



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: GIANCARLO URZÚA – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

Geometría Algebraica - MAT2824
Apuntes
06 de Marzo de 2025

Índice

Introducción	3
1. Conjuntos Algebraicos afines	4
1.1. Preliminares algebraicos	4
1.2. Espacio Afín y Conjuntos Algebraicos	4
1.3. Ideal de un conjunto	5
1.4. El Teorema de la Base de Hilbert	5
1.5. Componentes Irreducibles en un Conjunto Algebraico	6
1.6. Conjuntos Algebraicos del Plano	7
1.7. Nullstellensatz de Hilbert	8
1.8. Modulos y Condiciones de Finitud	11
1.9. Elementos Integrales	11
2. Variedades Afines	14
2.1. Anillo de Coordenadas	14
2.2. Aplicaciones Polinomiales	14
2.3. Cambio de Coordenadas	14
2.4. Funciones Racionales y Anillos Locales	14

Introducción

Habrán tres evaluaciones (I1, I2, I3) cada una vale un 20 % y un examen (EX) que vale un 40 %. Las fechas son, 9 de abril, 14 de Mayo, 11 de Junio y 1 de Julio respectivamente.

1. Conjuntos Algebraicos afines

1.1. Preliminares algebraicos

Sea R un anillo conmutativo con $+$, \cdot y con $1 \neq 0$. Si R, R' son anillos, un morfismo de anillos es una función $f : R \rightarrow R'$ que respeta $+$, \cdot y $f(1_R) = 1_{R'}$. Un dominio R es un anillo en donde $xy = xz$ implica que $y = z$ para todo $x \neq 0$.

Ejemplo \mathbb{Z} es dominio, pero $\mathbb{Z}/6$ no lo es.

Un cuerpo es un dominio donde todo $x \neq 0$ tiene un inverso. Dado R dominio, existe el cuerpo de fracciones K tal que $R \subseteq K$. Dado R anillo, sea $R[x]$ el anillo de polinomios con coeficientes en R , sus elementos tienen la forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d, \quad a_d \neq 0$$

y decimos que f tiene grado d denotado por $gr(f)$. Se define de manera recursiva $R[x_1, \dots, x_n] = R[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$ el anillo de polinomios en n variables. Dado $f = \alpha \cdot x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$ su grado se define como $gr(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, para f en general, definimos su grado como $gr(f) := \max\{\text{grados de monomios}\}$. Dado $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ y $d = gr(f)$ entonces

$$f = F_0 + F_1 + \cdots + F_d, \text{ con } F_i \text{ homogéneos, esto es, } F_i(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^i F_i(x_1, \dots, x_n)$$

Si $f \in R[x]$ una raíz (cero) de f es un $r \in R$ tal que $f(r) = 0$.

Teorema 1. *Se tiene que r es cero si y solo si $f(x) = (x - r)g(x)$ para algún $g \in R[x]$.*

Un cero de $f(x_1, \dots, x_n)$ es un $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$.

Decimos que $r \in R$ es irreducible si toda descomposición $r = ab$ con $a, b \in R$ se tiene que a o b es una unidad. Un anillo R se dice dominio de factorización única si todo elemento no nulo se puede factorizar de manera esencialmente única en producto de irreducibles.

Lema 1.1. *Si R es dominio de factorización única entonces $R[x]$ es dominio de factorización única.*

Lema 1.2. *Si R es un dominio de factorización única y K su cuerpo de fracciones. Dado $f \in R[x]$ irreducible entonces f es irreducible en $K[x]$.*

Sea R un anillo. Un ideal $I \subset R$ es tal que si $a, b \in I$ entonces $a + b \in I$ y si $r \in R$ entonces $ra \in I$. Consideramos la función $\pi : R \rightarrow R/I$ donde R/I es el anillo cociente que es conmutativo. Un ideal es maximal si y solo si R/I es cuerpo.

Teorema 2. *Sea R un dominio euclideo (se cumple algoritmo de la división) y $a, b \in R$, consideremos $\text{mcd}(a, b) = d$. Entonces existen $c, e \in R$ tales que $ac + be = d$.*

Teorema 3. *Si F es un polinomio homogéneo de grado d , entonces*

$$dF = x_1 F_{x_1} + \cdots + x_n F_{x_n}$$

donde F_{x_i} es la derivada formal con respecto a x_i .

1.2. Espacio Afín y Conjuntos Algebraicos

Definición 3.1. *Sea k un cuerpo. El espacio afín de dim n es $\mathbb{A}_k^n := k^n$ (generalmente se supondrá que $k = \bar{k}$).*

Definición 3.2. *Una hipersuperficie de \mathbb{A}_k^n es $V(F) = \{p \in \mathbb{A}_k^n : F(p) = 0\}$ para un $F \in k[x_1, \dots, x_n]$.*

Ejemplos:

- Sea $k = \mathbb{R}$ consideramos la hipersuperficie $V(y^2 - x^2(x+1)) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ (foto)
El punto $(0,0)$ se llama nodo.
- Veamos la hipersuperficie $V((x^3 - y^3)(y^3 - 1)(x^3 - 1)) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$.
- La hipersuperficie $V(x^2 + y^2 - z^2) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ es conocida como cono (foto)
Como en el primer ejemplo, el punto $(0,0)$ se llama nodo
- Consideremos $V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ (foto)
En este caso, el punto $(0,0)$ no es un nodo, en este caso se llama cuspide.
- Veamos el caso de una hipersuperficie no parametrizable, esta es $V(y^2 - x(x+1)(x+\lambda))$.

Definición 3.3. Sea $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ un conjunto arbitrario, se define

$$V(S) := \{p \in \mathbb{A}_k^n : F(p) = 0 \quad \forall F \in S\} = \bigcap_{F \in S} V(F)$$

y se dice que es un conjunto algebraico afín.

