



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: PEDRO GASPAR – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

Geometría Diferencial - MAT2860

Interrogación 2 30 de mayo de 2025

Problema 1

Lema 0.1. Sea Σ una superficie regular orientable. Entonces $p \in \Sigma$ es punto umbilical si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $e = \lambda E$, $f = \lambda F$ y $g = \lambda G$.

Demostración. Supongamos que $p \in \Sigma$ es punto umbilical entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{I}(v, w) = \lambda I(v, w)$ para todo $v, w \in T_p \Sigma$, en particular se cumple para X_u, X_v y por lo tanto

$$e = \mathbb{I}(X_u, X_u) = \lambda I(X_u, X_u) = \lambda E$$

del mismo modo se obtienen las otras igualdades. Supongamos que se tienen las igualdades mencionadas, luego, como la segunda forma fundamental esta determinada por sus coeficientes e, f, g y los coeficientes E, F, G determinan la primera forma, se sigue que $\mathbb{I} = \lambda I$ y por lo tanto p es umbilical.

Consideremos la parametrización del elipsoide $X : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = (a \sen(u) \cos(v), b \sen(u) \sen(v), c \cdot \cos(u))$$

Además se tiene que

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = \left\langle X_{uu}, \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} \right\rangle = \frac{\langle X_{uu}, X_u \times X_v \rangle}{|X_u \times X_v|}$$

De manera análoga se tiene para los otros coeficientes de la segunda forma fundamental. Veamos las derivadas de la parametrización, esto es

$$\begin{aligned} X_u &= (a \cos(u) \cos(v), b \cos(u) \sen(v), -c \sen(u)) \\ X_v &= (-a \sen(u) \sen(v), b \sen(u) \cos(v), 0) \end{aligned}$$

Con ello calculamos los coeficientes de la primera forma fundamental,

$$\begin{aligned} E &= a^2 \cos^2(u) \cos^2(v) + b^2 \cos^2(u) \sen^2(v) + c^2 \sen^2(u) \\ F &= (b^2 - a^2) \cos(u) \cos(v) \sen(u) \sen(v) \\ G &= a^2 \sen^2(u) \sen^2(v) + b^2 \sen^2(u) \cos^2(v) \end{aligned}$$

Por otro lado vemos que

$$X_u \times X_v = (b c \sen^2(u) \cos(v), a c \sen^2(u) \sen(v), a b \cos(u) \sen(u))$$

Además, calculamos las derivadas de segundo orden,

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (-a \sen(u) \cos(v), -b \sen(u) \sen(v), -c \cdot \cos(u)) \\ X_{uv} &= (-a \cos(u) \sen(v), b \cos(u) \cos(v), 0) \\ X_{vv} &= (-a \sen(u) \cos(v), -b \sen(u) \sen(v), 0) \end{aligned}$$

Además, haciendo los calculos necesarios, será útil lo siguiente

$$\langle X_{uu}, X_u \times X_v \rangle = -a b c \sen(u) \quad \langle X_{uv}, X_u \times X_v \rangle = 0 \quad \langle X_{vv}, X_u \times X_v \rangle = -a b c \sen^3(u)$$

Como $u \in (0, \pi)$ entonces $\text{sen}(u) \neq 0$ y por ende $e, g \neq 0$. Por el lema, para los puntos umbilicales se tiene que

$$\frac{E}{\langle X_{uu}, X_u \times X_v \rangle} = \frac{E}{e |X_u \times X_v|} = \frac{E}{\lambda E |X_u \times X_v|} = \frac{G}{\langle X_{uu}, X_u \times X_v \rangle}$$

Por otro lado, como $\langle X_{uv}, X_u \times X_v \rangle = 0$ vemos que $F = f = 0$ pues $\lambda \neq 0$, de lo contrario $e, g = 0$. Tenemos cuatro casos:

