



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: PEDRO GASPAR – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

Geometría Diferencial - MAT2860

Apuntes

06 de Marzo de 2025

Índice

1. Introducción	3
1.1. Evaluaciones	3
2. Curvas en \mathbb{R}^n	4
2.1. Curvas parametrizadas	4
2.2. Longitud y Parametro de Arco	4
2.3. Curvatura de una Curva Regular (Teoría Local de Curvas)	6
2.4. Teoría Local de Curvas en el Espacio	8
3. Superficies Regulares	12
3.1. Definición y ejemplos	12

1. Introducción

1.1. Evaluaciones

Habrán tres interrogaciones (I1, I2, I3) cada una vale un 25 % y un examen (EX) que vale un 25 %. Las fechas son 14 de abril, 19 de Mayo, 16 de Junio y 3 de Julio respectivamente.

2. Curvas en \mathbb{R}^n

2.1. Curvas parametrizadas

Consideramos $\mathbb{R}^n := \{v = (v_1, \dots, v_n) : v_i \in \mathbb{R}\}$. Un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión n , con el producto escalar dado por

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i \quad \text{con } v, w \in \mathbb{R}^n$$

Definición 0.1. Una curva parametrizada en \mathbb{R}^n es una función continua $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con I un intervalo abierto. Escribimos $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$.

Diremos que α es diferenciable si sus funciones coordenadas $\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty$. En tal caso, el vector $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t))$ se llama vector tangente a la curva α en $t \in I$

Definición 0.2. La traza de una curva parametrizada $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es $\alpha(I) = \text{im}(\alpha)$.

Ejemplos

- a) Si $p, v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$, la curva parametrizada $\alpha(t) = tv + p$ con $t \in \mathbb{R}$ que describe una recta que pasa por $p = \alpha(0)$ con vector tangente $\alpha'(t) = v$.
- b) Sea $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\beta(t) := t^3 \cdot \vec{e}_1$ es una curva parametrizada diferenciable con $\beta'(t) = 3t^2 \cdot \vec{e}_1$.
- c) Sea $p \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$ consideramos $\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t)) + p$, una curva parametrizada diferenciable cuya traza es $\alpha(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y) - p| = r\}$
- d) Sean $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$ con $t \in \mathbb{R}$ se llama una helice circular. Además $\alpha'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b)$.
- e) Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ es una curva parametrizada diferenciable con $\alpha(-2) = \alpha(2) = 0$, pero $\alpha'(-2) \neq \alpha'(2)$.

2.2. Longitud y Parametro de Arco

Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada, consideremos $[a, b] \subseteq I$. Buscamos medir la longitud de $\alpha([a, b])$. Una estrategia, dada una partición $P := \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ de $[a, b]$ calculamos

$$\sum_{i=1}^k |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| =: L_a^b(\alpha, P)$$

esta suma corresponde a la longitud de una curva poligonal que pasa por los puntos $\alpha(t_i)$. Si $Q \supseteq P$ es otra partición de $[a, b]$, entonces $L_a^b(\alpha, Q) \geq L_a^b(\alpha, P)$.

Definición 0.3. La longitud de una curva parametrizada α sobre $[a, b] \subseteq I$ es

$$L_a^b(\alpha) = \sup\{L_a^b(\alpha, P) : P \text{ es partición de } [a, b]\}.$$

Si α es diferenciable sobre $[a, b]$ y hacemos $|P| = \max\{t_i - t_{i-1}\}$ muy pequeña, esperaríamos que $|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| \approx |\alpha'(\bar{t}_i)| (t_i - t_{i-1})$.

Proposición 0.1. Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable sobre $[a, b] \subseteq I$, entonces

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

(Para la demostración revisar Montiel-Ros, página 5)

Corolario 0.1. Tenemos que $|\alpha(a) - \alpha(b)| \leq L_a^b(\alpha)$.

Corolario 0.2. Si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cumple $|DF(p)v| = |v|$ para todo $p, v \in \mathbb{R}^n$, entonces $L_a^b(F \circ \alpha) = L_a^b(\alpha)$.

