



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: GIANCARLO URZÚA – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

Geometría Algebraica - MAT2824
Apuntes
06 de Marzo de 2025

Índice

Introducción	3
1. Conjuntos Algebraicos afines	4
1.1. Preliminares algebraicos	4
1.2. Espacio Afín y Conjuntos Algebraicos	4
1.3. Ideal de un conjunto	5
1.4. El Teorema de la Base de Hilbert	5
1.5. Componentes Irreducibles en un Conjunto Algebraico	6
1.6. Conjuntos Algebraicos del Plano	7
1.7. Nullstellensatz de Hilbert	8
1.8. Modulos y Condiciones de Finitud	11
1.9. Elementos Integrales	11
2. Variedades Afines	14
2.1. Anillo de Coordenadas	14
2.2. Aplicaciones Polinomiales	14
2.3. Cambio de Coordenadas	14
2.4. Funciones Racionales y Anillos Locales	14
2.5. Anillos de Evaluación Discreta	15
2.6. Formas	16
2.7. Producto Directo de Anillos	16
2.8. Operando con Ideales	17
2.9. Ideales de un Número Finito de Puntos	17
2.10. Modulos Cociente y Secuencias Exactas	18
2.11. Modulos Libres	18
3. Propiedades Locales de Curvas Planas	20
3.1. Puntos Multiples y Rectas Tangentes	20
3.2. Multiplicidades y Anillos Locales	20
3.3. Número de Intersecciones	20
4. Variedades Proyectivas	21
4.1. Espacio Proyectivo	21
4.2. Conjuntos Algebraicos Proyectivos	21

Introducción

Habrán tres evaluaciones (I1, I2, I3) cada una vale un 20 % y un examen (EX) que vale un 40 %. Las fechas son, 9 de abril, 14 de Mayo, 11 de Junio y 1 de Julio respectivamente.

1. Conjuntos Algebraicos afines

1.1. Preliminares algebraicos

Sea R un anillo conmutativo con $+$, \cdot y con $1 \neq 0$. Si R, R' son anillos, un morfismo de anillos es una función $f: R \rightarrow R'$ que respeta $+$, \cdot y $f(1_R) = 1_{R'}$. Un dominio R es un anillo en donde $xy = xz$ implica que $y = z$ para todo $x \neq 0$.

Ejemplo \mathbb{Z} es dominio, pero $\mathbb{Z}/6$ no lo es.

Un cuerpo es un dominio donde todo $x \neq 0$ tiene un inverso. Dado R dominio, existe el cuerpo de fracciones K tal que $R \subseteq K$. Dado R anillo, sea $R[x]$ el anillo de polinomios con coeficientes en R , sus elementos tienen la forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d, \quad a_d \neq 0$$

y decimos que f tiene grado d denotado por $gr(f)$. Se define de manera recursiva $R[x_1, \dots, x_n] = R[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$ el anillo de polinomios en n variables. Dado $f = \alpha \cdot x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$ su grado se define como $gr(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, para f en general, definimos su grado como $gr(f) := \max\{\text{grados de monomios}\}$. Dado $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ y $d = gr(f)$ entonces

$$f = F_0 + F_1 + \cdots + F_d, \text{ con } F_i \text{ homogéneos, esto es, } F_i(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^i F_i(x_1, \dots, x_n)$$

Si $f \in R[x]$ una raíz (cero) de f es un $r \in R$ tal que $f(r) = 0$.

Teorema 1. *Se tiene que r es cero si y solo si $f(x) = (x - r)g(x)$ para algún $g \in R[x]$.*

Un cero de $f(x_1, \dots, x_n)$ es un $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$.

Decimos que $r \in R$ es irreducible si toda descomposición $r = ab$ con $a, b \in R$ se tiene que a o b es una unidad. Un anillo R se dice dominio de factorización única si todo elemento no nulo se puede factorizar de manera esencialmente única en producto de irreducibles.

Lema 1.1. *Si R es dominio de factorización única entonces $R[x]$ es dominio de factorización única.*

Lema 1.2. *Si R es un dominio de factorización única y K su cuerpo de fracciones. Dado $f \in R[x]$ irreducible entonces f es irreducible en $K[x]$.*

Sea R un anillo. Un ideal $I \subset R$ es tal que si $a, b \in I$ entonces $a + b \in I$ y si $r \in R$ entonces $ra \in I$. Consideramos la función $\pi: R \rightarrow R/I$ donde R/I es el anillo cociente que es conmutativo. Un ideal es maximal si y solo si R/I es cuerpo.

Teorema 2. *Sea R un dominio euclideo (se cumple algoritmo de la división) y $a, b \in R$, consideremos $\text{mcd}(a, b) = d$. Entonces existen $c, e \in R$ tales que $ac + be = d$.*

Teorema 3. *Si F es un polinomio homogéneo de grado d , entonces*

$$dF = x_1 F_{x_1} + \cdots + x_n F_{x_n}$$

donde F_{x_i} es la derivada formal con respecto a x_i .

1.2. Espacio Afín y Conjuntos Algebraicos

Definición 3.1. *Sea k un cuerpo. El espacio afín de dim n es $\mathbb{A}_k^n := k^n$ (generalmente se supondrá que $k = \bar{k}$).*

Definición 3.2. *Una hipersuperficie de \mathbb{A}_k^n es $V(F) = \{p \in \mathbb{A}_k^n : F(p) = 0\}$ para un $F \in k[x_1, \dots, x_n]$.*

Ejemplos:

- Sea $k = \mathbb{R}$ consideramos la hipersuperficie $V(y^2 - x^2(x+1)) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ (foto)
El punto $(0,0)$ se llama nodo.
- Veamos la hipersuperficie $V((x^3 - y^3)(y^3 - 1)(x^3 - 1)) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$.
- La hipersuperficie $V(x^2 + y^2 - z^2) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ es conocida como cono (foto)
Como en el primer ejemplo, el punto $(0,0)$ se llama nodo
- Consideremos $V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ (foto)
En este caso, el punto $(0,0)$ no es un nodo, en este caso se llama cuspide.
- Veamos el caso de una hipersuperficie no parametrizable, esta es $V(y^2 - x(x+1)(x+\lambda))$.

Definición 3.3. Sea $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ un conjunto arbitrario, se define

$$V(S) := \{p \in \mathbb{A}_k^n : F(p) = 0 \quad \forall F \in S\} = \bigcap_{F \in S} V(F)$$

y se dice que es un conjunto algebraico afín.

Propiedades de un conjunto algebraico afín:

- a) Sea $I = \langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i s_i, a_i \in k \right\}$, entonces $V(I) = V(S)$.

Demostración. Veamos que $V(I) \subseteq V(S)$, si $p \in V(I)$, como $S \subseteq I$ se sigue que $p \in V(S)$. Para $V(S) \subseteq V(I)$ notemos que dado $f \in I$ se tiene que $f = \sum a_i s_i$, luego si $p \in V(S)$ vemos que $f(p) = \sum a_i s_i(p) = 0$.

- b) Sea $\{I_\alpha\}$ una colección de ideales, entonces $V(\bigcup_\alpha I_\alpha) = \bigcap_\alpha V(I_\alpha)$.
- c) Si $I \subseteq J$ se sigue que $V(J) \subseteq V(I)$.
- d) Sean $F, G \in k[x_1, \dots, x_n]$, se tiene que $V(FG) = V(F) \cup V(G)$.
- e) Tenemos las siguientes dos identidades $V(1) = \emptyset$ y $V(0) = \mathbb{A}_k^n$.

observación: Lo anterior es valido si k es algebraicamente cerrado, de lo contrario, si consideramos $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ vemos que $V(x^2 + 1) = \emptyset$.

1.3. Ideal de un conjunto

Definición 3.4. Sea $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un conjunto arbitrario. Se define el ideal de X como

$$I(X) := \{F \in k[x_1, \dots, x_n] : F(p) = 0 \quad \forall p \in X\}$$

observación: Notemos que si $F^m \in I(X)$ entonces $F \in I(X)$. Un ideal con esta propiedad se dice radical.