- a) Si $a > b > c$. Como $a \neq b$ tenemos que $\cos(u) = 0$ ó $\cos(v) = 0$ ó $\text{sen}(v) = 0$. Afirmamos que $\text{sen}(v) = 0$. Supongamos que $\cos(u) = 0$, entonces por la ecuación del elipsoide vemos que $\text{sen}^2(u) = 1$, entonces $E = c^2$ y $G = a^2 \text{sen}^2(v) + b^2 \cos^2(v)$ y

$$\langle X_{vv}, X_u \times X_v \rangle = -abc \text{sen}^3(u) = -abc \text{sen}(u) = \langle X_{uu}, X_u \times X_v \rangle$$

de este modo, $E = G$ y por ende

$$c^2 = a^2 \text{sen}^2(v) + b^2 \cos^2(v) = a^2 \text{sen}^2(v) + b^2 - b^2 \text{sen}^2(v) = (a^2 - b^2) \text{sen}^2(v) + b^2$$

despejando nos queda que $\frac{c^2 - b^2}{a^2 - b^2} = \text{sen}^2(v)$, lo que es una contradicción, concluimos que $\cos(u) \neq 0$. Supongamos que $\cos(v) = 0$, entonces $\text{sen}^2(v) = 1$, tenemos las ecuaciones $E = b^2 \cos^2 + c^2 \text{sen}^2(u)$ y $G = a^2 \text{sen}^2(u)$ igual que antes se sigue que

$$a^2 = b^2 \cos^2(u) + c^2 \text{sen}^2(u) = b^2 - b^2 \text{sen}^2(u) + c^2 \text{sen}^2(u) = b^2 + (c^2 - b^2) \text{sen}^2(u)$$

y por lo tanto $\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2} = \text{sen}^2(u)$, esto es una contradicción con el signo de ambas expresiones.

Concluimos que $\text{sen}(v) = 0$, entonces $v = \pi$ y por consiguiente $\cos^2(v) = 1$. Obtenemos que $E = a^2 \cos^2(u) + c^2 \text{sen}^2(u)$ y $G = b^2 \text{sen}^2(u)$, entonces

$$\frac{a^2 \cos^2(u) + c^2 \text{sen}^2(u)}{-abc \text{sen}(u)} = \frac{b^2 \text{sen}^2(u)}{-abc \text{sen}^3(u)} = \frac{b^2}{-abc \text{sen}(u)}$$

lo que implica que

$$b^2 = a^2 \cos^2(u) + c^2 \text{sen}^2(u) = a^2 - a^2 \text{sen}^2(u) + c^2 \text{sen}^2(u) = a^2 + (c^2 - a^2) \text{sen}^2(u)$$

así, despejando vemos que

$$\text{sen}(u) = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$$

Usando la misma ecuación, pero despejando $\cos^2(u)$ vemos que

$$\cos^2(u) = \pm \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

De este modo obtenemos cuatro puntos umbilicales, que tienen la siguiente forma

$$\left(\pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, 0, \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \right)$$

- b) Si $a = b > c$, entonces los coeficientes de la primera forma fundamental quedan como

$$E = a^2 \cos^2(u) \quad F = 0 \quad G = a^2 \text{sen}^2(v)$$

por otro lado el producto interno con el producto cruz queda como

$$\langle X_{uu}, X_u \times X_v \rangle = -a^2 c \text{sen}(u) \quad \langle X_{uv}, X_u \times X_v \rangle = 0 \quad \langle X_{vv}, X_u \times X_v \rangle = -a^2 c \text{sen}^3(u)$$

Para los puntos umbilicales se tiene que

$$\frac{a^2 \cos^2(u) + c^2 \text{sen}^2(u)}{-a^2 c \text{sen}(u)} = \frac{a^2 \text{sen}^2(u)}{-a^2 c \text{sen}^3(u)} = \frac{a^2}{-a^2 c \text{sen}(u)}$$

obtenemos la ecuación

$$a^2 = a^2 \cos^2(u) + c^2 \sin^2(u) = a^2 - a^2 \sin^2(u) + c^2 \sin^2(u) = a^2 + (c^2 - a^2) \sin^2(u)$$

lo que implica que $\sin(u) = 0$. Lo que implica que no hay puntos umbilicales en la imagen de la parametrización y por lo tanto los puntos umbilicales son $(0, 0, \pm c)$.