De hecho, $F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable, con

$$|(F \circ \alpha)'(t)| = |DF(\alpha(t))\alpha'(t)| = |\alpha'(t)|$$

para todo $t \in I$, basta con integrar sobre $[a, b]$. Si $p_0 \in \mathbb{R}^n$ y $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal ortogonal, esto es, $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$, entonces $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $F(p) = Ap + p_0$ cumple

$$DF(p)v = \frac{d}{dt}F(p + tv)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(A(p + tv) + p_0)\Big|_{t=0} = Av$$

Por lo tanto $|DF(p)v| = |Av| = |v|$.

Corolario 0.3. Si $h : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ es un difeomorfismo y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una curva parametrizada diferenciable, entonces

$$L_a^b(\alpha \circ h) = L_c^d(\alpha)$$

donde $h([a, b]) = [c, d]$ para todo $[a, b] \subseteq J$.

Por regla de la cadena tenemos que $(\alpha \circ h)'(t) = h'(t)\alpha'(h(t))$. La curva $\alpha \circ h$ tiene la misma traza que α , en efecto $(\alpha \circ h)(J) = \alpha(h(J)) = \alpha(I)$. Decimos que $\alpha \circ h$ es una reparametrización de la curva α .

Demostración. Como h y h^{-1} son diferenciables, se tiene que $h'(t) \neq 0$ para todo $t \in J$. Veamos que

$$1 = \frac{d}{dt}(t) = (h^{-1} \circ h)'(t) = (h^{-1})'(h(t))h'(t)$$

Luego como J es un intervalo y h' es continua, tenemos que $h' < 0$ o $h' > 0$.

- Si $h' < 0$, entonces $h(a) = c$, $h(b) = d$,

$$\int_a^b |(\alpha \circ h)'(t)| dt = \int_a^b |\alpha'(h(t))| |h'(t)| dt = \int_c^d |\alpha'(s)| ds = L_c^d(\alpha)$$

- Si $h' > 0$, entonces $h(b) = c$, $h(a) = d$,

$$\int_a^b |(\alpha \circ h)'(t)| dt = \int_a^b |\alpha'(h(t))| |h'(t)| dt = \int_d^c |\alpha'(s)| ds = \int_c^d |\alpha'(s)| ds = L_c^d(\alpha)$$

Definición 0.4. Se dice que una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Si además $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$ se dice que α está parametrizada por el arco.

Una curva α parametrizada por el arco tiene las siguientes propiedades

- $\alpha'(t)$ es ortogonal a $\alpha''(t)$ para todo $t \in I$, en efecto

$$0 = \frac{d}{dt}(|\alpha'(t)|^2) = \frac{d}{dt}(\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle) = 2 \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle$$

- Se tiene que $L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt = b - a$.

Teorema 1. Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable regular, entonces α admite una parametrización por arco. Concretamente, si $t_0 \in I$ y definimos $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$s(t) := \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$$

entonces s es un difeomorfismo sobre $J \subseteq \mathbb{R}$ y $\alpha \circ s^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ está parametrizada por el arco.

Demostración. Por TFC, sabemos que s es diferenciable, mas aun, $s'(t) = |\alpha'(t)|$ para todo $t \in I$. Luego, $s' > 0$, es decir, s es creciente y $s(I) = J$ es un intervalo abierto. Además, por teorema de la función inversa,

vemos que

$$(s^{-1})'(r) = \frac{1}{s'(s^{-1}(r))} = \frac{1}{|\alpha'(s^{-1}(r))|} \quad \forall r \in J$$

Por lo tanto $|(\alpha \circ s^{-1})'(r)| = 1$ para todo $r \in J$, luego $\alpha \circ s^{-1}$ esta parametrizada por el arco.

Ejemplos

a) Sea $\alpha(t) = tv + p_0$ con $p_0, v \in \mathbb{R}^n$ y $v \neq 0$. Como $\alpha'(t) = v$, tenemos

$$s(t) = \int_0^t |v| dx = t|v|$$

entonces $\alpha \circ s^{-1}(x) = x \cdot \frac{v}{|v|} + p_0$ es una parametrización por el arco de α .

b) Consideremos $\alpha(t) = (rcost, rsent) + p_0$ con $p_0 \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$. Como $\alpha'(t) = (-rsent, rcost)$ entonces $|\alpha'(t)| = r$, tenemos que

$$s(t) = \int_0^t r dx = rt$$

y $(\alpha \circ s^{-1})(x) = (rcos(\frac{x}{r}), rsen(\frac{x}{r})) + p_0$ es una curva parametrizada por el arco para α .

