



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Pontificia Universidad Católica de Chile

Título del Documento

Benjamín Mateluna

Docente Guía: Mauricio Bustamante

9 de noviembre de 2025

ÍNDICE

1. Resumen	3
2. Introduction	3
3. Homología	4
3.1. Complejos de Cadenas	4
3.2. Resultados sobre Homología	5
3.3. Homología Singular	9
4. Herramientas de Homología Singular	12
4.1. Invarianza Homotópica	12
4.2. Homología Relativa	13
4.3. Aplicaciones	14
5. Cohomología	15
5.1. Cohomología Singular	15
5.2. Producto Cup	17
6. H-espacios y Álgebras de Hopf	18
Referencias	20

- 1. Resumen.**
- 2. Introduction.**

3. Homología. Para empezar, debemos estudiar algunas definiciones y resultados de álgebra homológica y así establecer . Se comenzará por complejos de cadenas y cocadenas y algunos resultados menores. En la parte de “Resultados de Homología” se verán herramientas importantes para trabajar con los grupos de homología.

3.1. Complejos de Cadenas.

DEFINICIÓN 3.1. Un complejo de cadenas es una sucesión de grupos abelianos y homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

tal que $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ para todo i . Se denota por $(C_\bullet, \partial_\bullet)$.

OBSERVACIÓN. Notemos que $\text{im } \partial_{i+1} \subseteq \ker \partial_i \subseteq C_i$. Dado que los grupos son abelianos, esta observación permite definir el siguiente grupo.

DEFINICIÓN 3.2. El i -ésimo grupo de homología de $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ se define por

$$H_i(C_\bullet) := \frac{\ker \partial_i}{\text{im } \partial_{i+1}}$$

EJEMPLO. Veamos que

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es un complejo de cadenas, donde los grupos de homología asociados son $H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z}$, $H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_2$ y $H_k(C_\bullet) = 0$ para $k \neq 0, 1$.

Los elementos en $\ker \partial_i$ e $\text{im } \partial_i$ se llaman ciclos y fronteras, respectivamente. Un elemento en $H_i(C_\bullet)$ se dice clase de homología. Los elementos en los grupos abelianos C_i se conocen como cadenas y los morfismos ∂_i como diferenciales.

Ahora que hemos introducido lo básico sobre homología, queremos estudiar como interactúan estos objetos entre sí, buscamos una noción de morfismo entre las cadenas que además induzca uno entre los grupos de homología, esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.3. Sean $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ y $(D_\bullet, \partial_\bullet)$ dos complejos de cadenas. Un mapeo de cadenas es una colección de homomorfismos $f_n : C_n \rightarrow D_n$ tal que $\partial_n f_n = f_{n-1} \partial_n$ para todo n , es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ D_n & \xrightarrow{\partial_n} & D_{n-1} \end{array}$$

y se denota por $f_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$.

PROPOSICIÓN 3.4. Si $f_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ es un mapeo de cadenas, entonces la asignación $f_* : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$ dada por

$$f_*([x]) = [f_n(x)]$$

esta bien definida y es un homomorfismo de grupos.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \ker \partial_n$ entonces $\partial_n f_n(x) = f_{n-1} \partial_n(x) = f_{n-1}(0) = 0$. Así, $f_n(x) \in \ker \partial_n$ y por lo tanto la expresión tiene sentido.

Si $[x] = [y]$ entonces $x - y = \partial_{n+1}(z)$ para $z \in C_{n+1}$, se sigue que $f_n(x) - f_n(y) = f_n \partial_{n+1}(z) = \partial_{n+1} f_{n+1}(z)$. Concluimos que $[f_n(x)] = [f_n(y)]$. Que sea homomorfismo es directo de la definición. \square

EJEMPLO. Consideremos la siguiente situación

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{3} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & C. \\
 & & \downarrow & & \downarrow id & & \downarrow \pi & & \downarrow id & & & \downarrow f. \\
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{3} & \mathbb{Z}_3 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & D.
 \end{array}$$

Con f_* un mapeo de cadenas. Entonces $f_* : H_2(C_*) \rightarrow H_2(D_*)$ es el morfismo trivial, ya que $H_2(C_*) = 0$. Mientras que $\pi_* : H_1(C_*) = \mathbb{Z}_3 \rightarrow H_1(D_*) = \mathbb{Z}_3$ es la identidad.

OBSERVACIÓN. Notemos que si $g_* : D_* \rightarrow G_*$ es un mapeo de cadenas, entonces la colección de morfismos $(g \circ f)_* : C_* \rightarrow G_*$ es un mapeo de cadenas y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(C_*) & \xrightarrow{(g \circ f)_*} & H_n(G_*) \\
 & \searrow f_* & \nearrow g_* \\
 & H_n(D_*) &
 \end{array}$$

En efecto, $\partial_n g_n f_n = g_{n-1} \partial_n f_n = g_{n-1} f_{n-1} \partial_n$. Por otro lado, tenemos que $(g \circ f)_*([x]) = [(g \circ f)(x)] = g_*([f(x)]) = (g_* \circ f_*)([x])$, lo que prueba la afirmación.

