Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Mauricio Bustamante – Estudiante: Benjamín Mateluna

Topología Algebraica - MAT2850
Apuntes
05 de agosto de 2025

Índice

Motivación

Dados dos espacios topológicos X e Y ¿Cuando son homeomorfos?. Decimos que dos espacios son **homeomorfos** si existe $f : X \to Y$ continua, biyectiva y con inversa constinua. La topología algebraica ataca esta pregunta de la siguiente forma:

(1) Asigna a cada espacio topológico X un objeto algebraico $G(X)$.

(2) Aigna a cada función continua $f : X \to Y$ un homomorfismo $G(f) : G(X) \to G(Y)$ tal que

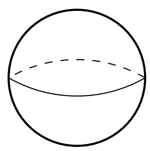
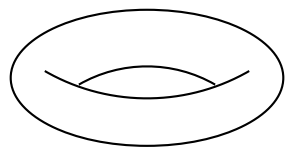
   (a) $G(f \circ g) = G(f) \circ G(g)$

   (b) $G(id_X) = id_{G(X)}$

Observación: Ambas condiciones implican que si $f : X \to Y$ es homeomorfismo, entonces $G(f) : G(X) \to G(Y)$ es isomorfismo. A veces los G que se construyen satisfacen la propiedad extra que si X se puede "deformar continuamente" en Y entonces $G(X) \cong G(Y)$.

Decimos que G es un **invariante homotópico**.
Ejemplos:

(1) Tenemos los espacios

Mas adelante veremos que la homología le asigna a la esfera el grupo $\{e\}$ y al toro $\mathbb{Z}^2$. En general, una superficie de genero g tendrá el grupo $\mathbb{Z}^{2g}$.

(2) ¿Cuando $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ son homeomorfos? Si $n \neq$, el grupo de homología de $\mathbb{R}^n$ será $\{e\}$ y por el contrario, para $\mathbb{R}^m$ va a ser $\mathbb{Z}$ y por lo tanto R^n y $\mathbb{R}^m$ son homeomorfos si y solo si $n = m$.

(3) Un ejemplo particular, para el circulo se tiene que $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ pero $\pi_1(\mathbb{S}^2) = \{e\}$ y por lo tanto los espacios no son homeomorfos.

Definición: *Una **homotopía** entre dos funciones continuas $f, g : X \to Y$ es una función continua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$.*
Notación: La función $H_t : X \to Y$ esta dada por $H_t(x) := H(x,t)$. Una homotopía de f a g se denota por $f \sim g$.

Proposición 0.1: *Ser homotópico es una relación de equivalencia en $\mathcal{C}(X,Y)$.*

Demostración. Debemos probar tres cosas

(1) La relación es reflexiva. Sea $f : X \to Y$, consideramos la homotopía constante, esto es $H(x,t) := f(x)$ es continua ya que

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[rr, bend right, "H"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

(2) Simetría. Supongamos que $f \sim g$, consideramos $H'(x,t) = H(x, 1-t)$ y es continua por que

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r, "id \times (1-t)"] \arrow[rr, bend right, "H'"'] & X \times [0,1] \arrow[r, "H"] & Y \end{tikzcd}$$

(3) Por último, la transitividad. Sean $f \sim g$ y $g \sim h$, Definimos $H * G : X \times [0,1] \to Y$ dada por

$$H * G(x,t) := \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

que resulta continua por el lema del pegado.

□

Definición: *Decimos que $f : X \to Y$ es una **equivalencia homotópica**, si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f \sim id_X$ y $f \circ g \sim id_Y$* En tal caso, X e Y se dicen homotópicamente equivalentes o que tienen el mismo tipo de homotopía y se denota por $X \sim Y$.

Ejemplo:

(1) Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo, en particular, tomando $g = f^{-1}$, se sigue que es equivalencia homotópica.