c) Definimos $\alpha(t) = (acost, asent, bt)$ con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ una curva parametrizada por el arco es

$$(\alpha \circ s^{-1})(x) = \left(acos\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), asen\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

2.3. Curvatura de una Curva Regular (Teoría Local de Curvas)

Notación: Notamos por \mathcal{J} a la función $\mathcal{J} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\mathcal{J}(x, y) = (-y, x)$ que cumple lo siguientes

- \mathcal{J} es una transformación lineal ortogonal.
- $\langle u, \mathcal{J}u, \rangle = 0$ y $\mathcal{J}(\mathcal{J}u) = -u$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$.
- Si $|u| = 1$, entonces $\{u, \mathcal{J}u\}$ es una base ortonormal positiva de \mathbb{R}^2 .
- Si $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal ortogonal, entonces $\mathcal{J}A = \det(A)A\mathcal{J}$.

Nuestro objetivo es asociar a una curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una cantidad geometrica, para ello queremos definir una función $K(= K_\alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- a) K es invariante bajo movimientos rigidos.
- b) K es invariante por parametrizaciones.
- c) $K \equiv 0$ si y solo si α corresponde a un segmento de recta.

Si tenemos $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por el arco, definimos la función $T : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(s) := \alpha'(s)$ y $N : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $N(s) := \mathcal{J}T(s)$. Recordemos que $\{T(s), N(s)\}$ es una base ortonormal en \mathbb{R}^2 para cada $s \in I$ (Diedro de Frenet).

Notemos que $N(s) \perp T(s)$ y $T'(s) \perp T(s)$, luego, existe un $k(s) \in \mathbb{R}$ tal que $T'(s) = K(s)N(s)$. La función $K_\alpha = K : I \rightarrow \mathbb{R}$ se llama la curva de α . Tomando el producto con $N(s)$,

$$K(s) = \langle K(s)N(s), N(s) \rangle$$

Por lo tanto $K(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$. Por otro lado, observemos que

$$N'(s) = \frac{d}{ds}(\mathcal{J}T(s)) = \mathcal{J} \frac{d}{ds}(T(s)) = \mathcal{J}(K(s)N(s)) = \mathcal{J}(K(s)\mathcal{J}T(s)) = -K(s)T(s)$$

Proposición 1.1. Para una curva parametrizada por el arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ vale que $T' = KN$ y $N' = -KT$.

Ejemplos:

a) Una recta parametrizada por el arco $\alpha(s) := s \cdot \frac{v}{|v|} + p_0$ con $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, tenemos que

$$T(s) = \frac{v}{|v|}, N(s) = \frac{\mathcal{J}v}{|v|} = \frac{\mathcal{J}v}{|\mathcal{J}v|} \text{ y } K(s) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

b) Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ esta parametrizada y $K \equiv 0$, entonces $T'(s) = 0$ para todo $s \in I$, es decir, $\alpha''(s) = 0$ para todo $s \in I$. Integrando dos veces concluimos que cada coordenada de α es una función lineal, luego α es un segmento de recta.

c) Sea $\alpha(s) := \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right)\right) + p_0$, entonces

$$T(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right) \text{ y } N(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

Notemos que

$$T'(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right)\right) = \frac{1}{r} N(s)$$

Por lo tanto $K(s) = \frac{1}{r} \langle N(s), N(s) \rangle = \frac{1}{r}$.

Consideremos ahora una curva regular $\beta : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$ y una reparametrización $\alpha = \beta \circ h : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por el arco, donde $h : I \rightarrow \tilde{I}$ es un difeomorfismo con $h' > 0$. Con esto

$$|\beta'(t)| = |(\beta \circ h \circ h^{-1})'(t)| = |(\alpha \circ h^{-1})'(t)| = (h^{-1})'(t)$$

Así, definimos el diedro de Frenet de la curva α por

$$T_\beta(t) := \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = \frac{(\alpha \circ h^{-1})'(t)}{|(\alpha \circ h^{-1})'(t)|} = \frac{\alpha'(h^{-1}(t))h^{-1}(t)}{|\alpha'(h^{-1}(t))h^{-1}(t)|} = T_\alpha(h^{-1}(t))$$

