Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Mauricio Bustamante – Estudiante: Benjamín Mateluna

Topología Algebraica - MAT2850
Tarea 1
21 de agosto de 2025

Problema 1

Lema: *Sean $f_0, f_1 : X \to Y$ homotópicas y $g_0, g_1 : Y \to Z$ homotópicas, entonces $g_0 \circ f_0$ es homotópica a $g_1 \circ f_1$.*

Demostración. Consideramos la función

$$\begin{aligned} H : X \times [0,1] &\to Z \quad \text{dada por} \\ (x,t) &\to H_g(H_f(x,t),t) \end{aligned}$$

donde H_g es una homotopía entre g_0 y g_1, similarmente para H_f. Notemos que

$$H(x,0) = H_g(H_f(x,0),0) = g_0(f_0(x)) = g_0 \circ f_0(x)$$

análogamente, se tiene que $H(x,1) = g_1 \circ f_1(x)$. Veamos que H es continua, para ello tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r, "id_X \times i"] \arrow[rrr, bend right, "H"'] & X \times [0,1]^2 \arrow[r, "H_f \times id_{[0,1]}"] & Y \times [0,1] \arrow[r, "H_g"] & Z \end{tikzcd}$$

donde $i : [0,1] \to [0,1]^2$ esta dada por $i(t) = (t,t)$, que es continua por la propiedad universal de la topología producto, de modo similar, el resto de funciones son continuas. Por lo tanto, H es continua, ya que corresponde a la composición de funciones continuas. $\square$

Debemos probar tres puntos, que son los siguientes,

(1) Sea X espacio topológico, veamos que $X \sim X$. Consideramos el homeomorfismo $id_X : X \to X$, en particular, se tiene que $id_X \circ id_X = id_X$ es homotópica a id_X mediante la homotopía constante, luego $X \sim X$.

(2) Debemos verificar que si $X \sim Y$ entonces $Y \sim X$. Como $X \sim Y$, existe $f : X \to Y$ equivalencia homotópica, sea $g : Y \to X$ su inversa homotópica. En particular, $g : Y \to X$ es continua y se cumple que $g \circ f \sim id_Y$ y $f \circ g \sim id_X$, es decir, g es equivalencia homotópica. Por lo tanto, $Y \sim X$.

(3) Sea $f : X \to Y$ una equivalencia homotópica y sea f_h su inversa homotópica. Consideramos $g : Y \to Z$ equivalencia homotópica. Afirmamos que $g \circ f : X \to Z$ es equivalencia homotópica. En efecto, veamos que la función

$$f_h \circ g_h : Z \to X$$

es equivalencia homotópica. Notemos, por el lema previo, que

$$g \circ f \circ f_h \circ g_h \sim g \circ id_Y \circ g_h = g \circ g_h \sim id_Z$$

del mismo modo $f_h \circ g_h \circ g \circ f \sim id_X$. Concluimos que $X \sim Z$.

Problema 2

Para este problema diremos que $x \sim_p y$ si y solo si $[x]^p = [y]^p$, donde $[\cdot]^p$ es la componente conexa del punto. Esta relación resulta ser de equivalencia.

Lema: *Sea $h : X \to X$ con $h \sim id_X$, entonces $x \sim_p h_x$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Como $h \sim id_X$, existe $H : X \times [0,1] \to X$ una homotopía entre h e id_X. Definimos la función $\gamma : [0,1] \to X$ dada por $\gamma(t) := H(x,t)$, que es continua por la propiedad universal de la topología de subespacio. Así, $h(x) \in [x]^p$, lo que implica que $x \sim_p h(x)$. $\square$

Sean $X \sim Y$, existe $f : X \to Y$ equivalencia homotópica y sea $g : Y \to X$ su inversa homotópica. Afirmamos que si $x \not\sim_p y$ entonces $f(x) \not\sim_p f(y)$. Supongamos que existen $x, y \in X$ tales que $x \not\sim_p y$ y $f(x) \sim_p f(y)$. Como g es continua, tenemos que $g(f(x)) \sim_p g(f(y))$. Por el lema, resulta que

$$x \sim_p g \circ f(x) \sim_p g \circ f(y) \sim_p y$$

lo cual es una contradicción.

Lo anterior prueba que hay una inyección de las componentes arcoconexas de X en las de Y. Por simetría, vemos que también hay una inyección de las componentes arcoconexas de Y en X, así, por cantor bernstein, ambos conjuntos estan en correspondencia uno a uno.

