda y por derecha.

En cada caso, definimos los siguientes conjuntos

$$G_l := \{a \in \mathcal{A} : a \text{ es invertible por izquierda}\}$$
$$G_r := \{a \in \mathcal{A} : a \text{ es invertible por derecha}\}$$

Y $G = G_l \cap G_r$ es el conjunto de los elementos invertibles.

OBSERVACIÓN. Si $a \in \mathcal{A}$ es invertible, entonces existe un único elemento, denotado por a^{-1}, tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Adicionalmente, notemos que si $\mathcal{M}$ es un ideal propio entonces no puede contener elementos invertibles.

LEMA 2.6. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $a \in \mathcal{A}$ tal que $\|a\| < 1$, entonces $1 - a \in G$.*

DEMOSTRACIÓN. Inductivamente vemos que $\|a^n\| \leq \|a\|^n$, entonces como $\mathcal{A}$ en particular es un espacio de Banach, la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} a^n$ es convergente en $\mathcal{A}$ y además

$$(1-a)\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} a^n = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{m} a^n - \sum_{n=0}^{m} a^{n+1}\right) = \lim_{m\to\infty} 1 - a^{m+1} = 1$$

La otra igualdad es análoga. □

TEOREMA 2.7. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Entonces los conjuntos G_l, G_r y G son abiertos, además, el mapa $a \mapsto a^{-1}$ de G en G es continuo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $a \in G_l$, entonces existe $x \in \mathcal{A}$ tal que $xa = 1$. Sea $u \in \mathcal{A}$ de modo que $\|u - a\| < \|x\|^{-1}$, luego, $\|xu - 1\| = \|x(u - a)\| < 1$, por el lema anterior el elemento xu es invertible, definimos $v := (xu^{-1})x$ y es directo que $vu = 1$. Esto prueba que G_l es abierto y similarmente G_r es abierto, concluimos que $G = G_l \cap G_r$ es abierto.

Queda probar que $a \mapsto a^{-1}$ es continuo, para ello, basta probar que si $a_n \to 1$ entonces $a_n^{-1} \to 1$. Sea $a_n \to a$, por continuidad vemos que $a_n a^{-1} \to 1$, lo que implica que $aa_n^{-1} \to 1$ y nuevamente por continuidad $a_n^{-1} \to a^{-1}$.

Dado $\varepsilon > 0$, consideramos $\delta < \min\{1, \varepsilon/(1+\varepsilon)\}$. Supongamos que $\|a_n - 1\| < \delta$, del lema anterior, $a_n^{-1} = (1 - (1 - a_n))^{-1} = \sum_{m\in\mathbb{N}}(1 - a_n)^m$, así

$$\left\|a_n^{-1} - 1\right\| = \left\|\sum_{m\geq 1}(1 - a_n)^m\right\| \leq \sum_{m\geq 1}\|1 - a_n\|^m < \frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon$$

□

Durante la demostración utilizamos dos argumentos que vale la pena enunciar.

COROLARIO 2.8. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach, dado $a \in \mathcal{A}$, se cumple lo siguiente:*

1. *Si $\|a\| < 1$, entonces $(1 - a)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}}(1 - a)^n$.*
2. *Si $xa = 1$ y $\|u - a\| < \|x\|^{-1}$, entonces u es invertible por la izquierda.*

2.3. El espectro.

DEFINICIÓN 2.9. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $a \in \mathcal{A}$, el espectro de a, denotado por $\sigma(a)$, esta definido por

$$\sigma(a) := \{\alpha \in \mathbb{C} : a - \alpha \text{ no es invertible}\}$$

Análogamente se definen los espectros por izquierda y por derecha, denotados por $\sigma_l(a)$ y $\sigma_r(a)$ respectivamente.

El conjunto resolvente de a se define como $\rho(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$. Similarmente se tienen el conjunto resolvente por izquierda y por derecha, denotados por $\rho_l(a)$ y $\rho_r(a)$ respectivamente.

