



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROFESOR: GIANCARLO URZÚA – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

**Geometría Algebraica - MAT2824**  
**Apuntes**  
**06 de Marzo de 2025**

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Conjuntos Algebraicos afines</b>	<b>4</b>
1.1. Preliminares algebraicos . . . . .	4
1.2. Espacio Afín y Conjuntos Algebraicos . . . . .	4
1.3. Ideal de un conjunto . . . . .	5
1.4. El Teorema de la Base de Hilbert . . . . .	5
1.5. Componentes Irreducibles en un Conjunto Algebraico . . . . .	6
1.6. Conjuntos Algebraicos del Plano . . . . .	7
1.7. Nullstellensatz de Hilbert . . . . .	8

## Introducción

Habrán tres evaluaciones (I1, I2, I3) cada una vale un 20 % y un examen (EX) que vale un 40 %. Las fechas son, 9 de abril, 14 de Mayo, 11 de Junio y 1 de Julio respectivamente.

# 1. Conjuntos Algebraicos afines

## 1.1. Preliminares algebraicos

Sea  $R$  un anillo conmutativo con  $+$ ,  $\cdot$  y con  $1 \neq 0$ . Si  $R, R'$  son anillos, un morfismo de anillos es una función  $f : R \rightarrow R'$  que respeta  $+$ ,  $\cdot$  y  $f(1_R) = 1_{R'}$ . Un dominio  $R$  es un anillo en donde  $xy = xz$  implica que  $y = z$  para todo  $x \neq 0$ .

**Ejemplo**  $\mathbb{Z}$  es dominio, pero  $\mathbb{Z}/6$  no lo es.

Un cuerpo es un dominio donde todo  $x \neq 0$  tiene un inverso. Dado  $R$  dominio, existe el cuerpo de fracciones  $K$  tal que  $R \subseteq K$ . Dado  $R$  anillo, sea  $R[x]$  el anillo de polinomios con coeficientes en  $R$ , sus elementos tienen la forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d, \quad a_d \neq 0$$

y decimos que  $f$  tiene grado  $d$  denotado por  $gr(f)$ . Se define de manera recursiva  $R[x_1, \dots, x_n] = R[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$  el anillo de polinomios en  $n$  variables. Dado  $f = \alpha \cdot x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$  su grado se define como  $gr(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ , para  $f$  en general, definimos su grado como  $gr(f) := \max\{\text{grados de monomios}\}$ . Dado  $f \in R[x_1, \dots, x_n]$  y  $d = gr(f)$  entonces

$$f = F_0 + F_1 + \cdots + F_d, \text{ con } F_i \text{ homogéneos, esto es, } F_i(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^i F_i(x_1, \dots, x_n)$$

Si  $f \in R[x]$  una raíz (cero) de  $f$  es un  $r \in R$  tal que  $f(r) = 0$ .

**Teorema 1.** *Se tiene que  $r$  es cero si y solo si  $f(x) = (x - r)g(x)$  para algún  $g \in R[x]$ .*

Un cero de  $f(x_1, \dots, x_n)$  es un  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ .

Decimos que  $r \in R$  es irreducible si toda descomposición  $r = ab$  con  $a, b \in R$  se tiene que  $a$  o  $b$  es una unidad. Un anillo  $R$  se dice dominio de factorización única si todo elemento no nulo se puede factorizar de manera esencialmente única en producto de irreducibles.

**Lema 1.1.** *Si  $R$  es dominio de factorización única entonces  $R[x]$  es dominio de factorización única.*

**Lema 1.2.** *Si  $R$  es un dominio de factorización única y  $K$  su cuerpo de fracciones. Dado  $f \in R[x]$  irreducible entonces  $f$  es irreducible en  $K[x]$ .*

Sea  $R$  un anillo. Un ideal  $I \subset R$  es tal que si  $a, b \in I$  entonces  $a + b \in I$  y si  $r \in R$  entonces  $ra \in I$ . Consideramos la función  $\pi : R \rightarrow R/I$  donde  $R/I$  es el anillo cociente que es conmutativo. Un ideal es maximal si y solo si  $R/I$  es cuerpo.