DEFINICIÓN 3.5. Sean $f_*, g_* : C_* \rightarrow D_*$ mapeos de cadenas. Una homotopía de cadenas es una colección de morfismos

$$\begin{aligned}
 h_n : C_n &\rightarrow C_{n+1} \quad \text{tales que} \\
 f_n - g_n &= \partial h_n + h_{n-1} \partial
 \end{aligned}$$

Lo denotamos como $f_* \sim g_*$.

PROPOSICIÓN 3.6. Sea $f_* \sim g_*$ entonces $f_* = g_*$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $[x] \in H_n(C_*)$, por definición, sabemos que $\partial x = 0$, luego

$$(f_* - g_*)([x]) = [(f - g)(x)] = [(\partial h + h \partial)(x)] = [\partial h x] = 0$$

lo que prueba la afirmación. \square

3.2. *Resultados sobre Homología.* Los siguientes resultados van a permitir trabajar en mejor modo con los grupos de homología de un complejo de cadenas y también permitirán establecer, más adelante, la invarianza homotópica.

A partir de este momento los índices para indicar los morfismos ∂_i y entre complejos de cadenas no se escribirán, a no ser que se de una definición, para mayor comodidad.

DEFINICIÓN 3.7. Sean $i_\bullet : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$ y $j_\bullet : B_\bullet \rightarrow C_\bullet$ dos mapeos de cadenas. Decimos que forman una secuencia exacta corta si la secuencia

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{i_n} B_n \xrightarrow{j_n} C_n \longrightarrow 0$$

es una secuencia exacta y corta de grupos abelianos libres para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo denotamos como $0 \rightarrow A_\bullet \xrightarrow{i_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{j_\bullet} C_\bullet \rightarrow 0$.

TEOREMA 3.8 (Lema de la serpiente). Sea $0 \rightarrow A_\bullet \rightarrow B_\bullet \rightarrow C_\bullet \rightarrow 0$ una secuencia de complejos de cadenas, entonces existen morfismos

$$\delta_n : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(A_\bullet)$$

tales que la siguiente secuencia es exacta

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\delta_{n+1}} & H_n(A_\bullet) & \xrightarrow{i_*} & H_n(B_\bullet) & \xrightarrow{j_*} & H_n(C_\bullet) & \\ & & & \delta_n & & & \\ & \xrightarrow{\quad} & H_{n-1}(A_\bullet) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(B_\bullet) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(C_\bullet) \longrightarrow \dots \\ & & & & & & \\ & \dots & \longrightarrow & H_0(B_\bullet) & \longrightarrow & H_0(C_\bullet) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a hacer lo que se conoce como una cacería de diagramas. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{i} & B_{n+1} & \xrightarrow{j} & C_{n+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{i} & B_n & \xrightarrow{j} & C_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ 0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{i} & B_{n-1} & \xrightarrow{j} & C_{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Primero debemos definir $\delta_n : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(A_\bullet)$. Sea $[c] \in H_n(C_\bullet)$ entonces $c \in \ker \partial \subseteq C_n$. Como j es sobre, existe $b \in B_n$ tal que $j(b) = c$. Consideramos ∂b y notamos que

$$j\partial(b) = \partial j(b) = \partial c = 0$$

entonces existe un único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b$. Verificamos que $i\partial(a) = \partial i(a) = \partial^2 b = 0$ y como i es inyectiva vemos que $\partial a = 0$. Afirmamos que $\delta_n : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(A_\bullet)$ por

$$\delta_n([c]) = [a]$$

cumple lo buscado. Debemos demostrar lo siguiente

1. No depende de la elección de b . Sea b' tal que $j(b') = c$ entonces $j(b' - b) = c - c = 0$, existe único a_0 tal que $i(a_0) = b' - b$. Por otro lado, existe a' tal que

$$i(a') = \partial b' = \partial b + \partial i(a_0) = \partial b + i\partial(a_0)$$

entonces $i(a' - \partial a_0) = \partial b = i(a)$, por inyectividad, $a' - \partial a_0 = a$, lo que implica que $[a] = [a']$.

2. No depende de la elección del representante de $[c]$. Sea $c' = c + \partial c'' = j(b) + \partial j(b'') = j(b) + j\partial(b'')$, diremos $b' = b + \partial b''$, notemos que $\partial b' = \partial b + \partial^2 b'' = \partial b$. El mismo $a \in A_{n-1}$ satisface $i(a) = \partial b'$. Entonces $\delta_n[c] = [a] = \delta_n[c']$.
3. La función δ_n es morfismo, es decir

$$\delta_n([c] + [c']) = \delta_n[c] + \delta_n[c']$$

Notar que si $j(b) = c$ y $j(b') = c'$ entonces $j(b + b') = c + c'$, existen únicos $a, a' \in A_{n-1}$ tales que $i(a + a') = \partial(b + b'')$ y así

$$\delta_n([c + c']) = [a + a'] = [a] + [a']$$

4. Exactitud en $H_n(C_\bullet)$ y $H_n(A_\bullet)$. Veamos que $\text{im } j_* \subseteq \ker \delta_n$. Sea $j_*[b]$ con $\partial b = 0$. Entonces

$$\delta_n j_*[b] = \delta_n[j(b)]$$

Existe único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b = 0$, entonces $a = 0$ y por lo tanto $\delta_n j_*[b] = [a] = 0$. Queda ver que $\ker \delta_n \subseteq \text{im } j_*$. Sea $[c] \in \ker \delta_n$ con $\partial c = 0$. Por definición de δ_n , para cada b tal que $j(b) = c$ hay un único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b$.