Notemos que D^1 es arcoconexo ya que es convexo, luego la cantidad de componentes componentes arcoconexas es uno. Por otro lado, veamos que $\{0, 1\}$ no es conexo, pues la topología topología inducida es la discreta y por lo tanto hay dos componentes conexas. De este modo, no existe equivalencia homotópica entre D^1 y $\S^0$.

Problema 3

Lema: *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto finito de puntos, entonces $X := \mathbb{R}^2 \setminus A$ es arcoconexo.*

Demostración. Digamos que $A = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Como A es finit, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x_i) \cap A = x_i$ para todo $1 \le i \le n$. Sean $x, y \in X$, en $\mathbb{R}^2$ consideramos el segmento de recta $L_{xy} := \{(1-t)x + ty : t \in [0, 1]\}$. Si $L_{xy} \cap A = \emptyset$ es vacío, no hay nada que probar, supongamos que existe i tal que $x_i \in L_{xy} \cap A$.

Sea $v \in (L_{xy} - x) \perp$ y definimos $L^*_{xy} := \{tv + x_i : t \in \mathbb{R}\}$. Existe $\delta > 0$ tal que $\overline{B_\delta(x_i)} \subseteq B_\varepsilon(x_i)$, sean $u, v \in L_{xy} \cap \partial B_{\delta(x_i)}$ y $w \in L^*_{xy} \cap \partial B_\delta(x_i)$ que existen pues $L_{xy} \cap L^*_{xy}$ contienen a x_i, además u, v, w no son colineales ya que $L_{xy} \cap L^*_{xy} = x_i$.

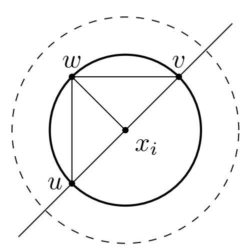
Sean $t_0 < t_1$ tales que $u = (1 - t_0)x + t_0 y$ y $v = (1 - t_1)x + t_1 y$. Consideramos

$$L = L_{xu} \cdot L_{uw} \cdot L_{wv} \cdot L_{vy}$$

donde $\cdot$ es la operación de concatenación. Como $t_0 < t_1$, vemos que $x_i \notin L_{xu} \cup L_{vy}$. Además, como $u \in L_{xy} \cap L_{uw}$ y $v \in L_{xy} \cap L_{wv}$, entonces $x_i \notin L_{uw} \cdot L_{wv}$ y por convexidad resulta que

$$L_{uw} \cdot L_{wv} \cap A = \emptyset$$

Si $(L_{xu} \cup L_{vy}) \cap \emptyset$ entonces L es el camino buscado, de lo contrario, repetimos el procedimiento para cada punto en la intersección, por finitud, concluimos.



En la figura se muestra la situación. □

Sea $f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$, definimos $\mathbb{V} := \{x \in \mathbb{C}^n : f(x) = 0\}$. Notemos que

$$Conf_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i,j} \mathbb{V}(x_i - x_j)$$

Sean $x, y \in Conf_n(\mathbb{C})$, en $\mathbb{C}^n$ consideramos la recta $L_{xy} := \{(x-y)z + y : z \in \mathbb{C}\}$, como $\mathbb{V}(x_i - x_j)$ es un hiperplano de dimensión $n-1$, se tiene que $L_{xy} \cap \mathbb{V}(x_i - x_j)$ es vacío, un punto o L_{xy}. Dado que $x, y \in Conf_n(\mathbb{C})$, vemos que $|L_{xy} \cap \mathbb{V}(x_i - x_j)| \le 1$, así

$$\left| L_{xy} \cap \bigcup_{i,j} \mathbb{V}(x_i - x_j) \right| \le \sum_{i,j} |L_{xy} \cap \mathbb{V}(x_i - x_j)| \le n^2$$

Notemos que $L_{xy} \cong \mathbb{C}$ con la identificación $w \to (x - y)w + y$, pero también $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, entonces $L_{xy} \setminus \bigcup \mathbb{V}(x_i - x_j) \cong \mathbb{R}^2 \setminus A$ con A un subconjunto finito.