(2) Se tiene que $\{0\} \sim \mathbb{R}^n$, consideremos la inclusión $i :\to \{0\} \to \mathbb{R}^n$, afirmamos que es i es equivalencia homotópica. En efecto, se verifica que $\pi : \mathbb{R}^n \to \{0\}$ es una inversa homotópica. Por un lado $\pi \circ i = id_{\{0\}}$ y por otro $i \circ \pi = 0$. Notamos que $H(x,t) = tx$ con $t \in [0,1]$ es una homotopía entre 0 y $id_{\mathbb{R}^n}$.

(3) Veamos que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim \mathbb{S}^{n-1}$. Probaremos que la función $i : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es equivalencia homotópica. En efecto,

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\to \mathbb{S}^{n-1} \\ x &\to \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

es inversa homotópica. Es claro que $\pi \circ i = id_{s^{n-1}}$. Definimos

$$H(x,t) := t\frac{x}{|x|} + (1-t)x$$

Notamos que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = \frac{x}{|x|}$, es decir, H es una homotopia entre $i \circ \pi$ e $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$. Además, se verifica que $im(H) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1. Homología Simplicial

Queremos asignarle a un espacio topológico X arbitrario, grupos abelianos $H_0(X), H_1(X), \cdots$ tal que si $X \sim Y$, entonces $H_i(X) \cong H_i(Y)$ para todo i. Ituitivamente, $H_k(X)$ estará generado por ciertos subespacios de X de dimensión k.

Habrá una relación de equvalencia, $A, B \subseteq X$ de dimensión k serán equivalentes si hay un subespacio de X de dimensión $k+1$ cuyo borde es $A \cup B$.

Hay que restringir la clase de espacios a una con nociones de dimensión, borde, etc. Estos serán los complejos simpliciales. Necesitamos, adicionalmente, un objeto algebraico que capture esas nociones, esto corresponde a los complejos de cadenas.

1.1. Complejos de Cadenas

Definición: *Un **complejo de cadenas** es una sucesión de grupos abelianos y homomorfismos*

$$\cdots \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

tal que $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ para todo i. Se denota por $(C_\bullet, \partial_\bullet)$.
Observación: Notemos que $im\ \partial_{i+1} \subseteq ker\ \partial_i \subseteq C_i$. Dado que los grupos son abelianos, esta observación permite definir el siguiente objeto.

Definición: *El **i-ésimo grupo de homología** de $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ se define por*

$$H_i(C_i) := \frac{ker\ \partial_i}{im\ \partial_{i+1}}$$

Ejemplos:

- Si A un grupo abeliano, entonces

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0$$

  es un complejo de cadenas donde $C_i = A$. Entonces

$$H_j(C_\bullet) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ A & \text{si } j = i \end{cases}$$

- Consideremos la cadena exacta

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

  entonces $H_j(C_\bullet) = 0$ para todo i.

- Veamos que

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

  es un complejo de cadenas. La homología asociadas son $H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z}$, $H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_2$ y $H_k(C_\bullet) = 0$.

Definición: *Sean $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ y $(D_\bullet, \partial_\bullet)$ dos complejos de cadenas. Un **mapeo de cadenas** es una colección de homomorfismos $f_n : C_n \to D_n$ tal que $\partial_n f_n = f_{n-1}\partial_n$ para todo n, es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ D_n \arrow[r, "\partial_n"] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

y se denota por $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$.

Lema 1.1: *Si $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ es un mapeo de cadenas, entonces la asignación $f_* : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$ dada por*

$$f_*([x]) = [f_n(x)]$$

esta bien definida y es un homomorfismo de grupos.

