Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Pedro Gaspar – Estudiante: Benjamín Mateluna

Geometría Diferencial - MAT2860
Apuntes
06 de Marzo de 2025

Índice

Introducción

Habrán tres interrogaciones (I1, I2, I3) cada una vale un 25 % y un examen (EX) que vale un 25 %. Las fechas son 14 de abril, 19 de Mayo, 16 de Junio y 3 de Julio respectivamente.

1. Curvas en $\mathbb{R}^n$

1.1. Curvas parametrizadas

Consideramos $\mathbb{R}^n := \{v = (v_1, \cdots, v_n) : v_i \in \mathbb{R}\}$. Un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n, con el producto escalar dado por

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \quad \text{con } v, w \in \mathbb{R}^n$$

Definición 0.1. *Una curva parametrizada en $\mathbb{R}^n$ es una función continua $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con I un intervalo abierto. Escribimos $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \cdots, \alpha_n(t))$.*

Diremos que α es diferenciable si sus funciones coordenadas $\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty$. En tal caso, el vector $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \cdots, \alpha_n'(t))$ se llama vector tangente a la curva α en $t \in I$

Definición 0.2. *La traza de una curva parametrizada $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es $\alpha(I) = im(\alpha)$.*

Ejemplos

a) Si $p, v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$, la curva parametrizada $\alpha(t) = tv + p$ con $t \in \mathbb{R}$ que describe una recta que pasa por $p = \alpha(0)$ con vector tangente $\alpha'(t) = v$.

b) Sea $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $b(t) := t^3 \cdot \overrightarrow{e}_1$ es una curva parametrizada diferenciable con $\beta'(t) = 3t^2 \cdot \overrightarrow{e}_1$.

c) Sea $p \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$ consideramos $\alpha(t) = (rcos(t), rsen(t)) + p$, una curva parametrizada diferenciable cuya traza es $\alpha(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y)|\, p = r\}$

d) Sean $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (acos(t), asen(t), bt)$ con $t \in \mathbb{R}$ se llama una helice circular. Además $\alpha'(t) = (-asen(t), acos(t), b)$.

e) Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ es una curva parametrizada diferenciable con $\alpha(-2) = \alpha(2) = 0$, pero $\alpha'(-2) \neq \alpha(2)$.

1.2. Longitud y Parametro de Arco

Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada, consideremos $[a, b] \subseteq I$. Buscamos medir la longitud de $\alpha([a, b])$. Una estrategia, dada una partición $P := \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ de $[a, b]$ calculamos

$$\sum_{i=1}^{k} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| =: L_a^b(\alpha, P)$$

esta suma corresponde a la longitud de una curva poligonal que pasa por los puntos $\alpha(t_i)$. Si $Q \supseteq P$ es otra partición de $[s, b]$, entonces $L_a^b(\alpha, Q) \geq L_a^b(\alpha, P)$.

Definición 0.3. *La longitud de una curva parametrizada α sobre $[a, b] \subseteq I$ es*

$$L_a^b(\alpha) = sup\{L_a^b(\alpha, P) : P \text{ es partición de } [a, b]\}.$$

Si α es diferenciable sobre $[a, b]$ y hacemos $|P| = max\{t_i - t_{i-1}\}$ muy pequeña, esperariamos que $|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| \approx \left|\alpha'(\overline{t_i})\right| (t_i - t_{i-1})$.

Proposición 0.1. *Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable sobre $[a, b] \subseteq I$, entonces*

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt$$

(Para la demostración revisar Montiel-Ros, página 5)

Corolario 0.1. *Tenemos que $|\alpha(a) - \alpha(b)| \leq L_a^b(\alpha)$.*

Corolario 0.2. *Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cumple $|DF(p)v| = |v|$ para todo $p, v \in \mathbb{R}^n$, entonces $L_a^b(F \circ \alpha) = L_a^b(\alpha)$.*

De hecho, $F \circ \alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable, con

$$|(F \circ \alpha)'(t)| = |DF(\alpha(t))\alpha'(t)| = |\alpha'(t)|$$

para todo $t \in I$, basta con integrar sobre $[a,b]$. Si $p_0 \in \mathbb{R}^n$ y $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal ortogonal , esto es, $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$, entonces $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(p) = Ap + p_0$ cumple

$$DF(p)v = \frac{d}{dt}F(p+tv)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(A(p+tv)+p_0)\big|_{t=0} = Av$$

Por lo tanto $|DF(p)v| = |Av| = |v|$.

Corolario 0.3. *Si $h : J \subseteq \mathbb{R} \to I \subseteq \mathbb{R}$ es un difeomorfismo y $\alpha : I \to \mathbb{R}$ es una curva parametrizada diferenciable, entonces*

$$L_a^b(\alpha \circ h) = L_c^d(\alpha)$$

donde $h([a,b]) = [c,d]$ para todo $[a,b] \subseteq J$.

Por regla de la cadena tenemos que $(\alpha \circ h')(t) = h'(t)\alpha'(h(t))$. La curva $\alpha \circ h$ tiene la misma traza que α, en efecto $(\alpha \circ h)(J) = \alpha(h(J)) = \alpha(I)$. Decimos que $\alpha \circ h$ es una reparametrización de la curva *alpha*.

Demostración. *Como h y h^{-1} son diferenciables, se tiene que $h'(t) \neq 0$ para todo $t \in J$. Veamos que*

$$1 = \frac{d}{dt}(t) = (h^{-1} \circ h)'(t) = (h^{-1})'(h(t))h'(t)$$

Luego como J es un intervalo y h' es continua, tenemos que $h' < 0$ o $h > 0$.

- *Si $h' < 0$, entonces $h(a) = c$, $h(b) = d$,*

$$\int_a^b |(\alpha \circ h)'(t)|\,dt = \int_a^b |\alpha'(h(t))|\,|h'(t)|\,dt = \int_c^d |\alpha'(s)|\,ds = L_c^d(\alpha)$$

- *Si $h' > 0$, entonces $h(b) = c$, $h(a) = d$,*

$$\int_a^b |(\alpha \circ h)'(t)|\,dt = \int_a^b |\alpha'(h(t))|\,|h'(t)|\,dt = \int_d^c -|\alpha'(s)|\,ds = \int_c^d |\alpha'(s)|\,ds = L_c^d(\alpha)$$

Definición 0.4. *Se dice que una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Si además $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$ se dice que α esta parametrizada por el arco.*

Una curva α parametrizada por el arco tiene las siguientes propiedades

- $\alpha'(t)$ es ortogonal a $\alpha''(t)$ para todo $t \in I$, en efecto

$$0 = \frac{d}{dt}(|\alpha'(t)|^2) = \frac{d}{dt}(\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle) = 2\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle$$

- Se tiene que $L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\,dt = b - a$.

Teorema 1. *Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable regular, entonces α admite una parametrización por arco. Concretamente , si $t_0 \in I$ y definimos $s : I \to \mathbb{R}$ por*

$$s(t) := \int_{t_0}^t |\alpha'(t)|\,dt$$

entonces s es un difeomorfismo sobre $J \subseteq \mathbb{R}$ y $\alpha \circ s^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ esta parametrizada por el arco.

Demostración. *Por TFC, sabemos que s es diferenciable, mas aun, $s'(t) = |\alpha'(t)|$ para todo $t \in I$. Luego, $s' > 0$, es decir, s es creciente y $s(I) = J$ es un intervalo abierto. Además, por teorema de la función inversa,* *vemos que*

$$(s^{-1})'(r) = \frac{1}{s'(s^{-1}(r))} = \frac{1}{|\alpha'(s^{-1}(r))|} \quad \forall r \in J$$

Por lo tanto $\left|(\alpha \circ s^{-1})'(r)\right| = 1$ *para todo* $r \in J$*, luego* $\alpha \circ s^{-1}$ *esta parametrizada por el arco.*

Ejemplos

a) Sea $\alpha(t) = tv + p_0$ con $p_0, v \in \mathbb{R}^n$ y $v \neq 0$. Como $\alpha'(t) = v$, tenemos

$$s(t) = \int_0^t |v|\, dx = t\, |v|$$

entonces $\alpha \circ s^{-1}(x) = x \cdot \frac{v}{|v|} + p_0$ es una parametrización por el arco de α.

b) Consideremos $\alpha(t) = (rcost, rsent) + p_0$ con $p_0 \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$. Como $\alpha'(t) = (-rsent, rcost)$ entonces $|\alpha'(t)| = r$, tenemos que

$$s(t) = \int_0^t r dx = rt$$

y $(\alpha \circ s^{-1})(x) = (rcos(\frac{x}{r}), rsen(\frac{x}{r})) + p_0$ es una curva parametrizada por el arco para α.

c) Definimos $\alpha(t) = (acost, asent, bt)$ con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ una curva parametrizada por el arco es

$$(\alpha \circ s^{-1})(x) = \left(acos\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), asen\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

1.3. Curvatura de una Curva Regular (Teoría Local de Curvas)

Notación: Notamos por $\mathcal{J}$ a la función $\mathcal{J} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathcal{J}(x, y) = (-y, x)$ que cumple lo siguientes

- $\mathcal{J}$ es una transformación lineal ortogonal.
- $\langle u, \mathcal{J}u, =\rangle\, 0$ y $\mathcal{J}(\mathcal{J}u) = -u$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$.
- Si $|u| = 1$, entonces $\{u, \mathcal{J}u\}$ es una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^2$.
- Si $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal ortogonal, entonces $\mathcal{J}A = det(A)A\mathcal{J}$.

Nuestro objetivo es asociar a una curva parametrizada regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una cantidad geometrica, para ello queremos definir una función $K (= K_\alpha) : I \to \mathbb{R}$ tal que

a) K es invariante bajo movimientos rigidos.

b) K es invariante por parametrizaciones.

c) $K \equiv 0$ si y solo si α corresponde a un segmento de recta.

Si tenemos $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por el arco, definimos la función $T : I \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(s) := \alpha'(s)$ y $N : I \to \mathbb{R}^2$ como $N(s) := \mathcal{J}T(s)$. Recordemos que $\{T(s), N(s)\}$ es una base ortonormal en $\mathbb{R}^n$ para cada $s \in I$ (Diedro de Frenet).

Notemos que $N(s) \perp T(s)$ y $T'(s) \perp T(s)$, luego, existe un $k(s) \in \mathbb{R}$ tal que $T'(s) = K(s)N(s)$. La función $K_\alpha = K : I \to \mathbb{R}$ se llama la curva de α. Tomando el producto con $N(s)$,

$$K(s) = \langle K(s)N(s), N(s)\rangle$$

Por lo tanto $K(s) = \langle T'(s), N(s)\rangle$. Por otro lado, observemos que

$$N'(s) = \frac{d}{ds}\left(\mathcal{J}T(s)\right) = \mathcal{J}\frac{d}{ds}(T(s)) = \mathcal{J}(K(s)N(s)) = \mathcal{J}(K(s)\mathcal{J}T(s)) = -K(s)T(s)$$

Proposición 1.1. *Para una curva parametrizada por el arco $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ vale que $T' = KN$ y $N' = -KT$.*

Ejemplos:

a) Una recta parametrizada por el arco $\alpha(s) := s \cdot \frac{v}{|v|} + p_0$ con $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, tenemos que

$$T(s) = \frac{v}{|v|} \ , \ N(s) = \frac{\mathcal{J}v}{|v|} = \frac{\mathcal{J}v}{|\mathcal{J}v|} \text{ y } K(s) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

b) Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ esta parametrizada y $K \equiv 0$, entonces $T'(s) = 0$ para todo $s \in I$, es decir, $\alpha''(s) = 0$ para todo $s \in I$. Integrando dos veces concluimos que cada coordenada de α es una función lineal, luego α es un segmento de recta.

c) Sea $\alpha(s) := \left(rcos\left(\frac{s}{r}\right), rsen\left(\frac{s}{r}\right)\right) + p_0$, entonces

$$T(s) = \left(-sen\left(\frac{s}{r}\right), cos\left(\frac{s}{r}\right)\right) \text{ y } N(s) = \left(-cos\left(\frac{s}{r}\right), -sen\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

Notemos que

$$T'(s) = \left(-\frac{1}{r}cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r}sen\left(\frac{s}{r}\right)\right) = \frac{1}{r}N(s)$$

Por lo tanto $K(s) = \frac{1}{r}\langle N(s), N(s)\rangle = \frac{1}{r}$.