Como $\delta_n[c] = [a] = 0$ se sigue que $a = \partial a'$ y entonces $\partial b = i(a) = i\partial(a') = \partial i(a')$, así $b - i(a') \in \ker \partial$, es decir $b - i(a')$ representa una clase de homología.

Ahora $j(b - i(a')) = j(b) = c$, por ende, $j_*[b - i(a')] = [c]$. Para $H_n(A_\bullet)$ la demostración es similar.

5. Exactitud en $H_n(B_\bullet)$. Sea $[a] \in \text{im } i_*$ con $\partial a = 0$, entonces

$$j_* i_*[a] = [j_n i_n(a)] = 0$$

y por lo tanto $\text{im } i_* \subseteq \ker j_*$. Sea $[b] \in \ker j_*$ con $\partial b = 0$, entonces $j_*[b] = [j(b)] = 0$, lo que implica que $j(b) = \partial c' = \partial j(b') = j\partial(b')$, existe único $a \in A_{n-1}$ tal que $b - \partial b' = i(a)$, además

$$i\partial(a) = \partial i(a) = \partial b + \partial^2 b' = 0$$

entonces $\partial a = 0$. Luego $i_*[a] = [b]$. Concluimos que $\text{im } i_* = \ker j_*$.

Lo que concluye el teorema. □

LEMA 3.9. Sean $0 \rightarrow A_\bullet \xrightarrow{i} B_\bullet \xrightarrow{j} C_\bullet \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow A'_\bullet \xrightarrow{i'} B'_\bullet \xrightarrow{j'} C'_\bullet \rightarrow 0$ secuencias exactas cortas. Además, el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
A_n & \xrightarrow{i} & B_n & \xrightarrow{j} & C_n \\
\downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\
A'_n & \xrightarrow{i} & B'_n & \xrightarrow{j} & C'_n
\end{array}$$

es conmutativo, donde f_i es mapeo de cadenas, entonces el diagrama,

$$\begin{array}{ccccccc}
H_{n+1}(C_\bullet) & \xrightarrow{\delta} & H_n(A_\bullet) & \xrightarrow{i_*} & H_n(B_\bullet) & \xrightarrow{j_*} & H_n(C_\bullet) \\
\downarrow f_{3*} & & \downarrow f_{1*} & & \downarrow f_{2*} & & \downarrow f_{3*} \\
H_{n+1}(C_\bullet) & \xrightarrow{\delta} & H_n(A'_\bullet) & \xrightarrow{i_*} & H_n(B'_\bullet) & \xrightarrow{j_*} & H_n(C'_\bullet)
\end{array}$$

es conmutativo.

En otras palabras, la secuencia exacta del lema de la serpiente es natural.

DEMOSTRACIÓN. Sea $c \in C_{n+1}$ tal que $\partial c = 0$. Existen $b \in B_{n+1}$ y $b' \in B'_{n+1}$ tales que

$$j(b) = c \quad \text{y} \quad j'(b') = f_3(c)$$

Existen $a \in A_n$ y $a' \in A'_n$ tales que $i(a) = \partial b$ y $i'(a') = \partial b'$. Veamos que $f_1(a) - a' \in \text{im } \partial$. Notemos que

$$\begin{aligned}
i'(f_1(a) - a') &= i'f_1(a) - i'(a') = f_2i(a) - \partial b' = f_2\partial b - \partial b' \\
&= \partial(f_2b - b')
\end{aligned}$$

Notemos que $f_2b - b' \in \ker j'$, en efecto,

$$j'f_2(b) - j'(b') = f_3j(b) - f_3(c) = f_3(c) - f_3(c) = 0$$

Luego, existe $a'' \in A_{n+1}$ tal que $i'(a'') = f_2(b) - b'$, así $i'(f_1(a) - a') = \partial i'(a'') = i'\partial a''$. Por inyectividad, vemos que $f_1(a) - a' = \partial a''$. Hemos probado que $f_{1*}\delta = \delta'f_{3*}$, el resto es trivial. \square

PROPOSICIÓN 3.10 (Lema del 5). Considerar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\
\downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\
B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5
\end{array}$$

donde las filas son secuencias exactas y cada cuadrado conmuta. Si f_1, f_2, f_4 y f_5 son isomorfismos, entonces f_3 es isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Por simplicidad del argumento, denotaremos los morfismos $A_i \rightarrow A_{i+1}$ y $B_i \rightarrow B_{i+1}$ como ∂ . Debido a que ambas secuencias son exactas, resulta que $\partial^2 a = \partial \circ \partial(a) = 0$. Veamos que $\ker f_3 = 0$. Sea $a \in \ker f_3$, notemos que

$$0 = \partial f_3(a) = f_4\partial(a) \quad \text{entonces} \quad \partial a = 0$$

Como $a \in \ker \partial$, existe $a' \in A_2$ tal que $\partial a' = a$, luego $\partial f_2(a') = f_3\partial(a') = f_3(a) = 0$. Por exactitud, existe $b' \in B_1$ tal que $\partial b' = f_2(a')$, puesto que f_1 es isomorfismo, existe $a'' \in A_1$ tal que $b' = f_1(a'')$, usando que los diagramas conmutan vemos que

$$a'' = f_1^{-1}(b') \quad \text{entonces} \quad \partial a'' = \partial f_1^{-1}(b') = f_2^{-1}\partial(b')$$

recordemos que $\partial b' = f_2(a')$, es decir, $\partial a'' = a'$, luego $0 = \partial^2 a'' = \partial a' = a$.