Demostración. Sea $x \in ker\partial_n$ entonces $\partial_n f_n(x) = f_{n-1}\partial_n(x) = f_{n-1}(0) = 0$. Así, $f_n(x) \in ker\ \partial_n$ y por tanto la expresión tiene sentido. Si $[x] = [y]$ entonces $x - y = \partial_n(z)$ para $z \in C_{n+1}$, se sigue que $f_n(x) - f_n(y) = f_n\partial_{n+1}(z) = \partial_{n+1}f_{n+1}(z)$. Concluimos que $[f_n(x)] = [f_n(y)]$. □

Ejemplo: Consideremos la siguiente situación

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "3"] \arrow[d, "id"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 & C_\bullet \arrow[d, "f_\bullet"] \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "3"] & \mathbb{Z}_3 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 & D_\bullet
\end{tikzcd}$$

Entonces $f_* : H_2(C_\bullet) = 0 \to H_2(D_\bullet) = \mathbb{Z}$ es el morfismo trivial. Mientras que $\pi_* : H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}_3 \to H_1(D_\bullet) = \mathbb{Z}_3$ es la identidad.

Observación: Sea $g_\bullet : D_\bullet \to G_\bullet$ un mapeo de cadenas, entonces $(g \circ f)_\bullet : C_\bullet \to G_\bullet$ es un mapeo de cadenas y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
H_n(C_\bullet) \arrow[rr, "(g\circ f)_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & & H_n(G_\bullet) \\
& H_n(D_\bullet) \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\partial_n g_n f_n = g_{n-1}\partial_n f_n = g_{n-1}f_{n-1}\partial_n$. Por otro lado, tenemos que $(g\circ f)_*([x]) = [(g\circ f)(x)] = g_*([f(x)]) = (g_*\circ f_*)([x])$, lo que prueba la afirmación.

Definición: *Sean $i_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ y $j_\bullet : B_\bullet \to C_\bullet$ dos mapeos de cadenas. Decismo que forman una sucesión exacta corta si la secuencia*

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{i_n} B_n \xrightarrow{j_n} C_n \longrightarrow 0$$

es exacta y corta de grupos abelianos libres para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo anotamos como $0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$.

Teorema 1.2 (Lema de la serpiente): *Sea $0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$ una secuencia de complejos de cadenas, entonces existen morfismos*

$$\delta_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(A_\bullet) \arrow[r, "i_*"] & H_n(B_\bullet) \arrow[r, "j_*"] & H_n(C_\bullet) \arrow[dll, rounded corners, "\delta_n"'] & \\
& H_{n-1}(A_\bullet) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-1}(B_\bullet) \arrow[r, "j_*"] & H_{n-1}(C_\bullet) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(B_\bullet) \longrightarrow H_0(C_\bullet) \longrightarrow 0$$

Demostración. Vamos a hacer un cacería de diagramas (:D). Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_{n+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_n \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Primero debemos definir $\delta_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$. Sea $[c] \in H_n(C_\bullet)$ entonces $c \in ker\ \partial \subseteq C_n$. Como j es sobre, existe $b \in B_n$ tal que $j(b) = c$. Consideramos ∂b y notamos que

$$j\partial(b) = \partial j(b) = \partial c = 0$$

entonces existe un único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b$. Verificamos que $i\partial(a) = \partial i(a) = \partial^2 b = 0$ y como i es inyectiva vemos que $\partial a = 0$. Afirmamos que $\delta_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$ por

$$\delta_n([c]) = [a]$$

cumple lo buscado. Debemos demostrar lo siguiente

(1) No depende de la elección de b. Sea b' tal que $j(b') = c$ entonces $j(b'-b) = c-c = 0$, existe único a_0 tal que $i(a_0) = b'-b$. Por otro lado, existe a' tal que
$$i(a') = \partial b' = \partial b + \partial i(a_0) = \partial b + i\partial(a_0)$$
entonces $i(a' - \partial a_0) = \partial b = i(a)$, por inyectividad, $a' - \partial a_0 = a$, lo que implica que $[a] = [a']$.

(2) No depende de la elección del representante de $[c]$. Sea $c' = c + \partial c'' = j(b) + \partial j(b'') = j(b) + j\partial(b'')$, diremos $b' = b + \partial b''$, notemos que $\partial b' = \partial b + \partial^2 b'' = \partial b$. El mismo $a \in A_{n-1}$ satisface $i(a) = \partial b'$. Entonces $\delta_n[c] = [a] = \delta_n[c']$.