Consideremos ahora una curva regular $\beta : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^2$ y una reparametrización $\alpha = \beta \circ h : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada por el arco, donde $h : I \to \widetilde{I}$ es un difeomorfismo con $h' > 0$. Con esto

$$|\beta'(t)| = \left|(\beta \circ h \circ h^{-1})'(t)\right| = \left|(\alpha \circ h^{-1})'(t)\right| = (h^{-1})'(t)$$

Así, definimos el diedro de Frenet de la curva α por

$$T_\beta(t) := \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = \frac{(\alpha \circ h^{-1})'(t)}{|(\alpha \circ h^{-1})'(t)|} = \frac{\alpha'(h^{-1}(t))h^{-1}(t)}{|\alpha'(h^{-1}(t))h^{-1}(t)|} = T_\alpha(h^{-1}(t))$$

Por otro lado

$$N_\beta = \mathcal{J}T_\beta(t) = \mathcal{J}T_\alpha(h^{-1}(t)) = N_\alpha(h^{-1}(t))$$

y definimos la curvatura de la curva β por

$$K_\beta(t) := K_\alpha(h^{-1}(t)) \ , \ t \in \widetilde{I}$$

Como $\beta'(t) = |\beta'(t)|\, T_\alpha(h^{-1}(t))$ se tiene que

$$\beta'' = (|\beta'|)'T_\alpha \circ h^{-1} + |\beta'|^2 \left(T'_\alpha \circ h^{-1}\right)$$

y además $N_\alpha \circ h^{-1} = \mathcal{J}T_\beta = \frac{\mathcal{J}\beta'}{|\beta'|}$ se sigue que

$$\frac{\langle \beta'', \mathcal{J}\beta'\rangle}{|\beta'|} = \left\langle (|\beta'|)'T_\alpha \circ h^{-1} + |\beta'|^2 \left(T'_\alpha \circ h^{-1}\right), N_\alpha \circ h^{-1}\right\rangle = |\beta'|^2 \left\langle T'_\alpha \circ h^{-1}, N_\alpha \circ h^{-1}\right\rangle = |\beta'|^2 K_\alpha \circ h^{-1}$$

Concluimos que $K_\beta = \frac{\langle \beta'', \mathcal{J}\beta'\rangle}{|\beta'|^3}$.

Proposición 1.2. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular, entonces*

a) Si $\phi : \widetilde{I} \to I$ es un difeomorfismo entonces $K_{\alpha\circ\phi} = sgn(\phi')K_\alpha \circ \phi$.

b) Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un movimiento rigido, entonces $K_{F\circ\alpha} = (detDF)K_\alpha$.

Demostración. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular*

a) Como $(\alpha \circ \phi)'(t) = \phi'(t)\alpha'(\phi(t))$, se sigue que $|(\alpha \circ \phi)'(t)| = |\phi'(t)|\, |\alpha'(\phi(t))|$, escrito de otro modo

$$|(\alpha \circ \phi)| = sgn(\phi') \cdot \phi' \, |\alpha' \circ \phi|$$

Luego

$$\begin{aligned} K_{\alpha\circ\phi} &= \frac{\langle(\alpha\circ\phi)'', \mathcal{J}(\alpha\circ\phi)'\rangle}{|(\alpha\circ\phi)'|^3} = \frac{\left\langle \phi''(\alpha'\circ\phi) + (\phi')^2\alpha''\circ\phi, \phi'\mathcal{J}(\alpha'\circ\phi)\right\rangle}{sgn(\phi')(\phi')^3\,|\alpha'\circ\phi|^3} \\ &= \frac{(\phi')^3\,\langle\alpha''\circ\phi, \mathcal{J}\alpha'\circ\phi\rangle}{(\phi')^3\,|\alpha'\circ\phi|^3} sgn(\phi') = sgn(\phi')K_\alpha\circ\phi \end{aligned}$$

b) *Sabemos que* $F(p) = Ap + p_0$*, entonces* $DF = A$*. Luego,*

$$\begin{aligned} \langle(F\circ\alpha)'', \mathcal{J}(F\circ\alpha)'\rangle &= \langle(DF(\alpha)\alpha')', \mathcal{J}(DF(\alpha)\alpha')\rangle = \langle(A\alpha')', \mathcal{J}(A\alpha')\rangle \\ &= \langle A\alpha'', (detA)A\mathcal{J}\alpha'\rangle = detA\,\langle\alpha'', \mathcal{J}\alpha'\rangle \end{aligned}$$

Además $|(F\circ\alpha)'| = |A\alpha'| = |\alpha'|$*. Juntando lo anterior vemos que*

$$K_{F\circ\alpha} = \frac{\langle(F\circ\alpha)'', \mathcal{J}(F\circ\alpha)'\rangle}{|(F\circ\alpha)'|^3} = detA\cdot K_\alpha$$

Proposición 1.3. *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ *una curva parametrizada por el arco. Supongamos que existe una función diferenciable* $\theta : I \to \mathbb{R}$ *tal que* $T(s) = (cos(\theta(s)), sen(\theta(s)))$*. Entonces* $K_\alpha = \frac{d\theta}{ds}$*.*

Demostración. *Recordemos que*

$$K_\alpha = \langle T'_\alpha, \mathcal{J}T_\alpha\rangle = \left\langle\left(-\frac{d\theta}{ds}sen\theta, \frac{d\theta}{ds}cos\theta\right), (-sen\theta, cos\theta)\right\rangle = \frac{d\theta}{ds}\,|(-sen\theta, cos\theta)|^2 = \frac{d\theta}{ds}$$

Teorema 2. *Sea* $K : I \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable, entonces existe una unica curva parametrizada por el arco* $\alpha : I \to \mathbb{R}$*, salvo por movimientos rigidos, tal que* $K_\alpha = K$*.*

1.4. Teoría Local de Curvas en el Espacio

Definición 2.1. *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *parametrizada por el arco. La curvatura de* α *en* $s \in I$ *es*

$$K_\alpha := |T'(s)|$$

Observación: Para curvas en $\mathbb{R}^3$, $K_\alpha \geq 0$. Además, $K_\alpha \equiv 0$ si y solo si α es un segmento de recta.

Definición 2.2. *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva parametrizada por el arco, tal que* $K_\alpha > 0$*. Definimos*

$$N(s) := \frac{T'(s)}{|T'(s)|}$$

Observación: Como $T(s) \perp T'(s)$, pues $|T| = 1$, está definición se condice con el caso en $\mathbb{R}^2$, además de manera directa, obtenemos que $K_\alpha N(s) = T(s)$.

Definición 2.3. *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *parametrizada por el arco. Definimos el vector binormal de* α *en* $s \in I$ *por*

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

Observación: Por definición del producto cruz el conjunto $\{T, N, B\}$ es una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$ para todo $s \in I$ llamada el tiedro de Frenet de α en $s \in I$.

Notemos que $B'(s) = \frac{d}{ds}(T(s)\times N(s)) = T'(s)\times N(s) + T(s)\times N'(s) = T(s)\times N'(s)$. Además, $|B| = |T|\,|N| = 1$ y por lo tanto $B' \perp B$, por otro lado $\langle B', T\rangle = \langle T\times N', T\rangle = 0$, osea $B' \perp T$. Por lo tanto, existe $\tau(s) \in I$ tal quiero

$$B'(s) = \tau(s)N(s)$$

Se dice que $\tau(s) =: \tau_\alpha(s)$ es la torsión de α en $s \in I$. Finalmente, como $N' \perp N$, tenemos que

$$N'(s) = aT(s) + bB(s)$$

donde

$$\begin{aligned} a\langle T, T\rangle &= \langle N', T\rangle = \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle - \langle N, T'\rangle \\ &= \frac{d}{ds}\langle N, T\rangle - \langle N, T'\rangle = -\langle N, KN\rangle = -K \end{aligned}$$

y similarmente obtenemos que $b = \langle N', B\rangle = -\tau(s)$.

Proposición 2.1. *Ecuaciones de Frenet-Serret*

- $T'(s) = K(s)N(s)$
- $N'(s) = -K(s)T(s) - \tau(s)B(s)$
- $B'(s) = \tau(s)N(s)$

Ejemplos:

a) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco. Supongamos que $\alpha(I) \subseteq P$ con P un plano. Podemos describir el plano con la ecuación $\langle x - p_0, u\rangle = 0$, donde $p_0, u \in \mathbb{R}^3$ con u unitario y perpendicular al plano. Entonces $\langle \alpha(s) - p_0, u\rangle = 0$ para todo $s \in I$, derivando vemos que

$$\langle \alpha'(s), u\rangle = \langle T(s), u\rangle = 0 \quad \forall s \in I$$

En ese caso, $K(s)$ es el valor absoluto de la curvatura de α como una curva plana. Supongamos que $K(s) > 0$ para todo $s \in I$. Entonces

$$0 = \frac{d}{ds} = \langle T, u\rangle = \langle T', u\rangle = K(s)\langle N, u\rangle$$

lo que implica que $N \perp u$ para todo $s \in I$. Luego, $B(s) = \pm u$ para todo $s \in I$, se sigue que $\tau(s) = \langle B', N\rangle = 0$.

b) Supongamos que α es una curva parametrizada por el arco tal que $\tau_\alpha \equiv 0$, entonces $B' = \tau \cdot N = 0$ para todo $s \in I$ y por lo tanto $B = u$, con $u \in \mathbb{R}^3$ y $|u| = 1$, así $T \times N = u$ para todo $s \in I$.