Sea $b \in B_3$, consideramos $\partial b \in B_4$, entonces $f_4^{-1}(\partial b) \in A_4$, por conmutatividad del diagrama se sigue que $\partial f_4^{-1}(\partial b) = f_5^{-1}(\partial^2 b) = 0$, luego, por exactitud, existe $a \in A_3$ tal que $\partial a = f_4^{-1}(\partial b)$. Observemos que,

$$\partial(f_3(a) - b) = \partial f_3(a) - \partial b = f_4 \partial(a) - \partial b = 0$$

Así, existe $b' \in B_2$ tal que $\partial b' = f_3(a) - b$, definimos $a' = f_2^{-1}(b') \in A_2$, de este modo,

$$f_3(a) - b = \partial b' = \partial f_2(a') = f_3(\partial a')$$

En resumen, $f_3(a - \partial a') = b$. Concluimos que f_3 es isomorfismo. \square

3.3. Homología Singular. La idea ahora es definir, dado un espacio topológico X , un complejo de cadenas $C_*(X)$, y para cada función continua $f : X \rightarrow Y$, construir un mapeo de cadena $f_* : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$, para luego obtener los grupos de homología $H_*(X)$ de cada espacio y los mapeos $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$.

Para esta construcción se utilizará homología singular. La ventaja de esta vía, es que la definición es una propiedad intrínseca del espacio, sin embargo, resulta casi imposible calcular los complejos de cadenas y por ende, los grupos de homología.

DEFINICIÓN 3.11. Un n -simplex estándar es

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0, \sum t_i = 1 \right\}$$

OBSERVACIÓN. La i -ésima cara de Δ^n es $\Delta_i^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n : t_i = 0\}$. Notamos que un n -simplex estándar tiene $n + 1$ caras, donde cada una luce como un $(n - 1)$ -simplex estándar. De hecho, mediante el mapeo

$$\begin{aligned} \delta_i : \Delta^{n-1} &\rightarrow \Delta_i^n \\ (t_0, \dots, t_{n-1}) &\rightarrow (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}) \end{aligned}$$

resulta ser homeomorfa a Δ^{n-1} .

DEFINICIÓN 3.12. Sea X un espacio topológico. Un n -simplex singular en X es una función continua $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

Dado un espacio X , tenemos una colección de n -simplices, vamos a considerar el grupo abeliano libre generado por este conjunto para construir un complejo de cadenas y así los grupos de homología.

DEFINICIÓN 3.13. Definimos

$$C_n(X) := \left\{ \sum n_\sigma \sigma \mid \sigma : \Delta^n \rightarrow X, n_\sigma \in \mathbb{Z} \text{ nulo salvo finitos casos} \right\}$$

Junto con los diferenciales $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ dada por

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \delta_i$$

que se extiende linealmente.

Al complejo $(C_*(X), \partial_*)$ lo llamamos complejo de cadena singular. Para ver que el complejo esta bien definido debemos verificar que $\partial^2 = 0$, lo que se muestra en el siguiente lema.

LEMA 3.14. *El morfismo $d_{n-1} \circ d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-2}(X)$ es trivial.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar para cada elemento en la base, es decir, para $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Tenemos lo siguiente

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i$$

Usando que $\delta_j \circ \delta_i = \delta_i \circ \delta_{j-1}$ si $i < j$, vemos que

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_i \circ \delta_{j-1} + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i \end{aligned}$$

haciendo un cambio de índice en la primera expresión, resulta que

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j+1} \sigma \circ \delta_i \circ \delta_j + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_j \circ \delta_i = 0$$

□

Con lo anterior podemos definir la homología singular de un espacio topológico arbitrario.

DEFINICIÓN 3.15. La homología singular de un espacio topológico X , es la homología del complejo de cadenas $C_\bullet(X)$, es decir,

$$H_i(X) := H_i(C_\bullet(X), \partial_\bullet) = \frac{\ker \partial_i}{\operatorname{im} \partial_{i+1}}$$

Hemos cumplido con una parte del objetivo inicial, ahora nos gustaría, dada una función continua $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos, obtener un morfismo entre sus grupos de homología, para ello la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.16. *Sea $f : X \rightarrow Y$ un función continua entre espacios topológicos, entonces las funciones*

$$f_n : C_n(X) \rightarrow C_n(Y) \quad \text{dadas en la base por} \quad f_n(\sigma) = f \circ \sigma$$

forman un mapeo de cadenas $f_\bullet : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$.

DEMOSTRACIÓN. Es directo de la definición que para todo $n \in \mathbb{N}$ la función f_n es morfismo de grupos abelianos, por otro lado

$$\partial_n f_n(\sigma) = \partial_n(f \circ \sigma) = \sum_i (-1)^i f \circ \sigma \circ \delta_i = \sum_i (-1)^i f_{n-1}(\sigma \circ \delta_i) = f_{n-1} \partial_n(\sigma)$$

□

OBSERVACIÓN. Juntando lo anterior y un resultado previo, la función f induce un morfismo de grupos $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$, más aún, si f es homeomorfismo, entonces f_* es isomorfismo. Por lo tanto, los grupos de homología son un invariante topológico.