Propiedades del ideal de un conjunto:

- a) Si $X \subseteq Y$ se tiene que $I(Y) \subseteq I(X)$.
- b) Se tiene lo siguiente $I(\emptyset) = k[x_1, \dots, x_n]$ y $I(\mathbb{A}_k^n) = \{0\}$. Además, si k es un cuerpo infinito, se tiene que $I(\{a_1, \dots, a_n\}) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$.

1.4. El Teorema de la Base de Hilbert

Teorema 4. Todo conjunto algebraico corresponde a la intersección finita de hipersuperficies.

Demostración. Sea $V(I)$ el conjunto algebraico para algún ideal $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. Basta con probar que I es finitamente generado, en tal caso $I = (F_1, \dots, F_r)$, entonces $V(I) = V(F_1, \dots, F_r) = V(F_1) \cap \dots \cap V(F_r)$.

Teorema 5. Si R es un anillo Noetheriano, entonces $R[X]$ es un anillo Noetheriano.

Demostración. Sea $I \subseteq R[X]$ un ideal. Dado $F = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$ con $a_d \neq 0$ decimos que a_d es el término líder de F denotado por $l(F)$. Sea

$$\mathcal{J} := \{r \in R : r \text{ es término líder de algún } F \in I\} \cup \{0\}$$

Afirmamos que \mathcal{J} es ideal, en efecto, sean $l(F), l(G) \in \mathcal{J}$, supongamos sin pérdida de generalidad que $gr(F) \leq gr(G)$, luego

$$Fx^{gr(G)-deg(F)} + G = H$$

donde $l(H) = l(F) + l(G)$. Es claro que $r \cdot l(F) \in \mathcal{J}$ con $r \in R$. Por hipótesis existen $F_1, \dots, F_r \in I$ tales que $\mathcal{J} = (l(F_1), \dots, l(F_r))$. Sea $N > gr(F_i)$ para todo $1 \leq i \leq r$. Para cada $m \leq N$ definimos

$$\mathcal{J}_m := \{r \in R : r \text{ es término líder de } F \in I \text{ y } gr(F) \leq m\}$$

Notemos que los \mathcal{J}_m son ideales en R , por ende, son finitamente generados, es decir $\mathcal{J}_m = (l(F_{m,j}))$. Consideremos el ideal $I' = \langle F_{m,j}, F_i \rangle$, afirmamos que $I' = I$. Claramente se tiene que $I' \subset I$. Supongamos, por contradicción, que $I' \neq I$, sea $G \in I' \setminus I$ de menor grado. Tenemos dos consideramos

- Veamos cuando $gr(G) > N$, existen polinomios $Q_i \in R[X]$ tal que G y $\sum Q_i F_i$ tienen el mismo coeficiente líder. Luego $G - \sum Q_i F_i \in I'$ pues tiene menor grado que G , se sigue que $G \in I'$.
- El resultado para $gr(G) \leq N$ se obtiene del mismo modo, usando esta vez los $F_{m,j}$.

Ejemplo: Sea $(0,0) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, entonces $\{(0,0)\} = V(x^2 + y^2)$. Pero en \mathbb{C} tenemos que $\{(0,0)\} \neq V(F)$ para ningún $F \in k[x, y]$.

1.5. Componentes Irreducibles en un Conjunto Algebraico

Definición 5.1. Un conjunto algebraico V se dice reducible si $V = V_1 \cup V_2$ con V_i conjunto algebraico y distinto de V .

Observación: Un punto es un conjunto algebraico irreducible, lo que implica que cualquier conjunto finito es algebraico y reducible.

Ejemplos:

- Notemos que $V(xy) = V(x) \cup V(y)$, es decir $V(xy)$ es reducible.
- Consideremos el espacio afín $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$, entonces el conjunto algebraico $V((x^2 + 1)x) = \{0\}$ es irreducible.

Proposición 5.1. Un conjunto algebraico V es irreducible si y solo si el ideal $I(V)$ es primo.

Demostración.

- \Rightarrow | Supongamos que $I(V)$ no es primo, entonces existen F_1, F_2 polinomios tales que $F_1 \cdot F_2 \in I(V)$ y $F_1, F_2 \notin I(V)$. Afirmamos que $V = (V \cap V(F_1)) \cup (V \cap V(F_2))$. Sea $p \in V$, entonces $F_1(p) \cdot F_2(p) = 0$ lo que implica que $p \in (V \cap V(F_1)) \cup (V \cap V(F_2))$, además $V \cap V(F_i) \neq V$ ya que existe q_i tal que $F_i(q_i) \neq 0$.
- \Leftarrow | Supongamos que V es reducible. Luego $V = V_1 \cup V_2$ con $V_i \neq V$. Entonces existe un polinomio F_i tal que $F_i(p) = 0$ para todo $p \in V_i$, pero no para todo punto en V . Notemos que $F_1 \cdot F_2 \in I(V)$, sin embargo, $F_i \notin I(V)$.

Definición 5.2. Una variedad afín V es un conjunto algebraico afín irreducible.

Lema 5.1. Sea R un anillo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- R es Noetheriano.
- Si \mathcal{C} es una colección no vacía de ideales en R , entonces \mathcal{C} tiene un elemento maximal, es decir, existe $I \in \mathcal{C}$ que no está contenido en otro ideal de \mathcal{C} .

c) Toda cadena ascendente de ideales en R se estabiliza.

Demostración.

- (a) \Rightarrow (b) | Necesitamos usar el axioma de elección. Sea \mathcal{C} una colección de ideales en R , para cada subconjunto no vacío de \mathcal{C} elegimos un ideal. Sea I_0 el ideal escogido para \mathcal{C} , definimos el conjunto

$$\mathcal{C}_1 := \{I \in \mathcal{C} : I_0 \subset I\}$$

Si $\mathcal{C}_1 = \emptyset$ entonces I_0 es el ideal maximal. Si no, repetimos el proceso. Sea $I \in \mathcal{C}_1$ el escogido, definimos

$$\mathcal{C}_2 := \{I \in \mathcal{C}_1 : I \subset I\}$$

Es suficiente demostrar que existe n tal que $\mathcal{C}_n = \emptyset$. Sea $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ es ideal, además, notemos que $I_n \subset I_{n+1}$. Como R es Noetheriano, entonces $I = (f_1, \dots, f_m)$, luego existe r tal que $f_1, \dots, f_m \in I_r$, lo que implica que $I \subseteq I_r$ y por lo tanto $I = I_r$ se sigue que $I_r = I_s$ para todo $s > r$, lo cual es una contradicción.

- (b) \Rightarrow (c) | Basta tomar \mathcal{C} como nuestra colección de ideales en R , luego, existe un elemento maximal.
- (c) \Rightarrow (a) | Sea $I \subseteq R$ un ideal. Si $I = (0)$ estamos listos, de lo contrario, sea $f_1 \in I$, entonces $(f_1) \subseteq I$. Supongamos que $I \setminus (f_1) \neq \emptyset$, sea $f_2 \in I \setminus (f_1)$, de esta manera construimos una cadena ascendente de ideales

$$(f_1) \subset (f_1, f_2) \subset \dots \subset (f_1, \dots, f_n) \subset \dots$$

para algun N la cadena se estabiliza y por ende $(f_1, \dots, f_N) = I$.

Proposición 5.2. Cualquier colección de conjuntos algebraicos $\{V_i\}_{i \in I}$ en \mathbb{A}_k^n tiene un elemento minimal.

Demostración. Dada $\{V_i\}_{i \in I}$ obtenemos una colección $\mathcal{C} = \{I(V_i)\}_{i \in I}$ de ideales en $k[x_1, \dots, x_n]$, el cual es Noetheriano. Luego \mathcal{C} tiene un elemento maximal, digamos $I(V_*)$, afirmamos que V_* es el elemento minimal, de lo contrario, existe $V_i \subseteq V_*$ entonces $I(V_*) \subseteq I(V_i)$.