**Teorema 2.** *Sea  $R$  un dominio euclideo (se cumple algoritmo de la división) y  $a, b \in R$ , consideremos  $\text{mcd}(a, b) = d$ . Entonces existen  $c, e \in R$  tales que  $ac + be = d$ .*

**Teorema 3.** *Si  $F$  es un polinomio homogéneo de grado  $d$ , entonces*

$$dF = x_1 F_{x_1} + \cdots + x_n F_{x_n}$$

*donde  $F_{x_i}$  es la derivada formal con respecto a  $x_i$ .*

## 1.2. Espacio Afín y Conjuntos Algebraicos

**Definición 3.1.** *Sea  $k$  un cuerpo. El espacio afín de dim  $n$  es  $\mathbb{A}_k^n := k^n$  (generalmente se supondrá que  $k = \bar{k}$ ).*

**Definición 3.2.** *Una hipersuperficie de  $\mathbb{A}_k^n$  es  $V(F) = \{p \in \mathbb{A}_k^n : F(p) = 0\}$  para un  $F \in k[x_1, \dots, x_n]$ .*

**Ejemplos:**

- Sea  $k = \mathbb{R}$  consideramos la hipersuperficie  $V(y^2 - x^2(x+1)) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  (foto)  
El punto  $(0,0)$  se llama nodo.
- Veamos la hipersuperficie  $V((x^3 - y^3)(y^3 - 1)(x^3 - 1)) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ .
- La hipersuperficie  $V(x^2 + y^2 - z^2) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  es conocida como cono (foto)  
Como en el primer ejemplo, el punto  $(0,0)$  se llama nodo
- Consideremos  $V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  (foto)  
En este caso, el punto  $(0,0)$  no es un nodo, en este caso se llama cuspide.
- Veamos el caso de una hipersuperficie no parametrizable, esta es  $V(y^2 - x(x+1)(x+\lambda))$ .

**Definición 3.3.** Sea  $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$  un conjunto arbitrario, se define

$$V(S) := \{p \in \mathbb{A}_k^n : F(p) = 0 \quad \forall F \in S\} = \bigcap_{F \in S} V(F)$$

y se dice que es un conjunto algebraico afín.

Propiedades de un conjunto algebraico afín:

- a) Sea  $I = \langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i s_i, a_i \in k \right\}$ , entonces  $V(I) = V(S)$ .

**Demostración.** Veamos que  $V(I) \subseteq V(S)$ , si  $p \in V(I)$ , como  $S \subseteq I$  se sigue que  $p \in V(S)$ . Para  $V(S) \subseteq V(I)$  notemos que dado  $f \in I$  se tiene que  $f = \sum a_i s_i$ , luego si  $p \in V(S)$  vemos que  $f(p) = \sum a_i s_i(p) = 0$ .

- b) Sea  $\{I_\alpha\}$  una colección de ideales, entonces  $V(\bigcup_\alpha I_\alpha) = \bigcap_\alpha V(I_\alpha)$ .
- c) Si  $I \subseteq J$  se sigue que  $V(J) \subseteq V(I)$ .
- d) Sean  $F, G \in k[x_1, \dots, x_n]$ , se tiene que  $V(FG) = V(F) \cup V(G)$ .
- e) Tenemos las siguientes dos identidades  $V(1) = \emptyset$  y  $V(0) = \mathbb{A}_k^n$ .

**observación:** Lo anterior es valido si  $k$  es algebraicamente cerrado, de lo contrario, si consideramos  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$  vemos que  $V(x^2 + 1) = \emptyset$ .

