Algebras de Banach de operadores

Examen Teoría Espectral (MAT2820)

Benjamín Mateluna Medina

Pontificia Universidad Católica de Chile

bmateluna@uc.cl

11 de diciembre de 2025

Resumen

Estudiaremos las Algebras de Banach, que resultarán ser una generalización de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, el espacio de operadores lineales acotados con dominio $\mathcal{H}$. Muchos de los resultados vistos en clases se extenderán a estos espacios, adicionalmente, estudiaremos la transformada de Gelfand y como coincide con la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$.

Resumen

Estudiaremos las Algebras de Banach, que resultarán ser una generalización de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, el espacio de operadores lineales acotados con dominio $\mathcal{H}$. Muchos de los resultados vistos en clases se extenderán a estos espacios, adicionalmente, estudiaremos la transformada de Gelfand y como coincide con la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$.

Por último, exploraremos las $\mathbb{C}^*-$algebras y el teorema de Gelfand-Naimark, que relaciona las $\mathbb{C}^*-$algebras con las funciones continuas de un espacio compacto.

Esquema de la Presentación

1. Algebras de Banach
   - Definición y ejemplos
   - Propiedades de un álgebra de Banach
   - Algebras de Banach conmutativas
2. $\mathbb{C}^*$-Algebras

Algebras de Banach

Definición

Un álgebra de Banach es un álgebra $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$ que posee una norma, $\|\cdot\|$, como espacio vectorial con la cual es un espacio de Banach tal que para todo $a, b \in \mathcal{A}$ se cumple

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

Decimos que la norma es multiplicativa. Si $\mathcal{A}$ tiene una unidad, e, entonces $\|e\| = 1$.

Que la norma sea multiplicativa nos permite concluir que la función $(x, y) \mapsto xy$ es continua.

Ejemplos

- Sea X un espacio compacto, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X)$ es un álgebra de Banach con la multiplicación dada por $(fg)(x) = f(x)g(x)$ para todo $f, g \in \mathcal{A}$ y $x \in X$. El álgebra $\mathcal{A}$ es abelina y posee una unidad, que corresponde a la función constante 1.

Ejemplos

- Sea X un espacio compacto, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X)$ es un álgebra de Banach con la multiplicación dada por $(fg)(x) = f(x)g(x)$ para todo $f, g \in \mathcal{A}$ y $x \in X$. El álgebra $\mathcal{A}$ es abelina y posee una unidad, que corresponde a la función constante 1.
- Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un álgebra de Banach, donde la multiplicación corresponde a la composición de operadores y tiene una unidad que es el operador identidad. Para $dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}) \geq 2$ el espacio no es conmutativo.

  El espacio $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, el conjunto de operadores compactos, es un álgebra de Banach sin unidad si $\mathcal{H}$ es un espacio de dimensión infinita.

- Consideremos el espacio $L^1(\mathbb{R})$. Definimos la multiplicación en L^1 como

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\, dt$$

para $f, g \in L^1$. Sabemos que L^1 es un espacio de Banach y que la convolución cumple con las propiedades de un álgebra conmutativa, también recordemos que

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$

es decir, L^1 es un álgebra de Banach conmutativa.

Lema

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $a \in \mathcal{A}$ tal que $\|a\| < 1$, entonces $1 - a$ es invertible.

Donde $(1-a)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a^n$. El conjunto de los elementos invertibles, denotado por G es un conjunto abierto y el mapa $a \mapsto a^{-1}$ es continuo.

Lema

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $a \in \mathcal{A}$ tal que $\|a\| < 1$, entonces $1 - a$ es invertible.

Donde $(1-a)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a^n$. El conjunto de los elementos invertibles, denotado por G es un conjunto abierto y el mapa $a \mapsto a^{-1}$ es continuo.

Definición

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $a \in \mathcal{A}$, el espectro de a, denotado por $\sigma(a)$, esta definido por

$$\sigma(a) := \{\alpha \in \mathbb{C} : a - \alpha \text{ no es invertible}\}$$

El conjunto resolvente de a se define como $\rho(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$.

El mapa $\alpha \mapsto a - \alpha$ es una función continua y notemos que $\rho(a)$ es la preimagen de G bajo esta función.

- Sea X un espacio compacto. Consideremos $f \in \mathcal{C}(X)$, luego $\sigma(f) = f(X)$.
- Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Dado $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, sabemos que

$$\rho(T) = \{\alpha : T - \alpha \text{ es biyección}\}$$

Ambas nociones de espectro y conjunto resolvente coinciden.

- Sea X un espacio compacto. Consideremos $f \in \mathcal{C}(X)$, luego $\sigma(f) = f(X)$.
- Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Dado $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, sabemos que

$$\rho(T) = \{\alpha : T - \alpha \text{ es biyección}\}$$

Ambas nociones de espectro y conjunto resolvente coinciden.

El espectro de un elemento es un conjunto compacto y no vacío.

Definición

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $a \in \mathcal{A}$, el radio espectral de a, denotado por $r(a)$, se define por

$$r(a) := \sup\{|\alpha| : \alpha \in \sigma(a)\} = \text{lím} \left\|a^n\right\|^{1/n}$$

Algebras de Banach conmutativas

Proposición

Sea $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach y $h : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ un morfismo no trivial, entonces $\|h\| = 1$.

Vemos que todo morfismo es un funcional lineal continuo. Podemos definir lo siguiente.