Teorema 6. Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un conjunto algebraico. Entonces existen unicos conjuntos algebraicos irreducibles V_1, \dots, V_m tales que

$$V = \bigcup_{i=1}^m V_i \quad \text{y} \quad V_i \not\subseteq V_j \quad \forall i \neq j$$

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{V \subseteq \mathbb{A}_k^n \text{ conjunto algebraico} : V \text{ no es unión finita de irreducibles}\}$. Si \mathcal{C} es vacío estamos listos. Si no lo es, sea $V \in \mathcal{C}$ minimal. Tenemos que V no es irreducible, entonces $V = V_1 \cup V_2$ con $V_i \subset V$, lo que implica que algún $V_i \in \mathcal{C}$ lo cual es una contradicción.

Sea $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$ con V_i irreducibles, asumir que $V_i \not\subseteq V_j$ para todo $i \neq j$. Digamos que

$$\bigcup_{i=1}^m V_i = \bigcup_{j=1}^s W_j \quad \text{con} \quad V_i \not\subseteq V_j \quad \text{y} \quad W_i \not\subseteq W_j \quad \text{y} \quad V_i, W_j \neq \emptyset$$

Notemos que $V_1 = V_1 \cap V = \bigcup_{j=1}^s (V_1 \cap W_j)$, como V_1 es irreducible, existe unico j tal que $V_1 = V_1 \cap W_j$, es decir, $V_1 \subseteq W_j$. Por otro lado, existe unico i tal que $W_j \subseteq V_i$, lo que implica que $V_1 \subseteq V_i$ entonces $i = 1$ y así $V_1 = W_j$.

1.6. Conjuntos Algebraicos del Plano

Lema 6.1. Si $f, g \in k[x, y]$ no tienen factores en común, entonces $V(f, g)$ es un conjunto finito.

Demostración. Recordemos que $k(x)[y]$ es dominio euclideo. Por lema de gauss, f, g no tienen factores en común en $k(x)[y]$, entonces existen $a, b \in k(x)[y]$ tal que $af + bg = 1$. Existe $r(x)$ tal que

$$raf + rbg = r$$

es una ecuación en $k[x, y]$. Sea $(p, q) \in V(f, g)$, evaluando en la ecuación anterior vemos que

$$0 = raf(p, q) + rbg(p, q) = r(p)$$

por lo tanto la cantidad de valores posibles de p es finita. Haciendo lo mismo para y obtenemos que q solo puede tomar una cantidad finita de valores.

Corolario 6.1. Si $f \in k[x, y]$ es irreducible con $|V(f)| = \infty$ entonces $I(V(f)) = (f)$ y $V(f)$ es irreducible.

Demostración. Si $g \in I(V(f))$, entonces $|V(f, g)| = \infty$, luego, f y g tienen factores en común, como f es irreducible, entonces f divide a g lo que implica que $g \in (f)$. La otra contención es directa.

Por otro lado, notemos que (f) es primo, pues f es irreducible, así, $V(f)$ es irreducible.

Corolario 6.2. Supongamos que k es infinito, entonces los conjuntos algebraicos irreducibles de \mathbb{A}_k^2 son: \emptyset , \mathbb{A}_k^2 , un punto y los conjuntos $V(f)$ con f irreducible y $|V(f)| = \infty$.

Demostración. Sea V un conjunto algebraico irreducible. Si $|V| < \infty$ entonces $V = \emptyset$ o V es un punto. Si $I(V) = (0)$ entonces $V = \mathbb{A}_k^2$. Supongamos que $|V| = \infty$ y que $(0) \subset I(V) \subset k[x, y]$. Como $I(V)$ es primo, existe un polinomio no constante e irreducible tal que $f \in I(V)$.

Si $g \in I(V)$ y $g \notin (f)$, entonces $V \subset V(f, g)$, por la proposición, esto es una contradicción. De este modo, $I(V) = (f)$. Afirmamos que $V(f) = V$, en efecto, tenemos que $V = V(I(V)) = V(f)$.

Corolario 6.3. Supongamos que $k = \bar{k}$. Sea $f \in k[x, y]$ y sea $f = \prod_{i=1}^m f_i^{\alpha_i}$ con f_i irreducible. Entonces

$$V(f) = \bigcup_{i=1}^m V(f_i)$$

es su descomposición en irreducibles y además $I(V(f)) = (f_1, \dots, f_m)$.

Demostración. Como f_i, f_j son coprimos no hay inclusiones entre $V(f_i)$ y $V(f_j)$, de lo contrario si existen $i \neq j$ tales que $V(f_i) \subset V(f_j)$, entonces

$$(f_i) = I(V(f_i)) \supset I(V(f_j)) = (f_j)$$

lo cual es una contradicción. Luego,

$$I(V(f)) = I\left(\bigcup_{i=1}^m V(f_i)\right) = \bigcap_{i=1}^m I(V(f_i)) = \bigcap_{i=1}^m (f_i) = (f_1 \cdots f_m)$$

1.7. Nullstellensatz de Hilbert

En general supondremos que $k = \bar{k}$, a no ser que se diga lo contrario.

Teorema 7. Sea $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ un ideal, entonces $V(I) \neq \emptyset$.

Demostración. Podemos suponer que I es maximal. En efecto, recordemos que todo ideal esta contenido en un ideal maximal, digamos M , entonces $V(M) \subseteq V(I)$. Como I es maximal, esto equivale a que $k[x_1, \dots, x_n]/I \supset k$ es cuerpo. Como k es algebraicamente cerrado, podemos asumir que $k[x_1, \dots, x_n]/I = k$.

Así, cada variable x_i puede ser identificada por un elemento en k digamos a_i , lo que implica que $x_i - a_i$ es igual 0 bajo el cociente, se sigue que $x_i - a_i \in I$, luego $I = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$. (Mejorar escritura)

De la demostración surge una pregunta, ¿Por que $k[x_1, \dots, x_n]/I = k$? El siguiente lema lo responde

Lema 7.1. (Lema de Zariski) Sea $K \subset L$ una extensión de cuerpo tal que L es finitamente generado como k -álgebra. Entonces L es finitamente generado como k -módulo.

Exploraremos una demostración menos general del teorema anterior, pero sin usar lema de Zariski. Para ello supongamos que $k = \mathbb{C}$.

Demostración. Del mismo modo, supongamos que $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal maximal, luego $L := k[x_1, \dots, x_n]/I$ es cuerpo, consideramos el morfismo canónico

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] & \xrightarrow{\pi} & L \\ \uparrow i & \nearrow \pi_i := \pi|_{\mathbb{C}[x_i]} & \\ \mathbb{C}[x_i] & & \end{array}$$

Afirmamos que $\ker(\pi_i) = (0)$ o $\ker(\pi_i) = (x_i - a_i)$ para algún $a_i \in \mathbb{C}$. En efecto, si $\ker(\pi_i) \neq (0)$, entonces $(0) \subset \ker(\pi_i) \subset \mathbb{C}[x_i]$, donde la segunda contención es estricta, de lo contrario, $1 \in I$ y entonces $I = k[x_1, \dots, x_n]$. Sea $f \in \ker(\pi_i)$, entonces como \mathbb{C} es algebraicamente cerrado, existe $(x_i - a_i)$ factor de f tal que $\pi_i(x_i - a_i) = 0$.

Volviendo a la demostración del teorema. Tenemos dos consideramos

- $\ker(\pi_i) = (x_i - a_i)$ para todo i . Entonces $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subseteq I$. Como $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ es ideal maximal e I es propio se obtiene el resultado.
- Existe i tal que $\ker(\pi_i) = (0)$, entonces π_i es inyectiva, como L es cuerpo $\mathbb{C}(x_i)$ se incrusta en L .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x_i] & \xrightarrow{\pi_i} & L \\ \downarrow i & \nearrow i_L & \\ \mathbb{C}(x_i) & & \end{array}$$

Es decir $\mathbb{C}(x_i) \subseteq L$. Notemos que L es un espacio vectorial numerable, a saber, la base corresponde a todos los monomios. Notemos que el siguiente conjunto es linealmente independiente

$$S := \left\{ \frac{1}{x_i - a_i} : a_i \in \mathbb{C} \right\}$$

Notemos que si $\sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{x_i - a_j} = 0$ entonces multiplicando por $(x_i - a_1) \cdots (x_i - a_m)$ y evaluando se tiene que $\lambda_j = 0$ para todo j . Esto es una contradicción pues S es no numerable.