Ahora, usando las ecuaciones de frenet vemos que $T \perp u$ y $N \perp u$ para todo $s \in I$ y concluimos que

$$\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), u\rangle = \left\langle \int_{s_0}^{s} T(x)dx, u \right\rangle = \int_{s_0}^{s} \langle T(x), u\rangle\, dx = 0 \quad \forall s \in I$$

Proposición 2.2. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco, $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineal, ortogonal y positiva. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $F(p) = Ap + p_0$. Entonces*

$$\begin{aligned} &K_{F\circ\alpha} = K_\alpha \quad , \quad \tau_{F\circ\alpha} = \tau_\alpha \\ &T_{F\circ\alpha} = AT_\alpha \quad , \quad N_{F\circ\alpha} = AN_\alpha \quad , \quad B_{F\circ\alpha} = AB_\alpha \end{aligned}$$

Podemos extender las definiciones de curvatura, torsión y del tiedro de frenet para curvas regulares $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ por

$$K_\beta(t) := K_\alpha(h^{-1}(t))$$

donde $\alpha = \beta \circ h$ es una parametrización por el arco, con h difeomorfismo, $h' > 0$ y $K_\beta > 0$. Se cumple lo siguiente

- $T_\beta(t) = T_\alpha(h^{-1}(t))$
- $N_\beta(t) = N_\alpha(h^{-1}(t))$
- $B_\beta(t) = B_\alpha(h^{-1}(t))$

- $\tau_\beta(t) = \tau_\alpha(h^{-1}(t))$

Proposición 2.3. *Sea $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular, entonces*

a) $K_\beta = \dfrac{|\beta' \times \beta''|}{|\beta'|^3}$

b) $\tau_\beta = \dfrac{-det(\beta', \beta'', \beta''')}{|\beta' \times \beta''|^2} = -\dfrac{\langle \beta', \beta'' \times \beta''' \rangle}{|\beta' \times \beta''|^2}$

c) $T_\beta = \dfrac{\beta'}{|\beta'|}$

d) $B_\beta = \dfrac{\beta' \times \beta''}{|\beta' \times \beta''|}$

e) $N_\beta = \dfrac{|\beta'|^2 \beta'' - \langle \beta', \beta'' \rangle \beta'}{\left| |\beta'|^2 \beta'' - \langle \beta', \beta'' \rangle \beta' \right|}$

Teorema 3. *(Teorema Fundamental de las curvas en el Espacio)*
Sea $K, \tau : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables con $K(s) > 0$ para todo $s \in I$. Entonces existe $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco tal que

$$K_\alpha = K \quad y \quad \tau_\alpha = \tau$$

Además, si $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ es parametrizada por el arco tal que $K_\beta = K$ y $\tau_\beta = \tau$. Entonces existe un movimiento rigido $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F \circ \beta = \alpha$.

Demostración. *El sistema*

$$(FS) : \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad y \quad A(s) = \begin{pmatrix} 0 & K(s) & 0 \\ -K(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

para cada $\{T_0, N_0, B_0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ y $s_0 \in I$, existe una única solución del sistema, $\{T, N, B\}$, definida en I tal que $T(s_0) = T_0$, $N(s_0) = N_0$ y $B(s_0) = B_0$. Veamos que $\{T, N, B\}$ son ortonormales para cada $s \in I$. Sea $\{T_0, N_0, B_0\}$ una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$. Consideremos la función

$$M(s) = \begin{pmatrix} \langle T, T \rangle & \langle T, N \rangle & \langle T, B \rangle \\ \langle N, T \rangle & \langle N, N \rangle & \langle N, B \rangle \\ \langle B, T \rangle & \langle B, N \rangle & \langle B, B \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} M'(s) &= \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}'^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}' \\ &= A \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} A^T \\ &= AM - MA \end{aligned}$$

La matriz $M_0(s) = I_3$ con $s \in I$ es solución del sistema, además $M_0(s_0) = I_3 = M(s_0)$ (pues T_0, N_0, B_0 son ortonormales). Por unicidad de la solución $M(s) \equiv I_3$ para todo $s \in I$.

La matriz $(T\ N\ B)$ tiene determinante 1 o -1. Como I es conexo y el determinante una función continua, entonces es constante. Como vale 1 en $s = s_0$ pues $\{T_0, N_0, B_0\}$ es base positiva, vale 1 sobre I.

Definimos $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ por

$$\alpha(x) = \int_{s_0}^{s} T(x) dx$$

Por TFC, $\alpha'(s) = T(s)$ unitario, luego α es una curva parametrizada por el arco. Además

$$K_\alpha(s) = |T'(s)| = |K(s)N(s)| = K(s)\,|N(s)| = K(s) \quad \forall s \in I$$

De ahí,

$$N_\alpha(s) = \frac{T'_\alpha(s)}{|T'_\alpha(s)|} = \frac{T'(s)}{|T'(s)|} = \frac{K(s)N(s)}{|K(s)N(s)|} = N(s)$$

y $B_\alpha(s) = T_\alpha(s) \times N_\alpha(s) = T(s) \times N(s) = B(s)$*, ya que* $T(s), N(s), B(s)$ *es base ortonormal positiva. Por tanto,*

$$\tau_\alpha = \langle B'_\alpha(s), N_\alpha(s)\rangle = \langle B'(s), N(s)\rangle = \langle \tau N, N\rangle = \tau(s)$$

Sea $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *ortogonal tal que*

$$\begin{aligned} AT_\beta(s_0) &= T_\alpha(s_0) \\ AN_\beta(s_0) &= N_\alpha(s_0) \\ AB_\beta(s_0) &= B_\alpha(s_0) \end{aligned}$$

y $p_0 = \alpha(s_0) - A\beta(s_0)$*. Luego,* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *con* $F(p) = Ap + p_0$*. Defina* $\gamma = F \circ \beta : I \to \mathbb{R}^3$*. Queremos ver que* $\gamma \equiv \alpha$*. Como* F *es movimiento rigido* α *y* γ *tienen curvatura* K *y torsión* τ *y tiedro*

$$\begin{aligned} T_\gamma &= T_{F\circ\beta} = AT_\beta \\ N_\gamma &= N_{F\circ\beta} = AN_\beta \\ B_\gamma &= B_{F\circ\beta} = AB_\beta \end{aligned}$$

Luego $f(s) = |T_\gamma(s) - T_\alpha(s)|^2 + |N_\gamma(s) - N_\alpha(s)|^2 + |B_\gamma(s) - B_\alpha(s)|^2$ *vale* 0 *en* $s = s_0$*. Por otro lado*

$$f'(s) = 2\left\langle T_\gamma - T_\alpha, T'_\gamma - T'_\alpha\right\rangle + 2\left\langle N_\gamma - N_\alpha, N'_\gamma - N'_\alpha\right\rangle + 2\left\langle B_\gamma - B_\alpha, B'_\gamma - B'_\alpha\right\rangle = 0 \quad \forall s \in I$$

por lo tanto f *es constante y por lo mencionado* $f \equiv 0$*. De este modo,* $\gamma' = T_\gamma \equiv T_\alpha = \alpha'$*. Como*

$$\gamma(s_0) = F(\beta s_0) = A\beta(s_0) + p_0 = \alpha(s_0)$$

concluimos que $\gamma \equiv \alpha$*.*

2. Superficies Regulares

2.1. Definición y ejemplos

Definición 3.1. *Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, decimos que Σ es una superficie regular si para todo $p \in \Sigma$ existe un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^3$ con $p \in V$ y una función diferenciable*

$$\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

tal que

- $\varphi(\mathcal{V}) = V \cap \Sigma$
- *φ es homeomorfismo de $\mathcal{V}$ sobre $V \cap \Sigma$*
- *$D\varphi(q) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva, es decir, si $\varphi = \varphi(u, v)$, entonces*

$$D\varphi(q) \cdot e_1 = \frac{d}{dt}\varphi(q + te_1)\big|_{t=0} = \varphi_u(q)$$
$$D\varphi(q) \cdot e_2 = \frac{d}{dt}\varphi(q + te_2)\big|_{t=0} = \varphi_v(q)$$

  son linealmente independientes, en otras palabras $\varphi_u(q) \times \varphi_v(q) \neq 0$. Decimos que φ es una parametrización local para Σ

Ejemplos:

- Sea $f : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, consideramos $\Sigma := \{(x, y, (f(x, y))) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{V}\}$ Tomamos $V = \mathbb{R}^3$, definimos la función $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$, entonces

  a) $\varphi(\mathcal{V}) = \Sigma = \Sigma \cap V$.
  b) φ tiene inversa, a saber, $\varphi^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ que es la restricción de una función continua, luego φ^{-1} es continua.
  c) $\varphi_u(u, v) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\right)$ y $\varphi_v(u, v) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right)$ son linealmente independientes.

  Por lo tanto, φ es una parametrización local con $\varphi(\mathcal{V}) = \Sigma$

- Veamos la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$. Si $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$, entonces $x \neq 0$ o $y \neq 0$ o $z \neq 0$. Consideramos

$$\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^2 \cap \left(V_1^+ \cup V_2^+ \cup V_3^+ \cup V_1^- \cup V_2^- \cup V_3^-\right)$$

  donde $V_i^{\pm} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \pm x_i > 0\}$. Definimos la función $\varphi_1^{\pm} : B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi_1^{\pm}(u, v) := (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v)$$

  luego, $\varphi_1^{\pm}(B_1(0)) = V_1^{\pm} \cap \mathbb{S}^2$, $(\varphi_1^{\pm})^{-1} : V_1^{\pm} \cap \mathbb{S}^2 \to B_1(0)$ que manda (x, y, z) en (y, z) es continua y además $(\varphi_1^{\pm})_u^{-1}(q)$ y $(\varphi_1^{\pm})_v^{-1}(q)$ son linealmente independientes para todo $q \in B_1(0)$. Un argumento similar se utiliza para $V_2^{\pm}$ y $V_3^{\pm}$.

Definición 3.2. *Una superficie parametrizada diferenciable es una aplicación diferenciable $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $\mathcal{V}$ abierto. Se dice que φ es regular si $D\varphi(q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es inyectiva para todo $q \in \mathcal{V}$.*

Ejemplos:

- Toda parametrización local de una superficie regular es una superficie parametrizada regular.
- Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada diferenciable. Definimos $\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ por $\varphi(u, v) = (\alpha(u), v)$. Esta superficie parametrizada diferenciable se llama cilindro sobre α.

  Como $\varphi_u(u, v) = (\alpha'(u), 0)$ y $\varphi_v(u, v) = (0, 0, 1)$ son linealmente independientes si y solo si $\alpha' \not\equiv 0$, es decir, φ es regular si y solo si α es una curva regular.

- Si $I = \mathbb{R}$ y existe $T \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(t + T) = \alpha(t)$ entonces $\varphi(I \times \mathbb{R}) = \alpha(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ es una superficie regular.
- Si α es inyectiva y para todo $t \in I$ existen abiertos $V \subseteq \mathbb{R}^2$ y $J \subseteq I$ con $t \in J$ tales que $\alpha(I) \cap V = \alpha(J)$ entonces $\varphi(I \times \mathbb{R})$ es una superficie regular.

Teorema 4. *(Teorema de la Función Implicita) Sea* $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *continua diferenciable,* $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in W$ *tal que* $\frac{\partial h}{\partial z}(p_0) \neq 0$. *Entonces existen abiertos* $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ *y* $f : \mathcal{V} \to I$ *continua diferenciable tales que*

- *El punto* $p_0 \in \mathcal{V} \times I$
- *Se tiene la igualdad de conjuntos* $h^{-1}(h_{p_0}) \cap (\mathcal{V} \times I) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathcal{V}\}$

Además se tiene que

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{-\frac{\partial h}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$$
- $$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{\partial h}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{-\frac{\partial h}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$$

Si h *es suave entonces* f *también lo es.*

Definición 4.1. *Sea* $F : W \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable. Se dice que* $q \in \mathbb{R}^m$ *es un valor regular para* F, *si* $F^{-1}(q) = \emptyset$ *o si para todo* $p \in F^{-1}(q)$ *se tiene que* $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es sobreyectiva.*

Por ejemplo si $h : W \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entonces $Dh(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Dh(p)e_i &= \frac{d}{dt} h(p + te_i)\big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} h(p_1, \cdots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \cdots, p_n)\big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial h}{\partial x_i}(p) \end{aligned}$$

Luego $q \in \mathbb{R}$ es valor regular par a h si y solo si para todo $p \in h^{-1}(q)$, $\frac{\partial h}{\partial x_i}(p) \neq 0$ para algún i, o sea, $\nabla h(p) \neq 0$ para todo $p \in h^{-1}(q)$.