- c) Si $a > b = c$, notemos que este caso es simétrico respecto de $a = b > c$, basta tomar una rotación que intercambie las coordenadas respectivas y como toda rotación es isometría lineal, se preserva la primera forma fundamental y por ende los puntos umbilicales, luego, en este caso solo hay dos puntos umbilicales, que son $(\pm a, 0, 0)$.
- d) Si $a = b = c$, entonces la superficie es una esfera y por lo visto en clases todo punto es umbilical.

Problema 2

- a) Recordemos que se tiene el resultado

$$K_\Sigma \circ X = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

como $F \equiv 0$, vemos que

$$(K_\Sigma \circ X) \cdot EG = eg - f^2$$

Por otro lado, se tienen las siguientes identidades para E_{vv} y G_{uu} ,

$$\begin{aligned} E_{vv} &= \frac{\partial^2}{\partial v^2} (\langle X_u, X_u \rangle) = \frac{\partial}{\partial v} (2 \langle X_{uv}, X_u \rangle) = 2 (\langle X_{uvv}, X_u \rangle + \langle X_{uv}, X_{uv} \rangle) \\ G_{uu} &= \frac{\partial^2}{\partial u^2} (\langle X_v, X_v \rangle) = \frac{\partial}{\partial u} (2 \langle X_{vu}, X_v \rangle) = 2 (\langle X_{vuu}, X_v \rangle + \langle X_{vu}, X_{vu} \rangle) \end{aligned}$$

Para las expresiones $|(X_{uv})^T|^2$ y $\langle (X_{uu})^T, (X_{vv})^T \rangle$, tenemos que

$$\begin{aligned} |(X_{uv})^T|^2 &= \langle X_{uv} - \langle X_{uv}, N^x \rangle N^x, X_{uv} - \langle X_{uv}, N^x \rangle N^x \rangle \\ &= \langle X_{uv} - f N^x, X_{uv} - f N^x \rangle = |X_{uv}|^2 - f^2 - f^2 + f^2 = |X_{uv}|^2 - f^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \langle (X_{uu})^T, (X_{vv})^T \rangle &= \langle X_{uu} - \langle X_{uu}, N^x \rangle N^x, X_{vv} - \langle X_{vv}, N^x \rangle N^x \rangle \\ &= \langle X_{uu} - e N^x, X_{vv} - g N^x \rangle = \langle X_{uu}, X_{vv} \rangle - eg - eg + eg = \langle X_{uu}, X_{vv} \rangle - eg \end{aligned}$$

recordando que $e = \langle N^x, X_{uu} \rangle$, $f = \langle N^x, X_{uv} \rangle$ y $g = \langle N^x, X_{vv} \rangle$. Además, tenemos lo siguiente como consecuencia de que la parametrización es ortogonal

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (\langle X_u, X_v \rangle) = \frac{\partial}{\partial u} (\langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vv} \rangle) \\ &= \langle X_{uvu}, X_v \rangle + \langle X_{uv}, X_{vu} \rangle + \langle X_{uu}, X_{vv} \rangle + \langle X_u, X_{vvu} \rangle \end{aligned}$$

lo que implica que

$$-\langle X_{uu}, X_{vv} \rangle = \langle X_{uvu}, X_v \rangle + \langle X_{uv}, X_{vu} \rangle + \langle X_u, X_{vvu} \rangle$$

Usando lo anterior, se sigue que

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} (E_{vv} + G_{uu}) + |(X_{uv})^T|^2 - \langle (X_{uu})^T, (X_{vv})^T \rangle \\ &= -\langle X_{uvv}, X_u \rangle - \langle X_{uv}, X_{uv} \rangle - \langle X_{vuu}, X_v \rangle - \langle X_{vu}, X_{vu} \rangle + |X_{uv}|^2 - f^2 + eg - \langle X_{uu}, X_{vv} \rangle \\ &= eg - f^2 \end{aligned}$$

y se tiene lo pedido.

b) Como $\{X_u, X_v, N\}$ forman una base de \mathbb{R}^3 , existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$X_{uu} = aX_u + bX_v + cN$$

Notemos que $\langle X_{uu}, N^x \rangle = e$, veamos las siguientes igualdades para $\langle X_{uu}, X_u \rangle$ y $\langle X_{uu}, X_v \rangle$