Teorema 8. (Teorema de Nullstellensatz) Sea $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$, entonces $I(V(I)) = \sqrt{I}$.

Demostración.

- \supseteq | Sea $f \in \sqrt{I}$, entonces $f^n \in I$ para algún n . Luego $f^n(p) = 0$ para todo $p \in V(I)$, entonces $f(p) = 0$ para todo $p \in V(I)$ lo que implica que $f \in I(V(I))$.
- \subseteq | (Truco de Rabinowitsch) Sea $f \in I(V(I))$ y digamos que $I = (f_1, \dots, f_m)$. Definimos el ideal $J := (f_1, \dots, f_m, x_{n+1}f - 1) \subseteq k[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Supongamos que $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in V(J)$, entonces $(a_1, \dots, a_n) \in V(I)$ se sigue que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, esto resulta en una contradicción. Concluimos que $V(J) = \emptyset$.

Por el teorema anterior y como k es algebraicamente cerrado tenemos que $J = k[x_1, \dots, x_{n+1}]$, entonces existen $\{g_i\}_{i=1}^{m+1} \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ tales que

$$g_1 f_1 + \dots + g_m f_m + g_{m+1}(x_{n+1}f - 1) = 1$$

tomando $x_{n+1} = 1/f$ obtenemos

$$g_1(x_1, \dots, x_n, 1/f)f_1 + \dots + g_m(x_1, \dots, x_n, 1/f)f_m = 1$$

existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n \in I$.

Corolario 8.1. Hay una correspondencia uno a uno entre puntos en \mathbb{A}_k^n e ideales maximales.

Corolario 8.2. Las variedades afines en \mathbb{A}_k^n estan en correspondencia uno a uno con los ideales primos.

Corolario 8.3. Las hipersuperficies irreducibles en \mathbb{A}_k^n se corresponden uno a uno con polinomios irreducibles en $k[x_1, \dots, x_n]$.

Corolario 8.4. Sea $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Entonces $V(I)$ es un conjunto finito de puntos si y solo si como k -espacio vectorial $k[x_1, \dots, x_n]/I$ tiene dimensión finita.

Demostración.

- \Leftarrow | Sean $p_1, \dots, p_r \in V(I) \subseteq \mathbb{A}_k^n$. Consideramos $F_1, \dots, F_r \in k[x_1, \dots, x_n]$ tales que $F_i(p_j) = 0$ para todo $i \neq j$ y $F_i(p_i) = 1$. Sea $\overline{F_i}$ la imagen de F_i en el cociente $k[x_1, \dots, x_n]/I = R$.

Afirmamos que el conjunto $\{F_1, \dots, F_r\}$ es linealmente independiente en R . En efecto, si

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \overline{F_i} = 0 \quad \text{con} \quad \lambda_i \in k$$

entonces $\sum \lambda_i \overline{F_i} \in I$, evaluando en p_i vemos que $\lambda_i = 0$ para todo i , lo que prueba la afirmación. Así, $r \leq \dim_k R$.

- \Rightarrow | Digamos que $V(I) = \{p_1, \dots, p_r\}$ y $p_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$. Definimos

$$F_j := \prod_{i=1}^r (x_j - a_{ij})$$

Luego $F_j \in I(V(I))$, por Nullstellensatz, se tiene que F_j^N para algún N , así, $\overline{F_j^N} = 0$ en R , es decir, $p(x_j) + x_j^{rN} = 0$, con $\text{gr}(p_j) < rN$ entonces $\dim_k R < \infty$.

Ejemplos:

- Consideremos los polinomios $x - y, y - x^2 \in k[x, y]$, se sigue $V((x - y, y - x^2)) = \{(0, 0), (1, 1)\}$

$$\dim_k (k[x, y] / (x - y, y - x^2)) = \dim_k (k[x] / (x - x^2)) = \dim_k (k \oplus kx) = 2$$

- Notemos que $V(x - y - 1, x - y) = \emptyset$ y por otro lado

$$k[x, y] / (x - y, x - y - 1) = k[x, y] / (1) = (0)$$

así $\dim_k R = 0$.

- Veamos que $V(y, x - y^3) = \{(0, 0)\}$, entonces

$$\dim_k (k[x, y] / (y, x^3 - y)) = \dim_k (k[x] / (x^3)) = 3$$

- El conjunto $V(my - x, y - x^2)$ tiene dos puntos de intersección para todo $m \neq 0$,

$$\dim_k (k[x, y] / (my - x, y - x^2)) = \dim_k (k[x] / (mx^2 - x)) = 2$$

pero si $m = 0$, vemos que $\dim_k R = 1$.

1.8. Módulos y Condiciones de Finitud

Sea R un anillo, se dice que M es un R -módulo, si M es un grupo conmutativo y si viene con producto escalar, es decir, una función de $R \times M$ a M , se denota por $a \cdot m$ que satisface lo siguiente

- $(a + b)m = am + bm$ para todo $a, b \in R$ y $m \in M$.
- $a(m + n) = am + an$ para todo $a \in R$ y $m, n \in M$.
- $(ab)m = a(bm)$ para todo $a, b \in R$ y $m \in M$.
- $1_R \cdot m = m$ para todo $m \in M$

Un subgrupo de N de un R -módulo M se dice un submódulo si N es un R -módulo con el mismo producto escalar. Dado $S \subseteq M$, definimos el generado de S por

$$\langle S \rangle := \left\{ \sum r_i s_i \mid r_i \in R, s_i \in S \right\}$$

de hecho corresponde al submódulo de M mas pequeño que contiene a S . Decimos que M es finitamente generado si existe $S \subseteq M$ tal que $\langle S \rangle = M$.

Sea $R \subseteq S$ anillos. Decimos que S es modulo finito sobre R , si es finitamente generado como R -módulo.

Sean $v_1, \dots, v_n \in S$. Sea $\varphi : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow S$ el morfismo de anillo que manda x_i a v_i . La imagen de φ se denota por $R[v_1, \dots, v_n]$ y corresponde a un subanillo de S que contiene a R y v_1, \dots, v_n , además, es el subanillo mas pequeño con esta propiedad. Decimos que S es un algebra finita sobre R si $S = R[v_1, \dots, v_n]$ para algunos $v_1, \dots, v_n \in S$.

Sean $K \subset L$ cuerpos. Sean $v_1, \dots, v_n \in L$ y consideremos $K(v_1, \dots, v_n)$ el cuerpo de fracciones de $K[v_1, \dots, v_n]$. Al igual que antes, corresponde al menor subcuerpo de L que contiene a K y v_1, \dots, v_n . El cuerpo L se dice una extensión finitamente generada de K si $L = K(v_1, \dots, v_n)$ para algunos $v_1, \dots, v_n \in L$.

1.9. Elementos Integrales

Definición 8.1. Sean $R \subset S$ dominios enteros. Decimos que un elemento $v \in S$ es integral sobre R si

$$v^n + r_{n-1}v^{n-1} + \dots + r_1v + r_0 = 0$$

para algunos $r_i \in R$ y $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 8.1. Sean $R \subset S$ dominios enteros, $v \in S$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones

- a) v es integral sobre R .
- b) $R[v]$ es un R -modulo finitamente generado.
- c) Existe un subanillo $R' \subset S$ con $R[v] \subset R'$ y R' un R -modulo finitamente generado sobre R .

Demostración.