Teorema 5. *Sea* $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable. Si* $c \in \mathbb{R}$ *es un valor regular para* h, *entonces* $h^{-1}(c)$ *es una superficie regular.*

Demostración. *Si* c *es valor regular, entonces para todo* $p \in h^{-1}(c)$ *se sigue que* $\nabla h(p) \neq 0$, *es decir,*

$$\frac{\partial h}{\partial x}(p) \neq 0 \quad ó \quad \frac{\partial h}{\partial y}(p) \neq 0 \quad ó \quad \frac{\partial h}{\partial z}(p) \neq 0$$

Supongamos sin perdida de generalidad que $\frac{\partial h}{\partial z} \neq 0$. *Por teo de la función Implicita, existen abiertos* $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ *y una función suave* $f : \mathcal{V} \to I$ *tales que* $p \in \mathcal{V} \times I$ *y* $h^{-1}(c) \cap (\mathcal{V} \times I) = Graf(f)$.

Por lo visto al inicio de la sección, existe parametrización local $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$ *con* $\varphi(\mathcal{V}) = h^{-1}(c) \cap (\mathcal{V} \times I)$.

2.2. Cambio de Coordenadas

Lema 5.1. *Sea* $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *superficie parametrizada regular*

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Entonces para todo punto $(u_0, v_0) \in \mathcal{V}$ *se tiene que* $D(\pi \circ \varphi)(u_0, v_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *es un isomorfismo lineal, donde* $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *es una de las proyecciones a los planos* xy, xz *o* yz.

Consecuentemente existe $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$ *abierto con* $(u_0, v_0) \in \mathcal{V}_0$ *tal que* $\pi \circ \varphi(\mathcal{V}_0) = W_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ *es abierto y* $\pi \circ \varphi\big|_{\mathcal{V}_0} : \mathcal{V}_0 \to W_0$ *es un difeomorfismo.*

Demostración. *La matriz* $D\varphi(u_0, v_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *es*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} (u_0, v_0)$$

Como la superficie es regular, las columnas son linealmente independientes. Luego la matriz tiene una submatriz 2×2 *invertible. Pero estas submatrices son las matrices de*

$$D(\pi \circ \varphi)(u_0, v_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

La última parte es consecuencia directa del teorema de la función inversa.

Observación: La función $\psi = \varphi \circ (\pi \circ \varphi)^{-1} : W_0 \to \mathbb{R}^3$ es también una superficie parametrizada regular con

$$\psi(W_0) = \varphi((\pi \circ \varphi)^{-1}(W_0)) = \varphi(\mathcal{V}_0)$$

Además, $\pi \circ \psi = id_{W_0}$, osea, ψ es la grafica de una función $f : W_0 \to \mathbb{R}$ diferenciable.

Corolario 5.1. *Si* $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ *es una superficie regular, entonces para todo* $p \in \Sigma$ *existe parametrización local cuya imagen contiene a* p *y que es grafica.*

Teorema 6. *Si* $\varphi_i : \mathcal{V}_i \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ *son parametrizaciones locales de* Σ *con* $U := \varphi_1(\mathcal{V}_1) \cap \varphi_2(\mathcal{V}_2) \neq \emptyset$. *Entonces la aplicación*

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \varphi_2^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^2$$

es un difeomorfismo. Se dice que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ *es un cambio de coordenadas.*

Demostración. *Como* φ_i *son homeomorfismos, basta demostrar que* $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ *es diferenciable en cada* $p_1 \in \varphi_1^{-1}(U)$. *Sean*

$$q = \varphi_1(p_1) \quad y \quad p_2 = \varphi_2^{-1}(q) = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(p_1))$$

Por el lema, existe proyección $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *y un abierto* $V_2 \subseteq \varphi_2^{-1}(U)$ *con* $p_2 \in V_2$ *tal que*

$$\pi \circ \varphi_2 : V_2 \to \pi(\varphi_2(V_2)) =: W \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ un abierto}$$

es un difeomorfismo. Sea $V_1 := (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)^{-1}(V_2) = \varphi_1^{-1}(\varphi_2(V_2))$, *entonces*

- $p_1 \in V_1$ *pues* $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(p_1) = \varphi_2^{-1}(q) = p_2 \in V_2$.
- *Si* $p \in V_1$ *entonces* $\varphi_1(p) \in \varphi_2(V_2)$ *y por ende* $\pi \circ \varphi_1(p) \in \pi \circ \varphi_2(V_2) = W$
- V_1 *es abierto*

Por lo tanto esta bien definida la función $(\pi \circ \varphi_2)^{-1} \circ \pi \circ \varphi_1 : V_1 \to \mathcal{V}_2$. *La cual cumple que* $(\pi \circ \varphi_2)^{-1} \circ \pi \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ *en su dominio. Como* $(\pi \circ \varphi_2)^{-1}$ *y* $(\pi \circ \varphi_1)$ *son diferenciables,* $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ *es diferenciable en* $p_1 \in V_1$.

2.3. Aplicaciones Diferenciables

Definición 6.1. *Se dice que* $f : \Sigma \to \mathbb{R}^d$ *es diferenciable en* $p \in \Sigma$ *si existe una parametrización local* $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ *con* $p \in \varphi(\mathcal{V})$ *y tal que* $f \circ \varphi$ *es diferenciable en* $\varphi^{-1}(p) \in \mathcal{V}$.

Definición 6.2. *Se dice que*

$$\gamma : V \subseteq \mathbb{R}^d \to \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$$

con Σ *una superficie parametrizada regular, es diferenciable en* $q \in V$. *Si existe una parametrización local* $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ *con* $\gamma(q) \in \varphi(\mathcal{V})$ *tal que*

$$\varphi^{-1} \circ \gamma : \gamma^{-1}(\varphi(\mathcal{V})) \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^2$$

es diferenciable en $q \in \gamma^{-1}(\varphi(\mathcal{V}))$.

Observación:

a) La definición de diferenciabilidad de $f : \Sigma \to \mathbb{R}^d$ no depende de la parametrización

$$f \circ \widetilde{\varphi} = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi})$$

entonces $f \circ \widetilde{\varphi}$ es diferenciable si y solo si $f \circ \varphi$ es diferenciable.

b) Esta noción de diferenciabilidad es local, es decir, si $p \in U \subseteq \Sigma$, con U abierto, entonces f es diferenciable si y solo si $f\big|_U : U \to \mathbb{R}^d$ es diferenciable en p.

c) Si $f : \Sigma \to \mathbb{R}^d$ es diferenciable entonces f es continua, en efecto

$$f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$$

es composición de mapeos continuos.

d) Observaciones análogas se cumplen para $\gamma : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$.

Ejemplos:

- Si $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ es una parametrización local, entonces φ y φ^{-1} son diferenciables y $\varphi^{-1} \circ \varphi$ es la identidad.
- Si $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable con W abierto y si $\Sigma \subseteq W$ es una superficie parametrizada regular, entonces $h\big|_\Sigma : \Sigma \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Para toda parametrización local $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ tenemos que $h\big|_\Sigma$ es la composición de φ y h.
- Función altura, $h : \Sigma \to \mathbb{R}$ dada por $h(p) = \langle u, p - p_0 \rangle$. Esta función mide la altura del punto $p_0\Sigma$ al plano $p_0 + u^\perp$, donde $|u| = 1$.
- El cuadrado de la distancia a un $p_0 \in \mathbb{R}^3$. Es decir, $f\Sigma \to \mathbb{R}$ dada por $|p - p_0|^2$. Si $p_0 \notin \Sigma$ entonces $|p - p_0|$ también es diferenciable.

Lema 6.1.

a) Sean $\gamma : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^d \to \Sigma$ y $f : \Sigma \to \mathbb{R}^m$ tales que γ es diferenciable en q y f es diferenciable en $\gamma(q)$ entonces $f \circ \gamma$ es diferenciable en q.

b) Sean $f : \Sigma \to \mathbb{R}^m$ y $\phi : W \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ con $f(\Sigma) \subseteq W$ tales que f es diferenciable en p y ϕ es diferenciable en $\phi \circ f$ es diferenciable en p.

Demostración.

a) Sea $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización local con $\gamma(q) \in \varphi(\mathcal{V})$. Entonces $\varphi \circ \gamma$ es diferenciable en q y $f \circ \varphi$ es diferenciable en $\varphi^{-1}(\gamma(q))$. Luego

$$f \circ \gamma = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \gamma)$$

es diferenciable en q por ser composición de funciones diferenciables.

b) Sea $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización local de $p \in \varphi(\mathcal{V})$, entonces $f \circ \varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\varphi^{-1}(p)$. Además $f \circ \varphi(\mathcal{V}) \subseteq f(\Sigma) \subseteq W$ y ϕ es diferenciable en $f \circ \varphi(\varphi^{-1}(p)) = f(p)$. Luego

$$(\phi \circ f) \circ \varphi = \phi \circ (f \circ \varphi)$$

es diferenciable en φ^{-1}. Por lo tanto, $\phi \circ f$ es diferenciable en $p \in \Sigma$.

Corolario 6.1. *Una aplicación $\gamma : V \subseteq \mathbb{R}^d \to \Sigma$ es diferenciable $q \in V$ si y solo si sus coordenadas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ son funciones diferenciables de V a $\mathbb{R}$ en q.*

Definición 6.3. *Sean Σ_1, Σ_2 superficies regulares. Se dice que*

$$F : \Sigma_1 \to \Sigma_2$$

es diferenciable en $p \in \Sigma_1$. Si existen parametrizaciones locales $\varphi_i : \mathcal{V}_i \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ para Σ_i con $p \in \varphi_1(\mathcal{V}_1)$ y $F(p) \in \varphi_2(\mathcal{V}_2)$ tales que

$$\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1 : (F \circ \varphi_1)^{-1}(\varphi(\mathcal{V}_2)) \to \mathcal{V}_2$$

es diferenciable en q.

Proposición 6.1. *Sea $F : \Sigma_1 \to \Sigma_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ y escribimos*

$$F(p) = (F_1(p), F_2(P), F_3(p))$$

donde $F_i : \Sigma \to \mathbb{R}$. Entonces F es diferenciable en $p \in \Sigma_1$ si y solo si F_i son diferenciables en $p \in \Sigma_1$.

Definición 6.4. *Se dice que $F : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ entre superficies regulares es un difeomorfismo si*

- *F es diferenciable, es decir, F es diferenciable para todo $p \in \Sigma_1$.*
- *F es una biyección y F^{-1} es diferenciable*

Teorema 7. *Sean $F : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ y $G : \Sigma_2 \to \Sigma_3$ aplicaciones diferenciables entre superficies regulares. Si F es diferenciable en $p \in \Sigma_1$ y G es diferenciable en $F(p) \in \Sigma_2$ entonces $G \circ F$ es diferenciable en $p \in \Sigma_1$.*

Demostración. *Escribimos $G(p) = (G_1(p), G_2(p), G_3(p))$ donde $G_i : \Sigma_2 \to \mathbb{R}$ son diferenciables en $F(p)$ por la proposición anterior. Por el lema anterior tenemos que $G_i \circ F : \Sigma_1 \to \mathbb{R}$ son diferenciables en $p \in \Sigma_1$. Como*

$$G \circ F(p) = (G_1 \circ F(p), G_2 \circ F(p), G_3 \circ F(p))$$

por la proposición anterior, $G \circ F$ es diferenciable en $p \in \Sigma_1$.