Por otro lado

$$N_\beta = \mathcal{J}T_\beta(t) = \mathcal{J}T_\alpha(h^{-1}(t)) = N_\alpha(h^{-1}(t))$$

y definimos la curvatura de la curva β por

$$K_\beta(t) := K_\alpha(h^{-1}(t)), \quad t \in \tilde{I}$$

Como $\beta'(t) = |\beta'(t)| T_\alpha(h^{-1}(t))$ se tiene que

$$\beta'' = (|\beta'|)' T_\alpha \circ h^{-1} + |\beta'|^2 (T'_\alpha \circ h^{-1})$$

y además $N_\alpha \circ h^{-1} = \mathcal{J}T_\beta = \frac{\mathcal{J}\beta'}{|\beta'|}$ se sigue que

$$\frac{\langle \beta'', \mathcal{J}\beta' \rangle}{|\beta'|} = \left\langle (|\beta'|)' T_\alpha \circ h^{-1} + |\beta'|^2 (T'_\alpha \circ h^{-1}), N_\alpha \circ h^{-1} \right\rangle = |\beta'|^2 \langle T'_\alpha \circ h^{-1}, N_\alpha \circ h^{-1} \rangle = |\beta'|^2 K_\alpha \circ h^{-1}$$

Concluimos que $K_\beta = \frac{\langle \beta'', \mathcal{J}\beta' \rangle}{|\beta'|^3}$.

Proposición 1.2. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular, entonces

a) Si $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$ es un difeomorfismo entonces $K_{\alpha \circ \phi} = \text{sgn}(\phi') K_\alpha \circ \phi$.

b) Si $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un movimiento rígido, entonces $K_{F \circ \alpha} = (\det DF) K_\alpha$.

Demostración. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular

a) Como $(\alpha \circ \phi)'(t) = \phi'(t) \alpha'(\phi(t))$, se sigue que $|(\alpha \circ \phi)'(t)| = |\phi'(t)| |\alpha'(\phi(t))|$, escrito de otro modo

$$|(\alpha \circ \phi)| = \text{sgn}(\phi') \cdot \phi' |\alpha' \circ \phi|$$

Luego

$$\begin{aligned} K_{\alpha \circ \phi} &= \frac{\langle (\alpha \circ \phi)'', \mathcal{J}(\alpha \circ \phi)' \rangle}{|(\alpha \circ \phi)'|^3} = \frac{\langle \phi''(\alpha' \circ \phi) + (\phi')^2 \alpha'' \circ \phi, \phi' \mathcal{J}(\alpha' \circ \phi) \rangle}{\text{sgn}(\phi')(\phi')^3 |\alpha' \circ \phi|^3} \\ &= \frac{(\phi')^3 \langle \alpha'' \circ \phi, \mathcal{J} \alpha' \circ \phi \rangle}{(\phi')^3 |\alpha' \circ \phi|^3} \text{sgn}(\phi') = \text{sgn}(\phi') K_\alpha \circ \phi \end{aligned}$$

b) Sabemos que $F(p) = Ap + p_0$, entonces $DF = A$. Luego,

$$\begin{aligned} \langle (F \circ \alpha)'', \mathcal{J}(F \circ \alpha)' \rangle &= \langle (DF(\alpha)\alpha')', \mathcal{J}(DF(\alpha)\alpha') \rangle = \langle (A\alpha')', \mathcal{J}(A\alpha') \rangle \\ &= \langle A\alpha'', (\det A)A\mathcal{J}\alpha' \rangle = \det A \langle \alpha'', \mathcal{J}\alpha' \rangle \end{aligned}$$

Además $|(F \circ \alpha)'| = |A\alpha'| = |\alpha'|$. Juntando lo anterior vemos que

$$K_{F \circ \alpha} = \frac{\langle (F \circ \alpha)'', \mathcal{J}(F \circ \alpha)' \rangle}{|(F \circ \alpha)'|^3} = \det A \cdot K_\alpha$$

Proposición 1.3. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por el arco. Supongamos que existe una función diferenciable $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$. Entonces $K_\alpha = \frac{d\theta}{ds}$.

Demostración. Recordemos que

$$K_\alpha = \langle T'_\alpha, \mathcal{J}T_\alpha \rangle = \left\langle \left(-\frac{d\theta}{ds} \sin\theta, \frac{d\theta}{ds} \cos\theta \right), (-\sin\theta, \cos\theta) \right\rangle = \frac{d\theta}{ds} |(-\sin\theta, \cos\theta)|^2 = \frac{d\theta}{ds}$$

Teorema 2. Sea $K : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces existe una única curva parametrizada por el arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, salvo por movimientos rígidos, tal que $K_\alpha = K$.