Propiedades de un conjunto algebraico afín:

- a) Sea $I = \langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i s_i, a_i \in k \right\}$, entonces $V(I) = V(S)$.

Demostración. Veamos que $V(I) \subseteq V(S)$, si $p \in V(I)$, como $S \subseteq I$ se sigue que $p \in V(S)$. Para $V(S) \subseteq V(I)$ notemos que dado $f \in I$ se tiene que $f = \sum a_i s_i$, luego si $p \in V(S)$ vemos que $f(p) = \sum a_i s_i(p) = 0$.

- b) Sea $\{I_\alpha\}$ una colección de ideales, entonces $V(\bigcup_\alpha I_\alpha) = \bigcap_\alpha V(I_\alpha)$.
- c) Si $I \subseteq J$ se sigue que $V(J) \subseteq V(I)$.
- d) Sean $F, G \in k[x_1, \dots, x_n]$, se tiene que $V(FG) = V(F) \cup V(G)$.
- e) Tenemos las siguientes dos identidades $V(1) = \emptyset$ y $V(0) = \mathbb{A}_k^n$.

observación: Lo anterior es valido si k es algebraicamente cerrado, de lo contrario, si consideramos $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ vemos que $V(x^2 + 1) = \emptyset$.

1.3. Ideal de un conjunto

Definición 3.4. Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un conjunto arbitrario. Se define el ideal de X como

$$I(X) := \{F \in k[x_1, \dots, x_n] : F(p) = 0 \quad \forall p \in X\}$$

observación: Notemos que si $F^m \in I(X)$ entonces $F \in I(X)$. Un ideal con esta propiedad se dice radical.

Propiedades del ideal de un conjunto:

- a) Si $X \subseteq Y$ se tiene que $I(Y) \subseteq I(X)$.
- b) Se tiene lo siguiente $I(\emptyset) = k[x_1, \dots, x_n]$ y $I(\mathbb{A}_k^n) = \{0\}$. Además, si k es un cuerpo infinito, se tiene que $I(\{a_1, \dots, a_n\}) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$.

1.4. El Teorema de la Base de Hilbert

Teorema 4. Todo conjunto algebraico corresponde a la intersección finita de hipersuperficies.

Demostración. Sea $V(I)$ el conjunto algebraico para algún ideal $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. Basta con probar que I es finitamente generado, en tal caso $I = (F_1, \dots, F_r)$, entonces $V(I) = V(F_1, \dots, F_r) = V(F_1) \cap \dots \cap V(F_r)$.

Teorema 5. Si R es un anillo Noetheriano, entonces $R[X]$ es un anillo Noetheriano.

Demostración. Sea $I \subseteq R[X]$ un ideal. Dado $F = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$ con $a_d \neq 0$ decimos que a_d es el término líder de F denotado por $l(F)$. Sea

$$\mathcal{J} := \{r \in R : r \text{ es término líder de algún } F \in I\} \cup \{0\}$$

Afirmamos que \mathcal{J} es ideal, en efecto, sean $l(F), l(G) \in \mathcal{J}$, supongamos sin pérdida de generalidad que $gr(F) \leq gr(G)$, luego

$$Fx^{gr(G)-deg(F)} + G = H$$

donde $l(H) = l(F) + l(G)$. Es claro que $r \cdot l(F) \in \mathcal{J}$ con $r \in R$. Por hipótesis existen $F_1, \dots, F_r \in I$ tales que $\mathcal{J} = (l(F_1), \dots, l(F_r))$. Sea $N > gr(F_i)$ para todo $1 \leq i \leq r$. Para cada $m \leq N$ definimos

$$\mathcal{J}_m := \{r \in R : r \text{ es término líder de } F \in I \text{ y } gr(F) \leq m\}$$

Notemos que los \mathcal{J}_m son ideales en R , por ende, son finitamente generados, es decir $\mathcal{J}_m = (l(F_{m,j}))$. Consideremos el ideal $I' = \langle F_{m,j}, F_i \rangle$, afirmamos que $I' = I$. Claramente se tiene que $I' \subset I$. Supongamos, por contradicción, que $I' \neq I$, sea $G \in I' \setminus I$ de menor grado. Tenemos dos consideramos

- Veamos cuando $gr(G) > N$, existen polinomios $Q_i \in R[X]$ tal que G y $\sum Q_i F_i$ tienen el mismo coeficiente líder. Luego $G - \sum Q_i F_i \in I'$ pues tiene menor grado que G , se sigue que $G \in I'$.
- El resultado para $gr(G) \leq N$ se obtiene del mismo modo, usando esta vez los $F_{m,j}$.

Ejemplo: Sea $(0,0) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, entonces $\{(0,0)\} = V(x^2 + y^2)$. Pero en \mathbb{C} tenemos que $\{(0,0)\} \neq V(F)$ para ningún $F \in k[x, y]$.

1.5. Componentes Irreducibles en un Conjunto Algebraico

Definición 5.1. Un conjunto algebraico V se dice reducible si $V = V_1 \cup V_2$ con V_i conjunto algebraico y distinto de V .

Observación: Un punto es un conjunto algebraico irreducible, lo que implica que cualquier conjunto finito es algebraico y reducible.

Ejemplos:

- Notemos que $V(xy) = V(x) \cup V(y)$, es decir $V(xy)$ es reducible.
- Consideremos el espacio afín $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$, entonces el conjunto algebraico $V((x^2 + 1)x) = \{0\}$ es irreducible.

Proposición 5.1. Un conjunto algebraico V es irreducible si y solo si el ideal $I(V)$ es primo.