Del teorema anterior se sigue que Σ_1 es difeomorfo a Σ_2 define una relación de equivalencia entre superficies regulares. Notemos que

$$id_{\Sigma_1} : \Sigma_1 \to \Sigma_1$$

es un difeomorfismo. Si φ_1, φ_2 son parametrizaciones locales entonces $\varphi_2^{-1} \circ id_{\Sigma_1} \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ es un cambio de coordenadas.

Ejemplo: Consideremos las superficies regulares $\mathbb{S}^2$ y

$$\Sigma := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\right\}$$

Afirmamos que $\mathbb{S}^2$ y Σ son difeomorfas. En efecto, definimos $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $\phi(x, y, z) = (ax, by, cz)$ como ϕ es lineal e invertible ϕ y ϕ^{-1} son diferenciables y luego ϕ es un difeomorfismo. Además si $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ entonces

$$\phi(x, y, z) = (ax, by, cz) \in \Sigma$$

Por lo tanto $\phi(\mathbb{S}^2) \subseteq \Sigma$. similarmente $\phi^{-1}(\Sigma) \subseteq \mathbb{S}^2$. Claramente $\phi : \mathbb{S}^2 \to \Sigma$ es una biyección. Además como ϕ es diferenciable en todo punto

$$\phi\big|_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$$

es diferenciable. Por la proposición anterior tenemos que $\phi\big|_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \to \Sigma$ es diferenciable. similarmente para ϕ^{-1}.

La misma idea demuestra, en general, que si $\phi : U_1 \subseteq \mathbb{R}^3 \to U_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ es difeomorfismo entre abiertos y $\Sigma \subseteq U_1$ es una superficie regular, entonces

$$\phi\big|_{\Sigma} : \Sigma \to \phi(\Sigma)$$

donde $\phi(\Sigma)$ es una superficie regular, es un difeomorfismo entre superficies.

2.4. El Plano Tangente

Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $p \in \Sigma$. Si $\varphi_i : \mathcal{V}_i \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ son parametrizaciones locales para Σ con $p \in \varphi_1(\mathcal{V}_1) \cap \varphi_2(\mathcal{V}_2)$. Vimos que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^2$.

Luego, $D(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(\varphi_1^{-1}(p))$ es un isomorfismo lineal. De ahí,

$$D\varphi_1(\varphi_1^{-1}(p))(\mathbb{R}^2) = D(\varphi_2 \circ (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1))(\mathbb{R}^2) = D\varphi_2(\varphi_2^{-1}(p)) \circ D(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(\varphi_1^{-1}(p))(\mathbb{R}^2) = D\varphi_2(\varphi_2^{-1}(p))$$

y cualquier parametrización local en p tiene derivada con la misma imagen en $\varphi^{-1}(p)$.

Definición 7.1. *El plano tangente a Σ en $p \in \Sigma$ es el subespacio vectorial*

$$D\varphi(\varphi^{-1}(p))(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$$

con φ una parametrización local en p. Lo denotaremos por $T_p\Sigma$.

Denotamos por $\varphi_u := D\varphi(\varphi^{-1}(p))e_1$ y $\varphi_v := D\varphi(\varphi^{-1}(p))e_2$.

Observación: Geometricamente $T_p\Sigma$ es un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $0 \in \mathbb{R}^3$.

Proposición 7.1. *Para $p \in \Sigma$ y $w \in \mathbb{R}^3$ tenemos que $w \in T_p\Sigma$ si y solo si existe una curva parametrizada diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que*

- $\alpha(0) = p$.
- $\alpha(t) \in \Sigma$ *para todo* $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
- $\alpha'(0) = w$.

Ejemplos:

- Consideremos un plano en $\mathbb{R}^3$, es decir, $P = q + span\{w_1, w_2\}$. Su parametrización local es $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(u, v) = q + uw_1 + vw_2$, luego

  $$\varphi_u(u,v) = w_1$$
  $$\varphi_v(u,v) = w_2$$

  es decir $T_{\varphi(u,v)}P = span\{w_1, w_2\}$.

- Sea $f : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Tomemos $Graf(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2\}$. Su parametrización local es $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$, entonces

  $$\varphi_u(u,v) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right)$$
  $$\varphi_v(u,v) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

  se sigue que $T_{\varphi(u,v)}Graf(f) = \left\{(a, b, a\frac{\partial f}{\partial u} + b\frac{\partial f}{\partial v}) : a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

Demostración. *Sea $p \in \Sigma$, $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización local en p y $p_0 = \varphi^{-1}(p)$.*

- $\Rightarrow|$ *Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que*

  $$w = D\varphi(p_0)(a,b) = a\varphi_u(p_0) + b\varphi_v(p_0)$$

  Como $p_0 \in \mathcal{V}$ y $\mathcal{V}$ es abierto, tenemos que $p_0 + t(a,b) \in \mathcal{V}$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Definimos

  $$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3 \quad \textit{por} \quad \alpha(t) = \varphi(p_0 + t(a,b))$$

entonces α es diferenciable y $\alpha((-\varepsilon,\varepsilon)) \subseteq \Sigma$. Por otro lado $\alpha(0)=\varphi(p_0)=p$ y

$$\begin{aligned}\alpha'(0) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi(p_0+t(a,b))\\ &= D\varphi(p_0)\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(p_0+t(a,b))\right) = D\varphi(p_0)(a,b)\\ &= w\end{aligned}$$

- $\Leftarrow$ | *Como $\alpha(0)=p\in\varphi(\mathcal{V})$ y $\varphi(\mathcal{V})$ es abierto en Σ, tenemos que $\alpha(t)\in\varphi(\mathcal{V})$ para t suficientemente pequeño. Luego, esta bien definida*

$$\alpha_0 := \varphi^{-1}\circ\alpha$$

y es una curva diferenciable en $\mathcal{V}$. Sea $(a,b)=\alpha_0'(0)\in\mathbb{R}^2$, entonces

$$D\varphi(p_0)(a,b) = D\varphi(\alpha_0(0))\alpha_0'(0) = (\varphi\circ\alpha_0)'(0) = \alpha'(0) = w$$

Ejemplo: Sea $h: W\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ diferenciable y $c\in\mathbb{R}$ un valor regular para h. Vimos que $h^{-1}(c)=\Sigma$ es una superficie regular. Sea $p\in\Sigma$, y $w\in T_p\Sigma$, existe α curva diferenciable tal que $\alpha'(0)=w$, $\alpha(0)=p$ y $\alpha(t)\in\Sigma$ para todo $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Veamos que $h\circ\alpha\equiv c$. Entonces

$$0=(h\circ\alpha)'(0)=Dh(\alpha(0))\alpha'(0)=Dh(p)w$$

luego $T_p\Sigma\subseteq ker(Dh(p))=(\nabla h(p))^{\perp}$. Por lo tanto $T_p\Sigma=(\nabla h(p))^{\perp}$. Hemos concluido que el gradiente de la función es perpendicular al plano tangente $T_p\Sigma$.

Por ejemplo $h(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ entonces $\nabla h=(2x,2y,2z)$, es decir, $\nabla h=2p$ para todo $p\in\mathbb{R}^3$. Como $\mathbb{S}^2=h^{-1}(1)$ tenemos $T_p\mathbb{S}^2=(\nabla h(p))^{\perp}=p^{\perp}$

2.5. El Diferencial de una Aplicación Diferenciable

Definición 7.2. *Sea $f:\Sigma\to\mathbb{R}^m$ diferenciable en $p\in\Sigma$. Definimos la derivada o diferencial de f en $p\in\Sigma$ se define por*

$$\begin{aligned}&Df_p: T_p\Sigma\to\mathbb{R}^m\\ &w=\alpha'(0)\to(f\circ\alpha)'(0)\in\mathbb{R}^m\end{aligned}$$

Proposición 7.2. *La derivada de una función diferenciable no depende de la elección de la curva y es lineal.*

Demostración. *Sea $\varphi:\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ parametrización local para Σ con $p\in\varphi(\mathcal{V})$. Escriba $p_0=\varphi^{-1}(p)\in\mathcal{V}$. Sea $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^3$ una curva diferenciable, con $\alpha(0)=p$, $\alpha'(0)=w\in T_p\Sigma$ y $\alpha(t)\in\varphi(\mathcal{V})$ para todo $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Definimos $\alpha_0=\varphi^{-1}\circ\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathcal{V}$ es una curva parametrizada diferenciable con $\alpha_0(0)=\varphi^{-1}(\alpha(0))=p_0$.*

Notemos que $w=D\varphi(p_0)(\alpha_0'(0))$. Luego

$$\begin{aligned}Df_p(w) &= (f\circ\alpha)'(0)=(f\circ\varphi\circ\varphi^{-1}\circ\alpha)'(0)=((f\circ\varphi)\circ\alpha_0)'(0)\\ &= D(f\circ\varphi)(\alpha_0(0))\alpha_0'(0)\\ &= D(f\circ\varphi)(p_0)\circ(D\varphi)^{-1}(p_0)w\end{aligned}$$

para todo $w\in T_p\Sigma$. Es decir,

$$Df_p = D(f\circ\varphi)(p_0)\circ(D\varphi)^{-1}(p_0)$$

entonces, Df_p es lineal y no depende de α.

Ejemplos:

- Sea $f:\Sigma\to\mathbb{R}^m$ dada por $f\equiv c$. Para todo $p\in\Sigma$ y todo $w\in T_p\Sigma$, $w=\alpha'(0)$, luego

$$Df_p(w)=(f\circ\alpha)'(0)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ\alpha)(t)=0$$

- Sea $i_\Sigma : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ la inclusión, es decir, $i_\Sigma(p) = p$. Para $p \in \Sigma$ con $w = \alpha'(0) \in T_p\Sigma$ tenemos que

$$D(i_\Sigma)_p w = (i_\Sigma \circ \alpha)'(0) = \alpha'(0) = w$$

- Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, entonces $F\big|_\Sigma =: f$ es diferenciable. Además, si $p \in \Sigma$, $w = \alpha'(0) \in T_p\Sigma$ se sigue que

$$Df_p(w) = (f \circ \alpha)'(0) = (F \circ \alpha)'(0) = DF(\alpha(0))\alpha'(0) = DF(p)w$$

  es decir, $Df_p = DF(p)\big|_{T_p\Sigma}$.

- Sea $h : \Sigma \to \mathbb{R}$ dada por $h(p) = \langle p - p_0, u\rangle$ con $p_0, u \in \mathbb{R}^3$ y $|u| = 1$, entonces $Dh_p w = \langle w, u\rangle$.
- Sea $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = |p - p_0|^2$, luego $Df_p w = 2\langle w, p - p_0\rangle$.
- Sea $\pi_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la proyección en la coordenada i-esima, entonces $D\left(\pi_i\big|_\Sigma\right) w = w_i$.