2.4. Teoría Local de Curvas en el Espacio

Definición 2.1. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco. La curvatura de α en $s \in I$ es

$$K_\alpha := |T'(s)|$$

Observación: Para curvas en \mathbb{R}^3 , $K_\alpha \geq 0$. Además, $K_\alpha \equiv 0$ si y solo si α es un segmento de recta.

Definición 2.2. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco, tal que $K_\alpha > 0$. Definimos

$$N(s) := \frac{T'(s)}{|T'(s)|}$$

Observación: Como $T(s) \perp T'(s)$, pues $|T| = 1$, esta definición se condice con el caso en \mathbb{R}^2 , además de manera directa, obtenemos que $K_\alpha N(s) = T'(s)$.

Definición 2.3. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco. Definimos el vector binormal de α en $s \in I$ por

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

Observación: Por definición del producto cruz el conjunto $\{T, N, B\}$ es una base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 para todo $s \in I$ llamada el triédro de Frenet de α en $s \in I$.

Notemos que $B'(s) = \frac{d}{ds}(T(s) \times N(s)) = T'(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s) = T(s) \times N'(s)$. Además, $|B| = |T| |N| = 1$ y por lo tanto $B' \perp B$, por otro lado $\langle B', T \rangle = \langle T \times N', T \rangle = 0$, osea $B' \perp T$. Por lo tanto, existe $\tau(s) \in I$ tal que

$$B'(s) = \tau(s)N(s)$$

Se dice que $\tau(s) =: \tau_\alpha(s)$ es la torsión de α en $s \in I$. Finalmente, como $N' \perp N$, tenemos que

$$N'(s) = aT(s) + bB(s)$$

donde

$$\begin{aligned} a \langle T, T \rangle &= \langle N', T \rangle = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle - \langle N, T' \rangle \\ &= \frac{d}{ds} \langle N, T \rangle - \langle N, T' \rangle = -\langle N, KN \rangle = -K \end{aligned}$$

y similarmente obtenemos que $b = \langle N', B \rangle = -\tau(s)$.

Proposición 2.1. *Ecuaciones de Frenet-Serret*

- $T'(s) = K(s)N(s)$
- $N'(s) = -K(s)T(s) - \tau(s)B(s)$
- $B'(s) = \tau(s)N(s)$

Ejemplos:

- a) Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco. Supongamos que $\alpha(I) \subseteq P$ con P un plano. Podemos describir el plano con la ecuación $\langle x - p_0, u \rangle = 0$, donde $p_0, u \in \mathbb{R}^3$ con u unitario y perpendicular al plano. Entonces $\langle \alpha(s) - p_0, u \rangle = 0$ para todo $s \in I$, derivando vemos que

$$\langle \alpha'(s), u \rangle = \langle T(s), u \rangle = 0 \quad \forall s \in I$$

En ese caso, $K(s)$ es el valor absoluto de la curvatura de α como una curva plana. Supongamos que $K(s) > 0$ para todo $s \in I$. Entonces

$$0 = \frac{d}{ds} \langle T, u \rangle = \langle T', u \rangle = K(s) \langle N, u \rangle$$

lo que implica que $N \perp u$ para todo $s \in I$. Luego, $B(s) = \pm u$ para todo $s \in I$, se sigue que $\tau(s) = \langle B', N \rangle = 0$.

- b) Supongamos que α es una curva parametrizada por el arco tal que $\tau_\alpha \equiv 0$, entonces $B' = \tau \cdot N = 0$ para todo $s \in I$ y por lo tanto $B = u$, con $u \in \mathbb{R}^3$ y $|u| = 1$, así $T \times N = u$ para todo $s \in I$.