OBSERVACIÓN. El mapa $\alpha \mapsto a - \alpha$ es una función continua y notemos que $\rho(a)$ es la preimagen de G bajo esta función, entonces $\rho(a)$ es abierto y $\sigma(a)$ es cerrado.

EJEMPLO. Sea X un espacio compacto. Consideremos $f \in \mathcal{C}(X)$, luego $\sigma(f) = f(X)$. En efecto, si $\alpha = f(x_0)$, la función $f - \alpha$ tiene un cero y por lo tanto no es invertible, de este modo $f(X) \subseteq \sigma(f)$. Por otro lado, si $\alpha \notin f(X)$, entonces $f - \alpha$ no se anula y por ende $(f - \alpha)^{-1}$ esta bien definida y es continua, lo que prueba $\sigma(f) \subseteq f(X)$.

EJEMPLO. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Dado $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, sabemos que

$$\rho(T) = \{\alpha : T - \alpha \text{ es biyección}\}$$

Por el teorema del mapa abierto resulta que $(T - \alpha)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ para todo $\alpha \in \rho(T)$, y por otro lado, si $T - \alpha$ es invertible claramente es biyectivo. Así, ambas nociones de espectro y conjunto resolvente coinciden.

TEOREMA 2.10. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach, entonces para cada $a \in \mathcal{A}$, $\sigma(a)$ es un conjunto compacto no vacío. Más aún, si $|\alpha| > \|a\|$ entonces $\alpha \in \rho(a)$ y el mapa dado por $z \mapsto (z - a)^{-1}$ es una función analítica definida en $\rho(a)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| > \|a\|$, notemos que $\alpha - a = \alpha(1 - a/\alpha)$ donde $\|a/\alpha\| < 1$. Lo que implica que $1 - a\alpha^{-1}$ es invertible, se sigue que $a - \alpha$ es invertible y por lo tanto $\alpha \in \rho(a)$. De este modo

$$\sigma(a) \subseteq \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| \leq \|a\|\}$$

Como $\sigma(a)$ es cerrado, concluimos que es compacto. Para el segundo punto, definimos $F : \rho(a) \to \mathcal{A}$ por $F(z) = (z - a)^{-1}$. Notamos la identidad

$$x^{-1} - y^{-1} = x^{-1}(y - x)y^{-1} \qquad \text{para todo } x, y \in G$$

Reemplazamos $x = \alpha + h - a$ e $y = \alpha - a$, donde $\alpha \in \rho(a)$ y $h \in \mathbb{C}$ tal que $h \neq 0$ y $\alpha + h \in \rho(a)$. Entonces

$$\frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{h} = \frac{(\alpha + h - a)^{-1}(-h)(\alpha - a)^{-1}}{h} = -(\alpha + h - a)^{-1}(\alpha - a)^{-1}$$

Por continuidad tenemos que $F'(\alpha) = -(\alpha - a)^{-2}$, en otras palabras, F es analítica en $\rho(a)$. La función F puede ser reescrita como $F(z) = z^{-1}(1 - az^{-1})^{-1}$, pero $(1 - az^{-1}) \to 1$ cuando $z \to \infty$, porque $\|a\| < \infty$. Lo anterior implica que $F(z) \to 0$ cuando $z \to \infty$.

Supongamos, por contradicción, que $\sigma(a) = \emptyset$, entonces la función F es entera y por Teorema de Liouville es constante, sin embargo, $F \not\equiv 0$, ya que cero no es invertible. Lo anterior prueba que $\sigma(a)$ es no vacío. $\square$

COROLARIO 2.11 (Gelfand-Mazur). *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach tal que todo elemento no cero es invertible. Entonces $\mathcal{A}$ consiste en múltiplos escalares de la identidad y por lo tanto $\mathcal{A}$ es isometricamente isomorfo a $\mathbb{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $a \in \mathcal{A}$, existe $\lambda \in \sigma(a)$ tal que $a - \lambda \notin G$, es decir, $a = \lambda$. $\square$