(Corregir hacia atras)
Dada $\gamma : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n \to \Sigma$ diferenciable en $q \in \mathcal{V}$ luego su derivada está bien definida como aplicación lineal $D_\gamma(q) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$, notemos que

$$D_\gamma(q)w = \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} \gamma(q + tw) = (\gamma \circ \beta)'(0)$$

donde $\beta(t) = q + tw$, como $\gamma \circ \beta \in \Sigma$ vemos que $(\gamma \circ \beta)'(0) \in T_{\gamma(q)}\Sigma$, definimos su diferencial como

$$D_{\gamma_q} := D_\gamma(q) : \mathbb{R}^n \to T_{\gamma(q)}\Sigma$$

Definición 7.3. *Sea $F : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ diferenciable en $p \in \Sigma_1$. Dado $v \in T_p\Sigma$ definimos el* ***diferencial F en p*** *como $DF_p : T_p\Sigma_1 \to T_{F(p)}\Sigma_2$ dada por*

$$DF_p(v) := (F \circ \alpha)'(0)$$

donde α es una curva diferenciable tal que $\alpha \subset \Sigma_1$ y es tangente a $\alpha'(0) = v$.

Observación: El diferencial de F esta bien definido, como $\alpha \subset \Sigma_1$ se tiene que $F \circ \alpha \subset \Sigma_2$ y pasa por el punto $F(p)$, luego $(F \circ \alpha)'(0) \in T_{F(p)}\Sigma_2$. Además, por la discusión anterior, el valor no depende de la elección de la curva α y es un mapeo lineal.

Ejemplo: Sea $A\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineal y $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular tal que $A(\Sigma) \subseteq \Sigma$. Luego esta bien definida $A : \Sigma \to \Sigma$ y es diferenciable en $p \in \Sigma$, pues es restricción de una aplicación diferenciable. Queremos calcular

$$DA_p : T_p\Sigma \to T_{A(p)}\Sigma$$

Sea $v \in T_p\Sigma$ y $v = \alpha'(0)$ para $\alpha \subset \Sigma$ tangente a v, entonces

$$DA_p(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (A \circ \alpha)(t) = A\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \alpha(t)\right) = A(\alpha'(0)) = Av$$

Por lo tanto $DA_p = A\Big|_{T_p\Sigma}$.

Teorema 8. ***(Regla de la Cadena)*** *Sean $F : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ y $G : \Sigma_2 \to \Sigma_3$ aplicaciones diferenciables en $p \in \Sigma_1$ y $F(p) \in \Sigma_2$ respectivamente, entonces*

$$D(G \circ F)_p = DG_{F(p)} \circ DF(p)$$

Demostración. *Sea $v \in T_p\Sigma_1$ y $\alpha \subset \Sigma_1$ tangente a $\alpha'(0) = v$. Notemos que*

$$D(G \circ F)_p(\alpha'(0)) = (G \circ F \circ \alpha)'(0) = DG_{F(p)}(F \circ \alpha)'(0) = DG_{F(p)} \circ DF_p(\alpha'(0))$$

Corolario 8.1. *Sea $F : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ un difeomorfismo, entonces $D(F^{-1})_{F(p)} = (DF_p)^{-1}$ para todo $p \in \Sigma_1$*

Teorema 9. *(**Teorema de la Función Inversa**) Sea $F : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ diferenciable. Sea $p \in \Sigma_1$ tal que Df_p es isomorfismo, entonces existe $U \subseteq \Sigma_1$ abierto con $p \in U$ tal que $F(U) \subseteq \Sigma_2$ es abierto y*

$$F\Big|_U : U \to F(U)$$

es un difeomorfismo.

Definición 9.1. *Sea $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ diferenciable. Decimos que $p \in \Sigma$ es un **punto crítico** de f si*

$$0 \equiv Df_p : T_p\Sigma \to \mathbb{R}$$

*en otras palabras, no es sobreyectiva. Se dice que $c \in \mathbb{R}$ es un **valor regular** si $f^{-1}(c)$ no contiene puntos críticos.*

Proposición 9.1. *Sea $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ diferenciable y $p \in \Sigma$ un punto maximo o minimo (local o global), entonces p es punto crítico.*

Demostración. *Sea $v \in T_p\Sigma$ y $\alpha \subset \Sigma$ tangente a $\alpha'(0) = v$, luego*

$$Df_p(v) = (f \circ \alpha)'(0) = 0$$

Concluimos que p es punto crítico de f.

Teorema 10. *Sea $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ diferenciable, si $c \in \mathbb{R}$ es valor regular de f, entonces $f^{-1}(c)$ es una curva regular.*

Observación: Se dice que $S \subset \Sigma$ es una **curva regular** si para todo $p \in \Sigma$ existe un abierto $U \subseteq \Sigma$ y una curva parametrizada regular $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \Sigma$ tal que $\alpha(I) = U \cap S$.

Sea $f : \Sigma \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $p \in \Sigma$. Si $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es parametrización local para Σ con $p \in \varphi(\mathcal{V})$ tenemos una base de $T_p\Sigma$, a saber, $\varphi_u(p_0), \varphi_v(p_0)$ donde $p_0 = \varphi^{-1}(p)$. Vimos que $Df_p \circ D\varphi_{p_0} = D(f \circ \varphi)_{p_0}$, luego

$$Df_p(a\varphi_u(p_0) + b\varphi_v(p_0)) = Df_p(D\varphi_{p_0}(a, b)) = D(f \circ \varphi)_{p_0}(a, b)$$

es decir, la matriz de Df_p respecto a $\{\varphi_u(p_0), \varphi_v(p_0)\}$ es la matriz jacobiana de $D(f \circ \varphi)_{p_0}$.

3. La Segunda Forma Fundamental

3.1. Campos Vectoriales y Orientación

Definición 10.1. *Sea Σ una superficie regular. Una aplicación continua $V : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ se dice* ***campo vectorial****. Se dice que V es:*

a) ***Campo tangente*** *si $V(p) \in T_p\Sigma$ para todo $p \in \Sigma$.*

b) ***Campo normal*** *si $V(p) \in (T_p\Sigma)^{\perp}$ para todo $p \in \Sigma$.*

c) ***Campo unitario*** *si $|V(p)| = 1$ para todo $p \in \Sigma$.*

Ejemplo: Sea $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización local para Σ y $U = \varphi(\mathcal{V})$ entonces

$$\varphi_u \circ \varphi^{-1} : U \to \mathbb{R}^3$$
$$\varphi_v \circ \varphi^{-1} : U \to \mathbb{R}^3$$

son campos tangentes. Sea $N^x : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$N^x(u,v) := \frac{\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)}{|\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)|}$$

es diferenciable y $N^x \perp T_{\varphi(u,v)}\Sigma$. Luego $N = N^x \circ \varphi^{-1}$ es campo unitario, normal y diferenciable.

Definición 10.2. *Se dice que una superficie regular Σ es* ***orientable*** *si existe un campo normal, unitario y continuo $N : \Sigma \to \mathbb{R}^3$. En ese caso, se dice que N define una Orientación. Además,*

- *Sea $\{w_1, w_2\}$ base de $T_p\Sigma$, se dice* ***positiva*** *si $\{w_1, w_2, N(p)\}$ es una base positiva de $\mathbb{R}^3$.*
- *Una parametrización φ es* ***positiva*** *si $N^x = N \circ \varphi$.*

Observaciones:

a) Si Σ es conexa y esta orientada por $N : \Sigma \to \mathbb{R}^3$, hay exactamente dos orientaciones en Σ, que son N y $-N$. En efecto, sea $V : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ normal, unitario y continuo, entonces

$$A = \{p \in \Sigma : V(p) = N(p)\} = (V - N)^{-1}(0),$$
$$B = \{p \in \Sigma : V(p) = -N(p)\} = (V + N)^{-1}(0)$$

son cerrados. Dado $p \in \Sigma$ se tiene que $V(p) \in (T_p\Sigma)^{\perp} = span\{N(p)\}$ y $|V(p)| = 1$, luego $V(p) = N(p)$ ó $V(p) = -N(p)$, es decir $A \cup B = \Sigma$. Además, $A \cap B = \emptyset$. Así, por conexidad, tenemos que $A = \Sigma$ y por lo tanto $V \equiv N$ o bien $B = \Sigma$ y $V \equiv -N$.

b) Dada $N : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ una orientación. Veamos que N es diferenciable. Sea $p \in \Sigma$, existe una parametrización local $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ para Σ con $p \in \varphi(\mathcal{V})$ y $\varphi(\mathcal{V})$ conexo. De ahí, $N\big|_{\varphi(\mathcal{V})}$ define una orientación para $\varphi(\mathcal{V})$. Por (a) tenemos que $(N^x \circ \varphi^{-1}) \equiv N$ ó $(N^x \circ \varphi^{-1}) \equiv -N$ y por lo tanto $N\big|_{\varphi(\mathcal{V})}$ es diferenciable. Concluimos que N es diferenciable.

c) Si Σ_1 y Σ_2 son difeomorfos. Entonces Σ_1 es orientable si y solo si Σ_2 es orientable.

Ejemplos:

- Si $\Sigma = \varphi(\mathcal{V})$ para una parametrización, entonces Σ es orientable.
- Sea $\Sigma = Graf(f)$ con $f : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable, entonces $\varphi(u,v) = (u, v, f(u,v))$ es parametrización local y $\varphi(\mathcal{V}) = \Sigma$. Luego

$$\varphi_u(u,v) = (1, 0, \partial_u f)$$
$$\varphi_v(u,v) = (0, 1, \partial_v f)$$

entonces

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-\partial_u f, -\partial_v f, 1) = (-\nabla f, 1)$$

consideramos

$$N^x(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}(-\nabla f, 1)$$

se sigue que $N^x \circ \varphi^{-1}$ define una orientación para Σ.

- (Niveles Regulares) Sea $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable y $c \in \mathbb{R}$ un valor regular para h, luego $\Sigma = h^{-1}(c)$ es superficie regular. Sabemos que $T_p\Sigma = (\nabla h(p))^{\perp}$. Si $W_0 = \{p \in W : \nabla h(p) \neq 0\}$, entonces W_0 es abierto y $\Sigma \subset W_0$. Definimos $N : W_0 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$N(p) := \frac{\nabla h(p)}{|\nabla h(p)|}$$

es continua y dado $p \in \Sigma$ se tiene que $N(p) \perp T_p\Sigma$. Por lo tanto $N\big|_{\Sigma}$ define una orientación.

Proposición 10.1. *Sea Σ una superficie regular. Entonces Σ es orientable si y solo si existen $\{\varphi_i : \mathcal{V}_i \subseteq \mathbb{R}^2\}_i$ parametrizaciones locales para Σ tales que*

- $\bigcup_i \varphi_i(\mathcal{V}_i) = \Sigma$
- $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ *tiene determinante jacobiano positivo para todo i, j.*

3.2. Formas Fundamentales y Aplicación de Gauss

Definición 10.3. *Sea Σ una superficie regular. La **primera forma fundamental** de Σ en $p \in \Sigma$ es la restricción del producto interno a $T_p\Sigma$,*

$$\langle .,. \rangle = I_p : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \to \mathbb{R}, \quad \langle w_1, w_2 \rangle_p = I_p(w_1, w_2) \to \langle w_1, w_2 \rangle$$

Sea $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización local para Σ, entonces las funciones diferenciables $E, F, G : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$E(u,v) := |\varphi_u(u,v)|^2, \quad F(u,v) := \langle \varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v) \rangle, \quad G(u,v) := |\varphi_v(u,v)|^2,$$

se llaman los **coeficientes de la primera forma fundamental** en las coordenadas (u,v). Se dice que φ es una parametrización ortogonal si $F \equiv 0$. Podemos escribir $\langle .,. \rangle_p$ en $p = \varphi(p_0)$ en términos de la base $\{\varphi_u(p_0), \varphi_v(p_0)\}$ como

$$I_p(w_1, w_2) = \langle a_1\varphi_u(p_0) + a_2\varphi_v(p_0), b_1\varphi_u(p_0) + b_2\varphi_v(p_0) \rangle = a_1b_1E(p_0) + (a_1b_2 + a_2b_1)F(p_0) + a_2b_2G(p_0)$$

Observación: Si denotamos las variables de φ por x_i también se usa la notación $g_{ij} := \langle \varphi_{x_i}, \varphi_{x_j} \rangle$, es decir, $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$ y $g_{22} = G$.