(3) La función δ_n es morfismo, es decir
$$\delta_n([c] + [c']) = \delta_n[c] + \delta_n[c']$$
Notar que si $j(b) = c$ y $j(b') = c'$ entonces $j(b + b') = c + c'$, existen únicos $a, a' \in A_{n-1}$ tales que $i(a + a') = \partial(b + b'')$ y así
$$\partial_n([c + c']) = [a + a'] = [a] + [a']$$

(4) Exactitud en $H_n(C_\bullet)$ y $H_n(A_\bullet)$. Veamos que $im\ j_* \subseteq ker\ \delta_n$. Sea $j_*[b]$ con $\partial b = 0$. Entonces

$$\delta_n j_*[b] = \delta_n[j(b)]$$

Existe único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b = 0$, entonces $a = 0$ y por lo tanto $\delta_n j_*[b] = [a] = 0$. Queda ver que $ker\ \delta_n \subseteq im\ j_*$. Sea $[c] \in ker\ \delta_n$ con $\partial c = 0$. Por definición de δ_n, para cada b tal que $j(b) = c$ hay un único $a \in A_{n-1}$ tal que $i(a) = \partial b$.

Como $\delta_n[c] = [a] = 0$ se sigue que $a = \partial a'$ y entonces $\partial b = i(a) = i\partial(a') = \partial i(a')$, así $b - i(a') \in ker\ \partial$, es decir $b - i(a')$ representa una clase de homología.

Ahora $j(b - i(a')) = j(b) = c$, por ende, $j_*[b - i(a')] = [c]$. Para $H_n(A_\bullet)$ la demostración es similar.

(5) Exactitud en $H_n(B_\bullet)$. Sea $[a] \in im\ i_*$ con $\partial a = 0$, entonces

$$j_* i_*[a] = [j_n i_n(a)] = 0$$

y por lo tanto $im\ i_* \subseteq ker\ j_*$. Sea $[b] \in ker\ j_*$ con $\partial b = 0$, entonces $j_*[b] = [j(b)] = 0$, lo que implica que $j(b) = \partial c' = \partial j(b') = j\partial(b')$, existe único $a \in A_{n-1}$ tal que $b - \partial b' = i(a)$, además

$$i\partial(a) = \partial i(a) = \partial b + \partial^2 b' = 0$$

entonces $\partial a = 0$. Luego $i_*[a] = [b]$. Concluimos que $im i_* = ker\ j_*$.

Lo que concluye el teorema. □

Nuestro objetivo será asociar un complejo de cadenas a un espacio topológico X arbitrario, lo que nos dara un grupo de homología para cada dimensión, además dada $f : X \to Y$ una función continua, nos gustaría obtener un mapeo de cadenas y por tanto un homomorfismo entre los grupos de homología de cada espacio.

1.2. Complejos Simpliciales

Definición: *Dados $n+1$ puntos $\{v_0, \cdots, v_n\} \in \mathbb{R}^\omega$ son* ***afínmente independientes****, si generan un $n-$plano afín, es decir, $\{v_1 - v_0, \cdots, v_n - v_0\}$ es un conjunto linealmente independiente, esto es*

$$\sum_{i=0}^{n} t_i v_i = 0 \quad y \quad \sum_{i=0}^{n} t_i = 0 \quad \textit{entonces} \quad t_i = 0 \textit{ para todo } i$$

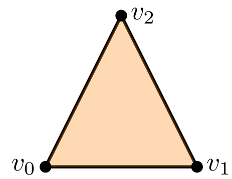
Ejemplo: Dos puntos son afínmente independientes. Tres puntos son afínmente independientes si y solo si no son colineales.