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (\langle X_u, X_u \rangle) = \frac{1}{2} E_u$$

y usando que $F \equiv 0$ vemos que

$$0 = \frac{\partial}{\partial u} (\langle X_u, X_v \rangle) = \langle X_{uu}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vu} \rangle = \langle X_{uu}, X_v \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} (\langle X_u, X_u \rangle) = \langle X_{uu}, X_v \rangle + \frac{1}{2} E_v$$

entonces tomando producto interno con X_u, X_v y N^x respectivamente y usando que $F \equiv 0$, N^x es unitario y ortogonal a $\{X_u, X_v\}$, tenemos que

$$a = \frac{\langle X_{uu}, X_u \rangle}{\langle X_u, X_u \rangle} = \frac{E_u}{2E} \quad b = \frac{\langle X_{uu}, X_v \rangle}{\langle X_v, X_v \rangle} = -\frac{E_v}{2G} \quad c = \langle X_{uu}, N^x \rangle = e$$

Del mismo modo que antes, tenemos $X_{uv} = a_0X_u + b_0X_v + c_0N$, veamos que $\langle X_{uv}, N^x \rangle = f$ y además

$$\begin{aligned} \langle X_{uv}, X_v \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (\langle X_v, X_v \rangle) = \frac{1}{2} G_u \\ \langle X_{uv}, X_u \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} (\langle X_u, X_u \rangle) = \frac{1}{2} E_v \end{aligned}$$

luego

$$a_0 = \frac{\langle X_{uv}, X_u \rangle}{\langle X_u, X_u \rangle} = \frac{E_v}{2E} \quad b_0 = \frac{\langle X_{uv}, X_v \rangle}{\langle X_v, X_v \rangle} = \frac{G_u}{2G} \quad c_0 = \langle X_{uv}, N^x \rangle = f$$

Queda ver $X_{vv} = a_1X_u + b_1X_v + c_1N$. Recordemos que $\langle X_{vv}, N^x \rangle = g$ y adicionalmente

$$\langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} (\langle X_v, X_v \rangle) = \frac{1}{2} G_v$$

por otro lado se tiene que

$$0 = \frac{\partial}{\partial v} (\langle X_u, X_v \rangle) = \langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vv} \rangle = \frac{1}{2} G_u + \langle X_u, X_{vv} \rangle$$

entonces

$$a_0 = \frac{\langle X_{vv}, X_u \rangle}{\langle X_u, X_u \rangle} = -\frac{G_u}{2E} \quad b_0 = \frac{\langle X_{vv}, X_v \rangle}{\langle X_v, X_v \rangle} = \frac{G_v}{2G} \quad c_0 = \langle X_{vv}, N^x \rangle = g$$

lo que demuestra lo pedido.

c) Del item anterior tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} (X_{uu})^T &= \frac{E_u}{2E} X_u - \frac{E_v}{2G} X_v \\ (X_{uv})^T &= \frac{E_v}{2E} X_u + \frac{G_u}{2G} X_v \\ (X_{vv})^T &= -\frac{G_u}{2E} X_u + \frac{G_v}{2G} X_v \end{aligned}$$

Por otro lado también se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} |(X_{uv})^T|^2 &= \left\langle \frac{E_v}{2E} X_u + \frac{G_u}{2G} X_v, \frac{E_v}{2E} X_u + \frac{G_u}{2G} X_v \right\rangle = \frac{E_v^2}{4E} + \frac{G_u^2}{4G} \\ \langle (X_{uu})^T, (X_{vv})^T \rangle &= \left\langle \frac{E_u}{2E} X_u - \frac{E_v}{2G} X_v, -\frac{G_u}{2E} X_u + \frac{G_v}{2G} X_v \right\rangle = -\frac{E_u G_u}{4E} - \frac{E_v G_v}{4G} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v \right] \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{G_{uu}\sqrt{EG} - G_u \frac{E_u G + EG_u}{2\sqrt{EG}} + E_{vv}\sqrt{EG} - E_v \frac{E_v G + EG_v}{2\sqrt{EG}}}{EG} \right) \\
&= -\frac{1}{4EG} \left(\frac{2G_{uu}EG - G_u(E_u G + EG_u) + 2E_{vv}EG - E_v(E_v G + EG_v)}{EG} \right) \\
&= -\frac{1}{4EG} \left(2(E_{vv} + G_{uu}) - \frac{G_u E_u}{E} - \frac{G_u^2}{G} - \frac{E_v^2}{E} - \frac{E_v G_v}{G} \right) \\
&= \frac{1}{EG} \left(-\frac{1}{2}(E_{vv} + G_{uu}) + \frac{E_v^2}{4E} + \frac{G_u^2}{4G} + \frac{E_u G_u}{4E} + \frac{E_v G_v}{4G} \right) \\
&= \frac{1}{EG} \left(-\frac{1}{2}(E_{vv} + G_{uu}) + |(X_{uv})^T|^2 - \langle (X_{uu})^T, (X_{vv})^T \rangle \right) = \frac{1}{EG} (K_\Sigma \circ X) EG = K_\Sigma \circ X
\end{aligned}$$