Demostración.

- \Rightarrow | Supongamos que $I(V)$ no es primo, entonces existen F_1, F_2 polinomios tales que $F_1 \cdot F_2 \in I(V)$ y $F_1, F_2 \notin I(V)$. Afirmamos que $V = (V \cap V(F_1)) \cup (V \cap V(F_2))$. Sea $p \in V$, entonces $F_1(p) \cdot F_2(p) = 0$ lo que implica que $p \in (V \cap V(F_1)) \cup (V \cap V(F_2))$, además $V \cap V(F_i) \neq V$ ya que existe q_i tal que $F_i(q_i) \neq 0$.
- \Leftarrow | Supongamos que V es reducible. Luego $V = V_1 \cup V_2$ con $V_i \neq V$. Entonces existe un polinomio F_i tal que $F_i(p) = 0$ para todo $p \in V_i$, pero no para todo punto en V . Notemos que $F_1 \cdot F_2 \in I(V)$, sin embargo, $F_i \notin I(V)$.

Definición 5.2. Una variedad afín V es un conjunto algebraico afín irreducible.

Lema 5.1. Sea R un anillo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- R es Noetheriano.
- Si \mathcal{C} es una colección no vacía de ideales en R , entonces \mathcal{C} tiene un elemento maximal, es decir, existe $I \in \mathcal{C}$ que no está contenido en otro ideal de \mathcal{C} .

c) Toda cadena ascendente de ideales en R se estabiliza.

Demostración.

- (a) \Rightarrow (b) | Necesitamos usar el axioma de elección. Sea \mathcal{C} una colección de ideales en R , para cada subconjunto no vacío de \mathcal{C} elegimos un ideal. Sea I_0 el ideal escogido para \mathcal{C} , definimos el conjunto

$$\mathcal{C}_1 := \{I \in \mathcal{C} : I_0 \subset I\}$$

Si $\mathcal{C}_1 = \emptyset$ entonces I_0 es el ideal maximal. Si no, repetimos el proceso. Sea $I \in \mathcal{C}_1$ el escogido, definimos

$$\mathcal{C}_2 := \{I \in \mathcal{C}_1 : I \subset I\}$$

Es suficiente demostrar que existe n tal que $\mathcal{C}_n = \emptyset$. Sea $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ es ideal, además, notemos que $I_n \subset I_{n+1}$. Como R es Noetheriano, entonces $I = (f_1, \dots, f_m)$, luego existe r tal que $f_1, \dots, f_m \in I_r$, lo que implica que $I \subseteq I_r$ y por lo tanto $I = I_r$ se sigue que $I_r = I_s$ para todo $s > r$, lo cual es una contradicción.

- (b) \Rightarrow (c) | Basta tomar \mathcal{C} como nuestra colección de ideales en R , luego, existe un elemento maximal.
- (c) \Rightarrow (a) | Sea $I \subseteq R$ un ideal. Si $I = (0)$ estamos listos, de lo contrario, sea $f_1 \in I$, entonces $(f_1) \subseteq I$. Supongamos que $I \setminus (f_1) \neq \emptyset$, sea $f_2 \in I \setminus (f_1)$, de esta manera construimos una cadena ascendente de ideales

$$(f_1) \subset (f_1, f_2) \subset \dots \subset (f_1, \dots, f_n) \subset \dots$$

para algun N la cadena se estabiliza y por ende $(f_1, \dots, f_N) = I$.

Proposición 5.2. Cualquier colección de conjuntos algebraicos $\{V_i\}_{i \in I}$ en \mathbb{A}_k^n tiene un elemento minimal.

Demostración. Dada $\{V_i\}_{i \in I}$ obtenemos una colección $\mathcal{C} = \{I(V_i)\}_{i \in I}$ de ideales en $k[x_1, \dots, x_n]$, el cual es Noetheriano. Luego \mathcal{C} tiene un elemento maximal, digamos $I(V_*)$, afirmamos que V_* es el elemento minimal, de lo contrario, existe $V_i \subseteq V_*$ entonces $I(V_*) \subseteq I(V_i)$.

Teorema 6. Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un conjunto algebraico. Entonces existen unicos conjuntos algebraicos irreducibles V_1, \dots, V_m tales que

$$V = \bigcup_{i=1}^m V_i \quad \text{y} \quad V_i \not\subseteq V_j \quad \forall i \neq j$$

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{V \subseteq \mathbb{A}_k^n \text{ conjunto algebraico} : V \text{ no es unión finita de irreducibles}\}$. Si \mathcal{C} es vacío estamos listos. Si no lo es, sea $V \in \mathcal{C}$ minimal. Tenemos que V no es irreducible, entonces $V = V_1 \cup V_2$ con $V_i \subset V$, lo que implica que algún $V_i \in \mathcal{C}$ lo cual es una contradicción.

Sea $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$ con V_i irreducibles, asumir que $V_i \not\subseteq V_j$ para todo $i \neq j$. Digamos que

$$\bigcup_{i=1}^m V_i = \bigcup_{j=1}^s W_j \quad \text{con} \quad V_i \not\subseteq V_j \quad \text{y} \quad W_i \not\subseteq W_j \quad \text{y} \quad V_i, W_j \neq \emptyset$$

Notemos que $V_1 = V_1 \cap V = \bigcup_{j=1}^s (V_1 \cap W_j)$, como V_1 es irreducible, existe unico j tal que $V_1 = V_1 \cap W_j$, es decir, $V_1 \subseteq W_j$. Por otro lado, existe unico i tal que $W_j \subseteq V_i$, lo que implica que $V_1 \subseteq V_i$ entonces $i = 1$ y así $V_1 = W_j$.