Lo bueno de esta construcción, a diferencia de otras, es que las definiciones no dependen de otra cosa más que el espacio topológico, es decir, de los abiertos presentes en la topología. Pero esto viene con un precio a pagar, es prácticamente imposible calcular estos grupos usando únicamente la definición. Sin embargo, podemos calcular unos pocos ejemplos que resultarán útiles mas adelante.

EJEMPLO. Sea $X = pt = \{*\}$, el espacio que consiste de un punto. Entonces, existe un único n -simplex singular, digamos, $\sigma_n : \Delta^n \rightarrow pt$, lo que implica que $\sigma_n \circ \delta_i = \sigma_{n-1}$, luego

$$\partial_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_n \circ \delta_i = \begin{cases} \sigma_{n-1} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

para $i > 0$, vemos que

$$\cdots \longrightarrow C_{i+1}(pt) \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i(pt) \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1}(pt) \longrightarrow \cdots$$

entonces

$$H_i(pt) = \frac{\ker \partial_i}{\operatorname{im} \partial_{i+1}} = \frac{C_i(pt)}{C_i(pt)} = 0 \quad \text{si } i \text{ es impar}$$

y $H_i(pt) = 0$ para i par, ya que ∂_i es inyectivo. Para $i = 0$ se tiene que $H_0(pt) = \mathbb{Z}$, por que $C_0(pt) \cong \mathbb{Z}$.

LEMA 3.17. Sea X un espacio arcoconexo no vacío, entonces $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN. Se define el morfismo $\varphi : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ dado por

$$\varphi\left(\sum n_\sigma \sigma\right) = \sum n_\sigma$$

Como X es no vacío, el morfismo es sobreyectivo. Afirmamos que $\ker \varphi = \operatorname{im} \partial_1$, en efecto, sea $\sigma \in C_1(X)$, luego

$$\varphi(\partial_1(\sigma)) = \varphi(\sigma \circ \delta_0 - \sigma \circ \delta_1) = 1 - 1 = 0$$

Por otro lado, supongamos que $\sum n_\sigma \sigma \in \ker \varphi$. Sea $x_0 \in X$, consideremos el 0-simplex singular $\sigma : \Delta^0 \rightarrow X$. Como el espacio es arcoconexo, existe $\tau_\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ de modo que $\tau_\sigma \circ \delta_0 = \sigma$ y $\tau_\sigma \circ \delta_1 = x_0$, así

$$\partial_1\left(\sum n_\sigma \tau_\sigma\right) = \sum n_\sigma (\sigma - x_0) = \sum n_\sigma \sigma - \left(\sum n_\sigma\right) x_0 = \sum n_\sigma \sigma$$

por lo tanto,

$$H_0(X) = \frac{C_0(X)}{\operatorname{im} \partial_1} = \frac{C_0(X)}{\ker \varphi} \cong \mathbb{Z}$$

□

Lo anterior da pie a la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.18. Sea $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ es la unión disjunta de componentes arcoconexas, entonces

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha \in A} H_n(X_\alpha)$$

DEMOSTRACIÓN. La inclusión $i_\alpha : X_\beta \rightarrow X$ es continua para todo $\alpha \in A$, por propiedad universal de topología disjunta, luego tenemos la colección de morfismos,

$$i_{\alpha*} : H_n(X_\alpha) \rightarrow H_n(X)$$

por la propiedad universal de la suma directa, se induce un único morfismo

$$i_* : \bigoplus_{\alpha \in A} H_n(X_\alpha) \rightarrow H_n(X)$$

por continuidad, es isomorfismo. \square

4. Herramientas de Homología Singular. En esta sección veremos sin demostración, o al menos no detallada, teoremas que son fundamentales en la teoría de homología de espacios topológicos, como lo son la secuencia de Mayer-Vietoris, homología relativa, escisión e invarianza homotópica.

4.1. Invarianza Homotópica.

TEOREMA 4.1. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones homotópicas. Entonces, inducen el mismo morfismo en homología, es decir,

$$f_* = g_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$$

COROLARIO 4.2. Sea $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia homotópica, entonces

$$f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$$

es isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $g : Y \rightarrow X$ una inversa homotópica, entonces

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (id_X)_* = id_{H_*(X)}$$

Igualmente, tenemos que $f_* \circ g_* = id_{H_*(Y)}$. Entonces f_* es un isomorfismo con inversa g_* . \square

EJEMPLO. Como \mathbb{R}^n es homotópico a un punto, resulta que

$$H_i(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

TEOREMA 4.3 (Mayer-Vietoris). Sea $X = A \cup B$ con A y B conjuntos abiertos. Se tienen las inclusiones

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{i_A} & A \\ \downarrow i_B & & \downarrow j_A \\ B & \xrightarrow{j_B} & X \end{array}$$