### 1.3. Ideal de un conjunto

**Definición 3.4.** Sea  $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$  un conjunto arbitrario. Se define el ideal de  $X$  como

$$I(X) := \{F \in k[x_1, \dots, x_n] : F(p) = 0 \quad \forall p \in X\}$$

**observación:** Notemos que si  $F^m \in I(X)$  entonces  $F \in I(X)$ . Un ideal con esta propiedad se dice radical.

Propiedades del ideal de un conjunto:

- a) Si  $X \subseteq Y$  se tiene que  $I(Y) \subseteq I(X)$ .
- b) Se tiene lo siguiente  $I(\emptyset) = k[x_1, \dots, x_n]$  y  $I(\mathbb{A}_k^n) = \{0\}$ . Además, si  $k$  es un cuerpo infinito, se tiene que  $I(\{a_1, \dots, a_n\}) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ .

### 1.4. El Teorema de la Base de Hilbert

**Teorema 4.** Todo conjunto algebraico corresponde a la intersección finita de hipersuperficies.

**Demostración.** Sea  $V(I)$  el conjunto algebraico para algún ideal  $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ . Basta con probar que  $I$  es finitamente generado, en tal caso  $I = (F_1, \dots, F_r)$ , entonces  $V(I) = V(F_1, \dots, F_r) = V(F_1) \cap \dots \cap V(F_r)$ .

**Teorema 5.** Si  $R$  es un anillo Noetheriano, entonces  $R[X]$  es un anillo Noetheriano.

**Demostración.** Sea  $I \subseteq R[X]$  un ideal. Dado  $F = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$  con  $a_d \neq 0$  decimos que  $a_d$  es el término líder de  $F$  denotado por  $l(F)$ . Sea

$$\mathcal{J} := \{r \in R : r \text{ es término líder de algún } F \in I\} \cup \{0\}$$

Afirmamos que  $\mathcal{J}$  es ideal, en efecto, sean  $l(F), l(G) \in \mathcal{J}$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $gr(F) \leq gr(G)$ , luego

$$Fx^{gr(G)-deg(F)} + G = H$$

donde  $l(H) = l(F) + l(G)$ . Es claro que  $r \cdot l(F) \in \mathcal{J}$  con  $r \in R$ . Por hipótesis existen  $F_1, \dots, F_r \in I$  tales que  $\mathcal{J} = (l(F_1), \dots, l(F_r))$ . Sea  $N > gr(F_i)$  para todo  $1 \leq i \leq r$ . Para cada  $m \leq N$  definimos

$$\mathcal{J}_m := \{r \in R : r \text{ es término líder de } F \in I \text{ y } gr(F) \leq m\}$$

Notemos que los  $\mathcal{J}_m$  son ideales en  $R$ , por ende, son finitamente generados, es decir  $\mathcal{J}_m = (l(F_{m,j}))$ . Consideremos el ideal  $I' = \langle F_{m,j}, F_i \rangle$ , afirmamos que  $I' = I$ . Claramente se tiene que  $I' \subset I$ . Supongamos, por contradicción, que  $I' \neq I$ , sea  $G \in I' \setminus I$  de menor grado. Tenemos dos consideramos

- a) Veamos cuando  $gr(G) > N$ , existen polinomios  $Q_i \in R[X]$  tal que  $G$  y  $\sum Q_i F_i$  tienen el mismo coeficiente líder. Luego  $G - \sum Q_i F_i \in I'$  pues tiene menor grado que  $G$ , se sigue que  $G \in I'$ .
- b) El resultado para  $gr(G) \leq N$  se obtiene del mismo modo, usando esta vez los  $F_{m,j}$ .

**Ejemplo:** Sea  $(0,0) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ , entonces  $\{(0,0)\} = V(x^2 + y^2)$ . Pero en  $\mathbb{C}$  tenemos que  $\{(0,0)\} \neq V(F)$  para ningún  $F \in k[x, y]$ .

## 1.5. Componentes Irreducibles en un Conjunto Algebraico

**Definición 5.1.** Un conjunto algebraico  $V$  se dice reducible si  $V = V_1 \cup V_2$  con  $V_i$  conjunto algebraico y distinto de  $V$ .