Problema 4

(1) Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología discreta. Supongamos, por contradicción, que existe (K, f) tales que $f : |K| \to \mathbb{R}$ es homeomorfismo. Como $|K|$ es segundo contable, pues $\mathbb{R}^\infty$ es segundo contable, entonces X es segundo contable, lo cual es una contradicción.

(2) Probaremos un resultado previo.
Lema: *Sea X un espacio separable. Entonces todo conjunto discreto es numerable.*

> *Demostración.* Sea $B \subseteq X$ un denso numerable. Sea $A \subseteq X$ un subconjunto discreto. Sea $x \in A$, como A es discreto, existe $U_x \subseteq X$ vecindad de x tal que $U_x \cap A = x$. Por densidad, existe $b_x \in U_x \cap B$. Definimos la función
>
> $$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\to b_x \end{aligned}$$
>
> Si $x \neq y$ entonces $U_x \cap U_y = \emptyset$, luego la función f es inyectiva. □

Sea $X = \ell^\infty(\mathbb{N})$ con la topología inducida por la norma. Sea $S \subseteq \mathbb{N}$, definimos

$$x_S = (x_n)_n \quad \text{con} \quad x_n := \begin{cases} 1 & \text{si } n \in S \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Consideramos $A = \{x_S : S \subseteq \mathbb{N}\}$, notemos que A es no numerable y además si $S \neq T$ se tiene que

$$\|x_S - x_T\|_\infty = 1$$

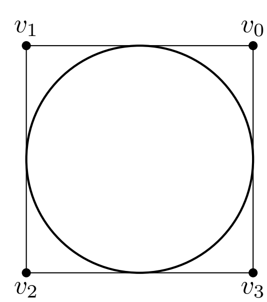
es decir, A es discreto, por el lema llegamos a una contradicción, lo que concluye el resultado.

(3) Demostraremos un lema previo.
Lema: *Sea K un complejo simplicial con finitos vértices. Entonces $|K|$ es localmente arcoconexo.*

Problema 5

Debemos triangular tres espacios, que son los siguientes

(1) En $\mathbb{R}^2$ consideramos los puntos $v_0 = (1, 1)$, $v_1 = (-1, 1)$, $v_2 = (-1, -1)$ y $v_3 = (1, -1)$. Y sean $\sigma_0 = \langle v_0, v_1\rangle$, $\sigma_1 = \langle v_0, v_3\rangle$, $\sigma_2 = \langle v_2, v_1\rangle$ y $\sigma_3 = \langle v_2, v_3\rangle$ los 1−simplices generados por los vértices. Sea $K := \bigcup\{\sigma_i, v_i\}$, es claro que K es complejo simplicial.



Probaremos que $|K| \cong \mathbb{S}^1$. Denotamos por $|\cdot|$ la norma euclideana y $\|\cdot\|$ a la norma que corresponde al máximo del valor absoluto de cada entrada. Consideramos la función

$$f : |K| \to \mathbb{S}^1 \quad \text{dada por}$$
$$x \to \frac{x}{|x|}$$

que resulta ser continua ya que $|K| \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Afirmamos que $g : \mathbb{S}^1 \to |K|$ dada por

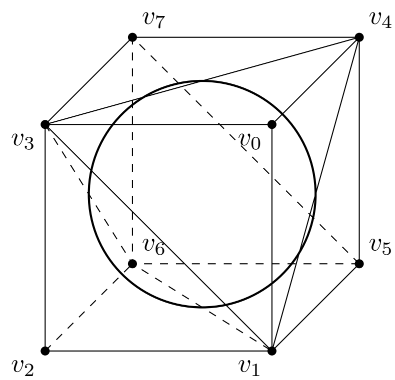
$$g(x) := \frac{x}{\|x\|}$$

Notemos que g esta bien definida, ya que $\{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : \|x\| = 1\} = |K|$. Como $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ son normas equivalentes, inducen la misma topología y por lo tanto g es continua ya que $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Luego,

$$f \circ g(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{\frac{x}{\|x\|}}{\left|\frac{x}{\|x\|}\right|} = x$$

es decir, $f \circ g = id_{\mathbb{S}^1}$. Del mismo modo, $g \circ f = id_{|K|}$. Lo que prueba que (K, f) es una triangulación de $\mathbb{S}^1$. Así, la característica de Euler de la triangulación es $V - E + F = 4 - 4 + 0 = 0$.