Problema 3

a) Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \Sigma$ una curva continua. Definimos el conjunto

$$A := \{c \in [a, b] : \text{Existe } N_c : [a, c] \rightarrow \mathbb{S}^2 \text{ continua, } N_c(a) = n \text{ y } N_c(t) \in (T_{\gamma(t)}\Sigma)^\perp\}$$

Notemos que A es no vacío, en efecto, $a \in A$ tomando $N_a(a) = n$ y es continua por ser constante.

Afirmamos que A es abierto, sea $c \in A$. Existe $N_c : [a, c] \rightarrow \mathbb{S}^2$ continua tal que $N_c(a) = n$ y $N_c(t) \in (T_{\gamma(t)}\Sigma)^\perp$. Sea (\mathcal{U}, X) una carta de $\gamma(c)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) =: V \subseteq \gamma^{-1}(X(\mathcal{U}))$. Dado $0 < \delta < \varepsilon$ definimos $N_\delta^x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{S}^2$ como sigue

$$N_\delta^x(u, v) := \pm \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v)$$

escogemos el signo tal que $N_\delta^x(X^{-1}(\gamma(c))) = N_c(c)$. Definimos $N_\delta : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{S}^2$ como

$$N_\delta(t) := \begin{cases} N_c(t) & \text{si } t \in [a, c] \\ (N_\delta^x \circ X^{-1} \circ \gamma)(t) & \text{si } t \in [c, c + \delta] \end{cases}$$

Por lema del pegamiento N_δ es una función continua, ya que $N_\delta^x(X^{-1}(\gamma(c))) = N_c(c)$. Además, por construcción, cumple las hipótesis necesarias, luego $[a, c + \varepsilon) \subset A$.

Veamos que A es cerrado. Sea $(c_n)_n \subseteq A$ tal que c_n converge a $c \in [a, b]$. Sea (\mathcal{U}, X) una carta de $\gamma(c)$, por continuidad, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma([c_n, c]) \in X(\mathcal{U})$.

Definimos N_c^x del mismo modo que antes tal que $N_c^x(c_n) = N_{c_n}(c_n)$. Se define $N_c : [a, c] \rightarrow \mathbb{S}^2$ por

$$N_c(t) := \begin{cases} N_{c_n}(t) & \text{si } t \in [a, c_n] \\ (N_c^x \circ X^{-1} \circ \gamma)(t) & \text{si } t \in [c_n, c] \end{cases}$$

Al igual que antes, esta función es continua, por lema de pegamientos y cumple con las hipótesis necesarias por construcción y por lo tanto $c \in A$. Así, $A \subseteq [a, b]$ es clopen y por lo tanto $A = [a, b]$.