- $(a) \Rightarrow (b)$ | Existe un polinomio monico $f \in R[x]$ tal que $f(v) = 0$, luego el $R[v]$ se puede generar por finitos elementos.
- $(b) \Rightarrow (c)$ | Basta tomar $R' = R[v]$.
- $(c) \Rightarrow (a)$ | Existe R' tal que $R \subset R[v] \subset R' \subset S$. Con $R, R[v], R'$ finitamente generados como R -modulos. Sean w_1, \dots, w_n generadores de R' . Sabemos que

$$v \cdot w_i = a_{i1}w_1 + \dots + a_{in}w_n$$

luego tenemos el sistema

$$\begin{aligned}(a_{11} - v)w_1 + a_{12}w_2 + \cdots + a_{1n}w_n &= 0 \\ a_{21}w_1 + (a_{22} - v)w_2 + \cdots + a_{2n}w_n &= 0 \\ \vdots & \\ a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \cdots + (a_{nn} - v)w_n &= 0\end{aligned}$$

Como $R \subseteq S$ son dominios, podemos verlo dentro del cuerpo de fracciones, entonces tiene sentido calcular el determinante de la matriz asociada al sistema de ecuaciones. Por otro lado, (w_1, \dots, w_n) es una solución no trivial del sistema y por lo tanto el determinante de la matriz asociada es 0, lo que implica que v es integral sobre R .

Corolario 8.5. Sean $R \subseteq S$ dominios. Entonces los elementos integrales sobre R forman un anillo.

Demostración. Sean $a, b \in S$ elementos integrales sobre R . Notemos que

$$R \subseteq R[a + b] \subseteq R[a, b] \quad y \quad R \subseteq R[ab] \subseteq R[a, b]$$

Como a y b son elementos integrales sobre R , $R[a]$ y $R[b]$ son finitamente generados por $\{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ y $\{1, b, b^2, \dots, b^{m-1}\}$. Es claro que $R[a, b]$ es generado por $\{a^i b^j : 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq m-1\}$. Por la proposición se sigue que $a + b$ y ab son elementos integrales sobre R .

Definición 8.2. Sean $R \subseteq S$ dominios. Decimos que S es integral sobre R si todo $s \in S$ es integral sobre R .

Además, R es un dominio integralmente cerrado si ningún $z \in \text{Frac}(R) \setminus R$ es integral.

Ejemplos:

- Consideremos $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, sea $p/q \in \mathbb{Q}$ con p y q coprimos. Si tenemos la expresión

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

Por teorema de la raíz racional, q debe dividir a 1, luego $q = 1$ lo que implica que $p/q \in \mathbb{Z}$. Concluimos que \mathbb{Z} es integralmente cerrado.

- Veamos el conjunto algebraico $V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}_k^2$ con $k = \bar{k}$. Vemos el anillo

$$R = \frac{k[x, y]}{(y^2 - x^3)}$$

que es un dominio, pues $(y^2 - x^3)$ es irreducible. Dentro de $R \subseteq \text{Frac}(R)$, vemos que se cumple la relación $y^2 = x^3$, que dentro del cuerpo de fracciones es equivalente a

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - x = 0$$

notemos que $\frac{y}{x} \notin R$ y que $x \in R$. Por lo tanto R no es integralmente cerrado.

- Sea $V(y - x^2) \subseteq \mathbb{A}_k^2$. Vemos el anillo

$$R = \frac{k[x, y]}{(y - x^2)}$$

por demostrar, R es integralmente cerrado. Consideremos la función $\varphi : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^2$ dada por $\varphi(t) = (t, t^2)$. Notemos que $\text{Im}(\varphi) = V(y - x^2)$. La función φ induce el isomorfismo

$$\begin{aligned}\frac{k[x, y]}{(y - x^2)} &\rightarrow k[t] \\ x &\rightarrow t \\ y^2 &\rightarrow t^2\end{aligned}$$

Como $k[t]$ es DFU, se sigue que R es integralmente cerrado.

Vamos a estudiar un caso particular del lema de Zariski. Sea k un cuerpo e $I \subseteq k[x]$ un ideal maximal, entonces $k[x]/I = L$ es un cuerpo. Tenemos dos casos, $I = (0)$ ó $I = (f(x))$. Si $I = (0)$ entonces $k[x]$ es cuerpo, esto es una contradicción. Por otro lado escribimos

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

pero en L se tiene que $f(x) = 0$, luego, L es generado como k módulo por $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$.

Veamos cuando $k[x, y]/I = L$ donde k es un cuerpo e $I \subseteq k[x, y]$ es un ideal maximal. Si $x \in I$ o $y \in I$ podemos reducir al caso anterior. Entonces L es finitamente generado por potencias de x e y .

Pensaremos en $k(x)$ como los cocientes de polinomios en una variable modulo I , luego

$$k \subset k(x) \subset k(x)[y] = L$$

donde la igualdad $k(x)[y] = L$ se debe a que la inversa de un polinomio en $k(x)$ en realidad se escribe como combinación de potencias de x e y . Además, por el caso anterior, $k(x)[y]$ es finitamente generado como $k(x)$ módulo.

Tenemos dos casos:

- Caso 1: La extensión $k \subset k(x)$ es finita. Esto implica que la extensión $k \subseteq L$ es finita, basta tomar el producto de los generadores.
- Caso 2: Se tiene la siguiente igualdad

$$k(x) = \left\{ \text{cocientes } \frac{p(x)}{q(x)} \right\}$$

En L se debe cumplir la relación $y^m = a_{m-1}y^{m-1} + \cdots + a_1y + a_0$ con $a_i \in k(x)$. Tomar $a \in k[x]$ tal que a^m limpie los denominadores, luego

$$(ay)^m = b_{m-1}(ay)^{m-1} + \cdots + b_1(ay) + b_0$$

con $b_i \in k[x]$. Se sigue que ay es integral sobre $k[x]$. Sea $z \in L$, luego para N suficientemente grande $a^N z$ es integral sobre $k[x]$, ya que

$$\begin{aligned} a^N z &= a^N f(x, y) \\ &= a^N (c_0 + c_1 y + \cdots + c_M y^M) \\ &= c'_0 + c'_1(ay) + \cdots + c'_M(ay)^M \end{aligned}$$

donde $c'_i \in k[x]$. Como $k[x]$ es DFU, $a = p_1 \cdots p_s$ su factorización en irreducibles, sea p_{s+1} un irreducible distinto de p_i , tomando $z = \frac{1}{p_{s+1}}$ resulta que $a^N z$ es integral, lo cual es una contradicción.

Lema 8.1. (Lema de Zariski) Sean $K \subseteq L$ y L es finitamente generado como K algebra, entonces L es finitamente generado como K modulo, es decir, como espacio vectorial.

2. Variedades Afines

De ahora en adelante k será un cuerpo algebraicamente cerrado. A un conjunto algebraico afín irreducible lo llamamos variedad afín, o simplemente variedad.

2.1. Anillo de Coordenadas

Definición 8.3. Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad no vacía. Definimos

$$\Gamma(V) := \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{I(V)}$$

y lo llamamos el **anillo de coordenadas de V** y los elementos de $\Gamma(V)$ les decimos **funciones regulares**.

Observación: El anillo de coordenadas de V es un dominio, ya que $I(V)$ es un ideal primo de $k[x_1, \dots, x_n]$. Por otro lado, dado $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ entonces f, g determinan la misma función si y solo si $f - g \equiv 0$ en V , es decir, $f - g \in I(V)$. De este modo tenemos dos maneras de ver los elementos de $\Gamma(V)$; como una función de V , o como clase de equivalencia de polinomios.

2.2. Aplicaciones Polinomiales

Definición 8.4. Sean $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}_k^m$ variedades. Una aplicación $\varphi : V \rightarrow W$ se dice **aplicación polinomial** si existen $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ tales que

$$\varphi(a) = \varphi(a_1, \dots, a_n) = (f_1(a), \dots, f_m(a))$$

Proposición 8.2. Sean $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}_k^m$ variedades. Entonces hay una correspondencia uno a uno entre las funciones polinomiales $\varphi : V \rightarrow W$ y los homomorfismos $\tilde{\varphi} : \Gamma(W) \rightarrow \Gamma(V)$.

Demostración.

- Dada $\varphi : V \rightarrow W$ una aplicación polinomial, sean $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ tales que $\varphi = (f_1, \dots, f_m)$. Definimos $\tilde{\varphi} : \Gamma(W) \rightarrow \Gamma(V)$ dada por

$$\tilde{\varphi}(f) := f \circ \varphi = f(f_1, \dots, f_m)$$

Veamos que esta bien definida, en efecto, sea $f \in I(W)$, entonces $g \circ \varphi \equiv 0$ en V , luego $g \circ \varphi \in I(V)$. Claramente $\tilde{\varphi}$ es homomorfismo.

