



Teoría Espectral - MAT2820
Tarea 1
15 de septiembre de 2025

1. Transformada de Fourier - Versión continua

1.1. Propiedades básicas

(1) Veamos que para todo $\xi \in \mathbb{R}$ se tiene que $|\mathcal{F}(f)(\xi)| < \infty$, en efecto,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-ix\xi} f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$$

donde la última desigualdad se obtiene de que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Lo anterior implica que $\hat{f}(\xi) \in \mathbb{C}$.

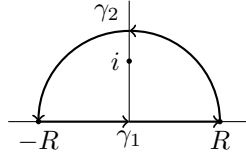
(2) En primer lugar, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g_1)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-|x|} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi - |x|} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-x - ix\xi} dx + \int_{\mathbb{R}_{\leq 0}} e^{x - ix\xi} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{e^{-x(1+i\xi)}}{1+i\xi} \Big|_{x=0}^{\infty} + \frac{e^{x(1-i\xi)}}{1-i\xi} \Big|_{-\infty}^{x=0} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{1+\xi^2} \end{aligned}$$

Por otro lado, para g_2 , definimos la función compleja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2}$$

Supongamos que $\xi \leq 0$, consiramos el siguiente camino en \mathbb{C} ,



donde $\gamma_1(t) = t$ con $t \in [-R, R]$ y $\gamma_2(t) = Re^{\pi it}$ para $t \in [0, 1]$. Diremos que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Para $R > 1$ suficientemente grande se tiene que i esta en la región determinada por γ , así, por teorema del residuo, se sigue que

$$2\pi i \cdot \text{Res}(f, i) = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{-it\xi}}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{e^{-iRe^{\pi it}\xi}}{1+R^2e^{2\pi it}} \cdot Ri\pi e^{i\pi t} dt$$

como i es un polo simple de f , vemos que

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{-iz\xi}}{z + i} = -\frac{i}{2}e^{\xi}$$

Por otro lado, como $\xi \leq 0$, tenemos que

$$\left| \int_0^1 \frac{e^{-iRe^{\pi it}\xi}}{1+R^2e^{2\pi it}} \cdot Ri\pi e^{i\pi t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{R\pi e^{R\text{sen}(\pi t)\xi}}{|1+R^2e^{2\pi it}|} dt \leq \int_0^1 \frac{R\pi}{R^2-1} dt = \frac{R\pi}{R^2-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Entonces para $\xi \leq 0$ se tiene que

$$\mathcal{F}(g_2)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} e^{\xi}$$

De manera análoga para $\xi > 0$, pero tomando $\gamma_2(t) = Re^{-\pi it}$ con $t \in [0, 1]$, se obtiene que

$$\mathcal{F}(g_2)(\xi) = -\frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi}$$

(3) Consideremos la función

$$G(x, \xi) = e^{-ix\xi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-(ix\xi + \frac{x^2}{2})}$$

notemos que $g_{\xi_0}(x) = G(x, \xi_0)$ es continua, por ende es medible, también se tiene que $\frac{\partial G}{\partial \xi}$ existe para todo $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$ y además $g_0(x)$ es integrable. Veamos que

$$\left| \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \xi) \right| \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \in L^1(\mathbb{R})$$

Así, derivando bajo el signo de la integral se obtiene que

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(f))'(\xi) &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} dx \right) \\ &= \frac{-\xi}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f)(\xi) \end{aligned}$$

Nos queda una EDO de variables separables con condición inicial $\mathcal{F}(f)(0) = 1$, resolviendo la ecuación resulta que

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

(4) (Reescribir) Supongamos que f es indicatriz de algún $E \subseteq \mathbb{R}$ medible, luego,

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx = \int_E e^{-ix\xi} dx$$

Supongamos que $E = I = (a, b)$ donde $a < b$, entonces

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_a^b e^{-ix\xi} dx = -\frac{e^{-ix\xi}}{i\xi} \Big|_a^b = \frac{e^{-ia\xi}}{i\xi} - \frac{e^{-ib\xi}}{i\xi} \xrightarrow{|\xi| \rightarrow +\infty} 0$$

Para una colección finita de intervalos disjuntos de a pares el resultado es inmediato, este se puede extender a una colección numerable de intervalos disjuntos de a pares. Sea $O \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto, luego, se escribe como unión numerable de intervalos disjuntos de a pares, entonces

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_O)(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow +\infty} 0$$