Entonces, existen homomorfismos $\delta : H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B)$ tales que la siguiente secuencia es exacta

$$\begin{array}{ccccccc}
& \xrightarrow{\delta} & H_n(A \cap B) & \xrightarrow{i_{A*} \oplus i_{B*}} & H_n(A) \oplus H_n(B) & \xrightarrow{j_{A*} - j_{B*}} & H_n(X) \\
& & & & \delta & & \\
& \searrow & & & & & \searrow \\
& & H_{n-1}(A \cap B) & \xrightarrow{i_{A*} \oplus i_{B*}} & H_{n-1}(A) \oplus H_{n-1}(B) & \xrightarrow{j_{A*} - j_{B*}} & H_{n-1}(X) \longrightarrow \dots \\
& & & & & & \\
& & & & \dots & \longrightarrow & H_0(A) \oplus H_0(B) \xrightarrow{j_{A*} - j_{B*}} H_0(X) \longrightarrow 0
\end{array}$$

Es mas, la secuencia de Mayer-Vietoris es natural, es decir, si $f : X = A \cup B \rightarrow Y = U \cap V$ cumple que $f(A) \subseteq U$ y $f(B) \subseteq V$, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
H_{n+1}(X) & \xrightarrow{\delta} & H_n(A \cap B) & \xrightarrow{i_{A*} \oplus i_{B*}} & H_n(A) \oplus H_n(B) & \xrightarrow{j_{A*} - j_{B*}} & H_n(X) \\
\downarrow f_* & & \downarrow f|_{A \cap B*} & & \downarrow f|_{A*} \oplus f|_{B*} & & \downarrow f_* \\
H_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\delta} & H_n(U \cap V) & \xrightarrow{i_{U*} \oplus i_{V*}} & H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{j_{U*} - j_{V*}} & H_n(Y)
\end{array}$$

conmuta.

DEMOSTRACIÓN. Basta notar la siguiente secuencia

$$0 \longrightarrow C_n(A \cap B) \xrightarrow{i_A \oplus i_B} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{j_B - j_A} C_n(X) \longrightarrow 0$$

es exacta para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, aplicar el lema de la serpiente y naturalidad del mismo. \square

4.2. Homología Relativa.

La inclusión $i : A \rightarrow X$ induce un morfismo a nivel de cadenas que resulta ser inyectivo, así, podemos ver $C_n(A)$ como un subgrupo de $C_n(X)$, además, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
C_n(A) & \xrightarrow{i_n} & C_n(X) \\
\downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n \\
C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_{n-1}} & C_{n-1}(X)
\end{array}$$

conmuta, lo que motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.4. Sea $A \subseteq X$. Definimos

$$C_n(X, A) := \frac{C_n(X)}{C_n(A)}$$

el diferencial $\partial_n : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$, dado por $\partial_n([c]) := [\partial_n(c)]$. Del complejo de cadenas $(C_*(X, A), \partial_*)$, definimos la homología relativa de X respecto a A como

$$H_n(X, A) := H_n(C_*(X, A))$$

TEOREMA 4.5. Existen homomorfismos $\delta : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$. Mas aún, la siguiente secuencia es exacta

modo $i_{B*}(p) = i_{B*}(q)$, entonces el morfismo $i_{A*} \oplus i_{B*}$ esta representado matricialmente por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

lo que implica que

$$H_1(\mathbb{S}^1) \cong \text{im } \delta = \ker i_{A*} \oplus i_{B*} \cong \mathbb{Z}$$

EJEMPLO. Afirmamos que

$$H_i(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, n \\ 0 & \text{si } i \neq 0, n \end{cases}$$

Procederemos por inducción sobre n , el caso base ya fue demostrado, supongamos que se cumple para $n - 1$ con $n > 1$. Sea $A = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ y $B = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$. Notemos que

$$A \cong \mathbb{R}^n \sim pt \quad y \quad B \cong \mathbb{R}^n \sim pt$$

además, $A \cap B \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^{n-1}$. Por Mayer-Vietoris, para $i > 2$, tenemos la secuencia exacta

$$H_i(A) \oplus H_i(B) \longrightarrow H_i(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(A \cap B) \xrightarrow{i_{A*} \oplus i_{B*}} H_{i-1}(A) \oplus H_{i-1}(B)$$

Para $i > 1$, el morfismo δ es isomorfismo y por lo tanto $H_i(\mathbb{S}^1) \cong H_0(A \cap B) \cong H_0(\mathbb{S}^{n-1})$. Por otro lado si $i = 1$, el morfismo δ es inyectivo y por un argumento similar al usado en el ejemplo anterior, el morfismo $i_{A*} \oplus i_{B*}$ esta representado por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entonces $H_1(\mathbb{S}^n) \cong 0$ y por arcoconexidad concluimos.

5. Cohomología.

5.1. Cohomología Singular.

DEFINICIÓN 5.1. Un complejo de cocadenas es una secuencia de grupos de abelianos y homomorfismos

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\partial^0} C^1 \xrightarrow{\partial^1} C^2 \xrightarrow{\partial^2} C^3 \xrightarrow{\partial^3} \dots$$

tales que $\partial^{i+1} \circ \partial^i = 0$. Se denota por $(C^\bullet, \partial^\bullet)$.