Definición: *Si $\{v_0, \cdots, v_n\}$ son afínmente independientes, ellos definen el* ***n-simplejo***

$$\sigma = \langle v_0, \cdots, v_n \rangle = \left\{ x = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i, \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \quad y \quad t_i \geq 0 \right\}$$

Decimos que σ es el $n-$simplejo generado por $v_0, \cdots, v_n$. Los puntos v_i se llaman **vértices** de σ. Una **cara** de un simplejo σ es un simplejo τ generado por un subconjunto de $\{v_0, \cdots, v_n\}$ y lo denotamos por $\tau \leq \sigma$. Si el subconjunto es propio, se dice que τ es una **cara propia**.

La **frontera** de un $n-$simplejo σ es la unión de todas sus caras propias, se denota por $\partial\sigma$, el **interior** de σ es $int(\sigma) := \sigma \setminus \partial\sigma$.



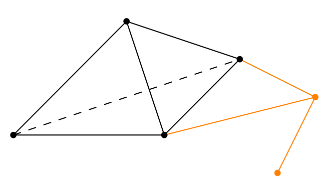
Definición: *Un* ***complejo simplicial*** *(geométrico) K es un conjunto de simplejos tales que*

(1) Si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau \in K$.

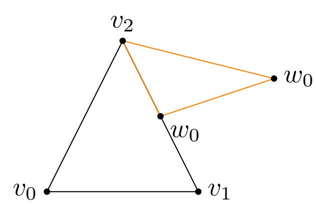
(2) Si $\sigma, \tau \in K$ entonces $\sigma \cap \tau = \emptyset$ ó $\sigma \cap \tau$ es una cara de σ y de τ.

El **poliedro** asociado a un complejo simplicial K es $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$. Un espacio topológico X se llama un poliedro si existe un complejo simplicial K y un homeomorfismo $f : |K| \to X$. Al par (K, f) se le llama una **triangulación** de X. Denotamos por V_K al conjunto de vértices de los simplices.

Observación: Si X es triangulable, entonces es Hausdorff por que $|K|$ lo es.



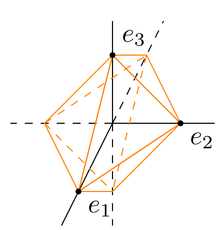
(1)



(2)

La figura (1) corresponde a un complejo simplicial, mientras que la figura (2) no es un complejo simplicial ya que los simplices que la componen no se pegan bien.

Ejemplo: Consideremos el complejo simplicial K formado por los simplices $\sigma = \langle \pm e_1, \pm e_2, \pm e_3 \rangle$ y sus respectivas caras. Consideremos $f : |K| \to \mathbb{S}^2$ por $f(x) := x/|x|$, entonces (K, f) es una triangulación de la $2-$esfera.



Definición: *Sean K y L complejos simpliciales. Un* ***mapeo simplicial*** *de K a L es una función $f : V_K \to V_L$ tal que si $\sigma = \langle v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_n} \rangle$ es un simplejo en K entonces*

$$\{f(v_{\alpha_0}), \cdots, f(v_{\alpha_n})\}$$

genera un simplice en L, al cual llamamos $f(\sigma)$. Notación $f : K \to L$.

Ejemplo: Sea $\triangle^n = \langle e_1, \cdots, e_{n+1} \rangle \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^\infty$. Entonces las funciones $f : \triangle^1 \to \triangle^2$ y $g : \triangle^2 \to \triangle^1$ dadas por $f(e_i) = e_i$ y $g(e_1) = g(e_3) = e_1$, $g(e_2) = e_2$ son mapeos simpliciales.

Lema 1.3: *Sea $f : K \to L$ un mapeo simplicial. Entonces induce una función continua $|f| : |K| \to |L|$.*

Demostración. Sea $\sigma \in K$, digamos que $\sigma = \langle v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_n} \rangle$ y Definimos

$$\begin{aligned} f_\sigma : \sigma &\to |L| \\ \sum_{i=0}^{k} t_i v_i &\to \sum_{i=0}^{k} t_i f(v_i) \end{aligned}$$

que es continua por que es lineal en los t_i. Se observa que si $\tau \leq \sigma$ entonces $f_\tau = f_\sigma\big|_\tau$. Ahora tomamos σ y σ', entonces

$$f_\sigma\big|_{\sigma \cap \sigma'} = f_{\sigma \cap \sigma'} = f_{\sigma'}\big|_{\sigma \cap \sigma'}$$

entonces $|f| := \bigcup_{\sigma \in K} f_\sigma$ es una función continua de $|K|$ en $|L|$. □