Sea E un conjunto medible, sea $\varepsilon > 0$, existe $G \supseteq E$ abierto tal que $\lambda(G \setminus E) < \varepsilon$, entonces

$$\left| \int_G e^{-ix\xi} dx - \int_E e^{-ix\xi} dx \right| = \left| \int_{G \setminus E} e^{-ix\xi} dx \right| \leq \lambda(G \setminus E) < \varepsilon$$

lo que implica que

$$\left| \lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \int_E e^{-ix\xi} dx \right| \leq \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, se sigue que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \int_E e^{-ix\xi} dx = 0$$

Sea $s \in L^1(\mathbb{R})$ una función simple, el resultado es directo, en efecto,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(s)(\xi) = \lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i} dx = \sum_i a_i \lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \int_{A_i} e^{-ix\xi} dx = 0$$

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces existe $(s_n)_n$ tal que $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ en $L^1(\mathbb{R})$, notemos que

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| - |\mathcal{F}(s_n)(\xi)| \leq |\mathcal{F}(f)(\xi) - \mathcal{F}(s_n)(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - s_n(x)| dx$$

Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{F}(f)(\xi)|$

(5) Veamos que es lineal, sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces por linealidad de la integral, vemos que

$$\mathcal{F}(f + \alpha g)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} (f + \alpha g)(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx + \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} g(x) dx = \mathcal{F}(f)(\xi) + \alpha \mathcal{F}(g)(\xi)$$

Queda ver que \mathcal{F} es continua, sean f_n tales que $f_n \xrightarrow{L^1} f$, tenemos que

$$|\mathcal{F}(f)(\xi) - \mathcal{F}(f_n)(\xi)| = |\mathcal{F}(f - f_n)(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f - f_n| \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto \mathcal{F} es una aplicación lineal continua. Además, dado $\xi \in \mathbb{R}$ se sigue que

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}$$

es decir, $\|\mathcal{F}(f)\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}$.

- (6) No se especifica claramente como debería estar bien definida la convolución. Demostraremos que es finita c.t.p y que dadas $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. En efecto, usando tonelli obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |(f * g)(x)| \, dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) \, dt \right| \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)| \, dt \, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(t)| |g(x-t)| \, dx \, dt = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$$

es decir, $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1} < \infty$, lo que implica que $f * g$ es finita c.t.p. Veamos que $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$, en efecto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} (f * g)(x) \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) \, dt \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(t)g(x-t) \, dt \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(t)g(x-t) \, dx \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-it\xi} f(t)g(x) \, dx \, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} f(t) \, dt \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} g(x) \, dx = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) \end{aligned}$$

1.2. Fórmula de inversión

(1) Sobre la transformada de Fourier

(a)

(b)

(2) **Aplicación a la resolución de EDP.**

(a) Como $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ se tiene que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, luego integrando por partes obtenemos que

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \frac{\partial f}{\partial x}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-ix\xi} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx \right) = i\xi \mathcal{F}(f)(\xi)$$

lo que prueba lo pedido.

(b) Definimos la función $G(x, \xi) = e^{-ix\xi} f(x)$. La función $g_{\xi_0}(x) = G(x, \xi_0)$ es medible, por que es multiplicación de funciones medibles, la derivada parcial de G respecto a ξ existe para todo $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$ y $g_0(x)$ es integrable. Además,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial \xi}(x, \xi) \right| \leq |xf(x)| \in L^1(\mathbb{R})$$

Así, derivando bajo el signo de la integral vemos que

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} xf(x) dx = -i\mathcal{F}(xf)(\xi)$$

lo que concluye el ejercicio.

1.3. La transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$

1.4. La transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Lema 1.1: Sea $g \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces $(f * g)'(x) = (f' * g)(x)$.

Demostración. la función que mapea t a $F(x, t) := f(x - t)g(t)$ es medible para todo $t \in \mathbb{R}$, la derivada parcial de F respecto a x existe para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ y como la convolución esta bien definida, existe x_0 tal que $F(x_0, t)$ es integrable, es decir, $(f * g)(x_0) < \infty$. Además, observamos que

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x - t)g(t) \right| \leq \|f\|_{\infty} |g(t)| \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

Derivando bajo el signo de la integral, se tiene lo pedido

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) = \frac{d}{dx} \int_{\mathbb{R}} f(x - t)g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(x - t)g(t) dt = (f' * g)(x)$$

□

Observación: Iterando el argumento, llegamos a que $(f * g)^{(n)}(x)$ para $(f^{(n)} * g)(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(1) Sean $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, dados $k, l \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l}{\partial x^l}(f + \alpha g) \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l f}{\partial x^l} + \alpha \cdot x^k \frac{\partial^l g}{\partial x^l} \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l f}{\partial x^l} \right| + |\alpha| \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l g}{\partial x^l} \right| < \infty$$

Por lo tanto $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es espacio vectorial.

