



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: GREGORIO MORENO – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

Teoría de Integración - MAT2534

Tarea 1

02 de Abril de 2025

Problema 1

Por definición de ínfimo, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición Π_ε de $[a, b]$ tal que $U(f, \Pi_\varepsilon) < \mathcal{U} + \varepsilon$. Consideremos la colección $(\Pi_n^*)_n$ de particiones de $[a, b]$ tales que

$$U(f, \Pi_n^*) < \mathcal{U} + \frac{1}{n}$$

Definimos la partición

$$\Pi_n := \bigcup_{i=1}^n \Pi_i^*$$

Notemos que Π_n es un refinamiento de Π_n^* , luego $U(f, \Pi_n) \leq U(f, \Pi_n^*)$, por teorema del sandwich vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, \Pi_n) = \mathcal{U}$$

Además, por construcción, Π_{n+1} es un refinamiento de Π_n y por lo tanto $U(f, \Pi_{n+1}) \leq U(f, \Pi_n)$.

Problema 2

a) Sea $\varepsilon > 0$, como f es integrable, existe una partición Π del intervalo $[a, b]$ tal que

$$U(f, \Pi) - L(f, \Pi) < \varepsilon$$

Veamos que

$$\begin{aligned} U(|f|, \Pi) - L(|f|, \Pi) &= \sum \left(\sup_{x \in I_i} |f(x)| - \inf_{x \in I_i} |f(x)| \right) |I_i| = \sum \left(\sup_{x, y \in I_i} ||f(x)| - |f(y)|| \right) |I_i| \\ &\leq \sum \left(\sup_{x, y \in I_i} |f(x) - f(y)| \right) |I_i| = \sum \left(\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right) |I_i| \\ &= U(f, \Pi) - L(f, \Pi) < \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $|f|$ es Riemann-integrable. Por otro lado, sabemos que $f \leq |f|$ y $-f \leq |f|$, luego, dada una partición Π de $[a, b]$ se sigue que

$$U(f, \Pi) \leq U(|f|, \Pi) \quad \text{y} \quad L(-f, \Pi) \leq L(|f|, \Pi)$$

Aplicando ínfimo a la izquierda, supremo a la derecha y usando que $-\inf x = \sup -x$ tenemos lo siguiente

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{y} \quad - \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Concluimos que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

- b) En primer lugar, demostraremos que dado un conjunto $E \subseteq [a, b]$ de medida nula, entonces E^c es denso en $[a, b]$. En efecto, sea $x \in E$ y U una vecindad conexa de x de largo $\varepsilon > 0$. Supongamos, por contradicción, que $U \subseteq E$. Como E es de medida nula, existe $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una colección de intervalos tales que

$$E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i \quad \text{y} \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} |I_i| < \varepsilon$$

por otro lado tenemos que

$$\varepsilon = |U| = \lambda^*(U) \leq \lambda^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda^*(I_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} |I_i|$$

Lo anterior es una contradicción, lo que prueba la afirmación.

Sea Π una partición de $[a, b]$, por lo probado anteriormente, para todo i se tiene que existe $\bar{x}_i \in E^c$ tal que $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$. De este modo, para cada partición Π de $[a, b]$, escojemos el conjunto de representantes $C = \{\bar{x}_i\}_i$, entonces

$$S(f, \Pi, C) = \sum_i f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) = 0$$

Como f es Riemann integrable, se sigue que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} S(f, \Pi, C) = \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} 0 = 0$$

Problema 3

Denotaremos por \bar{x}_i a los puntos en C y $L := \frac{b-a}{n}$. Por TFC tenemos lo siguiente

$$f(x) - f(\bar{x}_i) = \int_{\bar{x}_i}^x f'(t) - f'(\bar{x}_i) dt + f'(\bar{x}_i)(x - \bar{x}_i)$$

Por TVM existe $\alpha(t) \in (\bar{x}_i, t)$ tal que

$$f''(\alpha(t)) = \frac{f'(t) - f'(\bar{x}_i)}{t - \bar{x}_i}$$

para $t = \bar{x}_i$ diremos que $f''(\alpha(\bar{x}_i)) = f''(\bar{x}_i)$. Luego

$$f(x) - f(\bar{x}_i) = \int_{\bar{x}_i}^x f''(\alpha(t))(t - \bar{x}_i) dt + f'(\bar{x}_i)(x - \bar{x}_i)$$

Afirmamos que la función $f''(\alpha(t))$ es continua, en efecto

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f''(\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f'(t) - f'(\bar{x}_i)}{t - \bar{x}_i} = \frac{f'(t_0) - f'(\bar{x}_i)}{t_0 - \bar{x}_i} = f''(\alpha(t_0))$$

Para el caso $t_0 = \bar{x}_i$ en la segunda expresión nos queda exactamente la definición de la segunda derivada de f'' en el punto \bar{x}_i , por lo tanto $f''(\alpha)$ es continua en $[\bar{x}_i, x]$. Como $x \geq \bar{x}_i$, por TVM para integrales existe $\alpha(t_0)$ tal que

$$f(x) - f(\bar{x}_i) = f''(\alpha(t_0)) \int_{\bar{x}_i}^x t - \bar{x}_i dt + f'(\bar{x}_i)(x - \bar{x}_i) = f''(\alpha(t_0)) \frac{(x - \bar{x}_i)^2}{2} + f'(\bar{x}_i)(x - \bar{x}_i)$$