**Observación:** Un punto es un conjunto algebraico irreducible, lo que implica que cualquier conjunto finito es algebraico y reducible.

**Ejemplos:**

- Notemos que  $V(xy) = V(x) \cup V(y)$ , es decir  $V(xy)$  es reducible.
- Consideremos el espacio afín  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ , entonces el conjunto algebraico  $V((x^2 + 1)x) = \{0\}$  es irreducible.

**Proposición 5.1.** Un conjunto algebraico  $V$  es irreducible si y solo si el ideal  $I(V)$  es primo.

**Demostración.**

- $\Rightarrow$  | Supongamos que  $I(V)$  no es primo, entonces existen  $F_1, F_2$  polinomios tales que  $F_1 \cdot F_2 \in I(V)$  y  $F_1, F_2 \notin I(V)$ . Afirmamos que  $V = (V \cap V(F_1)) \cup (V \cap V(F_2))$ . Sea  $p \in V$ , entonces  $F_1(p) \cdot F_2(p) = 0$  lo que implica que  $p \in (V \cap V(F_1)) \cup (V \cap V(F_2))$ , además  $V \cap V(F_i) \neq V$  ya que existe  $q_i$  tal que  $F_i(q_i) \neq 0$ .
- $\Leftarrow$  | Supongamos que  $V$  es reducible. Luego  $V = V_1 \cup V_2$  con  $V_i \neq V$ . Entonces existe un polinomio  $F_i$  tal que  $F_i(p) = 0$  para todo  $p \in V_i$ , pero no para todo punto en  $V$ . Notemos que  $F_1 \cdot F_2 \in I(V)$ , sin embargo,  $F_i \notin I(V)$ .

**Definición 5.2.** Una variedad afín  $V$  es un conjunto algebraico afín irreducible.

**Lema 5.1.** Sea  $R$  un anillo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a)  $R$  es Noetheriano.
- b) Si  $\mathcal{C}$  es una colección no vacía de ideales en  $R$ , entonces  $\mathcal{C}$  tiene un elemento maximal, es decir, existe  $I \in \mathcal{C}$  que no está contenido en otro ideal de  $\mathcal{C}$ .

c) Toda cadena ascendente de ideales en  $R$  se estabiliza.

**Demostración.**

- (a)  $\Rightarrow$  (b) | Necesitamos usar el axioma de elección. Sea  $\mathcal{C}$  una colección de ideales en  $R$ , para cada subconjunto no vacío de  $\mathcal{C}$  elegimos un ideal. Sea  $I_0$  el ideal escogido para  $\mathcal{C}$ , definimos el conjunto

$$\mathcal{C}_1 := \{I \in \mathcal{C} : I_0 \subset I\}$$

Si  $\mathcal{C}_1 = \emptyset$  entonces  $I_0$  es el ideal maximal. Si no, repetimos el proceso. Sea  $I \in \mathcal{C}_1$  el escogido, definimos

$$\mathcal{C}_2 := \{I \in \mathcal{C}_1 : I \subset I\}$$

Es suficiente demostrar que existe  $n$  tal que  $\mathcal{C}_n = \emptyset$ . Sea  $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$  es ideal, además, notemos que  $I_n \subset I_{n+1}$ . Como  $R$  es Noetheriano, entonces  $I = (f_1, \dots, f_m)$ , luego existe  $r$  tal que  $f_1, \dots, f_m \in I_r$ , lo que implica que  $I \subseteq I_r$  y por lo tanto  $I = I_r$  se sigue que  $I_r = I_s$  para todo  $s > r$ , lo cual es una contradicción.

- (b)  $\Rightarrow$  (c) | Basta tomar  $\mathcal{C}$  como nuestra colección de ideales en  $R$ , luego, existe un elemento maximal.
- (c)  $\Rightarrow$  (a) | Sea  $I \subseteq R$  un ideal. Si  $I = (0)$  estamos listos, de lo contrario, sea  $f_1 \in I$ , entonces  $(f_1) \subseteq I$ . Supongamos que  $I \setminus (f_1) \neq \emptyset$ , sea  $f_2 \in I \setminus (f_1)$ , de esta manera construimos una cadena ascendente de ideales

$$(f_1) \subset (f_1, f_2) \subset \dots \subset (f_1, \dots, f_n) \subset \dots$$

para algun  $N$  la cadena se estabiliza y por ende  $(f_1, \dots, f_N) = I$ .

