Estructura de grupo topológico en $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$

Queremos definir una operación binaria en $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ que es multiplicativa con la norma, para ello buscamos definir un producto en $\mathbb{R}^4$, un análogo a la multiplicación compleja en $\mathbb{R}^2$. Dado $x \in \mathbb{R}^4$ lo denotamos por $x = (a, u)$ donde $a \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{R}^3$. Sean $(a, u), (b, v) \in \mathbb{R}^4$, definimos

$$(a, u)(b, v) := (a, u) \cdot (b, v) := (ab - \langle u, v \rangle, av + bu + u \times v)$$

En primer lugar, demostramos la identidad $(\lambda(a, u))(\mu(b, v)) = \lambda\mu((a, u)(b, v))$. En efecto,

$$\begin{aligned}(\lambda(a, u))(\mu(b, v)) &= (\lambda a\mu b - \langle \lambda u, \mu v \rangle, \lambda a\mu v + \mu b\lambda u + (\lambda u) \times (\mu v)) \\ &= \lambda\mu((a, u)(b, v))\end{aligned}$$

Por otro lado, en busca de nuestro objetivo, notemos que

$$\begin{aligned}\|(a, u)(b, v)\|^2 &= \|(ab - \langle u, v \rangle, av + bu + u \times v)\|^2 \\ &= a^2b^2 - 2ab\langle u, v \rangle + \langle u, v \rangle^2 + a^2\|v\|^2 + b^2\|u\|^2 + 2ab\langle u, v \rangle + \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2 \\ &= (a^2 + \|u\|^2)(b^2 + \|v\|^2) = \|(a, u)\|^2\|(b, v)\|^2\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}((a, u) + (b, v))(c, w) &= (a + b, u + v)(c, w) = ((a + b)c - \langle u + v, w \rangle, (a + b)w + c(u + v) + (u + v) \times w) \\ &= (a, u)(c, w) + (b, v)(c, w)\end{aligned}$$

Donde la ultima igualdad se obtiene de que el producto cruz distribuye sobre la suma. Similarmente se tiene para $(c, w)((a, u) + (b, v)) = (c, w)(a, u) + (c, w)(b, v)$. Ahora que tenemos las propiedades deseadas veamos que con esta operación $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ forma un grupo. Afirmamos que el elemento neutro es el $(1, 0)$. Sea $(a, u) \in \mathbb{R}^4$, entonces

$$(a, u)(1, 0) = (a - \langle u, 0 \rangle, a0 + u + u \times 0) = (a, u)$$

del mismo modo se tiene que $(1, 0)(a, u) = (a, u)$. El inverso viene dado por $\frac{1}{\|(a,u)\|^2}(a, -u)$, por lo mencionado anteriormente vemos que

$$(a, u)\frac{(a, -u)}{\|(a, u)\|^2} = \frac{1}{\|(a, u)\|^2}(a, u)(a, -u) = \frac{1}{\|(a, u)\|^2}(\|(a, u)\|^2, -au + au - u \times u) = (1, 0)$$

analogamente se tiene la otra igualdad. Resta ver la asociatividad, sean $(b, v), (c, w) \in \mathbb{R}^4$, luego

$$\begin{aligned}((a, u)(b, v))(c, w) &= (ab - \langle u, v \rangle, av + bu + u \times v)(c, w) \\ &= ((ab - \langle u, v \rangle)c - \langle (av + bu + u \times v), w \rangle, \\ &\quad (ab - \langle u, v \rangle)w + c(av + bu + u \times v) + (av + bu + u \times v) \times w)\end{aligned}$$