Ahora, usando las ecuaciones de frenet vemos que $T \perp u$ y $N \perp u$ para todo $s \in I$ y concluimos que

$$\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), u \rangle = \left\langle \int_{s_0}^s T(x) dx, u \right\rangle = \int_{s_0}^s \langle T(x), u \rangle dx = 0 \quad \forall s \in I$$

Proposición 2.2. *Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco, $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineal, ortogonal y positiva. Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $F(p) = Ap + p_0$. Entonces*

$$\begin{aligned} K_{F \circ \alpha} &= K_\alpha & , & \quad \tau_{F \circ \alpha} = \tau_\alpha \\ T_{F \circ \alpha} &= AT_\alpha & , \quad N_{F \circ \alpha} = AN_\alpha & , \quad B_{F \circ \alpha} = AB_\alpha \end{aligned}$$

Podemos extender las definiciones de curvatura, torsión y del tiedro de frenet para curvas regulares $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$K_\beta(t) := K_\alpha(h^{-1}(t))$$

donde $\alpha = \beta \circ h$ es una parametrización por el arco, con h difeomorfismo, $h' > 0$ y $K_\beta > 0$. Se cumple lo siguiente

- $T_\beta(t) = T_\alpha(h^{-1}(t))$
- $N_\beta(t) = N_\alpha(h^{-1}(t))$
- $B_\beta(t) = B_\alpha(h^{-1}(t))$

$$\blacksquare \tau_\beta(t) = \tau_\alpha(h^{-1}(t))$$

Proposición 2.3. Sea $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular, entonces

$$\begin{aligned} a) \quad K_\beta &= \frac{|\beta' \times \beta''|}{|\beta'|^3} \\ b) \quad \tau_\beta &= \frac{-\det(\beta', \beta'', \beta''')}{|\beta' \times \beta''|^2} = -\frac{\langle \beta', \beta'' \times \beta''' \rangle}{|\beta' \times \beta''|^2} \\ c) \quad T_\beta &= \frac{\beta'}{|\beta'|} \\ d) \quad B_\beta &= \frac{\beta' \times \beta''}{|\beta' \times \beta''|} \\ e) \quad N_\beta &= \frac{|\beta'|^2 \beta'' - \langle \beta', \beta'' \rangle \beta'}{|\beta'|^2 \beta'' - \langle \beta', \beta'' \rangle \beta'|} \end{aligned}$$

Teorema 3. (Teorema Fundamental de las curvas en el Espacio)

Sea $K, \tau : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables con $K(s) > 0$ para todo $s \in I$. Entonces existe $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco tal que

$$K_\alpha = K \quad y \quad \tau_\alpha = \tau$$

Además, si $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es parametrizada por el arco tal que $K_\beta = K$ y $\tau_\beta = \tau$. Entonces existe un movimiento rígido $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F \circ \beta = \alpha$.

Demostración. El sistema

$$(FS) : \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad y \quad A(s) = \begin{pmatrix} 0 & K(s) & 0 \\ -K(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

para cada $\{T_0, N_0, B_0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ y $s_0 \in I$, existe una única solución del sistema, $\{T, N, B\}$, definida en I tal que $T(s_0) = T_0$, $N(s_0) = N_0$ y $B(s_0) = B_0$. Veamos que $\{T, N, B\}$ son ortonormales para cada $s \in I$. Sea $\{T_0, N_0, B_0\}$ una base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 . Consideremos la función

$$M(s) = \begin{pmatrix} \langle T, T \rangle & \langle T, N \rangle & \langle T, B \rangle \\ \langle N, T \rangle & \langle N, N \rangle & \langle N, B \rangle \\ \langle B, T \rangle & \langle B, N \rangle & \langle B, B \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} M'(s) &= \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}'^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}' \\ &= A \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix} \\ &= AM - MA \end{aligned}$$

La matriz $M_0(s) = I_3$ con $s \in I$ es solución del sistema, además $M_0(s_0) = I_3 = M(s_0)$ (pues T_0, N_0, B_0 son ortonormales). Por unicidad de la solución $M(s) \equiv I_3$ para todo $s \in I$.

La matriz $\begin{pmatrix} T & N & B \end{pmatrix}$ tiene determinante 1 o -1. Como I es conexo y el determinante una función continua, entonces es constante. Como vale 1 en $s = s_0$ pues $\{T_0, N_0, B_0\}$ es base positiva, vale 1 sobre I .