**Proposición 5.2.** Cualquier colección de conjuntos algebraicos  $\{V_i\}_{i \in I}$  en  $\mathbb{A}_k^n$  tiene un elemento minimal.

**Demostración.** Dada  $\{V_i\}_{i \in I}$  obtenemos una colección  $\mathcal{C} = \{I(V_i)\}_{i \in I}$  de ideales en  $k[x_1, \dots, x_n]$ , el cual es Noetheriano. Luego  $\mathcal{C}$  tiene un elemento maximal, digamos  $I(V_*)$ , afirmamos que  $V_*$  es el elemento minimal, de lo contrario, existe  $V_i \subseteq V_*$  entonces  $I(V_*) \subseteq I(V_i)$ .

**Teorema 6.** Sea  $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$  un conjunto algebraico. Entonces existen unicos conjuntos algebraicos irreducibles  $V_1, \dots, V_m$  tales que

$$V = \bigcup_{i=1}^m V_i \quad y \quad V_i \not\subseteq V_j \quad \forall i \neq j$$

**Demostración.** Sea  $\mathcal{C} = \{V \subseteq \mathbb{A}_k^n \text{ conjunto algebraico} : V \text{ no es unión finita de irreducibles}\}$ . Si  $\mathcal{C}$  es vacío estamos listos. Si no lo es, sea  $V \in \mathcal{C}$  minimal. Tenemos que  $V$  no es irreducible, entonces  $V = V_1 \cup V_2$  con  $V_i \subset V$ , lo que implica que algún  $V_i \in \mathcal{C}$  lo cual es una contradicción.

Sea  $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$  con  $V_i$  irreducibles, asumir que  $V_i \not\subseteq V_j$  para todo  $i \neq j$ . Digamos que

$$\bigcup_{i=1}^m V_i = \bigcup_{j=1}^s W_j \quad \text{con} \quad V_i \not\subseteq V_j \quad y \quad W_i \not\subseteq W_j \quad y \quad V_i, W_j \neq \emptyset$$

Notemos que  $V_1 = V_1 \cap V = \bigcup_{j=1}^s (V_1 \cap W_j)$ , como  $V_1$  es irreducible, existe unico  $j$  tal que  $V_1 = V_1 \cap W_j$ , es decir,  $V_1 \subseteq W_j$ . Por otro lado, existe unico  $i$  tal que  $W_j \subseteq V_i$ , lo que implica que  $V_1 \subseteq V_i$  entonces  $i = 1$  y así  $V_1 = W_j$ .

## 1.6. Conjuntos Algebraicos del Plano

**Lema 6.1.** Si  $f, g \in k[x, y]$  no tienen factores en común, entonces  $V(f, g)$  es un conjunto finito.

**Demostración.** Recordemos que  $k(x)[y]$  es dominio euclideo. Por lema de gauss,  $f, g$  no tienen factores en común en  $k(x)[y]$ , entonces existen  $a, b \in k(x)[y]$  tal que  $af + bg = 1$ . Existe  $r(x)$  tal que

$$raf + rbg = r$$

es una ecuación en  $k[x, y]$ . Sea  $(p, q) \in V(f, g)$ , evaluando en la ecuación anterior vemos que

$$0 = raf(p, q) + rbq(p, q) = r(p)$$

por lo tanto la cantidad de valores posibles de  $p$  es finita. Haciendo lo mismo para  $y$  obtenemos que  $q$  solo puede tomar una cantidad finita de valores.