DEFINICIÓN 2.12. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $a \in \mathcal{A}$, el radio espectral de a, denotado por $r(a)$, se define por

$$r(a) := \sup\{|\alpha| : \alpha \in \sigma(a)\}$$

Dado que $\sigma(a)$ es no vacío, el radio espectral esta bien definido, más aún, por compacidad resulta ser finito. La siguiente proposición permite calcular el radio espectral explícitamente,

PROPOSICIÓN 2.13. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $a \in \mathcal{A}$, entonces el límite* $\text{lím}\, \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ *existe y*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$$

La demostración de este resultado se encuentra en [1] (*Conway, Proposición 3.8*)

2.4. Algebras de Banach conmutativas.

En este apartado nos enfocaremos en algebras de Banach conmutativas, el principal objeto de estudio serán los morfismos de algebras $h : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, que llamaremos morfismos, donde $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach. objetivo.

PROPOSICIÓN 2.14. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa y $\mathcal{M}$ un ideal maximal, entonces existe un morfismo $h : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{M} = ker\ h$.*

La demostración de este resultado se encuentra en [1] (*Conway, Proposición 8.2*). El siguiente resultado es fundamental para nuestro objetivo.

PROPOSICIÓN 2.15. *Sea $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach y $h : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ un morfismo no trivial, entonces $\|h\| = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $a \in \mathcal{A}$ y $\lambda = h(a)$. Supongamos que $|\lambda| > \|a\|$, entonces por 2.10 $1 - a/\lambda$ es invertible. Sea $b = (1 - a\lambda^{-1})^{-1}$, notemos que $1 = b(1 - a/\lambda) = b - ba/\lambda$ y como $h(1) = 1$, vemos lo siguiente

$$1 = h(b - ba/\lambda) = h(b) - h(b)h(a)/\lambda = h(b) - h(b) = 0$$

que es una contradicción. De este modo tenemos que $\|a\| \geq |\lambda| = |h(a)|$, así, $\|h\| \leq 1$. Por otro lado, como $h(1) = 1$, observamos que $\|h\| = 1$. $\square$

La proposición anterior nos dice que todo morfismo es continuo, es más, la norma es siempre igual a 1, por ende, todo morfismo es un funcional lineal continuo y la anterior observación da pie a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.16. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa. Denotamos por Σ a la colección de morfismos no triviales. Dotamos a este conjunto con la topología débil$-^*$, como subconjunto de $\mathcal{A}^*$. Este espacio se llama el espacio ideal maximal de $\mathcal{A}$.

El teorema de Banach-Alaoglu nos permite demostrar lo siguiente.

TEOREMA 2.17. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa, entonces su espacio ideal maximal Σ es un espacio compacto y Hausdorff. Más aún, si $a \in \mathcal{A}$, entonces*

$$\sigma(a) = \Sigma(a) := \{h(a) : h \in \Sigma\}$$

DEMOSTRACIÓN. Para el primer punto, basta probar que Σ es cerrado bajo la topología débil$-^*$, ya que es subconjunto de $\mathcal{B}_{\mathcal{A}^*}$, que bajo esta topología es un conjunto compacto.

Sea $(h_n)_n$ una sucesión en Σ y $h \in \mathcal{B}_{A^*}$ tal que $h_n \to h$ con la topología débil$-^*$. Sean $a, b \in \mathcal{A}$, entonces

$$h(ab) = \lim_{n\to\infty} h_n(ab) = \lim_{n\to\infty} h_n(a)h_n(b) = h(a)h(b)$$

Y del mismo modo $h(1) = 1$. Lo que implica que $h \in \Sigma$, hemos concluido que Σ es compacto.