Veamos que la función N_γ es única, supongamos que existe N' que satisface las mismas condiciones, luego $(N_\gamma - N')^{-1}(0)$ y $(N_\gamma + N')^{-1}(0)$ son cerrados disjuntos que separan $[a, b]$, pues $N_\gamma(t) = \pm N'(t)$. Como $N_\gamma(a) = N'(a)$, por conexidad, se sigue que $N_\gamma(t) = N'(t)$ para todo $t \in [a, b]$ lo que prueba la unicidad.

b) Supongamos que Σ es orientable, entonces existe un campo normal unitario continuo $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \Sigma$ una curva continua y cerrada. Por la parte anterior existe una única función continua $N_\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que

$$N(\gamma(a)) = N_\gamma(a) \quad \text{y} \quad N_\gamma(t) \in (T_{\gamma(t)}\Sigma)^\perp$$

Consideremos la función continua $N \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^2$. Notemos que $N \circ \gamma$ cumple las mismas propiedades que N_γ por definición de N , luego, por unicidad se sigue que

$$N_\gamma(a) = N(\gamma(a)) = N(\gamma(b)) = N_\gamma(b)$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que Σ es conexa, en caso contrario basta ver el resultado para cada componente conexa. Supongamos que para toda curva γ continua y cerrada se cumple que $N_\gamma(a) = N_\gamma(b)$.

Sea $q \in \Sigma$ consideremos su vector normal n unitario, definimos $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ como sigue

$$N(p) := N_\gamma(1)$$

donde $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ es una curva continua tal que $\gamma(0) = q$ y $\gamma(1) = p$, además $N_\gamma(0) = n$ para toda curva γ . Veamos que N esta bien definida, es decir, es independiente de la curva representante. Sean γ, γ_0 como antes, definimos la curva

$$\alpha(t) := \begin{cases} \gamma(1-2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_0(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

y su campo normal $N_\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$ como

$$N_\alpha(t) := \begin{cases} N_\gamma(1-2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ N_{\gamma_0}(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

es continuo pues $N_\gamma(0) = N_{\gamma_0}(0)$ y es única tal que $N_\alpha(0) = N_\gamma(1)$, luego como α es cerrada

$$N_\gamma(1) = N_\alpha(0) = N_\alpha(1) = N_{\gamma_0}(1)$$

Veamos que N es continua. Sea $p_0 \in \Sigma$, sea γ un camino que une q con p_0 , entonces por continuidad de N_γ se sigue que $\lim_{t \rightarrow 1} N(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 1} N_\gamma(t) = N_{\gamma(1)} = N(p_0)$. Como lo anterior es independiente del camino, concluimos que

$$\lim_{p \rightarrow p_0} N(p) = N(p_0)$$

Problema 4

Si $p \in S_r$, es claro que $\Phi(p) = \phi(p)$. Veamos que $\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ es invertible, como ϕ es isometría, en particular es invertible, definimos $\psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ como sigue

$$\psi(p) := \frac{|p|}{r} \phi^{-1} \left(\frac{p}{|p|} r \right)$$

luego como $|\phi| = r$,

$$\begin{aligned} \Phi \circ \psi(p) &= \Phi(\psi(p)) = \Phi \left(\frac{|p|}{r} \phi^{-1} \left(\frac{p}{|p|} r \right) \right) = \frac{\left| \frac{|p|}{r} \phi^{-1} \left(\frac{p}{|p|} r \right) \right|}{r} \phi \left(\frac{\frac{|p|}{r} \phi^{-1} \left(\frac{p}{|p|} r \right)}{\left| \frac{|p|}{r} \phi^{-1} \left(\frac{p}{|p|} r \right) \right|} r \right) \\ &= \frac{|p|}{r} \phi \left(\phi^{-1} \left(\frac{p}{|p|} r \right) \right) = p \end{aligned}$$

del mismo modo se sigue que $\psi \circ \Phi(p) = p$. Veamos que $D\Phi_p$ es isometría lineal y por ende un isomorfismo lineal. Sea $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ y sea $w \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\begin{aligned} D\Phi_p w &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi(p+tw) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\frac{|p+tw|}{r} \phi \left(r \frac{p+tw}{|p+tw|} \right) \right) \\ &= \left(\frac{\langle p+tw, w \rangle}{r |p+tw|} \phi \left(r \frac{p+tw}{|p+tw|} \right) + \frac{|p+tw|}{r} D\phi_{\frac{p}{|p|} r} \left(r \frac{w |p+tw| - (p+tw) \frac{\langle p+tw, w \rangle}{|p+tw|}}{|p+tw|^2} \right) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\langle p, w \rangle}{r |p|} \phi \left(r \frac{p}{|p|} \right) + |p| D\phi_{\frac{p}{|p|} r} \left(\frac{w}{|p|} - \frac{p \langle p, w \rangle}{|p|^3} \right) \end{aligned}$$