**Corolario 6.1.** Si  $f \in k[x, y]$  es irreducible con  $|V(f)| = \infty$  entonces  $I(V(f)) = (f)$  y  $V(f)$  es irreducible.

**Demostración.** Si  $g \in I(V(f))$ , entonces  $|V(f, g)| = \infty$ , luego,  $f$  y  $g$  tienen factores en común, como  $f$  es irreducible, entonces  $f$  divide a  $g$  lo que implica que  $g \in (f)$ . La otra contención es directa.

Por otro lado, notemos que  $(f)$  es primo, pues  $f$  es irreducible, así,  $V(f)$  es irreducible.

**Corolario 6.2.** Supongamos que  $k$  es infinito, entonces los conjuntos algebraicos irreducibles de  $\mathbb{A}_k^2$  son:  $\emptyset$ ,  $\mathbb{A}_k^2$ , un punto y los conjuntos  $V(f)$  con  $f$  irreducible y  $|V(f)| = \infty$ .

**Demostración.** Sea  $V$  un conjunto algebraico irreducible. Si  $|V| < \infty$  entonces  $V = \emptyset$  o  $V$  es un punto. Si  $I(V) = (0)$  entonces  $V = \mathbb{A}_k^2$ . Supongamos que  $|V| = \infty$  y que  $(0) \subset I(V) \subset k[x, y]$ . Como  $I(V)$  es primo, existe un polinomio no constante e irreducible tal que  $f \in I(V)$ .

Si  $g \in I(V)$  y  $g \notin (f)$ , entonces  $V \subset V(f, g)$ , por la proposición, esto es una contradicción. De este modo,  $I(V) = (f)$ . Afirmamos que  $V(f) = V$ , en efecto, tenemos que  $V = V(I(V)) = V(f)$ .

**Corolario 6.3.** Supongamos que  $k = \bar{k}$ . Sea  $f \in k[x, y]$  y sea  $f = \prod_{i=1}^m f_i^{\alpha_i}$  con  $f_i$  irreducible. Entonces

$$V(f) = \bigcup_{i=1}^m V(f_i)$$

es su descomposición en irreducibles y además  $I(V(f)) = (f_1, \dots, f_m)$ .

**Demostración.** Como  $f_i, f_j$  son coprimos no hay inclusiones entre  $V(f_i)$  y  $V(f_j)$ , de lo contrario si existen  $i \neq j$  tales que  $V(f_i) \subset V(f_j)$ , entonces

$$(f_i) = I(V(f_i)) \supset I(V(f_j)) = (f_j)$$

lo cual es una contradicción. Luego,

$$I(V(f)) = I\left(\bigcup V(f_i)\right) = \bigcap I(V(f_i)) = \bigcap (f_i) = (f_1 \cdots f_m)$$

## 1.7. Nullstellensatz de Hilbert

Como premisa supondremos que  $k = \bar{k}$ .

**Teorema 7.** Sea  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  un ideal, entonces  $V(I) \neq \emptyset$ .

**Demostración.** Podemos suponer que  $I$  es maximal. En efecto, recordemos que todo ideal esta contenido en un ideal maximal, digamos  $M$ , entonces  $V(M) \subseteq V(I)$ . Como  $I$  es maximal, esto equivale a que  $k[x_1, \dots, x_n]/I \supset k$  es cuerpo. Como  $k$  es algebraicamente cerrado, podemos asumir que  $k[x_1, \dots, x_n]/I = k$ .

Así, cada variable  $x_i$  puede ser identificada por un elemento en  $k$  digamos  $a_i$ , lo que implica que  $x_i - a_i$  es igual 0 bajo el cociente, se sigue que  $x_i - a_i \in I$ , luego  $I = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ .

De la demostración surge una pregunta, ¿Por que  $k[x_1, \dots, x_n]/I = k$ ? El siguiente lema lo responde

**Lema 7.1.** Sea  $K \subset L$  una extensión de cuerpo tal que  $L$  es finitamente generado como  $k$ -álgebra. Entonces  $L$  es finitamente generado como  $k$ -módulo.