- Sea $\tilde{\varphi} : \Gamma(W) \rightarrow \Gamma(V)$ un homomorfismo. Sean $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ tales que $\tilde{\varphi}(y_i) = f_i$, definimos la aplicación polinomial $\varphi := (f_1, \dots, f_m)$, por la discusión anterior φ esta bien definida y además la función inducida por φ es la misma que $\tilde{\varphi}$.

Definición 8.5. Una aplicación polinomial se dice **isomorfismo** si tiene inversa que también es una aplicación polinomial.

Observación: Por la proposición anterior una aplicación polinomial es isomorfismo si y solo si el homomorfismo inducido es isomorfismo de anillos. Luego, dos variedades son isomorfas si y solo si sus anillos de coordenadas son isomorfos.

2.3. Cambio de Coordenadas

Definición 8.6. Un **cambio de coordenadas afín** en \mathbb{A}_k^n es una aplicación polinomial $\varphi = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{A}_k^n \rightarrow \mathbb{A}_k^n$ tal que $gr(f_i) = 1$ y φ es biyectiva.

2.4. Funciones Racionales y Anillos Locales

Definición 8.7. Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad no vacía. Definimos el **cuerpo de funciones racionales** en V como $k(V) := \text{Frac}(\Gamma(V))$. Un elemento en $k(V)$ se dice **función racional** en V .

Notemos que $f \in k(V)$ no es necesariamente una función $f : V \rightarrow \mathbb{A}_k^1$. Consideremos $V = \mathbb{V}(xw - yz) \subseteq \mathbb{A}_k^4$ y $f = \frac{x}{y}$, luego, no es posible evaluar en los puntos de la forma $(a, 0, b, 0)$.

Definición 8.8. Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad no vacía. Sea f una función racional de V y $p \in V$, decimos que f está definida en p si para algunos $a, b \in \Gamma(V)$ se tiene que $f = \frac{a}{b}$ y $b(p) \neq 0$.

Observación: Si $\Gamma(V)$ es DFU entonces la expresión a/b es esencialmente única y por lo tanto f está definida en p si y solo si $b(p) \neq 0$.

Definición 8.9. Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una variedad no vacía. Sea $p \in V$, definimos

$$\mathcal{O}_p(V) := \{f \in k(V) : f \text{ está definida en } p\}$$

se dice que $\mathcal{O}_p(V)$ es el **anillo local** de V en p .

Observación: Notemos que $\mathcal{O}_p(V)$ es un subanillo de $k(V)$ que contiene $\Gamma(V)$, en otras palabras $k \subseteq \Gamma(V) \subseteq \mathcal{O}_p(V) \subseteq k(V)$.

Este anillo tiene la propiedad de que tiene un único ideal maximal, a saber, $m_p(V) = \{f \in \mathcal{O}_p(V) : f(p) = 0\}$. Un anillo con esta propiedad se dice **anillo local**.

Definición 8.10. El conjunto de puntos $p \in V$ donde una función racional f no está definida se llama el **conjunto de polos** de f .

Proposición 8.3.

- a) El conjunto de polos de una función racional es un subconjunto algebraico de V .
- b) $\Gamma(V) = \bigcap_{p \in V} \mathcal{O}_p(V)$.

Demostración.

- a) Sea $f \in k(V)$. Consideramos

$$J_f := \{G \in k[x_1, \dots, x_n] : \overline{G}f \in \Gamma(V)\}$$

donde \overline{G} es la clase de G en $\Gamma(V)$. Es claro que J_f es un ideal en $k[x_1, \dots, x_n]$ que contiene a $I(V)$. Veamos que $V(J_f) = \{\text{polos de } f\}$.

Supongamos que $p \notin V(J_f)$, entonces existe $G \in J_f$ tal que $G(p) \neq 0$. Tenemos que $\overline{G}f = \overline{H} \in \Gamma(V)$, en $k(V)$ se tiene que $f = \frac{H}{G}$, entonces p no es polo de f .

Si p no es polo de f , entonces existen $G, H \in k[x_1, \dots, x_n]$ tal que $f = \frac{H}{G}$ y $G(p) \neq 0$, además vemos que $\overline{G}f \in \Gamma(V)$, es decir, $p \notin V(J_f)$.

- b) Una contención es clara, veamos la otra. Sea $f \in \bigcap_{p \in V} \mathcal{O}_p(V)$, entonces $V(J_f) = \emptyset$, por Nullstellensatz se sigue que $J_f = k[x_1, \dots, x_n]$ y por ende $f = 1 \cdot f \in \Gamma(V)$.

Proposición 8.4. $\mathcal{O}_p(V)$ es un dominio local Noetheriano.

Demostración. Sea $I \subseteq \mathcal{O}_p(V)$ un ideal, consideremos $I' = I \cap \Gamma(V)$. Como $\Gamma(V)$ es Noetheriano, existen $f_i \in \Gamma(V)$ tales que $I' = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Luego si $f = \frac{a}{b}$ entonces $bf = a \in I'$. Se sigue que

$$bf = \sum a_i f_i \Rightarrow f = \sum \frac{a_i}{b} f_i$$

2.5. Anillos de Evaluación Discreta

Proposición 8.5. Sea R un dominio que no es cuerpo. Luego, R es Noetheriano, local y su ideal maximal es principal si y solo si existe $t \in R$ irreducible tal que para todo $z \in R \setminus \{0\}$ y $z = ut^n$ para algún u unidad y $n \in \mathbb{N}_0$.

Definición 8.11. Sea R como antes, decimos que R es un **anillo de evaluación discreta** y lo abreviamos DVR , el elemento t se llama **parametro uniformizante**.

Ejemplos:

- Consideremos $p \in \mathbb{A}_k^1 = V$, sea $m_p(V)$ el unico ideal maximal de $\mathcal{O}_p(V)$, luego $(t) = m_p(V)$.
- Un no ejemplo. Si tomamos $p = (0, 0) \in \mathbb{A}_k^2 = V$ entonces $(x, y) \subseteq \mathcal{O}_p(V)$ no es principal, $\mathcal{O}_p(V)$ no es un DVR.

Definición 8.12. Sea R un DVR, consideremos $k = \text{Frac}(R)$, entonces para todo $z \in k$ existe $n \in \mathbb{Z}$ y $u \in R$ unidad tales que $z = ut^n$, luego

- n es el **orden** de z y se escribe $\text{ord}(z)$. Decimos que $\text{ord}(0) = \infty$.
- Si $n < 0$, entonces z es un **polo**.
- Si $n > 0$, decimos que z es un **cero**.
- Si $n = 0$, z se dice **unidad**.

2.6. Formas

Definición 8.13. Una **forma** es un polinomio homogeneo en $R[x_1, \dots, x_n]$, con R dominio. Recordando el capitulo 1, sección 1, $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ es homogeneo si $f(\lambda \vec{x}) = \lambda^n f(\vec{x})$ con $n = \text{gr}(f)$.

Ejemplo: Sea $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3 x_4$ es una forma.

Definición 8.14. Sea R un dominio,

- Sea $f \in R[x_1, \dots, x_n]$, escribimos $f = \sum f_0 + f_1 + \dots + f_d$ donde f_i es un polinomio homogeneo de grado i , definimos $f^* \in R[x_1, \dots, x_{n+1}]$ como

$$f^* := x_{n+1}^d f_0 + x_{n+1}^{d-1} f_1 + \dots + f_d = x_{n+1}^d f\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$$

este proceso se llama **homogenización**.

- Sea $F \in R[x_1, \dots, x_{n+1}]$ una forma, definimos $F_* \in R[x_1, \dots, x_n]$ como $F_* := F(x_1, \dots, x_n, 1)$. Decimos que **deshomogenizamos** el polinomio.