1.6. Conjuntos Algebraicos del Plano

Lema 6.1. Si $f, g \in k[x, y]$ no tienen factores en común, entonces $V(f, g)$ es un conjunto finito.

Demostración. Recordemos que $k(x)[y]$ es dominio euclideo. Por lema de gauss, f, g no tienen factores en común en $k(x)[y]$, entonces existen $a, b \in k(x)[y]$ tal que $af + bg = 1$. Existe $r(x)$ tal que

$$raf + rbg = r$$

es una ecuación en $k[x, y]$. Sea $(p, q) \in V(f, g)$, evaluando en la ecuación anterior vemos que

$$0 = raf(p, q) + rbg(p, q) = r(p)$$

por lo tanto la cantidad de valores posibles de p es finita. Haciendo lo mismo para y obtenemos que q solo puede tomar una cantidad finita de valores.

Corolario 6.1. Si $f \in k[x, y]$ es irreducible con $|V(f)| = \infty$ entonces $I(V(f)) = (f)$ y $V(f)$ es irreducible.

Demostración. Si $g \in I(V(f))$, entonces $|V(f, g)| = \infty$, luego, f y g tienen factores en común, como f es irreducible, entonces f divide a g lo que implica que $g \in (f)$. La otra contención es directa.

Por otro lado, notemos que (f) es primo, pues f es irreducible, así, $V(f)$ es irreducible.

Corolario 6.2. Supongamos que k es infinito, entonces los conjuntos algebraicos irreducibles de \mathbb{A}_k^2 son: \emptyset , \mathbb{A}_k^2 , un punto y los conjuntos $V(f)$ con f irreducible y $|V(f)| = \infty$.

Demostración. Sea V un conjunto algebraico irreducible. Si $|V| < \infty$ entonces $V = \emptyset$ o V es un punto. Si $I(V) = (0)$ entonces $V = \mathbb{A}_k^2$. Supongamos que $|V| = \infty$ y que $(0) \subset I(V) \subset k[x, y]$. Como $I(V)$ es primo, existe un polinomio no constante e irreducible tal que $f \in I(V)$.

Si $g \in I(V)$ y $g \notin (f)$, entonces $V \subset V(f, g)$, por la proposición, esto es una contradicción. De este modo, $I(V) = (f)$. Afirmamos que $V(f) = V$, en efecto, tenemos que $V = V(I(V)) = V(f)$.

Corolario 6.3. Supongamos que $k = \bar{k}$. Sea $f \in k[x, y]$ y sea $f = \prod_{i=1}^m f_i^{\alpha_i}$ con f_i irreducible. Entonces

$$V(f) = \bigcup_{i=1}^m V(f_i)$$

es su descomposición en irreducibles y además $I(V(f)) = (f_1, \dots, f_m)$.

Demostración. Como f_i, f_j son coprimos no hay inclusiones entre $V(f_i)$ y $V(f_j)$, de lo contrario si existen $i \neq j$ tales que $V(f_i) \subset V(f_j)$, entonces

$$(f_i) = I(V(f_i)) \supset I(V(f_j)) = (f_j)$$

lo cual es una contradicción. Luego,

$$I(V(f)) = I\left(\bigcup_{i=1}^m V(f_i)\right) = \bigcap_{i=1}^m I(V(f_i)) = \bigcap_{i=1}^m (f_i) = (f_1 \cdots f_m)$$

1.7. Nullstellensatz de Hilbert

En general supondremos que $k = \bar{k}$, a no ser que se diga lo contrario.

Teorema 7. Sea $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ un ideal, entonces $V(I) \neq \emptyset$.

Demostración. Podemos suponer que I es maximal. En efecto, recordemos que todo ideal esta contenido en un ideal maximal, digamos M , entonces $V(M) \subseteq V(I)$. Como I es maximal, esto equivale a que $k[x_1, \dots, x_n]/I \supset k$ es cuerpo. Como k es algebraicamente cerrado, podemos asumir que $k[x_1, \dots, x_n]/I = k$.

Así, cada variable x_i puede ser identificada por un elemento en k digamos a_i , lo que implica que $x_i - a_i$ es igual 0 bajo el cociente, se sigue que $x_i - a_i \in I$, luego $I = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$. (Mejorar escritura)

De la demostración surge una pregunta, ¿Por que $k[x_1, \dots, x_n]/I = k$? El siguiente lema lo responde

Lema 7.1. (Lema de Zariski) Sea $K \subset L$ una extensión de cuerpo tal que L es finitamente generado como k -álgebra. Entonces L es finitamente generado como k -módulo.

Exploraremos una demostración menos general del teorema anterior, pero sin usar lema de Zariski. Para ello supongamos que $k = \mathbb{C}$.

Demostración. Del mismo modo, supongamos que $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal maximal, luego $L := k[x_1, \dots, x_n]/I$ es cuerpo, consideramos el morfismo canónico

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] & \xrightarrow{\pi} & L \\ \uparrow i & \nearrow \pi_i := \pi|_{\mathbb{C}[x_i]} & \\ \mathbb{C}[x_i] & & \end{array}$$

Afirmamos que $\ker(\pi_i) = (0)$ o $\ker(\pi_i) = (x_i - a_i)$ para algún $a_i \in \mathbb{C}$. En efecto, si $\ker(\pi_i) \neq (0)$, entonces $(0) \subset \ker(\pi_i) \subset \mathbb{C}[x_i]$, donde la segunda contención es estricta, de lo contrario, $1 \in I$ y entonces $I = k[x_1, \dots, x_n]$. Sea $f \in \ker(\pi_i)$, entonces como \mathbb{C} es algebraicamente cerrado, existe $(x_i - a_i)$ factor de f tal que $\pi_i(x_i - a_i) = 0$.