Para el segundo punto, dado $h \in \Sigma$ y $\lambda = h(a)$, tenemos que $a - \lambda \in ker\ h$, entonces $a - \lambda$ no es invertible, en otras palabras, $\Sigma(a) \subseteq \sigma(a)$. Por otro lado, si $a - \lambda$ no es invertible, el ideal $(a - \lambda)$ es propio, entonces existe un ideal maximal $\mathcal{M}$ en $\mathcal{A}$ tal que $(a - \lambda) \subseteq \mathcal{M}$, por 2.14, existe h morfismo de modo que $\mathcal{M} = ker\ h$, en particular

$$0 = h(a - \lambda) = h(a) - \lambda$$

Lo que concluye la demostración. $\square$

DEFINICIÓN 2.18. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con espacio ideal maximal Σ. Dado $a \in \mathcal{A}$, la transformada de Gelfand de a es la función $\hat{a} : \Sigma \to \mathbb{C}$ definida por $\hat{a}(h) = h(a)$.

TEOREMA 2.19. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con espacio ideal maximal Σ, entonces $\hat{a} \in \mathcal{C}(\Sigma)$ para todo $a \in \mathcal{A}$. El mapa $a \to \hat{a}$ de $\mathcal{A} \to \mathcal{C}(\Sigma)$ es un morfismo de algebras continuo con norma* 1. *Más aún, para cada $a \in \mathcal{A}$, se tiene que*

$$\|\hat{a}\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $(h_n)_n \subseteq \Sigma$ y $h \in \Sigma$ tales que $h_n \to h$ con la topología débil$-^*$. Entonces, dado $a \in \mathcal{A}$, se tiene que

$$\hat{a}(h_n) = h_n(a) \to h(a) = \hat{a}(h)$$

Lo que prueba la continuidad. Se define $\gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\Sigma)$ por $\gamma(a) = \hat{a}$, sean $a, b \in \mathcal{A}$, luego

$$\gamma(ab)(h) = \hat{ab}(h) = h(ab) = h(a)h(b) = \hat{a}(h)\hat{b}(h)$$

Por lo tanto $\gamma(ab) = \gamma(a)\gamma(b)$. Del mismo modo se prueba que γ es lineal, es decir, γ es un morfismo de algebras. Sabemos que $|\hat{a}(h)| = |h(a)| \leq \|a\|$, así, $\|\gamma(a)\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$ y por ende la función γ es continua, es más, $\|\gamma\| \leq 1$ y como $\gamma(1) = 1$, se tiene $\|\gamma\| = 1$.

Por el teorema anterior, dado $a \in \mathcal{A}$, resulta que

$$\|\hat{a}\|_\infty = \sup_{\lambda\in\Sigma(a)} |\lambda| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$$

$\square$

3. $\mathbb{C}^*$-Algebras.

En esta sección, en primer lugar, hablaremos de algebras con una operación adicional, la involución, que encuentra similitudes con el operador adjunto en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Además, presentaremos el resultado principal del presente trabajo que nos permitirá trabajar aplicaciones de la teoría.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach, una involución es un mapa $a \mapsto a^*$ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ tal que las siguientes propiedades se cumplen para todo $a, b \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$

1. $(a^*)^* = a$.
2. $(ab)^* = b^* a^*$.
3. $(\alpha a + b)^* = \overline{\alpha} a^* + b^*$.

Notemos que $1^* a = (1^* a)^{**} = (a^* 1)^* = a$ y análogamente $a1^* = a$, por unicidad, concluimos que $1^* = 1$.

DEFINICIÓN 3.1. Una $\mathbb{C}^*-$álgebra es un álgebra de Banach $\mathcal{A}$, con una involución tal que para todo $a \in \mathcal{A}$

$$\|a^* a\| = \|a\|^2$$

DEFINICIÓN 3.2. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ $\mathbb{C}^*-$algebras y $v : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, se dice $^*-$morfismo si v es un morfismo de algebras tal que $v(a^*) = v(a)^*$.