Usando la anticonmutatividad del producto cruz y la identidad $A \times (B \times C) = B\langle A, C \rangle - C\langle A, B \rangle$ vemos que

$$(u \times v) \times w = -w \times (u \times v) = -u\langle w, v \rangle + v\langle w, u \rangle$$

entonces $v\langle u,w\rangle - w\langle u,v\rangle = u\times(v\times w)$, usando la alternancia del determinante resulta que $\langle w, u\times v\rangle = \langle u, v\times w\rangle$ y dado que el producto cruz distribuye sobre la suma se sigue que

$$\begin{aligned}((a,u)(b,v))(c,w) &= (a(bc - \langle v,w\rangle) - \langle u, cv + bw + v\times w\rangle\,, \\ &\qquad (bc - \langle v,w\rangle)u + a(bw + cv + v\times w) + u\times(bw + cv + v\times w)) \\ &= (a,u)((b,v)(c,w))\end{aligned}$$

Con la topología usual de $\mathbb{R}^4$ probaremos que esta operación le da estructura de grupo topológico a $\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$. Como este último, en particular es espacio métrico inducido por la norma euclideana, dotamos al espacio $\mathbb{R}^4\setminus\{0\}\times\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$ de la métrica del máximo. Sea τ_{max} la topología inducida por esta métrica, adicionalmente, consideramos τ_{prod} la topología producto inducida por el espacio topológico $\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$. Probaremos que estas topologías son iguales.

Sea $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^4\setminus\{0\}\times\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$ y $r, r'\in\mathbb{R}^+$. En primer lugar, afirmamos que $B_r(x_0,y_0) = B_r(x_0)\times B_r(y_0)$ según las métricas correspondientes. En efecto, se tiene que $(x,y)\in B_r(x_0,y_0)$ si y solo si $\|x_0 - x\| < r$ y $\|y_0 - y\| < r$ o equivalentemente $(x,y)\in B_r(x_0)\times B_r(y_0)$. Lo anterior implica que $\tau_{max}\subseteq\tau_{prod}$. Por otro lado, consideramos el abierto básico de τ_{prod} dado por $B_r(x_0)\times B_{r'}(y_0)$ veamos que es abierto según τ_{max}, sea $(x,y)\in B_r(x_0)\times B_{r'}(y_0)$, existe $d\in\mathbb{R}^+$ tal que

$$B_d(x)\subseteq B_r(x_0)\quad \text{y además}\quad B_d(y)\subseteq B_{r'}(y_0)$$

de este modo $B_d(x,y)\subseteq B_r(x_0)\times B_{r'}(y_0)$. Concluimos que $\tau_{max} = \tau_{prod}$.

Sean $(x_0,y_0),(x,y)\in\mathbb{R}^4\setminus\{0\}\times\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$. Notemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\|(a_0,u_0)(b_0,v_0) - (a,u)(b,v)\| &= \|(a_0,u_0)(b_0,v_0) + (a_0,u_0)(b,v) - (a_0,u_0)(b,v) - (a,u)(b,v)\| \\ &\le \|(a_0,u_0)\|\cdot\|(b_0,v_0) - (b,v)\| + \|(b,v)\|\cdot\|(a_0,u_0) - (a,u)\|\end{aligned}$$

así, tomando

$$\delta := \text{mín}\left\{\frac{\varepsilon}{2\,\|(a_0,u_0)\|}, \frac{\varepsilon}{2(\|(b_0,v_0)\| + 1)}, 1\right\}$$

se tiene la continuidad de la función $m : \mathbb{R}^4\setminus\{0\}\times\mathbb{R}^4\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$ dada por $m(x,y) := xy$. Por otro lado, como la proyección es continua, la norma también y esta no se anula en $\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$ entonces la función $\varphi : \mathbb{R}^4\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$ dada por $\varphi(x) := x^{-1}$ es continua. Usando la propiedad universal de la topología de subespacio y que el producto es multiplicativo con la norma, concluimos que $\mathbb{S}^3$ es grupo topológico.

Como $(\lambda x)(\mu y) = \lambda\mu xy$ para $\lambda,\mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, usando la propiedad universal de la topología cociente se tiene que $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ es también grupo topológico.