De este modo

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) L \right| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) - f(\bar{x}_i) dx \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\alpha(t_0)) \frac{(x - \bar{x}_i)^2}{2} + f'(\bar{x}_i)(x - \bar{x}_i) dx \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n f''(\alpha(t_0)) \frac{(x - \bar{x}_i)^3}{6} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \right| = \left| \sum_{i=1}^n f''(\alpha(t_0)) \frac{L^3}{24} \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{24n^2} \end{aligned}$$

Problema 4

En primer lugar demostraremos que si $x_0 < a$ entonces $F(x_0) \leq F(a^-)$ donde $F(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$F(x_0) \leq F(a - \delta/2) < F(a^-) + \varepsilon$$

esto implica que $F(x_0) \leq F(a^-)$.

- a) Sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $-F(a - \delta/2) < -F(a^-) + \varepsilon$. Consideremos el cubrimiento $(a - \delta/2, a]$ de $\{a\}$, luego

$$\mu_F^*(\{a\}) \leq F(a) - F(a - \delta/2) < F(a) - F(a^-) + \varepsilon$$

es decir,

$$\mu_F^*(\{a\}) < F(a) - F(a^-) + \varepsilon$$

como ε es arbitrario, se sigue que $\mu_F^*(\{a\}) \leq F(a) - F(a^-)$. Sea $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un cubrimiento de $\{a\}$, donde $I_n = (a_n, b_n]$. Existe n_0 tal que $a \in I_{n_0}$, así

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(I_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}, n \neq n_0} \tau(I_n) + \tau(I_{n_0}) \geq \tau(I_{n_0}) = F(b_{n_0}) - F(a_{n_0}) \geq F(a) - F(a^-)$$

concluimos que $\mu_F^*(\{a\}) = F(a) - F(a^-)$.

- b) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $-F(a - \delta/2) < -F(a^-) + \varepsilon$. Consideramos el cubrimiento $(a - \delta/2, b]$ de $[a, b]$, entonces

$$\mu_F^*([a, b]) \leq \tau((a - \delta/2, b]) = F(b) - F(a - \delta/2) < F(b) - F(a^-) + \varepsilon$$

como ε es arbitrario, vemos que $\mu_F^*([a, b]) \leq F(b) - F(a^-)$.

Sea $(I_n)_n$ un cubrimiento de $[a, b]$, diremos que $I_n = (a_n, b_n]$. Sea $\varepsilon > 0$, dado $n \in \mathbb{N}$ existe $\delta_n > 0$ tal que

$$F(b_n + \delta_n/2) - F(b_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Consideramos $(I_n^*)_n$ un cubrimiento de $[a, b]$ donde $I_n^* := (a_n, b_n + \delta_n/2]$. Como F es creciente notemos que $\tau(A) \leq \tau(B)$ para todo $A \subseteq B$ con $A, B \in \mathcal{C}$, luego

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(I_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(I_n^*)$$

por otro lado

$$0 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(I_n^*) - \tau(I_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} F(b_n + \delta_n/2) - F(b_n) < \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

nuevamente, como ε es arbitrario, se tiene que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(I_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(I_n^*)$$

Definimos un cubrimiento abierto de $[a, b]$ dado por $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $U_n := \text{int}(I_n^*)$, por compacidad existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(U_n)_{n=1}^N$ cubre $[a, b]$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que

- $a \in U_1$ y $b \in U_N$.
- $a_{n+1} < b_n + \delta_n/2$ para todo $1 \leq n \leq N-1$.

Entonces, como F es creciente y $U_n \subseteq I_n^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(I_n) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(I_n^*) \geq \sum_{n=1}^N \tau(I_n^*) = \sum_{n=1}^N F(b_n + \delta_n/2) - F(a_n) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} F(b_n + \delta_n/2) - F(a_{n+1}) + F(b_N + \delta_N/2) - F(a_1) \\ &\geq F(b_N + \delta_N/2) - F(a_1) \geq F(b) - F(a^-) \end{aligned}$$

es decir, $\mu_F^*([a, b]) \geq F(b) - F(a^-)$. Por lo tanto $\mu_F^*([a, b]) = F(b) - F(a^-)$.

c) Consideremos el cubrimiento $(a, b]$ de $(a, b]$, luego

$$\mu_F^*((a, b]) \leq \tau((a, b]) = F(b) - F(a)$$

Por otro lado, por subaditividad de la medida exterior vemos que

$$\mu_F^*([a, b]) \leq \mu_F^*({a}) + \mu_F^*((a, b])$$

entonces

$$F(b) - F(a^-) \leq F(a) - F(a^-) + \mu_F^*((a, b])$$

es decir, $F(b) - F(a) \leq \mu_F^*((a, b])$. Concluimos que $\mu_F^*((a, b]) = F(b) - F(a)$.