Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Gregorio Moreno – Estudiante: Benjamín Mateluna

Teoría de Integración - MAT2534
Tarea 4
25 de junio de 2025

Problema 1

a) Sea $f \in H$, como V es un subespacio cerrado, existen únicos $f_V \in V$ y $f_\perp \in V^\perp$ tales que $f = f_V + f_\perp$. Luego, dada $g \in V$, se tiene que

$$\int f\overline{h}\, d\mu = \int (f_V + f_\perp)\overline{h}\, d\mu = \int f_V \overline{h}\, d\mu + \int f_\perp \overline{h}\, d\mu$$

y como $f_\perp \in V^\perp$ vemos que

$$\int f\overline{h}\, d\mu = \int f_\perp \overline{h}\, d\mu$$

como V es cerrado, es completo respecto a la norma inducida por el producto interno de H, es decir, V es un espacio de Hilbert. Consideramos el funcional lineal $I : V \to \mathbb{C}$,

$$I(h) = \int f_\perp \overline{h}\, d\mu$$

que resulta ser continuo por la desigualdad de Hölder. Por el teorema de representación de Riesz, existe un único $g \in V$ tal que

$$\int f\overline{h}\, d\mu = \int f_\perp \overline{h}\, d\mu = \int g\overline{h}\, d\mu$$

b)

c)

Problema 2

a) Como $u \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$ satisface $-u'' + u = f$, entonces dada $v \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$ se tiene que $-u''v + uv = fv$, por la desigualdad de Hölder, vemos que fv es integrable, además $-u''v + uv \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$. Integrando a ambos lados y usando integración por partes tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} fv\, d\lambda &= \int_{[a,b]} -u''v + uv\, d\lambda = -\int_{[a,b]} u''v\, d\lambda + \int_{[a,b]} uv\, d\lambda \\
&= -u'v\Big|_a^b + \int_{[a,b]} u'v'\, d\lambda + \int_{[a,b]} uv\, d\lambda \\
&= \int_{[a,b]} (uv + u'v')\, d\lambda
\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se debe a que $supp(v) \subseteq (a,b)$.

b) Sea $[c,d] \subseteq [a,b]$, con $a < c < d < b$. Entonces, existe una sucesión acotada $(v_n)_n \subseteq \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$ tal que $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{1}_{[c,d]}$ para $x \in [a,b]$. Por otro lado, integrando por partes, observamos que

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} fv_n\, d\lambda &= \int_{[a,b]} (uv_n + u'v_n')\, d\lambda = \int_{[a,b]} u'v_n'\, d\lambda + \int_{[a,b]} uv_n\, d\lambda \\
&= \int_{[a,b]} -u''v_n + uv_n\, d\lambda
\end{aligned}$$

Existe $M > 0$ tal que $v_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $|v_n f| \leq M |f|$ y además $v_n f$ converge puntualmente a $\mathbb{1}_{[c,d]} f$, por el mismo argumento se tiene para $\mathbb{1}_{[c,d]}(-u'' + u)$. De este modo, como $f, u \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$, por teorema de convergencia dominada se sigue que

$$\int_{[c,d]} f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f v_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} -u'' v_n + u v_n \, d\lambda = \int_{[c,d]} -u'' + u \, d\lambda$$

como esto es para c, d arbitrarios, concluimos que $f = -u'' + u \ \lambda - ctp$.

Afirmamos que esta igualdad se cumple para todo $x \in (a,b)$. Supongamos, por contradicción, que existe $x \in (a,b)$ tal que $f(x) \neq -u''(x) + u(x)$, como f, u y u'' son continuas, existe un intervalo abierto $I \subseteq [a,b]$ tal que $f(x) \neq -u''(x) + u(x)$ para todo $x \in I$. Esto contradice que la igualdad sea en casi todas partes.

c) Sea $u \in H$, entonces existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$ tal que $u_n \to u$ con la norma $\|\cdot\|_H$. En particular, la sucesión u_n es de cauchy, además, se tiene que

$$\|u_n\|_H^2 = \int |u_n|^2 + |u_n'|^2 \, d\lambda \geq \int |u_n'|^2 \, d\lambda = \|u_n'\|_{L^2}^2$$

entonces, la sucesión $v_n := u_n' \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$ es de cauchy según la norma en L^2. Como este espacio es un espacio métrico completo, existe $v \in L_0^2$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int |v_n' - v|^2 \, d\lambda = 0$$

Afirmamos que v es la función buscada. Sea $w \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$, entonces

$$\int v_n w \, d\lambda = \int u_n' w \, d\lambda = u_n w \Big|_a^b - \int u_n w' \, d\lambda = -\int u_n w' \, d\lambda$$

Basta demostrar que $v_n w$ y $u_n w'$ convergen a vw y uw' en L^1 respectivamente. En efecto, por hölder tenemos que

$$\int |v_n w - vw| \, d\lambda = \int |v_n - v| \, |w| \, d\lambda \leq \|v_n - v\|_2 \, \|w\|_2$$

y por otro lado

$$\int |u_n w' - uw'| \, d\lambda = \int |u_n - u| \, |w'| \, d\lambda \leq \|u_n - u\|_2 \, \|w'\|_2 \leq \|u_n - u\|_H \, \|w'\|_2$$

como $w \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$ vemos que $\|w\|_2, \|w'\|_2 < \infty$ y usando la convergencia en H y L^2 se tiene le resultado. Resta ver que v es única. Supongamos, por contradicción, que existe $\widehat{v} \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$ tal que

$$\int \widehat{v} w \, d\lambda = -\int u w' \, d\lambda$$

para toda $w \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$. Entonces para toda $w \in \mathcal{C}_0^\infty[a,b]$, se tiene que

$$\int v w \, d\lambda = \int \widehat{v} w \, d\lambda \quad \text{lo que implica que} \quad \int (v - \widehat{v}) w \, d\lambda = 0$$

por el mismo argumento que antes, para todo $c < d$ con $c, d \in (a,b)$ se tiene que

$$\int_{[c,d]} v - \widehat{v} \, d\lambda = 0$$

concluimos que $v = \widehat{v} \ \lambda - ctp$, lo que prueba la unicidad en L^2.

d) Sean $u, w \in H$, existe $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_0^\infty$ tal que $w_n \to w$ según la norma $\|\cdot\|_H$. Por la parte anterior, tenemos que

$$\int u' w_n \, d\lambda = -\int u w_n' \, d\lambda$$

Por el mismo argumento que antes, sabemos que $\|u' w_n - u' w\|_1 \leq \|w_n - w\|_H \, \|u'\|_2$ y además $\|u w_n' - u w'\|_1 \leq \|u\|_2 \, \|w_n' - w'\|_2$ y por lo tanto

$$\int u' w \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int u' w_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} -\int u w_n' \, d\lambda = \int u w' \, d\lambda$$

e)