OBSERVACIÓN. Al igual que en complejos de cadenas, los morfismos ∂^i se llaman diferenciales, los elementos en $\text{im } \partial^i$ se dicen cofronteras y en $\ker \partial^i$ se dicen cociclos. Además, es claro que $\text{im } \partial^i \subseteq \ker \partial^{i+1}$.

DEFINICIÓN 5.2. El i -ésimo grupo de cohomología de $(C^\bullet, \partial^\bullet)$ se define por

$$H^i(C^\bullet) := \frac{\ker \partial^i}{\text{im } \partial^{i-1}}$$

Un elemento en $H^i(C^\bullet)$ se conoce como clase de cohomología.

EJEMPLO. Recordemos el complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Donde $H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z}$, $H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_2$ y $H_k(C_\bullet) = 0$. Definimos $C^i := \text{Hom}(C_i, \mathbb{Z})$ y los diferenciales $\partial^i(\varphi) := \varphi \circ \partial_{i+1}$, notemos que $\partial^{i+1} \circ \partial^i(\varphi) = \varphi \circ \partial_{i+1} \circ \partial_{i+2} = 0$. Así, tenemos el complejo de cocadenas

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\cdot 0} C^1 \xrightarrow{\cdot 2} C^2 \xrightarrow{\cdot 0} 0 \longrightarrow \cdots$$

Como $C^i \cong \mathbb{Z}$ para $i = 0, 1, 2$, entonces $H^0(C^\bullet) = \mathbb{Z}$, $H^1(C^\bullet) = 0$ y $H^2(C^\bullet) = \mathbb{Z}_2$.

DEFINICIÓN 5.3. Sean $(C^\bullet, \partial^\bullet)$ y $(D^\bullet, \partial^\bullet)$ complejos de cocadenas, un mapeo de cocadenas, es una colección $(f^n)_n$ de morfismos $f_n : C_n \rightarrow D_n$ tales que $\partial^n \circ f^n = f^{n+1} \circ \partial^n$. En otras palabras, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C^n & \xrightarrow{f^n} & D^n \\ \downarrow \partial^n & & \downarrow \partial^n \\ C^{n+1} & \xrightarrow{f^{n+1}} & D^{n+1} \end{array}$$

conmuta.

LEMA 5.4. Sea $(f^n)_n$ un mapeo de cocadenas, entonces $f^* : H^n(C^\bullet) \rightarrow H^n(D^\bullet)$ dado por $[x] \rightarrow [f^n(x)]$ es un morfismo que está bien definido.

La demostración de este lema es análoga al caso de complejo de cadena. Previamente, definimos el complejo de cadenas y los respectivos diferenciales en base a un complejo de cadena, usando la idea vista en el ejemplo vamos a definir la cohomología singular.

DEFINICIÓN 5.5. Sea X un espacio topológico. Definimos los grupos $C^i(X) := \text{Hom}(C_i(X), \mathbb{Z})$ y los diferenciales $\partial^i : C^i(X) \rightarrow C^{i+1}(X)$ dados por $\partial^i(\varphi) := \varphi \circ \partial_{i+1}$. El complejo de cocadenas singular es

$$0 \longrightarrow C^0(X) \xrightarrow{\partial^0} C^1(X) \xrightarrow{\partial^1} C^2(X) \xrightarrow{\partial^2} C^3(X) \xrightarrow{\partial^3} \cdots$$

El i -ésimo grupo de cohomología esta dado por

$$H^i(X) := H^i(C^\bullet(X))$$

OBSERVACIÓN. No es cierto en general que $H^i(X) = \text{Hom}(H_i(X), \mathbb{Z})$.

Los resultados de homología pueden ser extendidos de manera análoga a cohomología, dualizando el complejo de cadenas singular.

DEFINICIÓN 5.6. Sea A un grupo abeliano y X un espacio, definimos los grupos

$$C^\bullet(X; A) = \text{Hom}(C_\bullet; A)$$

con el diferencial $\partial : C^i(X; A) \rightarrow C^{i+1}(X; A)$ dado por $\partial^i(\varphi) = \varphi \circ \partial_{i+1}$. Esto define un complejo de cocadenas, la cohomología asociada

$$H^n(X; A) := H^n(C^\bullet(X; A))$$

se dice cohomología de X con coeficientes en A .

OBSERVACIÓN. Notemos que si A es un anillo conmutativo, entonces $H^n(X; A)$ es un A -módulo.

5.2. Producto Cup.

La notación $\sigma|_{[\tau]}$ donde τ es un subconjunto de los vértices Δ^n , se entiende como la restricción de sigma al simplece generado por τ , claramente $\sigma|_{[\tau]}$ es un $|\tau|$ -simplece singular.

DEFINICIÓN 5.7. Sea R un anillo conmutativo y X un espacio. Sean $\phi \in C^k(X; R)$ y $\psi \in C^l(X; R)$. Definimos $\phi \smile \psi \in C^{k+l}(X; R)$ por

$$(\phi \smile \psi)(\sigma) = \phi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]})\psi(\sigma|_{[v_{k+1}, \dots, v_{k+l}]})$$

donde $\sigma \in C_{k+l}(X)$ un simplece singular. Este morfismo se extiende linealmente.

Es directo de la definición, que el producto cup es bilineal y asociativo, pues la multiplicación en R lo es.