notemos que

$$\begin{aligned} |D\Phi_p w|^2 &= \left| \frac{\langle p, w \rangle}{r|p|} \phi \left(r \frac{p}{|p|} \right) + |p| D\phi_{\frac{p}{|p|}r} \left(\frac{w}{|p|} - \frac{p \langle p, w \rangle}{|p|^3} \right) \right|^2 \\ &= \frac{\langle p, w \rangle^2}{|p|^2} + \left| w - p \frac{\langle p, w \rangle}{|p|^2} \right|^2 = \frac{\langle p, w \rangle^2}{|p|^2} + |w|^2 - 2 \frac{\langle p, w \rangle^2}{|p|^2} + \frac{\langle p, w \rangle^2}{|p|^2} = |w|^2 \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se debe a que dado $v \in S_r$ se tiene que $\langle D\phi_v w, v \rangle = 0$, además usamos el hecho de que $D\phi_v$ es isometría lineal. Por teorema de la función inversa se sigue que Φ es difeomorfismo local y como es biyectiva es difeomorfismo, así por ejercicio visto en clase existe un único movimiento rígido $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\Phi = F|_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}$.

Notemos que $F(S_r) = \Phi(S_r) = \phi(S_r) = S_r$ y por lo tanto F es una isometría lineal de \mathbb{R}^3 y $\phi = \Phi|_{S_r} = F|_{S_r}$. Por otro lado por un ejemplo visto en clase, dada una isometría lineal F tenemos que $F(S_r) = S_r$ lo que implica que $\phi := F|_{S_r}$ es un difeomorfismo y $D\phi_p$ es isometría lineal.

Por último, queda ver que esta correspondencia es, de hecho, un morfismo de grupos. Sean ϕ, ψ isometrías de S_r y F, G sus correspondientes isometrías lineales de \mathbb{R}^3 , es claro que $F \circ G$ es isometría y dado $p \in S_r$ notamos que $(F \circ G)(p) = F(G(p)) = F(\psi(p)) = \phi(\psi(p))$, por unicidad, $F \circ G$ es la isometría que corresponde a $\phi \circ \psi$. Concluimos que $Isom(S_r)$ es isomorfo al grupo de isometrías lineales de \mathbb{R}^3 .

Problema 5

a) Consideramos la parametrización $X : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) := ((R + r \cos(u)) \cos(v), (R + r \cos(u)) \sin(v), r \sin(u))$$

calculamos sus derivadas parciales para encontrar los coeficientes de la primera forma fundamental

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = (R + r \cos(u)) r \sin(u) \cos(v) \sin(v) - (R + r \cos(u)) r \sin(u) \cos(v) \sin(v) = 0$$

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = r^2 \sin^2(u) \cos^2(v) + r^2 \sin^2(u) \sin^2(v) + r^2 \cos^2(u) = r^2 \sin^2(u) + r^2 \cos^2(u) = r^2$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = (R + r \cos(u))^2 \sin^2(v) + (R + r \cos(u))^2 \cos^2(v) = (R + r \cos(u))^2$$

Como $F \equiv 0$, la parametrización es ortogonal y por el problema 2 tenemos que

$$(K_\Sigma \circ X) \sqrt{EG} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v \right]$$

donde $E_v \equiv 0$, pues E es constante, además $\sqrt{EG} = (R + r \cos(u))r$ y $G_u = -2(R + r \cos(u))r \sin(u)$, luego

$$\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u = \left(\frac{-2(R + r \cos(u))r \sin(u)}{(R + r \cos(u))r} \right)_u = (-2 \sin(u))_u = -2 \cos(u)$$

Utilizando lo anterior, vemos que

$$(K_\Sigma \circ X) \sqrt{EG} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v \right] = -\frac{1}{2} (-2 \cos(u) + 0) = \cos(u)$$

b) Así

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (K_\Sigma \circ X) \sqrt{EG} \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(u) \, du \, dv = 0$$

Colaboradores: Felipe Inostroza, Sergio Peña, Ricardo Larraín.