Definimos $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\alpha(x) = \int_{s_0}^s T(x) dx$$

Por TFC, $\alpha'(s) = T(s)$ unitario, luego α es una curva parametrizada por el arco. Además

$$K_\alpha(s) = |T'(s)| = |K(s)N(s)| = K(s)|N(s)| = K(s) \quad \forall s \in I$$

De ahí,

$$N_\alpha(s) = \frac{T'_\alpha(s)}{|T'_\alpha(s)|} = \frac{T'(s)}{|T'(s)|} = \frac{K(s)N(s)}{|K(s)N(s)|} = N(s)$$

y $B_\alpha(s) = T_\alpha(s) \times N_\alpha(s) = T(s) \times N(s) = B(s)$, ya que $T(s), N(s), B(s)$ es base ortonormal positiva. Por tanto,

$$\tau_\alpha = \langle B'_\alpha(s), N_\alpha(s) \rangle = \langle B'(s), N(s) \rangle = \langle \tau N, N \rangle = \tau(s)$$

Sea $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ortogonal tal que

$$AT_\beta(s_0) = T_\alpha(s_0)$$

$$AN_\beta(s_0) = N_\alpha(s_0)$$

$$AB_\beta(s_0) = B_\alpha(s_0)$$

y $p_0 = \alpha(s_0) - A\beta(s_0)$. Luego, $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $F(p) = Ap + p_0$. Defina $\gamma = F \circ \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Queremos ver que $\gamma \equiv \alpha$. Como F es movimiento rígido α y γ tienen curvatura K y torsión τ y tiedro

$$T_\gamma = T_{F \circ \beta} = AT_\beta$$

$$N_\gamma = N_{F \circ \beta} = AN_\beta$$

$$B_\gamma = B_{F \circ \beta} = AB_\beta$$

Luego $f(s) = |T_\gamma(s) - T_\alpha(s)|^2 + |N_\gamma(s) - N_\alpha(s)|^2 + |B_\gamma(s) - B_\alpha(s)|^2$ vale 0 en $s = s_0$. Por otro lado

$$f'(s) = 2\langle T_\gamma - T_\alpha, T'_\gamma - T'_\alpha \rangle + 2\langle N_\gamma - N_\alpha, N'_\gamma - N'_\alpha \rangle + 2\langle B_\gamma - B_\alpha, B'_\gamma - B'_\alpha \rangle = 0 \quad \forall s \in I$$

por lo tanto f es constante y por lo mencionado $f \equiv 0$. De este modo, $\gamma' = T_\gamma \equiv T_\alpha = \alpha'$. Como

$$\gamma(s_0) = F(\beta s_0) = A\beta(s_0) + p_0 = \alpha(s_0)$$

concluimos que $\gamma \equiv \alpha$.

3. Superficies Regulares

3.1. Definición y ejemplos

Definición 3.1. Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, decimos que Σ es una superficie regular si para todo $p \in \Sigma$ existe un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^3$ con $p \in V$ y una función diferenciable

$$\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que

- $\varphi(\mathcal{V}) = V \cap \Sigma$
- φ es homeomorfismo de \mathcal{V} sobre $V \cap \Sigma$
- $D\varphi(q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva, es decir, si $\varphi = \varphi(u, v)$, entonces

$$D\varphi(q) \cdot e_1 = \frac{d}{dt}\varphi(q + te_1)|_{t=0} = \varphi_u(q)$$

$$D\varphi(q) \cdot e_2 = \frac{d}{dt}\varphi(q + te_2)|_{t=0} = \varphi_v(q)$$

son linealmente independientes, en otras palabras $\varphi_u(q) \times \varphi_v(q) \neq 0$. Decimos que φ es una parametrización local para Σ

Ejemplos:

- Sea $f : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, consideramos $\Sigma := \{(x, y, (f(x, y))) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{V}\}$ Tomamos $V = \mathbb{R}^3$, definimos la función $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$, entonces

a) $\varphi(\mathcal{V}) = \Sigma = \Sigma \cap V$.

b) φ tiene inversa, a saber, $\varphi^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ que es la restricción de una función continua, luego φ^{-1} es continua.

c) $\varphi_u(u, v) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\right)$ y $\varphi_v(u, v) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right)$ son linealmente independientes.