Proposición 8.6. Se cumple lo siguiente

- $(FG)_* = F_* G_*$ y $(fg)^* = f^* g^*$.
- Si $F \neq 0$ y r es la mayor potencia de x_{n+1} que divide F entonces $x_{n+1}^r (F_*)^* = F$. Además, $(f^*)_*$.
- Se tiene que $(F + G)_* = F_* + G_*$. Por otro lado, sea $r = \text{gr}(g)$, $s = \text{gr}(f)$ y $t = r + s - \text{gr}(f + g)^*$ entonces $x_{n+1}^t (f + g)^* = x_{n+1}^r f^* + x_{n+1}^s g^*$.

2.7. Producto Directo de Anillos

Definición 8.15. Sean R_1, \dots, R_n anillos, definimos $R := \prod R_i$ junto con las operaciones

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) &:= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ (a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) &:= (a_1 \cdot b_1, \dots, a_n \cdot b_n) \end{aligned}$$

y $\pi_i : R \rightarrow R_i$ son las proyecciones a cada coordenada. Decimos que R es un **anillo producto**.

Observación: Es directo que R con las operaciones definidas es un anillo, donde $(0, \dots, 0)$ y $(1, \dots, 1)$ son los neutros de $+$ y \cdot respectivamente.

Proposición 8.7. (Propiedad Universal) Para todo anillo S y todo morfismo $\phi_i : S \rightarrow R_i$, existe un unico morfismo $\varphi : S \rightarrow R$ tal que

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & R \\ \phi_i \downarrow & \swarrow \pi_i & \\ R_i & & \end{array}$$

2.8. Operando con Ideales

Definición 8.16. Sean $I, J \subseteq R$ ideales de un anillo R . Definimos el **producto de ideales** como

$$IJ := \langle ab : a \in I, b \in J \rangle$$

Observación: Si $I = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ entonces

$$I^n = \left\langle a_1^{i_1} \cdots a_k^{i_k} : k \leq n, \sum_{j=1}^k i_j = n \right\rangle$$

Definición 8.17. Sean $I, J \subseteq R$ ideales, definimos la **suma de ideales** como $I + J := \{a + b : a \in I, b \in J\}$. Decimos I, J son **comaximales** si $I + J = R$.

Proposición 8.8. Sean $I, J \subseteq R$ ideales, tenemos que

- a) $IJ \subseteq I \cap J$.
- b) Si I, J son comaximales entonces $IJ = I \cap J$.

2.9. Ideales de un Número Finito de Puntos

Proposición 8.9. Sea $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ un ideal con $k = \bar{k}$. Supongamos que $|V(I)| < \infty$, digamos que $V(I) = \{p_1, \dots, p_m\}$, entonces existe un isomorfismo natural

$$\varphi : \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{I} \rightarrow \frac{\mathcal{O}_{p_1}(\mathbb{A}_k^n)}{I\mathcal{O}_{p_1}(\mathbb{A}_k^n)} \times \cdots \times \frac{\mathcal{O}_{p_m}(\mathbb{A}_k^n)}{I\mathcal{O}_{p_m}(\mathbb{A}_k^n)}$$

donde $I\mathcal{O}_{p_i}(\mathbb{A}_k^n)$ es el ideal generado por I con elementos de $\mathcal{O}_{p_i}(\mathbb{A}_k^n)$.

Demostración. Diremos que $\mathcal{O}_i := \mathcal{O}_{p_i}(\mathbb{A}_k^n)$, $R = k[x_1, \dots, x_n]/I$ y que $R_i := \mathcal{O}_i/I\mathcal{O}_i$. Sea I_i el ideal maximal de p_i , luego $(x_1 - p_{i1}, \dots, x_n - p_{in}) = I_i \supset I$. Definimos $\varphi_i : R \rightarrow R_i$ donde $\varphi(f) = \varphi_i([f]_I) := [f]_{I\mathcal{O}_i}$.

Por la propiedad universal, existe un unico morfismo $\varphi : R \rightarrow R_1 \times \cdots \times R_m$, que esta dada por $\varphi(F) = (\varphi_1(F), \dots, \varphi_m(F))$. Afirmamos que φ es biyección. Por Nullstellensatz se sigue que

$$\sqrt{I} = \mathbb{I}(\{p_1, \dots, p_m\}) = \bigcap_{i=1}^m I_i$$

entonces $(\bigcap_{i=1}^m I_i)^d \subseteq I$ para algún $d \in \mathbb{N}$. Por otro lado $(\bigcap_{i=1}^m I_i)^d = (I_1 \cdots I_m)^d = \bigcap_{i=1}^m I_i^d$, se sigue que $\bigcap_{i=1}^m I_i^d \subseteq I$.

Sean $F_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ tales que $F_i(p_j) = 0$ para $i \neq j$ y $F_i(p_i) = 1$, definimos $E_i = 1 - (1 - F_i^d)^d$ para $i = 1, \dots, m$. Notemos que $E_i = F_i^d D_i$ para algún D_i , entonces $E_i \in I_j^d$ para $i \neq j$, lo que implica

- Dado j fijo se tiene que $1 - \sum_i E_i = (1 - E_j) - \sum_{i \neq j} E_i \in I_j^d$, lo que implica que $1 - \sum_i E_i \in \bigcap_{j=1}^m I_j^d$.
- Para i fijo vemos que $E_i - E_i^2 = E_i(1 - F_i^d)^d \in \bigcap_{i=1}^m I_i^d$.

Definimos $e_i := [E_i]_I \in R$, por lo anterior, cumplen que $e_i^2 = e_i$, $e_i e_j = 0$ y $\sum_i e_i = 1$.

Lema: Si $G \in k[x_1, \dots, x_n]$ con $G(p_i) \neq 0$ entonces existe $t \in R$ tal que $tg = e_i$ donde $g = [G]_I \in R$. En efecto, supongamos que $G(p_i) = 1$ y sea $H = 1 - G$, luego

$$(1 - H)(E_i + HE_i + \cdots + H^{d-1}E_i) = E_i - H^d E_i$$

por ende

$$g(e_i + he_i + \cdots + h^{d-1}e_i) = e_i$$

Veamos que φ es biyección. Sea $f \in R$ tal que $\varphi(f) = 0$, luego $[f]_{I\mathcal{O}_i} = 0$, lo que implica que $F \in I\mathcal{O}_i$, entonces existe $G \in k[x_1, \dots, x_n]$ tal que $G_i(p_i) \neq 0$ y $FG \in I$, por el lema se sigue que existe $t_i \in R$ tal que $t_i g_i = e_i$,

entonces

$$f = \sum_i e_i f = \sum_i t_i g_i f = 0$$

por lo tanto φ es inyectiva. Como $E_i(p_i) = 1$ vemos que $\varphi(e_i)$ es una unidad en R_i , como $e_i e_j = 0$ para $i \neq j$ se tiene que $\varphi_i(e_j) = 0$ para $i \neq j$. Por ende, $\varphi_i(e_i) = \varphi_i(\sum e_j) = 1$. Sea

$$z = \left(\frac{h_1}{g_1}, \dots, \frac{h_m}{g_m} \right) \in R_1 \times \dots \times R_m$$

por el lema, existe t_i tal que $t_i g_i = e_i$, tenemos que

$$\varphi_i(g_i) \frac{h_i}{g_i} = [G_i]_i \cdot \left[\frac{H_i}{G_i} \right]_i = [H_i]_i = \varphi_i(h_i)$$

lo que implica que $\varphi_i(t_i h_i) = h_i / g_i$. De este modo

$$\varphi_i \left(\sum t_j h_j e_j \right) = \varphi_i(t_i h_i) = \frac{h_i}{g_i}$$

concluimos que $\varphi(\sum t_j h_j e_j) = z$ y por lo tanto φ es sobreyectiva.

Corolario 8.6.

$$\dim_k \left(\frac{k[x_1, \dots, x_n]}{I} \right) = \sum_{i=1}^m \dim_k \left(\frac{\mathcal{O}_i}{I\mathcal{O}_i} \right)$$

2.10. Módulos Cociente y Secuencias Exactas

Sea R un anillo, sean M y V R -módulos un morfismo de grupos $\varphi : M \rightarrow V$ se dice **morfismo de R -módulos** si $\varphi(am) = a\varphi(m)$ para todo $a \in R$ y $m \in M$. Decimos que es isomorfismo cuando es biyectivo.