Volviendo a la demostración del teorema. Tenemos dos consideramos

- $\ker(\pi_i) = (x_i - a_i)$ para todo i . Entonces $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subseteq I$. Como $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ es ideal maximal e I es propio se obtiene el resultado.
- Existe i tal que $\ker(\pi_i) = (0)$, entonces π_i es inyectiva, como L es cuerpo $\mathbb{C}(x_i)$ se incrusta en L .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x_i] & \xrightarrow{\pi_i} & L \\ \downarrow i & \nearrow i_L & \\ \mathbb{C}(x_i) & & \end{array}$$

Es decir $\mathbb{C}(x_i) \subseteq L$. Notemos que L es un espacio vectorial numerable, a saber, la base corresponde a todos los monomios. Notemos que el siguiente conjunto es linealmente independiente

$$S := \left\{ \frac{1}{x_i - a_i} : a_i \in \mathbb{C} \right\}$$

Notemos que si $\sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{x_i - a_j} = 0$ entonces multiplicando por $(x_i - a_1) \cdots (x_i - a_m)$ y evaluando se tiene que $\lambda_j = 0$ para todo j . Esto es una contradicción pues S es no numerable.

Teorema 8. (Teorema de Nullstellensatz) Sea $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$, entonces $I(V(I)) = \sqrt{I}$.

Demostración.

- \supseteq | Sea $f \in \sqrt{I}$, entonces $f^n \in I$ para algún n . Luego $f^n(p) = 0$ para todo $p \in V(I)$, entonces $f(p) = 0$ para todo $p \in V(I)$ lo que implica que $f \in I(V(I))$.
- \subseteq | (Truco de Rabinowitsch) Sea $f \in I(V(I))$ y digamos que $I = (f_1, \dots, f_m)$. Definimos el ideal $J := (f_1, \dots, f_m, x_{n+1}f - 1) \subseteq k[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Supongamos que $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in V(J)$, entonces $(a_1, \dots, a_n) \in V(I)$ se sigue que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, esto resulta en una contradicción. Concluimos que $V(J) = \emptyset$.

Por el teorema anterior y como k es algebraicamente cerrado tenemos que $J = k[x_1, \dots, x_{n+1}]$, entonces existen $\{g_i\}_{i=1}^{m+1} \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ tales que

$$g_1 f_1 + \dots + g_m f_m + g_{m+1}(x_{n+1}f - 1) = 1$$

tomando $x_{n+1} = 1/f$ obtenemos

$$g_1(x_1, \dots, x_n, 1/f)f_1 + \dots + g_m(x_1, \dots, x_n, 1/f)f_m = 1$$

existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n \in I$.

Corolario 8.1. Hay una correspondencia uno a uno entre puntos en \mathbb{A}_k^n e ideales maximales.

Corolario 8.2. Las variedades afines en \mathbb{A}_k^n estan en correspondencia uno a uno con los ideales primos.

Corolario 8.3. Las hipersuperficies irreducibles en \mathbb{A}_k^n se corresponden uno a uno con polinomios irreducibles en $k[x_1, \dots, x_n]$.

Corolario 8.4. Sea $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Entonces $V(I)$ es un conjunto finito de puntos si y solo si como k -espacio vectorial $k[x_1, \dots, x_n]/I$ tiene dimensión finita.

Demostración.

- \Leftarrow | Sean $p_1, \dots, p_r \in V(I) \subseteq \mathbb{A}_k^n$. Consideramos $F_1, \dots, F_r \in k[x_1, \dots, x_n]$ tales que $F_i(p_j) = 0$ para todo $i \neq j$ y $F_i(p_i) = 1$. Sea $\overline{F_i}$ la imagen de F_i en el cociente $k[x_1, \dots, x_n]/I = R$.

Afirmamos que el conjunto $\{F_1, \dots, F_r\}$ es linealmente independiente en R . En efecto, si

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \overline{F_i} = 0 \quad \text{con} \quad \lambda_i \in k$$

entonces $\sum \lambda_i \overline{F_i} \in I$, evaluando en p_i vemos que $\lambda_i = 0$ para todo i , lo que prueba la afirmación. Así, $r \leq \dim_k R$.

- \Rightarrow | Digamos que $V(I) = \{p_1, \dots, p_r\}$ y $p_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$. Definimos

$$F_j := \prod_{i=1}^r (x_j - a_{ij})$$

Luego $F_j \in I(V(I))$, por Nullstellensatz, se tiene que F_j^N para algún N , así, $\overline{F_j^N} = 0$ en R , es decir, $p(x_j) + x_j^{rN} = 0$, con $gr(p_j) < rN$ entonces $\dim_k R < \infty$.

Ejemplos:

- Consideremos los polinomios $x - y, y - x^2 \in k[x, y]$, se sigue $V((x - y, y - x^2)) = \{(0, 0), (1, 1)\}$

$$\dim_k \left(k[x, y] / (x - y, y - x^2) \right) = \dim_k \left(k[x] / (x - x^2) \right) = \dim_k (k \oplus kx) = 2$$

- Notemos que $V(x - y - 1, x - y) = \emptyset$ y por otro lado

$$k[x, y] / (x - y, x - y - 1) = k[x, y] / (1) = (0)$$

así $\dim_k R = 0$.

- Veamos que $V(y, x - y^3) = \{(0, 0)\}$, entonces

$$\dim_k \left(k[x, y] / (y, x^3 - y) \right) = \dim_k \left(k[x] / (x^3) \right) = 3$$

- El conjunto $V(my - x, y - x^2)$ tiene dos puntos de intersección para todo $m \neq 0$,

$$\dim_k \left(k[x, y] / (my - x, y - x^2) \right) = \dim_k \left(k[x] / (mx^2 - x) \right) = 2$$

pero si $m = 0$, vemos que $\dim_k R = 1$.