(2) En $\mathbb{R}^3$ tomemos los puntos de la forma $(\pm1, \pm1, \pm1)$ que en total son 8 y son vértices del cubo $[-1, 1]^3$. Definimos el complejo simplicial K que tiene por poliedro al cubo y que esta representado en la siguiente figura



Los puntos v_i corresponden a los vértices del complejo, los segmentos a los $1-$simplejos y también se consideran los $2-$simplejos encerrados por tres segmentos, por ejemplo, el simplice $\sigma = \langle v_0, v_3, v_4\rangle$. Afirmamos que $|K| \cong \mathbb{S}^2$. Del mismo modo que antes definimos la función continua $f : |K| \to \mathbb{S}^2$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

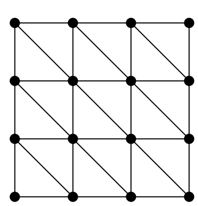
con inversa continua $g : \mathbb{S}^2 \to |K|$ dada por

$$g(x) := \frac{x}{\|x\|}$$

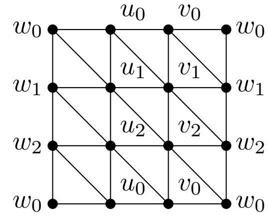
donde $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$ son la norma euclideana y la norma del máximo respectivamente. Concluimos que (K, f) es una triangulación de $\mathbb{S}^2$ cuya característica de Euler es $V - E + F = 8 - 18 + 12 = 2$.

(3) -

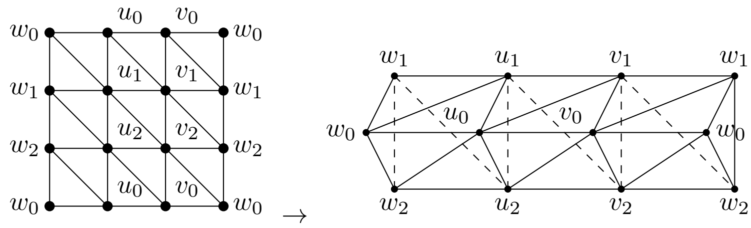
Triangulamos $[0, 1]^2$ del siguiente modo,

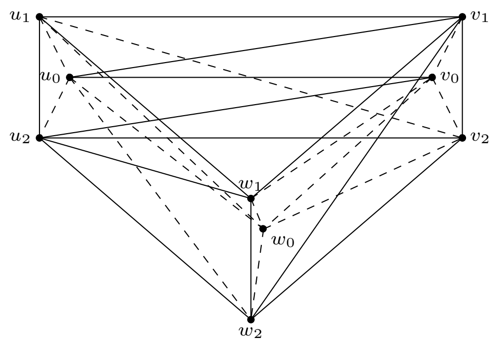


Donde cada vértice corresponde a un par ordenado con coordenadas en el conjunto $\{0, 1/3, 2/3, 1\}$, denotaremos por $V_\square$ al conjunto de vértices. Definimos $f : V_\square \to V$ de modo que cada vértice en $V_\square$ se mapea a $|K|$ como en la siguiente figura,



Luego, f se extiende linealmente a una función continua continua de $[0, 1]^2$ a $|K|$. Como f es sobreyectiva en vértices, se tiene que f es cociente. Así, la función realiza las siguientes acciones sobre $[0, 1]^2$





Sea π la proyección a $\mathbb{T}^2$. Veamos que f es constante en las fibras de π y viceversa. (...). Así, por propiedad universal de topología cociente, f induce una función continua $\rho : |K| \to \mathbb{T}^2$ y del mismo modo π induce una función $h : \mathbb{T}^2 \to |K|$ también continua. Tenemos el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]^2} \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathbb{T}^2 \arrow[r, dashed, shift left, "h"] & {|K|} \arrow[l, dashed, shift left, "\rho"]
\end{tikzcd}$$

Veamos que h es la inversa de ρ. Sabemos que $\rho \circ f = \pi$ y $h \circ \pi = f$. Luego, sea $y \in |K|$, existe $x \in [0,1]^2$ tal que $y = f(x)$, así $h \circ \rho(y) = h \circ \rho \circ f(x) = h \circ \pi(x) = f(x) = y$, por otro lado, $\rho \circ h([x]) = \rho \circ h \circ \pi(x) = \rho \circ f(x) = [x]$. Por lo tanto, (K, ρ) es una triangulación del toro. La característica de Euler es $V - E + F = 9-$.