LEMA 5.8. Sean $\phi \in C^k(X; R)$ y $\psi \in C^l(X; R)$, entonces

$$d(\phi \smile \psi) = d\phi \smile \psi + (-1)^k \phi \smile d\psi$$

COROLARIO 5.9. El producto cup induce un morfismo

$$\begin{aligned} \smile: H^k(X; R) \times H^l(X; R) &\rightarrow H^{k+l}(X; R) \\ ([\phi], [\psi]) &\rightarrow [\phi \smile \psi] \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\phi \in C^k(X; R)$ y $\psi \in C^l(X; R)$ cociclos y dado $\phi' \in C^k(X; R)$ un cociclo tal que $[\phi] = [\phi']$, entonces $\phi' = \phi + d\phi''$, luego

$$\begin{aligned} \phi' \smile \psi &= (\phi + d\phi'') \smile \psi = \phi \smile \psi + d\phi'' \smile \psi \\ &= \phi \smile \psi + d(\phi'' \smile \psi) - (-1)^{k+1} \phi'' \smile d\psi \\ &= \phi \smile \psi + d(\phi'' \smile \psi) \end{aligned}$$

el otro caso es análogo. □

Definimos el mapa $1: C_0(X) \rightarrow R$ tal que $1(\sigma) = 1$ para toda 0-cadena, entonces

$$[1] \smile [\phi] = [\phi]$$

De este modo, definimos $H^*(X; R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^n(X; R)$ que junto con el producto cup y el elemento $[1]$ forman un anillo con unidad. Aquí el producto cup se extiende linealmente. Este anillo se conoce como el anillo de cohomología X con coeficientes en R .

El anillo de cohomología no es necesariamente conmutativo, pero el siguiente lema nos entrega una expresión para intercambiar los términos.

LEMA 5.10. Sean $\alpha \in H^k(X; R)$ y $\beta \in H^l(X; R)$ entonces

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{kl} \beta \smile \alpha$$

Además, el producto cup es natural, lo que se expresa en la proposición que sigue.

LEMA 5.11. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre espacios y $\alpha, \beta \in H^*(Y; R)$ entonces $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$.

DEFINICIÓN 5.12. Sean $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ y $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ los mapas de proyección. Se define

$$\times : H^k(X; R) \times H^l(Y; R) \rightarrow H^{k+l}(X \times Y; R) \quad \text{dada por}$$

$$(a, b) \rightarrow \pi_X^*(a) \smile \pi_Y^*(b)$$

Denotamos $\times(a, b)$ por $a \times b$. Por la naturalidad de π_X^*, π_Y^* y la bilinealidad del producto cup, resulta que \times es bilineal, por la propiedad universal del producto tensorial, se induce el morfismo

$$\times : H^k(X; R) \otimes_R H^l(Y; R) \rightarrow H^{k+l}(X \times Y; R)$$

tal que $\times(a \otimes b) = \pi_X^*(a) \smile \pi_Y^*(b)$.

TEOREMA 5.13 (Fórmula de Künneth).

6. H-espacios y Álgebras de Hopf.

DEFINICIÓN 6.1. Sea X espacio topológico. Decimos que es H -espacio si existe una aplicación continua

$$\mu : X \times X \rightarrow X$$

y un elemento $e \in X$ llamada identidad tal que los mapas $\varphi(x) = \mu(x, e)$ y $\psi(x) = \mu(e, x)$ son homotópicos a la identidad relativo a $\{e\}$.

Podemos restringir algo mas la definición,

- Decimos que μ es asociativa homotopica si es tal que $\mu(x, \mu(y, z))$ y $\mu(\mu(x, y), z)$ son homotópicas relativo a $\{e, e, e\}$.
- Existe inversa homotópica, si existe $\varphi : X \rightarrow X$ con $\varphi(e) = e$ tal que los mapas $x \rightarrow \mu(x, \varphi(x))$, $\mu(\varphi(x), x)$ son homotópicas a la función constante e relativo a $\{e\}$.

Un H -grupo es un H -espacio que es homotópico asociativo y existe inversa homotópica.

OBSERVACIÓN. Lo anterior implica que $\mu(e, e) = e$.

EJEMPLO. Todo grupo topológico, en particular, es un H -espacio. Por ejemplo, $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o \mathbb{H} .

DEFINICIÓN 6.2. Un anillo A se dice álgebra de Hopf si es álgebra graduada y que satisface las siguientes propiedades

1. Hay una identidad $1 \in A^0$ tal que el mapa $R \rightarrow A^0$ dado por $r \rightarrow r \cdot 1$ es isomorfismo.
2. Existe un mapa diagonal o coproducto

$$\Delta : A \rightarrow A \otimes_R A$$

un morfismo de álgebras graduadas que satisface

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha + \sum_i \alpha'_i \otimes \alpha''_{n-i}$$

donde $|\alpha'_i|, |\alpha''_{n-i}| > 0$ para todo α con $|\alpha| > 0$.

LEMA 6.3. *Sea R un anillo y X un H –espacio arcoconexo tal que $H^n(X; R)$ es un R –módulo finitamente generado para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces X induce un álgebra de Hopf en el anillo de cohomología.*

REFERENCIAS

- [1] BILLINGSLEY, P. (1999). *Convergence of Probability Measures*, 2nd ed. Wiley, New York.