Sea $g : L \to J$ un mapeo simplicial, entonces $g \circ f$ es mapeo simplicial, ya que f mapea vértices de un simplice a vértices de un simplice y del mismo modo lo hace g, además se tiene lo siguiente

$$|g \circ f|(x) = |g \circ f| \left(\sum t_i v_{\alpha_i} \right) = \sum t_i (g \circ f)(v_{\alpha_i}) = \sum t_i g(f(v_{\alpha_i})) = (|g| \circ |f|)(x)$$

es decir, $|g \circ f| = |g| \circ |f|$. Un mapeo simplicial puede ser definido también como una función continua $f : |K| \to |L|$ que manda vértices en vértices y es lineal en sus caras.

1.3. Homología Simplicial

Dado K un complejo simplicial finito, esto es, que tiene un número finito de vértices. Elegimos un orden total en el conjunto de vértices, digamos $v_0 < v_1 < \cdots < v_n$.

Definición: ***(Complejo de cadenas simplicial)*** *Consideremos los grupos abelianos*

$$C_n(K) := \left\{ \sum n_\sigma \sigma : \sigma = \langle v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_n} \rangle \text{ tal que } v_{\alpha_0} < \cdots < v_{\alpha_n} \text{ y } n_\sigma \in \mathbb{Z} \text{ nulo salvo finitos casos} \right\}$$

y los diferenciales $\partial_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ se define en la base por

$$\partial_n \langle v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_n} \rangle = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle v_{\alpha_0}, \cdots, \widehat{v_{\alpha_i}}, \cdots, v_{\alpha_n} \rangle$$

donde $\langle v_{\alpha_0}, \cdots, \widehat{v_{\alpha_i}}, \cdots, v_{\alpha_n} \rangle := \left\langle v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_{i-1}}, v_{\alpha_{i+1}}, \cdots, v_{\alpha_n} \right\rangle$. Se extiende linealmente al resto del grupo.

> **Teorema 1.4:** *La tupla $(C_\bullet(K), \partial_\bullet)$ es un complejo de cadenas, además, la homología del complejo no depende del orden en el conjunto de vértices.*

Definición: *Sea K un complejo simplicial finito. El* ***i-ésimo grupo de homología simplicial*** de K *es*

$$H_i(K) := H_i(C_\bullet(K)) = \frac{ker\ \partial_i}{im\ \partial_{i+1}}$$

Ejemplos:

(1) Sea $K = \{\langle v_0, v_1 \rangle, \{v_0\}, \{v_1\}\}$ y consideramos el orden $v_0 < v_1$. El complejo corresponde a un segmento de recta, notemos que $3v_0 - 5v_1 \in C_0(K)$, con la identificación $v_0 = (1,0)$ y $v_1 = (0,1)$ vemos que $C_0(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, esta identificación no es canónica, es decir, depende de la base que escojamos y sus imagenes correspondientes.

Por otro lado, $C_1(K) \cong \mathbb{Z}$ con la identificación $\langle v_0, v_1 \rangle = 1$. Adicionalmente, se tiene que $C_i(K) = 0$ para $i > 1$. Luego,

$$0 \longrightarrow C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{0} 0$$

donde $\partial_1 \langle v_0, v_1 \rangle = v_1 - v_2 \in C_0(K)$. Con las identificaciones que hicimos resulta que $\partial_1(1) = (-1, 1)$. De este modo queda la cadena

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

Así $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(K) = 0$, $H_i(K) = 0$ para $i > 0$.