Ejemplos:

- Sea $P = p_0 + w^{\perp} \subseteq \mathbb{R}^3$ un plano, podemos escoger $w_1, w_2 \in w^{\perp}$ ortonormales y definir una parametrización $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ por $\varphi(u,v) := p_0 + uw_1 + vw_2$, con lo cual $\varphi_u \equiv w_1$ y $\varphi_v \equiv w_2$. Luego

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

- Para una gráfica $\Sigma = Graf(f)$ de una función $f : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable la parametrización local $\varphi_u = (1, 0, \partial_u f)$ y $\varphi_v = (0, 1, \partial_v f)$, luego

$$E(u,v) = 1 + (\partial_u f(u,v))^2, \quad F(u,v) = \langle \partial_u f(u,v), \partial_v f(u,v) \rangle, \quad G(u,v) = 1 + (\partial_v f(u,v))^2$$

- Considere el cilindro $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$ con parametrización local $\varphi(u,v) = (rcosu, rsenu, v)$. Tenemos $\varphi_u(u,v) = (-rsenu, rcosu, 0)$ y $\varphi_v(u,v) = (0,0,1)$, luego

$$E(u,v) = r^2, \quad F(u,v) = 0, \quad G(u,v) = 1$$

  Vemos que la parametrización es ortogonal.

Observación: Veamos lo siguiente

$$\begin{aligned} |\varphi_u \times \varphi_v|^2 (u,v) &= |\varphi_u(u,v)|^2 \cdot |\varphi_v(u,v)|^2 - \langle \varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v) \rangle^2 \\ &= E(u,v) \cdot G(u,v) - F^2(u,v) = det \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} (u,v) \end{aligned}$$

Luego, la matriz $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ es invertible y es definida positiva.

Proposición 10.2. *Sea $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ diferenciable. Existe un campo tangente diferenciable $\nabla^\Sigma f : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ tal que*

$$\left\langle \nabla^\Sigma f(p), w \right\rangle_p = Df_p(w) \quad \forall w \in T_p\Sigma$$

Definición 10.4. *El campo $\nabla^\Sigma f$ se llama **campo gradiente** de f.*

Observación: Para una parametrización local $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de Σ, se escribe como

$$\nabla^\Sigma f(p) = \frac{f_u \cdot G - f_v \cdot F}{EG - F^2}(p_0) \cdot \varphi_u(p_0) + \frac{f_v \cdot E - f_u \cdot F}{EG - F^2}(p_0) \cdot \varphi_v(p_0)$$

para todo $p = \varphi(p_0) \in \varphi(\mathcal{V})$, donde $f_u = (f \circ \varphi)_u$ y $f_v = (f \circ \varphi)_v$.

Supongamos que Σ es una superficie regular orientable y sea $N : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ un campo normal unitario diferenciable. Observe que N define una aplicación $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ llamada la **aplicación de Gauss** de Σ. Como en el caso de curvas, esperamos describir la geometría de Σ usando la derivada de N.

Proposición 10.3. *Sea $p \in \Sigma$, tenemos $T_p\Sigma$ y la derivada de N es una aplicación lineal $DN_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ la cual es simétrica (autoadjunta) respecto a $\langle .,. \rangle_p$.*

> **Demostración.** *La primera afirmación es consecuencia de $T_p\Sigma = N(p)^\perp = T_{N(p)}\mathbb{S}^2$, donde usamos que $T_q\mathbb{S}^2 = q^\perp$ para todo $q \in \mathbb{S}^2$. Resta ver que $DN(p)$ es simétrica. Sea $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización local de Σ con $p = \varphi(p_0)$, entonces*
>
> $$\begin{aligned} \langle DNp(\varphi_u(p_0)), \varphi_v(p_0) \rangle_p &= \langle D(N \circ \varphi)_{p_0} e_1, \varphi_v(p_0) \rangle = \langle (N \circ \varphi)_u, \varphi_v \rangle (p_0) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \langle N, \varphi_v, () \, p_0) - \langle N, \varphi_{vu} \rangle (p_0) = - \langle N, \varphi_{vu} \rangle (p_0) \end{aligned}$$
>
> *del mismo modo se tiene que $\langle DNp(\varphi_v(p_0)), \varphi_u(p_0) \rangle_p = - \langle N, \varphi_{uv} \rangle (p_0)$. Como $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$ y $\{\varphi_u(p_0), \varphi_v(p_0)\}$ es una base para $T_p\Sigma$, concluimos que DN_p es simétrica.*

Definición 10.5. *Se dice que $A_p := -DN_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ es el **operador de Weingarten** de Σ en p. La forma bilineal $\mathbb{I}_p : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \to \mathbb{R}$ asociada al operador A_p mediante $\langle .,. \rangle_p$ se llama la **segunda forma fundamental** de Σ en p. Concretamente*

$$\mathbb{I}_p(w_1, w_2) = \langle A_p w_1, w_2 \rangle = - \langle DN_p w_1, w_2 \rangle = - \langle w_1, DN_p w_2 \rangle$$

para todo $w_1, w_2 \in T_p\Sigma$.

Ejemplos:

- Para un plano $P = p_0 + w^\perp \subseteq \mathbb{R}^3$ la aplicación de Gauss $N : P \to \mathbb{S}^2$ es constante y vale $N(p) = \frac{w}{|w|}$. Luego $A_p = -DN_p \equiv 0$ y $\mathbb{I}_p \equiv 0$ para todo $p \in \Sigma$.

- Sea $\mathbb{S}^2(r) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = r^2\}$. Luego $N(f) = -\frac{1}{r}p$. Sea $w \in T_p\mathbb{S}^2(r)$, con $w = \alpha'(0)$ y $\alpha \subset \mathbb{S}^2(r)$, entonces

$$DN_p(w) = (N \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(-\frac{1}{r}p\right) = -\frac{1}{r}\alpha'(0) = -\frac{1}{r}w$$

  Por lo tanto $A_p w = \frac{1}{r}w$, entonces la segunda forma fundamental tiene la forma $\mathbb{I}_p(v,w) = \frac{1}{r}\langle v,w\rangle_p$ y

$$A_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

- Consideremos $C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = r^2\} = h^{-1}(r^2)$ con $h(x,y,z) = x^2+y^2$, luego $T_pC = (\nabla h(p))^\perp = (2x,2y,0)^\perp$. Sean $w_1 = (-y,x,0) = \alpha'(0)$ y $w_2 = (0,0,1) = \beta'(0)$ donde

$$\alpha(t) = \left(cos\left(\frac{t}{r}\right)x - sen\left(\frac{t}{r}\right)y, sen\left(\frac{t}{r}\right)x + cos\left(\frac{t}{r}\right)y, z\right)$$
$$\beta(t) = (x,y,z+t)$$

  Tomamos $N(p) = -\frac{1}{r}(x,y,0)$, luego

$$DN_p w_1 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N(\alpha(t)) = -\frac{1}{r}w_1$$
$$DN_p w_2 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N(\beta(t)) = 0$$

  por lo tanto

$$A_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 10.6. *Los autovalores de A_p se llaman las **curvaturas principales** de Σ en p y y las denotamos $k_1(p) \le k_2(p)$. Los autovectores $\{e_1, e_2\}$ que corresponden a k_1, k_2 se llaman **direcciones principales** de Σ en p. Además se definen*

$$k_\Sigma(p) := det(A_p) \quad H_\Sigma(p) := \frac{1}{2}tr(A_p)$$

*la **curvatura gaussiana** y **curvatura media** respectivamente.*

Observación: La curvatura gaussiana es la unica que no depende de la orientación, además, se tiene lo siguiente

$$k_1 = H_\Sigma - \sqrt{H_\Sigma^2 - k_\Sigma} \quad \text{y} \quad k_2 = H_\Sigma + \sqrt{H_\Sigma^2 - k_\Sigma}$$

lo anterior esta bien definido gracias a la desigualdad de las medias.

Proposición 10.4. *Sea Σ una superficie regular. Sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Sigma$ una curva parametrizada por el arco con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) \in T_p\Sigma$. Sea k_α la curvatura de α en p y N_α el normal unitario. Entonces*

$$\mathbb{I}_p(\alpha'(0), \alpha'(0)) = \langle N_\Sigma(p), k_\alpha N_\alpha\rangle$$

> **Demostración.** *Como $\alpha'(t) \in T_p\Sigma$ se sigue que $\langle N \circ \alpha(t), \alpha'(t)\rangle = 0$, entonces*
>
> $$\left\langle DN_{\alpha(t)}(\alpha'(t)), \alpha'(t)\right\rangle + \langle N(\alpha(t)), \alpha''(t)\rangle = 0$$
>
> *lo que implica la afirmación.*

Veamos que $\langle N(\alpha(t)), \alpha''(t)\rangle$ solo depende de la dirección tangente $\alpha'(0) \in T_p\Sigma$.

3.3. Secciones Normales

Definición 10.7. *Sea $v \in T_p\Sigma$ unitario, definimos la* ***curvatura normal*** *de Σ en p en la dirección de v por $k_v := \mathbb{I}_p(v,v)$.*

Sea $\{e_1, e_2\}$ base ortonormal de $T_p\Sigma$ tal que $A_p(e_i) = k_i(p)e_i$. Entonces $v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2$ y también

$$\begin{aligned}
k_v &= \mathbb{I}_p(v,v) = \mathbb{I}_p(\langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2, \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2) \\
&= \langle v, e_1\rangle^2 \mathbb{I}_p(e_1, e_1) + 2\langle v, e_1\rangle \langle v, e_2\rangle \mathbb{I}_p(e_1, e_2) + \langle v, e_2\rangle^2 \mathbb{I}_p(e_2, e_2) \\
&= \langle v, e_1\rangle^2 k_1 + \langle v, e_2\rangle^2 k_2
\end{aligned}$$

Corolario 10.1. *$k_1(p)$ y $k_2(p)$ son el maximo y minimo de las curvaturas normales k_v, para $v \in T_p\Sigma$ unitario.*

Definición 10.8. *Sea Σ una superficie regular y $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ aplicación de Gauss. Dado $p \in \Sigma$ se dice un punto*

- ***eliptico*** *si $k_\Sigma(p) > 0$.*
- ***hiperbolico*** *si $k_\Sigma(p) < 0$.*
- ***parabolico*** *si $k_\Sigma(p) = 0$ y $H_\Sigma(p) \neq 0$.*
- ***plano*** *si $k_1(p) = 0$ y $k_2(p) = 0$*

Observación:

a) Si p es eliptico entonces todas las curvaturas normales en p tienen el mismo signo y toda sección normal en p esta contenida en un lado de $T_p\Sigma$.

b) Si p es hiperbolico, $k_1(p) < 0 < k_2(p)$ y Σ tiene puntos en ambos lados de $T_p\Sigma$.