1.8. Módulos y Condiciones de Finitud

Sea R un anillo, se dice que M es un R -módulo, si M es un grupo conmutativo y si viene con producto escalar, es decir, una función de $R \times M$ a M , se denota por $a \cdot m$ que satisface lo siguiente

- $(a + b)m = am + bm$ para todo $a, b \in R$ y $m \in M$.
- $a(m + n) = am + an$ para todo $a \in R$ y $m, n \in M$.
- $(ab)m = a(bm)$ para todo $a, b \in R$ y $m \in M$.
- $1_R \cdot m = m$ para todo $m \in M$

Un subgrupo de N de un R -módulo M se dice un submódulo si N es un R -módulo con el mismo producto escalar. Dado $S \subseteq M$, definimos el generado de S por

$$\langle S \rangle := \left\{ \sum r_i s_i \mid r_i \in R, s_i \in S \right\}$$

de hecho corresponde al submódulo de M mas pequeño que contiene a S . Decimos que M es finitamente generado si existe $S \subseteq M$ tal que $\langle S \rangle = M$.

Sea $R \subseteq S$ anillos. Decimos que S es modulo finito sobre R , si es finitamente generado como R -módulo.

Sean $v_1, \dots, v_n \in S$. Sea $\varphi : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow S$ el morfismo de anillo que manda x_i a v_i . La imagen de φ se denota por $R[v_1, \dots, v_n]$ y corresponde a un subanillo de S que contiene a R y v_1, \dots, v_n , además, es el subanillo mas pequeño con esta propiedad. Decimos que S es un algebra finita sobre R si $S = R[v_1, \dots, v_n]$ para algunos $v_1, \dots, v_n \in S$.

Sean $K \subset L$ cuerpos. Sean $v_1, \dots, v_n \in L$ y consideremos $K(v_1, \dots, v_n)$ el cuerpo de fracciones de $K[v_1, \dots, v_n]$. Al igual que antes, corresponde al menor subcuerpo de L que contiene a K y v_1, \dots, v_n . El cuerpo L se dice una extensión finitamente generada de K si $L = K(v_1, \dots, v_n)$ para algunos $v_1, \dots, v_n \in L$.

1.9. Elementos Integrales

Definición 8.1. Sean $R \subset S$ dominios enteros. Decimos que un elemento $v \in S$ es integral sobre R si

$$v^n + r_{n-1}v^{n-1} + \dots + r_1v + r_0 = 0$$

para algunos $r_i \in R$ y $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 8.1. Sean $R \subset S$ dominios enteros, $v \in S$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones

- a) v es integral sobre R .
- b) $R[v]$ es un R -modulo finitamente generado.
- c) Existe un subanillo $R' \subset S$ con $R[v] \subset R'$ y R' un R -modulo finitamente generado sobre R .

Demostración.

- $(a) \Rightarrow (b)$ | Existe un polinomio monico $f \in R[x]$ tal que $f(v) = 0$, luego el $R[v]$ se puede generar por finitos elementos.
- $(b) \Rightarrow (c)$ | Basta tomar $R' = R[v]$.
- $(c) \Rightarrow (a)$ | Existe R' tal que $R \subset R[v] \subset R' \subset S$. Con $R, R[v], R'$ finitamente generados como R -modulos. Sean w_1, \dots, w_n generadores de R' . Sabemos que

$$v \cdot w_i = a_{i1}w_1 + \dots + a_{in}w_n$$

luego tenemos el sistema

$$\begin{aligned}(a_{11} - v)w_1 + a_{12}w_2 + \cdots + a_{1n}w_n &= 0 \\ a_{21}w_1 + (a_{22} - v)w_2 + \cdots + a_{2n}w_n &= 0 \\ \vdots & \\ a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \cdots + (a_{nn} - v)w_n &= 0\end{aligned}$$

Como $R \subseteq S$ son dominios, podemos verlo dentro del cuerpo de fracciones, entonces tiene sentido calcular el determinante de la matriz asociada al sistema de ecuaciones. Por otro lado, (w_1, \dots, w_n) es una solución no trivial del sistema y por lo tanto el determinante de la matriz asociada es 0, lo que implica que v es integral sobre R .

Corolario 8.5. Sean $R \subseteq S$ dominios. Entonces los elementos integrales sobre R forman un anillo.

Demostración. Sean $a, b \in S$ elementos integrales sobre R . Notemos que

$$R \subseteq R[a + b] \subseteq R[a, b] \quad y \quad R \subseteq R[ab] \subseteq R[a, b]$$

Como a y b son elementos integrales sobre R , $R[a]$ y $R[b]$ son finitamente generados por $\{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ y $\{1, b, b^2, \dots, b^{m-1}\}$. Es claro que $R[a, b]$ es generado por $\{a^i b^j : 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq m-1\}$. Por la proposición se sigue que $a + b$ y ab son elementos integrales sobre R .

Definición 8.2. Sean $R \subseteq S$ dominios. Decimos que S es integral sobre R si todo $s \in S$ es integral sobre R .

Además, R es un dominio integralmente cerrado si ningún $z \in \text{Frac}(R) \setminus R$ es integral.

Ejemplos:

- Consideremos $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, sea $p/q \in \mathbb{Q}$ con p y q coprimos. Si tenemos la expresión

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

Por teorema de la raíz racional, q debe dividir a 1, luego $q = 1$ lo que implica que $p/q \in \mathbb{Z}$. Concluimos que \mathbb{Z} es integralmente cerrado.