EJEMPLO. Sea X un espacio compacto, luego, $\mathcal{C}(X)$ es una $\mathbb{C}^*-$álgebra donde $f^*(x) = \overline{f(x)}$ para $f \in \mathcal{C}(X)$ y $x \in X$.

EJEMPLO. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, entonces $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una $\mathbb{C}^*-$álgebra donde para cada $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, A^* es el operador adjunto de A.

PROPOSICIÓN 3.3. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{C}^*-$álgebra y $a \in \mathcal{A}$, entonces $\|a^*\| = \|a\|$.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que $\|a\|^2 = \|a^* a\| \leq \|a^*\| \|a\|$, lo que implica que $\|a\| \leq \|a^*\|$. Usando que $a = a^{**}$ y reemplazando a^* por a se tiene la otra desigualdad. □

DEFINICIÓN 3.4. Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{C}^*-$álgebra y $a \in \mathcal{A}$, entonces se dice hermitiano si $a = a^*$, normal si $a^* a = a a^*$ y unitario si $a^* a = a a^* = 1$.

PROPOSICIÓN 3.5. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{C}^*-$álgebra y $a \in \mathcal{A}$,*

1. *Si a es invertible, entonces a^* es invertible y $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.*
2. *Entonces $a = x + iy$ con $x, y \in \mathcal{A}$ hermitianos.*
3. *Si a es un elemento unitario de $\mathcal{A}$, entonces $\|a\| = 1$.*
4. *Sea $\mathcal{B}$ una $\mathbb{C}^*-$álgebra y $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un $*-$morfismo, entonces $\|f(a)\| \leq \|a\|$.*
5. *Si a es un elemento hermitiano, entonces $\|a\| = r(a)$.*

DEMOSTRACIÓN. Notar que $a^*(a^{-1})^* = (a^{-1}a)^* = 1$ y la otra igualadad es idéntica. Para el segundo punto basta tomar

$$x = \frac{a + a^*}{2} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{a - a^*}{2i}$$

Si a es unitario, entonces $1 = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Supongamos que $a = a^*$, luego, $\left\|a^2\right\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$ e inductivamente $\left\|a^{2^n}\right\| = \|a\|^{2^n}$ para $n \geq 1$. Entonces $\left\|a^{2^n}\right\|^{1/2^n} = \|a\|$ y como

$$r(a) = \lim \left\|a^{2^n}\right\|^{1/2^n} = \|a\|$$

Se tiene último punto. Veamos el cuarto punto, sea $a \in \mathcal{A}$, afirmamos que $\sigma(f(a)) \subseteq \sigma(a)$ y por definición se sigue que $r(f(a)) \leq r(a)$. Usando que a^*a es hermitiano, vemos que

$$\|f(a)\|^2 = \|f(a^*a)\| = r(f(a^*a)) \leq r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$$

Probemos la afirmación, sea $\alpha \in \rho(a)$ entonces $a - \alpha$ es invertible, es sencillo probar que $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$ con $x \in \mathcal{A}$ un elemento invertible, entonces se verifica que

$$(f(a) - \alpha)^{-1} = (f(a - \alpha))^{-1} = f((a - \alpha)^{-1})$$

De este modo, $\sigma(f(a)) \subseteq \sigma(a)$. □

Veremos resultados sobre morfismos de álgebra $h : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ que nos permitirán llegar al resultado final.

PROPOSICIÓN 3.6. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{C}^*-$álgebra y $h : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ un morfismo de álgebra no trivial, entonces:*

1. $h(a) \in \mathbb{R}$ *siempre y cuando* $a = a^*$.
2. $h(a^*) = \overline{h(a)}$ *para todo* $a \in \mathcal{A}$.
3. $h(a^*a) \geq 0$ *para todo* $a \in \mathcal{A}$.
4. *Si u es unitario, entonces* $|h(u)| = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $\|h\| = 1$. Supongamos que $a = a^*$ y sea $t \in \mathbb{R}$, notemos que

$$|h(a + it)|^2 \leq \|a + it\|^2 = \|(a + it)^*(a + it)\| \leq \|a\|^2 + t^2$$

y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $h(a) = \alpha + i\beta$, entonces

$$\|a\|^2 + t^2 \geq |\alpha + i(\beta + t)|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t + t^2$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Si $\beta \neq 0$, tomando $t \to \pm\infty$, dependiendo del signo de β se llega a una contradicción, es decir, $h(a) \in \mathbb{R}$.