Estas conclusiones se pueden profundizar estudiando la hessiana en p de la función $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ dada por $f(q) := \langle q - p, N(p)\rangle$.
Sea $\varphi = \varphi(u,v) : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrización local. Luego $\varphi_u(u,v)$ y $\varphi_v(u,v)$ son campos tangentes, definimos

$$\begin{aligned}
e(u,v) &:= \mathbb{I}_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v), \varphi_u(u,v)) = \left\langle A_{\varphi(u,v)}\varphi_u(u,v), \varphi_u(u,v)\right\rangle \\
&= -\left\langle DN_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v)), \varphi_u(u,v)\right\rangle = -\langle (N\circ\varphi)_u(u,v), \varphi_u(u,v)\rangle \\
&= \langle N\circ\varphi(u,v)(u,v), \varphi_{uu}(u,v)\rangle
\end{aligned}$$

Del mismo modo se tiene que

$$\begin{aligned}
f(u,v) &:= \mathbb{I}_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v)) = \langle N\circ\varphi(u,v), \varphi_{uv}(u,v)\rangle \\
g(u,v) &:= \mathbb{I}_{\varphi(u,v)}(\varphi_v(u,v), \varphi_v(u,v)) = \langle N\circ\varphi(u,v), \varphi_{vv}(u,v)\rangle
\end{aligned}$$

Estas funciones se llaman **coeficientes de la segunda forma fundamental** en $\varphi(u,v) \in \Sigma$ respecto a φ.

Teorema 11. *Se tienen las siguientes igualdades*

$$k_\Sigma \circ \varphi = det\left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g\end{pmatrix}\right) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$H_\Sigma \circ \varphi = \frac{1}{2}tr\left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g\end{pmatrix}\right) = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{EG - F^2}$$

Demostración. *Sea $p = \varphi(p_0)$ con $p_0 \in \mathcal{V}$ y escribamos*

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

para la matriz de A_p en la base $\{\varphi_u(p_0), \varphi_v(p_0)\}$. Basta demostrar

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$A_p(\varphi_u(p_0)) = a_{11}\varphi_u(p_0) + a_{21}\varphi_v(p_0) \quad y \quad A_p(\varphi_v(p_0)) = a_{12}\varphi_u(p_0) + a_{22}\varphi_v(p_0)$$

Tomando producto interno de cada ecuación con φ_u y φ_v vemos que

$$\begin{aligned} e(p_0) &= \langle A_p(\varphi_u(p_0)), \varphi_u(p_0)\rangle = \langle a_{11}\varphi_u(p_0) + a_{21}\varphi_v(p_0), \varphi_u(p_0)\rangle \\ &= a_{11}E(p_0) + a_{21}F(p_0) \end{aligned}$$

Del mismo modo vemos que

$$\begin{aligned} f(p_0) &= \langle A_p(\varphi_u(p_0)), \varphi_v(p_0)\rangle = a_{11}F(p_0) + a_{21}G(p_0) \\ f(p_0) &= \langle A_p(\varphi_v(p_0)), \varphi_u(p_0)\rangle = a_{12}E(p_0) + a_{22}F(p_0) \\ g(p_0) &= \langle A_p(\varphi_v(p_0)), \varphi_v(p_0)\rangle = a_{12}F(p_0) + a_{22}G(p_0) \end{aligned}$$

Corolario 11.1. *Como resultado se tiene que $k_1, k_2 : \Sigma \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y son diferenciables en todo $p \in \Sigma$ donde $k_1(p) \neq k_2(p)$.*

Ejemplo: Sea $\Sigma = Graf(h)$ con $h : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable con parametrización $\varphi(u,v) = (u, v, h(u,v))$. Recordemmos que

$$\varphi_u = (1, 0, h_u)\ , \quad \varphi_v = (0, 1, h_v)\ , \quad N = (-\nabla h, 1)\frac{1}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}(-h_u, h_v, 1)$$

Además, tenemos que

$$E = 1 + h_u^2\ , \quad F = h_u h_v\ , \quad G = 1 + h_v^2$$

y por lo tanto

$$EG - F^2 = (1 + h_u^2)(1 + h_v^2) - (h_u h_v)^2 = 1 + h_u^2 + h_v^2$$

Buscamos calcular e, g, f, para ello veamos que

$$\varphi_{uu} = (0, 0, h_{uu})\ , \quad \varphi_{uv} = (0, 0, h_{uv})\ , \quad \varphi_{vv} = (0, 0, h_{vv})$$

luego

$$e = \langle N, \varphi_{uu}\rangle = \frac{h_{uu}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}\ , \quad f = \langle N, \varphi_{uv}\rangle = \frac{h_{uv}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}\ , \quad g = \langle N, \varphi_{vv}\rangle = \frac{h_{vv}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}\ ,$$

entonces

$$eg - f^2 = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}$$

Concluimos que

$$k_\Sigma = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{3/2}}$$

por otro lado

$$eG + gE - 2Ff = \frac{h_{uu}(1 + h_v^2)}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}} + \frac{h_{vv}(1 + h_u^2)}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}} - \frac{2h_u h_v h_{uv}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}$$

y Finalmente

$$H_\Sigma = \frac{h_{uu}(1 + h_v^2) + h_{vv}(1 + h_u^2) - 2h_u h_v h_{uv}}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{3/2}}$$

Ejemplo: Sea $\varphi(u,v) = (ucosv, usenv, v)$ luego $E = 1$, $F = 0$ y $G = 1 + u^2$. Además, $\varphi_{uu} = (0,0,0)$, $\varphi_{uv} = (-senv, cosv, 0)$ y $\varphi_{vv} = (-ucosv, -usenv, 0)$. Lo que implica que $e = g = 0$ y $f = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$. Finalmente

$$k_\Sigma = \frac{0 - \left(\frac{1}{1+u^2}\right)}{1+u^2} = -\frac{1}{(1+u^2)^2} < 0 \ , \quad H_\Sigma = 0$$

Definición 11.1. *Sea Σ una superficie regular y un punto $p \in \Sigma$ se dice* ***umbilical*** *si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathbb{I}_p(v,w) = \lambda \langle v, w \rangle_p \qquad \forall v, w \in T_p\Sigma$$

Se dice que Σ es ***totalmente umbilical*** *si todo $p \in \Sigma$ es punto umbilical.*

Proposición 11.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

a) $\mathbb{I}_p = \lambda \langle .,. \rangle_p = \lambda I_p$.

b) $A_p v = \lambda v \quad \forall v \in T_p\Sigma$.

c) $k_1(p) = k_2(p) = \lambda$.

d) *Todas las curvaturas normales de Σ en p son iguales a λ.*

e) $k_\Sigma(p) = \lambda^2 = H_\Sigma^2$.

Teorema 12. *Sea Σ una superficie regular totalmente umbilical y conexa, entonces Σ esta contenida en un plano o una esfera.*

Demostración. *Sea $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización local con $\mathcal{V}$ conexo. Sea $N : \varphi(\mathcal{V}) \to \mathbb{S}^2$ el campo normal unitario definido por φ.*

a) *Por la propiedad anterior, existe $\lambda : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ tal que*

$$-A_{\varphi(u,v)} = DN_{\varphi(u,v)} = \lambda(u,v) \cdot id_{T_{\varphi(u,v)}\Sigma}$$

Afirmamos que λ es diferenciable, notemos que

$$\lambda(u,v)\varphi_u = DN_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v)) = (N \circ \varphi)_u(u,v)$$
$$\lambda(u,v)\varphi_v(u,v) = (N \circ \varphi)_v(u,v)$$

tomando producto interno de la primera ecuación con φ_u y usando que $|\varphi_u| = E \neq 0$ tenemos que

$$\lambda(u,v) = \frac{\langle (N \circ \varphi)_u(u,v), \varphi_u(u,v) \rangle}{E(u,v)}$$

por lo tanto λ es diferenciable en $\mathcal{V}$.

b) *Demostraremos que $\lambda_u = \lambda_v = 0$. Derivando las ecuaciones en el item anterior, en v y en u respectivamente*

$$\lambda_v\varphi_u + \lambda\varphi_{uv} = (N \circ \varphi)_{uv}$$
$$\lambda_u\varphi_v + \lambda\varphi_{vu} = (N \circ \varphi)_{vu}$$

y por ende $\lambda_v\varphi_u = \lambda_u\varphi_v$ en $\mathcal{V}$, pero φ_u y φ_v son linealmente independientes, es decir, $\lambda_u = \lambda_v = 0$. Vemos que λ es constante $\lambda \equiv c$.

c) *Si $c = 0$, entonces $DN = 0$ en $\varphi(\mathcal{V})$. Luego $\varphi(\mathcal{V})$ esta contenido en un plano. Si $c \neq 0$, definimos $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$ por*

$$f(u,v) := \varphi(u,v) - \frac{1}{c}(N \circ \varphi)(u,v)$$

se tiene que $f_u = \varphi_u - \frac{1}{c}(N \circ \varphi)_u = 0$ en $\mathcal{V}$, lo mismo para f_v. Luego f es constante, o sea, existe $p_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\varphi(u,v) - p_0 = \frac{1}{c}(N \circ \varphi)(u,v)$$

de este modo

$$|\varphi(u,v) - p_0| = \frac{1}{c}$$

en $\mathcal{V}$. Concluimos que $\varphi(\mathcal{V})$ esta contenida en la esfera de centro p_0 y radio $1/c$.

d) Este argumento demuestra que $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{I}_p = \lambda I_p$ es localmente constante y por conexidad es constante. Además, también es localmente constante la aplicación $F : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(p) = \lambda p - N(p)$$

Por lo tanto F es constante y Σ esta contenida en una esfera o un plano.

Teorema 13. *Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientable compacta y se tiene que H_Σ es constante, entonces Σ es una esfera.*

Teorema 14. *Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientable compacta y tal que k_Σ es constante, entonces Σ es una esfera.*

3.4. Isometrías

Definición 14.1. *Un mapeo diferenciable $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ entre superficies regulares es una* ***isometría local*** *si*

$$D\phi_p : T_p\Sigma \to T_{\phi(p)}\Sigma'$$

es una isometría lineal, es decir

$$\langle D\phi_p v, D\phi_p w\rangle_{\phi(p)} = \langle v, w\rangle_p$$

para todo $v, w \in T_p\Sigma$ y todo $p \in \Sigma$.

Observación: Si ϕ es isometría local, $D\phi_p$ es inyectiva para todo $p \in \Sigma$, luego es isomorfismo lineal. Por teorema de la función implica, ϕ es un difeomorfismo local.

Si además ϕ es un difeomorfismo, se dice que ϕ es una **isometría**.

Ejemplo: Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un movimiento rigido, en otras palabras, $F(p) = L_p + p_0$ con L_p una isometría lineal y si $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ es superficie regular entonces $F(\Sigma) = \Sigma'$ es una superficie regular y

$$\phi = F\Big|_\Sigma : \Sigma \to \Sigma'$$

es difeomorfismo. Además, para todo $p \in \Sigma$ y todo $v \in T_p\Sigma$

$$D\phi_p v = D(F\Big|_\Sigma)_p v = DF(p)v = Lv$$

luego $D\phi_p : T_p\Sigma \to T_{\phi(p)}\Sigma'$ es una isometría lineal.