- Veamos el conjunto algebraico $V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}_k^2$ con $k = \bar{k}$. Vemos el anillo

$$R = \frac{k[x, y]}{(y^2 - x^3)}$$

que es un dominio, pues $(y^2 - x^3)$ es irreducible. Dentro de $R \subseteq \text{Frac}(R)$, vemos que se cumple la relación $y^2 = x^3$, que dentro del cuerpo de fracciones es equivalente a

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - x = 0$$

notemos que $\frac{y}{x} \notin R$ y que $x \in R$. Por lo tanto R no es integralmente cerrado.

- Sea $V(y - x^2) \subseteq \mathbb{A}_k^2$. Vemos el anillo

$$R = \frac{k[x, y]}{(y - x^2)}$$

por demostrar, R es integralmente cerrado. Consideremos la función $\varphi : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^2$ dada por $\varphi(t) = (t, t^2)$. Notemos que $\text{Im}(\varphi) = V(y - x^2)$. La función φ induce el isomorfismo

$$\begin{aligned}\frac{k[x, y]}{(y - x^2)} &\rightarrow k[t] \\ x &\rightarrow t \\ y^2 &\rightarrow t^2\end{aligned}$$

Como $k[t]$ es DFU, se sigue que R es integralmente cerrado.

Vamos a estudiar un caso particular del lema de Zariski. Sea k un cuerpo e $I \subseteq k[x]$ un ideal maximal, entonces $k[x]/I = L$ es un cuerpo. Tenemos dos casos, $I = (0)$ ó $I = (f(x))$. Si $I = (0)$ entonces $k[x]$ es cuerpo, esto es una contradicción. Por otro lado escribimos

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

pero en L se tiene que $f(x) = 0$, luego, L es generado como k módulo por $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$.

Veamos cuando $k[x, y]/I = L$ donde k es un cuerpo e $I \subseteq k[x, y]$ es un ideal maximal. Si $x \in I$ o $y \in I$ podemos reducir al caso anterior. Entonces L es finitamente generado por potencias de x e y .

Pensaremos en $k(x)$ como los cocientes de polinomios en una variable modulo I , luego

$$k \subset k(x) \subset k(x)[y] = L$$

donde la igualdad $k(x)[y] = L$ se debe a que la inversa de un polinomio en $k(x)$ en realidad se escribe como combinación de potencias de x e y . Además, por el caso anterior, $k(x)[y]$ es finitamente generado como $k(x)$ módulo.

Tenemos dos casos:

- Caso 1: La extensión $k \subset k(x)$ es finita. Esto implica que la extensión $k \subseteq L$ es finita, basta tomar el producto de los generadores.
- Caso 2: Se tiene la siguiente igualdad

$$k(x) = \left\{ \text{cocientes } \frac{p(x)}{q(x)} \right\}$$

En L se debe cumplir la relación $y^m = a_{m-1}y^{m-1} + \cdots + a_1y + a_0$ con $a_i \in k(x)$. Tomar $a \in k[x]$ tal que a^m limpie los denominadores, luego

$$(ay)^m = b_{m-1}(ay)^{m-1} + \cdots + b_1(ay) + b_0$$

con $b_i \in k[x]$. Se sigue que ay es integral sobre $k[x]$. Sea $z \in L$, luego para N suficientemente grande $a^N z$ es integral sobre $k[x]$, ya que

$$\begin{aligned} a^N z &= a^N f(x, y) \\ &= a^N (c_0 + c_1 y + \cdots + c_M y^M) \\ &= c'_0 + c'_1(ay) + \cdots + c'_M(ay)^M \end{aligned}$$

donde $c'_i \in k[x]$. Como $k[x]$ es DFU, $a = p_1 \cdots p_s$ su factorización en irreducibles, sea p_{s+1} un irreducible distinto de p_i , tomando $z = \frac{1}{p_{s+1}}$ resulta que $a^N z$ es integral, lo cual es una contradicción.

Lema 8.1. (Lema de Zariski) Sean $K \subseteq L$ y L es finitamente generado como K algebra, entonces L es finitamente generado como K modulo, es decir, como espacio vectorial.

2. Variedades Afines

De ahora en adelante k será un cuerpo algebraicamente cerrado. A un conjunto algebraico afín irreducible lo llamamos variedad afín, o simplemente variedad.

2.1. Anillo de Coordenadas

Definición 8.3. Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad no vacía. Definimos

$$\Gamma(V) := \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{I(V)}$$

y lo llamamos el **anillo de coordenadas de V** y los elementos de $\Gamma(V)$ les decimos **funciones regulares**.

Observación: El anillo de coordenadas de V es un dominio, ya que $I(V)$ es un ideal primo de $k[x_1, \dots, x_n]$. Por otro lado, dado $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ entonces f, g determinan la misma función si y solo si $f - g \equiv 0$ en V , es decir, $f - g \in I(V)$. De este modo tenemos dos maneras de ver los elementos de $\Gamma(V)$; como una función de V , o como clase de equivalencia de polinomios.

2.2. Aplicaciones Polinomiales

Definición 8.4. Sean $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}_k^m$ variedades. Una aplicación $\varphi : V \rightarrow W$ se dice **aplicación polinomial** si existen $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ tales que

$$\varphi(a) = \varphi(a_1, \dots, a_n) = (f_1(a), \dots, f_m(a))$$

Proposición 8.2. Sean $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}_k^m$ variedades. Entonces hay una correspondencia uno a uno entre las funciones polinomiales $\varphi : V \rightarrow W$ y los homomorfismos $\tilde{\varphi} : \Gamma(W) \rightarrow \Gamma(V)$.

Demostración.