Para el segundo punto, existen $x, y \in \mathcal{A}$ hermitianos tales que $a = x + iy$, usando que $a^* = x - iy$ se tiene el resultado. Además, del punto anterior se sigue que $h(a^*a) = h(a^*)h(a) = |h(a)|^2 \geq 0$. Finalmente, si u es unitario

$$|h(u)|^2 = h(u^*)h(u) = h(u^*u) = h(1) = 1$$

□

Notemos que $\mathbb{C}$ puede ser visto como una $\mathbb{C}^*$-álgebra. La proposición anterior anterior nos permite concluir que todo morfismo de álgebra no trivial $h : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ es un $*-$morfismo. Usando lo anterior y 2.17, concluimos el siguiente corolario

COROLARIO 3.7. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{C}^*-$álgebra conmutativa y a un elemento hermitiano de $\mathcal{A}$, entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.*

Con todo lo anterior podemos enunciar y demostrar el teorema principal.

TEOREMA 3.8 (Gelfand-Naimark). *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{C}^*-$álgebra conmutativa y Σ su espacio ideal maximal, entonces la transformada de Gelfand $\gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\Sigma)$ es un $^*-$isomorfismo isométrico.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $a \in \mathcal{A}$ y $h \in \Sigma$, entonces $\hat{a^*}(h) = h(a^*) = \overline{h(a)} = \overline{\hat{a}(h)}$, esto es, $\hat{a^*} = \overline{\hat{a}}$, por lo tanto la transformada de Gelfand es un $^*-$morfismo. Adicionalmente,

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = \left\|\widehat{a^*a}\right\|_\infty = \left\||\hat{a}|^2\right\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty^2$$

Lo que implica que γ es una isometría. Dado que la transformada de Gelfand es una isometría, su imagen es cerrada, de este modo basta probar que su conjunto imagen es denso.

Procederemos por el teorema de Stone-Weierstrass. Recordemos que $\hat{1} = 1$, entonces $\gamma(\mathcal{A})$ es una subálgebra de $\mathcal{C}(\Sigma)$ que contiene las constantes. Dado que γ es un $^*-$morfismo, la imagen es cerrada bajo conjugación compleja. Resta ver que separa puntos en Σ. Sean $h_1, h_2 \in \Sigma$ distintos, entonces existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $h_1(a) \neq h_2(a)$, dicho de otro modo, $\hat{a}(h_1) \neq \hat{a}(h_2)$. □

4. Aplicaciones.

Finalmente en esta sección veremos aplicaciones de lo estudiado, especificamente, demostraremos que la transformada de Gelfand coincide con la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$. También aplicaremos el teorema de Gelfand-Naimark en problemas físicos.

EJEMPLO. Sea $\mathcal{A} = L^1(\mathbb{R})$ con una unidad adjunta. Definimos la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$ como

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx =: \hat{f}(\xi)$$

Que es un morfismo lineal tal que $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$. Luego, la función $h : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ dada por

$$h_\xi(f + \alpha) = \hat{f}(\xi) + \alpha \qquad \text{es un morfismo}$$

con $\xi \in [0, \infty]$, si $\xi = \infty$ decimos que $\hat{f}(\xi) = 0$.

EJEMPLO. (Gelfand-Naimark)

REFERENCIAS

[1] CONWAY, JOHN B. (2007). *A Course in Functional Analysis*, 2nd ed. Springer.

[2] BREZIS, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* , 1st ed. Springer.