Sea N un submódulo de un R -módulo M , en el grupo cociente M/N consideramos la operación $a\bar{m} = \overline{am}$, lo que da estructura de R -módulo y lo llamamos el **módulo cociente** de M por N .

Definición 8.18. Sean $\psi : M' \rightarrow M$ y $\varphi : M \rightarrow M''$ morfismos de R -módulos. Decimos que la secuencia

$$M' \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} M''$$

es **exacta** si $\text{Im}(\psi) = \ker(\varphi)$.

Proposición 8.10.

a) Sea

$$0 \longrightarrow V' \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} V'' \longrightarrow 0$$

una secuencia exacta de espacios vectoriales sobre un cuerpo k de dimensión finita, entonces $\dim V' + \dim V'' = \dim V$.

b) Sea

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3 \xrightarrow{\varphi_3} V_4 \longrightarrow 0$$

una secuencia exacta de espacios vectoriales sobre un cuerpo k de dimensión finita, entonces $\dim V_4 = \dim V_3 - \dim V_2 + \dim V_1$

2.11. Módulos Libres

Definición 8.19. Sea R un anillo y X un conjunto. Consideramos

$$M_X := \{ \varphi : X \rightarrow R : |\varphi^{-1}(R \setminus \{0\})| < \infty \}$$

Lo dotamos de estructura de R -módulo como sigue: $(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x)$ y $(a\varphi)(x) := a\varphi(x)$, donde $\varphi, \psi \in M_X$ y $a \in R$. El módulo M_X se dice **R -módulo libre** sobre el conjunto X .

Observación: Si definimos $\varphi_x \in M_X$ como $\varphi_x(y) := \mathbb{1}_x(y)$, entonces todo $\varphi \in M_X$ tiene expresión única $\varphi = \sum a_x \varphi_x$ donde $a_x = \varphi(x)$. Usualmente escribimos x en lugar de φ_x .

Proposición 8.11. (*Propiedad Universal*) Sea $\alpha : X \rightarrow M$ una función del conjunto X a un R -módulo M , entonces α se extiende de manera única a un morfismo de M_X a M .

Definición 8.20. Un R -módulo M se dice **libre** con base $m_1, \dots, m_n \in M$, si el conjunto $X := \{m_1, \dots, m_n\}$ y el morfismo natural de M_X a M es isomorfismo.

3. Propiedades Locales de Curvas Planas

3.1. Puntos Múltiples y Rectas Tangentes

Definición 8.21. Sea $V = \mathbb{V}(F) \subseteq \mathbb{A}_k^2$ con F no constante y no necesariamente irreducible. Decimos que V es una **curva plana**. El **grado** de una curva es el grado de F .

Observación: Si $F = F_1^{\alpha_1} \cdots F_r^{\alpha_r}$ con F_i irreducible entonces $V = \mathbb{V}(F_1) \cup \cdots \cup \mathbb{V}(F_r)$ es su descomposición en irreducibles. Si $\alpha_i = 1$ decimos que la componente $\mathbb{V}(F_i)$ es **simple**.

Definición 8.22. Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^2$ una curva plana. Dado $p \in V$ decimos que es **no singular** si $F_x(p) \neq 0$ o $F_y(p) \neq 0$. En este caso la recta

$$F_x(p)(x - a) + F_y(p)(y - b) = 0 \quad \text{con } p = (a, b)$$

es la **recta tangente** en p . De lo contrario, decimos que p es **singular**.

Definición 8.23. Una curva plana $V \subseteq \mathbb{A}_k^2$ se dice **no singular** si todo punto es no singular.

Ejemplo: Sea $F = y^2 - x^2 - x^3$, luego $F_x = -2x - 3x^2$ y $F_y = 2y$. Buscamos los puntos singulares, debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} y^2 - x^2 - x^3 &= 0 \\ -2x - 3x^2 &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned}$$

Si $\text{char}(k) \neq 2, 3$, entonces $x, y = 0$. Por otro lado, si $\text{char}(k) = 2$ entonces $x = 0$ por la segunda ecuación y así, por la primera ecuación, $y = 0$. Para $\text{char}(k) = 3$ el resultado es directo. El unico punto singular es $(0, 0)$.

Observación: Sea $p \in k[x, y]$ homogéneo de grado d y $k = \bar{k}$, entonces

$$p = \prod_i (x - \lambda_i y)^{\alpha_i}$$

Definición 8.24. Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^2$ una curva plana. Sea $p = (0, 0)$, escribimos $F = F_m + F_{m+1} + \cdots + F_n$ con $m \leq n$. La **multiplicidad** de $V = \mathbb{V}(F)$ en p es $m_p(F) := m$.

Observación: Veamos que $p = (0, 0)$ es no singular si y solo si $m_p(F) = 1$. Si $m_p(F) = 2$ decimos que p es punto doble, si $m_p(F) = 3$ es punto triple y así.

Definición 8.25. Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^2$ una curva plana. Sea $p = (0, 0)$, escribimos $F = F_m + F_{m+1} + \cdots + F_n$ con $m \leq n$. Entonces

$$F_m = \prod_i L_i^{\alpha_i}$$

con L_i lineal y se llama **recta tangente** de V en p y α_i se dice **multiplicidad de la tangente**. Si $\alpha_i = 1$ para todo i , decimos que p es **punto multiple ordinario**.

Definición 8.26. Sea $V \subseteq \mathbb{A}_k^2$ una curva plana. Sea $p = (0, 0)$, definimos la multiplicidad de $p = (a, b)$ en V como

$$m_p(F) := m_{(0,0)}(F^T) \quad \text{con } F^T = F(x + a, y + b)$$

3.2. Multiplicidades y Anillos Locales

Teorema 9. Sea V una curva plana irreducible. Entonces p un punto no singular de V si y solo si $\mathcal{O}_p(V)$ es un anillo de evaluación discreta.

En tal caso, si $L = ax + by + c$ es una recta no tangente en p , entonces su imagen en $\mathcal{O}_p(V)$ es un parametro uniformizante.

3.3. Número de Intersecciones

4. Variedades Projectivas

4.1. Espacio Projectivo

Definición 9.1. Sea k un cuerpo tal que $k = \bar{k}$. Definimos el **n-espacio projectivo** sobre k , denotado por \mathbb{P}_k^n , como

$$\mathbb{P}_k^n := \frac{\mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}}{\sim}$$

donde $x \sim y$ si y solo si existe $\lambda \in k \setminus \{0\}$ tal que $x = \lambda y$. Un elemento $p \in \mathbb{P}_k^n$ se dice **punto** y un representante de la clase se llama **coordenada homogénea** para p .

Observación: Un elemento en \mathbb{P}_k^n típicamente se escribe por algún representante de la clase, y este se escribe del modo que sigue $[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Consideremos el conjunto

$$U_i := \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{P}_k^n : x_i \neq 0\}$$

de este modo cada $p \in U_i$ se puede escribir de manera única como $[x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}]$. Notemos que $\mathbb{P}_k^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$, donde U_i puede ser vista como una copia \mathbb{A}_k^n . Por conveniencia nos enfocaremos en U_{n+1} .

Definición 9.2. Sea

$$H_\infty := \mathbb{P}_k^n \setminus U_{n+1} = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{P}_k^n : x_{n+1} = 0\}$$

Decimos que H_∞ es el **hiperplano en el infinito**.

Observación: Notemos que existe una correspondencia entre $[x_1, \dots, x_n, 0]$ y $[x_1, \dots, x_n]$, por lo que H_∞ puede ser identificado con \mathbb{P}_k^{n-1} , de este modo $\mathbb{P}_k^n = U_{n+1} \cup H_\infty$ es la unión de un n-espacio afín y un conjunto que da todas las direcciones del n-espacio afín.

4.2. Conjuntos Algebraicos Projectivos