Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Gregorio Moreno – Estudiante: Benjamín Mateluna

Teoría de Integración - MAT2534
Tarea 2
09 de Mayo de 2025

Problema 1

Problema 2

a) A

b) Sea $(s_n)_n$ una sucesión de funciones simples positivas tales que $s_n \uparrow f$, por la parte anterior, tenemos que

$$\int s_n \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int \inf_{k\geq n} f_k \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

lo que implica que

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

se tiene el lema de fatou.

c) Sean $f, f_n : \Omega \to [0,\infty]$ funciones medibles tales que $f_n \leq f_{n+1}$ y $f_n \to f$ μ-ctp. Por monotonía, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$$

por otro lado, por la parte b), tenemos que

$$\begin{aligned}\int f \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu\end{aligned}$$

lo que prueba el teorema de convergencia monótona.

Problema 3

Problema 4

a) Notemos que $\mathbb{1}_X = \mathbf{1} \in \mathcal{V}$, entonces $X \in \mathcal{G}$. Sea $E \in \mathcal{G}$, luego $\mathbb{1}_E \in \mathcal{G}$, como $\mathcal{V}$ es espacio vectorial, vemos que

$$\mathbb{1}_{E^c} = \mathbf{1} - \mathbb{1}_E \in \mathcal{V}$$

se sigue que $E^c \in \mathcal{G}$. En primer lugar veremos que si $A, B \in \mathcal{G}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{G}$. En efecto, veamos que $\mathbb{1}_{A\cup B} = \max\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\} \in \mathcal{V}$, inductivamente se tiene que $\mathcal{G}$ es cerrado bajo uniones finitas. Sea $(A_n)_n \subseteq \mathcal{G}$, definimos la sucesión

$$E_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{G}$$

notemos que $E_n \subseteq E_{n+1}$ lo que implica que $\mathbb{1}_{E_n} \leq \mathbb{1}_{E_{n+1}} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} = \sup_n \mathbb{1}_{E_n} \in \mathcal{V}$$

Concluimos que $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra.

b) Como lema, veamos que dadas $f, g \in \mathcal{V}$ se tiene que $\min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\} \in \mathcal{V}$. Sea $f \in \mathcal{V}$, basta ver que $A := f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{G}$ para todo $a \in \mathbb{R}$, es decir, $\mathbb{1}_A \in \mathcal{V}$. Definimos

$$f_n := \min\{\mathbf{1}, \max\{\mathbf{0}, n(f - \mathbf{a})\}\} \in \mathcal{V}$$

donde $\mathbf{0} = \mathbb{1}_\emptyset$ y $\mathbf{a} = a\mathbf{1}$, ambos en $\mathcal{V}$. Notemos que $f_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $f_n \leq f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos dos casos

- $x \in A$, entonces $f(x) - \mathbf{a} > 0$ y luego $n(f(x) - \mathbf{a}) \leq (n+1)(f(x) - \mathbf{a})$ lo que implica que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.
- $x \notin A$, entonces $f_n(x) = 0$.

por lo tanto $\sup_n f_n \in \mathcal{V}$. Afirmamos que $\mathbb{1}_A = \sup_n f_n$, en efecto, sea $x \in A$, por propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq n(f(x) - \mathbf{a})$ y por ende $f_n(x) = 1$, se sigue que $\sup_n f_n(x) = 1$. Concluimos que f es $\mathcal{G}$- medible.

c) Definimos una medida μ sobre el espacio $(X, \mathcal{G})$ dada por $\mu(E) = I(\mathbb{1}_E)$ con $E \in \mathcal{G}$. Veamos que, en efecto, es una medida,

- Como $\mathbb{1}_E \geq 0$ para todo $E \in \mathcal{G}$, entonces $I(E) \geq 0$, se sigue que μ es positiva.
- Notemos que $\mu(\emptyset) = I(\mathbb{1}_\emptyset) = I(\mathbf{0}) = 0$, lo anterior se debe a que I es lineal.
- Sea $(A_n)_n \subseteq \mathcal{G}$ disjuntos de a pares, entonces

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}$$

de este modo

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= I\left(\mathbb{1}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}\right) = I\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}\right) = I\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}\right) + I\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_m}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} I(\mathbb{1}_{A_i}) + I\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_m}\right)\end{aligned}$$

Consideremos la sucesión $f_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_m}$, luego $f_n \geq f_{n+1}$ y como $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}$, se sigue que $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = 0$, por lo tanto $\lim\limits_{n \to \infty} I(f_n) = 0$, así

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} I(\mathbb{1}_{A_i}) + I(f_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} I(\mathbb{1}_{A_n}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Por otro lado, μ es de medida finita, en efecto, $\mu(X) = I(\mathbf{1}) \in \mathbb{R}$. En particular, μ es una medida sobre el álgebra $\mathcal{G}$, por teorema de Caratheodory, $\mu^*\big|_{\mathcal{F}}$ es la unica extensión de μ a $\sigma(G)$. Sin embargo, $\sigma(G) = G$ ya que G es σ-álgebra y por ende $\mu^*\big|_{\mathcal{F}} = \mu$.

Falta ver que dada $f \in \mathcal{V}$ se tiene que

$$I(f) = \int f \, d\mu$$

Supongamos que f es simple y sea $\sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$ una representación, entonces

$$\int f \, d\mu = \sum a_i \mu(A_i) = \sum a_i I(\mathbb{1}_{A_i}) = I\left(\sum a_i \mathbb{1}_{A_i}\right) = I(f)$$

Sea $f \in \mathcal{V}$ tal que $f \geq 0$, sea $(s_n)_n$ una sucesión de funciones simples positivas tales que $s_n \uparrow f$, entonces la sucesión $g_n = f - s_n$ es decreciente y $g_n \to 0$, entonces $I(g_n) \to 0$, se sigue que

$$I(f) = \lim_{n \to \infty} I(s_n) = \lim_{n \to \infty} \int s_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

Sea $f \in \mathcal{V}$, entonces

$$\int f \, d\mu = \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu = I(f_+) - I(f_-) = I(f)$$