Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Mauricio Bustamante – Estudiante: Benjamín Mateluna

Taller de Trabajo - MAT3094
Informe Taller de Trabajo
05 de agosto de 2025

Índice

Introducción

1. Homología y Cohomología

1.1. Complejos de Cadenas

Definición: *Un **complejo de cadenas** es una secuencia de grupos abelianos y homomorfismos*

$$\cdots \to C_3 \xrightarrow{d_3} C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

tales que $d_i \circ d_{i+1} = 0$ para todo i. Se denota por la tupla (C_*, d_*^C)

Definición: *Un **complejo de cocadenas** es una secuencia de grupos abelianos y homomorfismos*

$$0 \to C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \xrightarrow{d^2} C^3 \to \cdots$$

tal que $d^{i+1} \circ d^i = 0$ para todo i. Se denota por la tupla (C^*, d_C^*).

Observación: Los morfismos d_i y d^i se conocen como diferenciales. Por la condición dada, observamos que $im\ d_{i+1} \subseteq ker\ d_i$ (resp. $im\ d^i \subseteq ker\ d_{i+1}$). Los elementos en $ker\ d_i$ se dicen **ciclos** (resp. **cociclos**) y los elementos de $im\ d_i$ se llaman **fronteras** (resp. **cofronteras**).

Definición: *La **homología** de un complejo de cadenas C es*

$$H_i(C_*) = \frac{ker\ d_i}{im\ d_{i+1}}$$

*Un elemento en $H_i(C_*)$ se conoce como **clase de homología**.*

Definición: *La **cohomología** de un complejo de cocadenas C es*

$$H_i(C^*) = \frac{ker\ d_i}{im\ d_{i-1}}$$

*Un elemento en $H_i(C^*)$ se conoce como **clase de cohomología**.*

Definición: *Sean (C, d_C) y (D, d_D) complejos de cadenas, un **mapeo de cadena**, denotado por $C_* \to D_*$ es una colección de morfismos $f_n : C_n \to D_n$ tales que $d_n^D \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n^C$. En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d_n^C"] & D_n \arrow[d, "d_n^D"] \\ C_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

La definición para **mapeo de cocadena** es análogo.

Lema 1.1: *Sea $f_* : C_* \to D_*$ un mapeo de cadena, entonces $f_* : H_n(C_*) \to H_n(D_*)$ dado por $[x] \to [f_n(x)]$ es un morfismo bien definido.*

> *Demostración.* En primer lugar, debemos verificar que dado un ciclo entonces f lo mapea a un ciclo. Sea $x \in ker\ d_n^C$. Luego,
>
> $$d_n^C(f_n(x)) = f_{n-1}(d_n^C(x)) = f_{n-1}(0) = 0$$
>
> Por lo tanto, $f_n(x) \in ker\ d_n^D$. Veamos que esta bien definido, sean $x, y \in ker\ d_n^C$ tales que $[x] = [y]$, entonces $x - y = d_{n+1}^C(z)$ para $z \in C_{i+1}$. De este modo, $f_n(x) - f_n(y) = f_n(d_{n+1}^C(z)) = d_{n+1}^D(f_{n+1}(z))$ es una frontera. Así, $[f_n(x)] = [f_n(y)]$. □

Un resultado análogo se tiene para un mapeo de cocadena.

1.2. Homología y Cohomología Singular

La idea ahora es definir, dado un espacio topologico X, un complejo de cadenas $C_*(X)$, y para cada función continua $f : X \to Y$, construir un mapeo de cadena $f_* : C_*(X) \to C_*(Y)$. Para luego, obtener los grupos de homología $H_*(X)$ de cada espacio y los mapeos $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$.

Para esta construcción se utilizara homología singular. La ventaja de este vía, es que la definicón es una proppiedad instrinseca del espacio, sin embargo, resulta casi imposible calcular los complejos de cadenas y por ende, los grupos de homología.

Todos los resultados de la sección pueden ser dualizados, tomando el funtor Hom.

Definición: *Un **n-simplice estándar** es*

$$\nabla^n = \left\{(t_0, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0,\ \sum t_i = 1\right\}$$