(2) Sean v_0, v_1, v_2 puntos no colineales. Consideramos $\sigma = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ y $K := \{\tau \leq \sigma\}$ definimos el orden $v_0 < v_1 < v_2$. Notemos que

$$\begin{aligned} C_0(K) &= \mathbb{Z}\{v_0, v_1, v_2\} \\ C_1(K) &= \mathbb{Z}\{\langle v_0, v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_0, v_2 \rangle\} \\ C_2(K) &= \mathbb{Z}\{\langle v_0, v_1, v_2 \rangle\} \end{aligned}$$

Entonces $\partial_0 = 0$,

$$\partial_1 = \begin{cases} \partial \langle v_0, v_1 \rangle = v_1 - v_0 \\ \partial \langle v_1, v_2 \rangle = v_2 - v_1 \\ \partial \langle v_0, v_3 \rangle = v_3 - v_0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \partial_2 \langle v_0, v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle - \langle v_0, v_2 \rangle + \langle v_0, v_1 \rangle$$

Realizando las identificaciones $v_i = e_{i+1}$ para $i = 0, 1, 2$, $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle = 1$, $\langle v_0, v_1 \rangle = e_1, \langle v_1, v_2 \rangle = e_2$ y $\langle v_0, v_2 \rangle = e_3$ resulta que $C_0(K) \cong \mathbb{Z}^3, C_1(K) \cong \mathbb{Z}^3$ y $C_2(K) \cong \mathbb{Z}$. Tenemos

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \longrightarrow 0$$

donde

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Claramente $H_i(K) = 0$ para $i > 2$. Además, $ker\ \partial_2$, entonces $H_2(K) = 0$. Notemos que $im\ \partial_2 \cong \mathbb{Z}$ y $ker\ \partial_1 \cong \mathbb{Z}$, luego $H_1(K) = 0$. Por otro lado, $im\ \partial_1 \cong \mathbb{Z}^2$. Por ende $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

Comentario: Se invita a calcular la homología de un $n-$simplejo. Hasta ahora hemos definido todo respecto a $\mathbb{Z}$, pero se puede definir homología simplicial de manera análoga para cualquier anillo R.

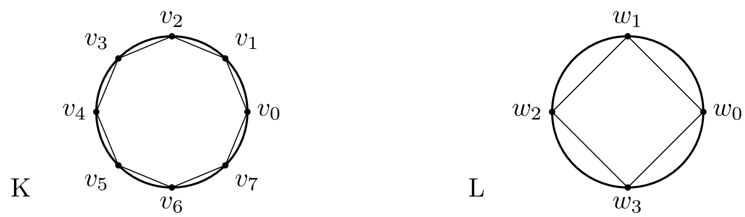
Lema 1.5: *Sea $f : K \to L$ un mapeo simplicial, entonces las funciones*

$$\begin{aligned} f_n &: C_n(K) \to C_n(L) \\ \langle v_{\alpha_0}, \cdots, v_{\alpha_n} \rangle &\to \begin{cases} \langle f(v_{\alpha_0}), \cdots, f(v_{\alpha_n}) \rangle & \textit{si son distintos} \\ 0 & \textit{si no lo son} \end{cases} \end{aligned}$$

forman un mapeo de cadena.

Por lo tanto, f induce un morfismo entre los grupos de homología de los complejos simpliciales

Ejemplo: Consideremos los complejos simpliciales



Consideramos los ordenes $v_0 < v_1 < \cdots < v_7$ y $w_0 < w_1 < w_2 < w_3$ y definimos $f : K \to L$ por $f(v_i) = f(v_{i+4}) = w_i$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Veamos quien es $f_* : H_1(K) \to H_1(L)$. En primer lugar, sabemos que

$$H_1(K) = ker(C_1(K) \to C_0(K)) = ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathbb{Z}$$

Similarmente $H_1(K) \cong \mathbb{Z}$. Entonces

$$f_*(\langle v_0, v_1 \rangle + \cdots + \langle v_6, v_7 \rangle - \langle v_0, v_7 \rangle) = 2(\langle w_0, w_1 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle + \langle w_2, w_3 \rangle - \langle w_0, w_3 \rangle)$$

luego $f_* : H_1(K) \xrightarrow{\cdot 2} H_1(L)$. Por otro lado, notemos que $H_0(K) \cong H_0(L) \cong \mathbb{Z}$, ya que todo par de vértices en el complejo esta conectado por una secuencia de aristas, luego $f_*([v_0]) = [w_0]$, entonces $f_* : H_0(K) \to H_0(L)$ es isomorfismo.