- Dada $\varphi : V \rightarrow W$ una aplicación polinomial, sean $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ tales que $\varphi = (f_1, \dots, f_m)$. Definimos $\tilde{\varphi} : \Gamma(W) \rightarrow \Gamma(V)$ dada por

$$\tilde{\varphi}(f) := f \circ \varphi = f(f_1, \dots, f_m)$$

Veamos que esta bien definida, en efecto, sea $f \in I(W)$, entonces $g \circ \varphi \equiv 0$ en V , luego $g \circ \varphi \in I(V)$. Claramente $\tilde{\varphi}$ es homomorfismo.

- Sea $\tilde{\varphi} : \Gamma(W) \rightarrow \Gamma(V)$ un homomorfismo. Sean $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ tales que $\tilde{\varphi}(y_i) = f_i$, definimos la aplicación polinomial $\varphi := (f_1, \dots, f_m)$, por la discusión anterior φ esta bien definida y además la función inducida por φ es la misma que $\tilde{\varphi}$.

Definición 8.5. Una aplicación polinomial se dice **isomorfismo** si tiene inversa que también es una aplicación polinomial.

Observación: Por la proposición anterior una aplicación polinomial es isomorfismo si y solo si el homomorfismo inducido es isomorfismo de anillos. Luego, dos variedades son isomorfas si y solo si sus anillos de coordenadas son isomorfos.

2.3. Cambio de Coordenadas

Definición 8.6. Un **cambio de coordenadas afín** en \mathbb{A}_k^n es una aplicación polinomial $\varphi = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{A}_k^n \rightarrow \mathbb{A}_k^n$ tal que $gr(f_i) = 1$ y φ es biyectiva.

2.4. Funciones Racionales y Anillos Locales

Definición 8.7. Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad no vacía. Definimos el **cuerpo de funciones racionales** en V como $k(V) := \text{Frac}(\Gamma(V))$. Un elemento en $k(V)$ se dice **función racional** en V .

Notemos que $f \in k(V)$ no es necesariamente una función $f : V \rightarrow \mathbb{A}_k^1$. Consideremos $V = \mathbb{V}(xw - yz) \subseteq \mathbb{A}_k^4$ y $f = \frac{x}{y}$, luego, no es posible evaluar en los puntos de la forma $(a, 0, b, 0)$.

Definición 8.8. Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad no vacía. Sea f una función racional de V y $p \in V$, decimos que f está definida en p si para algunos $a, b \in \Gamma(V)$ se tiene que $f = \frac{a}{b}$ y $b(p) \neq 0$.

Observación: Si $\Gamma(V)$ es DFU entonces la expresión a/b es esencialmente única y por lo tanto f está definida en p si y solo si $b(p) \neq 0$.

Definición 8.9. Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad no vacía. Sea $p \in V$, definimos

$$\mathcal{O}_p(V) := \{f \in k(V) : f \text{ está definida en } p\}$$

se dice que $\mathcal{O}_p(V)$ es el **anillo local** de V en p .

Observación: Notemos que $\mathcal{O}_p(V)$ es un subanillo de $k(V)$ que contiene $\Gamma(V)$, en otras palabras $k \subseteq \Gamma(V) \subseteq \mathcal{O}_p(V) \subseteq k(V)$.

Este anillo tiene la propiedad de que tiene un único ideal maximal, a saber, $m_p(V) = \{f \in \mathcal{O}_p(V) : f(p) = 0\}$. Un anillo con esta propiedad se dice **anillo local**.

Definición 8.10. El conjunto de puntos $p \in V$ donde una función racional f no está definida se llama el **conjunto de polos** de f .

Proposición 8.3.

- a) El conjunto de polos de una función racional es un subconjunto algebraico de V .
- b) $\Gamma(V) = \bigcap_{p \in V} \mathcal{O}_p(V)$.

Demostración.

- a) Sea $f \in k(V)$. Consideramos

$$J_f := \{G \in k[x_1, \dots, x_n] : \overline{G}f \in \Gamma(V)\}$$

donde \overline{G} es la clase de G en $\Gamma(V)$. Es claro que J_f es un ideal en $k[x_1, \dots, x_n]$ que contiene a $I(V)$. Veamos que $V(J_f) = \{\text{polos de } f\}$.

Supongamos que $p \notin V(J_f)$, entonces existe $G \in J_f$ tal que $G(p) \neq 0$. Tenemos que $\overline{G}f = \overline{H} \in \Gamma(V)$, en $k(V)$ se tiene que $f = \frac{H}{G}$, entonces p no es polo de f .

Si p no es polo de f , entonces existen $G, H \in k[x_1, \dots, x_n]$ tal que $f = \frac{H}{G}$ y $G(p) \neq 0$, además vemos que $\overline{G}f \in \Gamma(V)$, es decir, $p \notin V(J_f)$.

- b) Una contención es clara, veamos la otra. Sea $f \in \bigcap_{p \in V} \mathcal{O}_p(V)$, entonces $V(J_f) = \emptyset$, por Nullstellensatz se sigue que $J_f = k[x_1, \dots, x_n]$ y por ende $f = 1 \cdot f \in \Gamma(V)$.

Proposición 8.4. $\mathcal{O}_p(V)$ es un dominio local Noetheriano.

Demostración. Sea $I \subseteq \mathcal{O}_p(V)$ un ideal, consideremos $I' = I \cap \Gamma(V)$. Como $\Gamma(V)$ es Noetheriano, existen $f_i \in \Gamma(V)$ tales que $I' = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Luego si $f = \frac{a}{b}$ entonces $bf = a \in I'$. Se sigue que

$$bf = \sum a_i f_i \Rightarrow f = \sum \frac{a_i}{b} f_i$$