Algebras de Banach conmutativas

Proposición

Sea $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach y $h : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ un morfismo no trivial, entonces $\|h\| = 1$.

Vemos que todo morfismo es un funcional lineal continuo. Podemos definir lo siguiente.

Definición

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa. Denotamos por Σ a la colección de morfismos no triviales. Dotamos a este conjunto con la topología débil$-*$, como subconjunto de $\mathcal{A}^*$. Este espacio se llama el espacio ideal maximal de $\mathcal{A}$.

Por Banach-Alaoglu este espacio es compacto y Hausdorff.

La transformada de Gelfand

Definición

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con espacio ideal maximal Σ. Dado $a \in \mathcal{A}$, la transformada de Gelfand de a es la función $\hat{a} : \Sigma \to \mathbb{C}$ definida por $\hat{a}(h) = h(a)$.

Se tiene que $\hat{a} \in \mathcal{C}(\Sigma)$ para todo $a \in \mathcal{A}$ y además, la asignación $a \mapsto \hat{a}$ es un morfismo de algebras continuo con norma 1.

La transformada de Fourier

Buscamos los morfismo $h : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$. Por teorema de representación de Riesz, existe un único $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$h(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\, dx$$

Usando que $h(f * g) = h(f)h(g)$ se tiene que $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$ $\lambda-$c.t.p. Luego, se tiene la igualdad

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x+y)\, dx = \phi(y) \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\, dx = \phi(y)h(f)$$

existe f tal que $h(f) \neq 0$ y por lo tanto

$$\phi(y) = \frac{1}{h(f)} \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x+y)\, dx = \frac{1}{h(f)} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\phi(x)\, dx$$

lo que implica que ϕ es continua. Así, $\phi(0) = 1$, además, $\|\phi\|_\infty = \|h\| \leq 1$, es decir, $|\beta(x)| \leq 1$. Por continuidad y $\phi(0) = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_0^\delta \phi(x)\, dx = a \neq 0$$

Entonces

$$a\phi(x) = \phi(x) \int_0^\delta \phi(t)\, dt = \int_x^{x+\delta} \phi(t)\, dt \qquad \text{entonces } \phi(x) = a^{-1} \int_x^{x+\delta} \phi(t)\, dt$$

Por teorema fundamental del cálculo, la función ϕ es diferenciable, más aún,

$$\frac{\phi(x+s)-\phi(x)}{s} = \phi(x)\cdot\frac{\phi(s)-1}{s}$$

Tenemos una EDO $\phi'(x) = \phi'(0)\phi(x)$ con condiciones iniciales $\phi(0) = 1$, cuya solución es $\phi(x) = e^{-ix\xi}$. De este modo,

$$\hat{f}(h) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,dx = \mathcal{F}(f)(\xi)$$

$\mathbb{C}^*-$Algebras

Definición

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach, una involución es un mapa $a \mapsto a^*$ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ tal que las siguientes propiedades se cumplen para todo $a, b \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$

1. $(a^*)^* = a$
2. $(ab)^* = b^* a^*$
3. $(\alpha a + b)^* = \overline{\alpha} a^* + b^*$

Notemos que $1^* a = (1^* a)^{**} = (a^* 1)^* = a$ y análogamente $a 1^* = a$, por unicidad, concluimos que $1^* = 1$.

Definición

Una $\mathbb{C}^*-$álgebra es un álgebra de Banach $\mathcal{A}$, con una involución tal que para todo $a \in \mathcal{A}$

$$\|a^* a\| = \|a\|^2$$

Definición

Una $\mathbb{C}^*-$álgebra es un álgebra de Banach $\mathcal{A}$, con una involución tal que para todo $a \in \mathcal{A}$

$$\|a^* a\| = \|a\|^2$$

- Sea X un espacio compacto, luego, $\mathcal{C}(X)$ es una $\mathbb{C}^*-$álgebra donde $f^*(x) = \overline{f(x)}$ para $f \in \mathcal{C}(X)$ y $x \in X$.
- Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, entonces $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una $\mathbb{C}^*-$álgebra donde para cada $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, A^* es el operador adjunto de A.

Definición

Una $\mathbb{C}^*-$álgebra es un álgebra de Banach $\mathcal{A}$, con una involución tal que para todo $a \in \mathcal{A}$

$$\|a^* a\| = \|a\|^2$$

- Sea X un espacio compacto, luego, $\mathcal{C}(X)$ es una $\mathbb{C}^*-$álgebra donde $f^*(x) = \overline{f(x)}$ para $f \in \mathcal{C}(X)$ y $x \in X$.
- Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, entonces $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una $\mathbb{C}^*-$álgebra donde para cada $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, A^* es el operador adjunto de A.

Un morfismo de $\mathbb{C}^*-$algebras es un morfimo de algebras tal que $f(a^*) = f(a)^*$.
Todo morfismo $h : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ es un $^*-$morfismo.

Teorema

Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{C}^*-$álgebra conmutativa y Σ su espacio ideal maximal, entonces la transformada de Gelfand $\gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\Sigma)$ es un $^*-$isomorfismo isométrico.

Es válido para $\mathbb{C}^*-$álgebras en general, es decir, no necesariamente deben ser unitarias o ser conmmutativas, en el primer caso el conjunto es $\mathcal{C}_0(\Sigma)$ y en el segundo caso el isomorfismo es a una $\mathbb{C}^*-$subálgebra de operadores acotados en un espacio de Hilbert.