Teorema 1.6 (Mayer-Vietoris): *Sea K un complejo simplicial y M, N subcomplejos de K que cubren a K, es decir, $M \cup N = K$. Se tienen los mapeos*

$$\begin{tikzcd} M \cap N \arrow[r, "i_N"] \arrow[d, "i_M"] & N \arrow[d, "j_N"] \\ M \arrow[r, "j_M"] & K \end{tikzcd}$$

Existen morfismos $\delta_n : H_n(K) \to H_{n-1}(K)$ tales que la secuencia

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(M \cap N) \arrow[r, "i_{M*} \oplus i_{N*}"] & H_n(M) \oplus H_n(N) \arrow[r, "j_{M*} - j_{N*}"] & H_n(K) \arrow[dlll, "\delta_n"] \\ & H_{n-1}(M \cap N) \arrow[r, "i_{M*} \oplus i_{N*}"] & H_{n-1}(M) \oplus H_{n-1}(N) \arrow[r, "j_{M*} - j_{N*}"] & H_{n-1}(K) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(M) \oplus H_0(N) \xrightarrow{j_{M*} - j_{N*}} H_0(K) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Verificaremos que

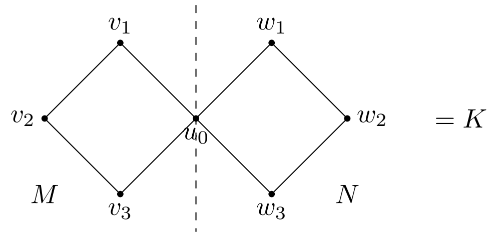
$$0 \longrightarrow C_n(M \cap N) \xrightarrow{i_M \oplus i_N} C_n(M) \oplus C_n(N) \xrightarrow{j_M - j_N} C_n(K) \longrightarrow 0$$

es una secuencia exacta corta de grupos abelianos para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, como C_n es libremente generado por los $n-$simplices e i es inyectiva, entonces $i_{M*} \oplus i_{N*}$ es inyectiva. Además, $j_{M*} - j_{N*}$ es sobreyectiva por hipotesis y es directo que $im\ i_{M*} \oplus i_{N*} \subseteq ker\ j_{M*} - j_{N*}$. Resta ver que

$$ker\ j_{M*} - j_{N*} \subseteq im\ i_{M*} \oplus i_{N*}$$

Sea $(x, y) \in ker\ j_{M*} - j_{N*}$ entonces $j_{M*}(x) = j_{N*}(y)$, es decir, x e y se escriben como suma de simplices en N y M respectivamente, entonces $(x, y) \in im\ i_{M*} \oplus i_{N*}$. Así, usando el lema de la serpiente, concluimos. $\square$

Ejemplo: Consideremos la siguiente situación



Notemos que $H_1(M) \cong \mathbb{Z}$ y $H_1(N) \cong \mathbb{Z}$, además $M \cap N = \{u_0\}$, entonces usando mayer vietoris nos queda que

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(K) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} H_0(K) \longrightarrow 0$$

Para $i > 2$ notamos que $H_i(K) = 0$, por otro lado el morfismo $\varphi(1) = (1, 1)$ ya que manda generador en generador, esto por que todo par de puntos en M y N estan relacionados por un camino de aristas. De este modo,

$$H_0(K) \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\ker \phi} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{im\ \varphi} \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

donde el último isomorfismo se da por que φ es inyectiva, es decir, el morfismo $H_1(K) \to \mathbb{Z}$ es trivial.