Por lo tanto, φ es una parametrización local con $\varphi(\mathcal{V}) = \Sigma$

- Veamos la esfera unitaria \mathbb{S}^2 . Si $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$, entonces $x \neq 0$ o $y \neq 0$ o $z \neq 0$. Consideramos

$$\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^2 \cap (V_1^+ \cup V_2^+ \cup V_3^+ \cup V_1^- \cup V_2^- \cup V_3^-)$$

donde $V_i^\pm := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \pm x_i > 0\}$. Definimos la función $\varphi_1^\pm : B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi_1^\pm(u, v) := (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v)$$

luego, $\varphi_1^\pm(B_1(0)) = V_1^\pm \cap \mathbb{S}^2$, $(\varphi_1^\pm)^{-1} : V_1^\pm \cap \mathbb{S}^2 \rightarrow B_1(0)$ que manda (x, y, z) en (y, z) es continua y además $(\varphi_1^\pm)_u^{-1}(q)$ y $(\varphi_1^\pm)_v^{-1}(q)$ son linealmente independientes para todo $q \in B_1(0)$. Un argumento similar se utiliza para V_2^\pm y V_3^\pm .

Definición 3.2. Una superficie parametrizada diferenciable es una aplicación diferenciable $\varphi : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con \mathcal{V} abierto. Se dice que φ es regular si $D\varphi(q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $q \in \mathcal{V}$.

Ejemplos:

- Toda parametrización local de una superficie regular es una superficie parametrizada regular.
- Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada diferenciable. Definimos $\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\varphi(u, v) = (\alpha(u), v)$. Esta superficie parametrizada diferenciable se llama cilindro sobre α .

Como $\varphi_u(u, v) = (\alpha'(u), 0)$ y $\varphi_v(u, v) = (0, 0, 1)$ son linealmente independientes si y solo si $\alpha' \neq 0$, es decir, φ es regular si y solo si α es una curva regular.

- Si $I = \mathbb{R}$ y existe $T \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(t + T) = \alpha(t)$ entonces $\varphi(I \times \mathbb{R}) = \alpha(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ es una superficie regular.
- Si α es inyectiva y para todo $t \in I$ existen abiertos $V \subseteq \mathbb{R}^2$ y $J \subseteq I$ con $t \in J$ tales que $\alpha(I) \cap V = \alpha(J)$ entonces $\varphi(I \times \mathbb{R})$ es una superficie regular.

Teorema 4. (Teorema de la Función Implícita) Sea $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continua diferenciable, $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in W$ tal que $\frac{\partial h}{\partial z}(p_0) \neq 0$. Entonces existen abiertos $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f : \mathcal{V} \rightarrow I$ continua diferenciable tales que

- El punto $p_0 \in \mathcal{V} \times I$
- Se tiene la igualdad de conjuntos $h^{-1}(h_{p_0}) \cap (\mathcal{V} \times I) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathcal{V}\}$

Además se tiene que

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{-\frac{\partial h}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{\partial h}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{-\frac{\partial h}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$$

Si h es suave entonces f también lo es.

Definición 4.1. Sea $F : W \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable. Se dice que $q \in \mathbb{R}^m$ es un valor regular para F , si $F^{-1}(q) = \emptyset$ o si para todo $p \in F^{-1}(q)$ se tiene que $DF(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es sobreyectiva.

Por ejemplo si $h : W \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ entonces $Dh(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Dh(p)e_i &= \left. \frac{d}{dt} h(p + te_i) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} h(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \dots, p_n) \right|_{t=0} \\ &= \frac{\partial h}{\partial x_i}(p) \end{aligned}$$

Luego $q \in \mathbb{R}$ es valor regular para h si y solo si para todo $p \in h^{-1}(q)$, $\frac{\partial h}{\partial x_i}(p) \neq 0$ para algún i , o sea, $\nabla h(p) \neq 0$ para todo $p \in h^{-1}(q)$.

Teorema 5. Sea $h : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $c \in \mathbb{R}$ es un valor regular para h , entonces $h^{-1}(c)$ es una superficie regular.

Demostración. Si c es valor regular, entonces para todo $p \in h^{-1}(c)$ se sigue que $\nabla h(p) \neq 0$, es decir,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(p) \neq 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(p) \neq 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial h}{\partial z}(p) \neq 0$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\frac{\partial h}{\partial z} \neq 0$. Por teo de la función Implícita, existen abiertos $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función suave $f : \mathcal{V} \rightarrow I$ tales que $p \in \mathcal{V} \times I$ y $h^{-1}(c) \cap (\mathcal{V} \times I) = \text{Graf}(f)$.

Por lo visto al inicio de la sección, existe parametrización local $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\varphi(\mathcal{V}) = h^{-1}(c) \cap (\mathcal{V} \times I)$.