(2) Notemos que

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= -2xz e^{-zx^2} \\ \phi''(x) &= -2z e^{-zx^2} + 4x^2 z^2 e^{-zx^2} \end{aligned}$$

Luego, inductivamente,

$$\phi^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i e^{-zx^2} \quad \text{donde } a_i \in \mathbb{C}$$

Así, dados $k, l \in \mathbb{N}$

$$\left| x^k \frac{\partial^l \phi}{\partial x^l}(x) \right| = \left| x^k \cdot \sum_{i=0}^l a_i x^i e^{-zx^2} \right| \leq \sum_{i=0}^l |a_i| |x^{i+k}| e^{-Re(z)x^2} \quad \text{entonces} \quad \left| x^k \frac{\partial^l \phi}{\partial x^l}(x) \right| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$$

Donde utilizamos que $Re(z) > 0$. Existe $M > 0$ tal que $\left| x^k \frac{\partial^l \phi}{\partial x^l}(x) \right| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M]$, además, por continuidad y compacidad se sigue que

$$\sup_{x \in [-M, M]} \left| x^k \frac{\partial^l \phi}{\partial x^l} \right| < \infty$$

Por lo tanto $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(3) Sea $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, notemos que para $|x| > 1$ se tiene lo siguiente

$$\left| \frac{x^3}{1+x^2} \right| \geq \frac{|x|^3}{2|x|^2} = \frac{|x|}{2} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \infty$$

Luego $g \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(4) Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, entonces $K := \overline{\varphi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}$ es compacto, además, para $x \in \mathbb{R} \setminus K$ tenemos que

$$x^k \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^l} = 0$$

para todo $k, l \in \mathbb{N}$, ya que $\overline{\left(\frac{\partial^l \varphi}{\partial x^l} \right)^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} \subseteq K$. Luego, por continuidad y compacidad, vemos que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^l} \right| = \sup_{x \in K} \left| x^k \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^l} \right| < \infty$$

Esto prueba que $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq S(\mathbb{R})$. Sean $p \geq 1$ y $f \in S(\mathbb{R})$, definimos

$$C := \sup_{x \in \mathbb{R}} |(1 + |x|)^2 f(x)|$$

que es finito, ya que $f \in S(\mathbb{R})$. En particular, se tiene que $C \geq (1 + |x|)^2 |f(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{C^p}{(1 + |x|)^{2p}} dx = 2C^p \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \frac{1}{(1 + x)^{2p}} dx = 2C^p \int_1^\infty \frac{1}{x^{2p}} dx < \infty$$

donde lo último se debe a que $2p \geq 2$. Si $p = \infty$, como f es continua $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f| < \infty$. Concluimos que $S(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$.

(5) Debemos probar una serie de propiedades del espacio de Schwartz respecto a algunas operaciones:

- Sea $f \in S(\mathbb{R})$. Veamos que $S(\mathbb{R})$ es cerrado bajo derivación, sea $n \in \mathbb{N}$, consideramos $g(x) = f^{(n)}(x)$. Dados $k, l \in \mathbb{N}$ observamos que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l g}{\partial x^l} \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^{n+l} f}{\partial x^{n+l}} \right| < \infty$$

lo que prueba que $g \in S(\mathbb{R})$.

- Sea $g \in S(\mathbb{R})$, afirmamos que $fg \in S(\mathbb{R})$, en efecto, en primer lugar notemos que

$$\frac{\partial^l}{\partial x^l} (fg)(x) = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x) \cdot \frac{\partial^{l-i} g}{\partial x^{l-i}}(x)$$

para todo $l \in \mathbb{N}$, dado $k \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l}{\partial x^l} (fg) \right| \leq \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^i f}{\partial x^i} \right| \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial^{l-i} g}{\partial x^{l-i}} \right| < \infty$$

donde la última desigualdad se debe a que $f, g \in S(\mathbb{R})$.

- Sea $p \in \mathbb{C}[x]$, luego

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l f}{\partial x^l} \cdot p \right| \leq \sum_{j=0}^{\deg(p)} |a_j| \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^{k+j} \frac{\partial^l f}{\partial x^l} \right| < \infty \quad \text{donde} \quad p(x) = \sum_{j=0}^{\deg(p)} a_j x^j$$

usando lo probado, la fórmula anterior para la derivada n -ésima del producto y que la derivada de un polinomio es un polinomio, se obtiene que $fp \in S(\mathbb{R})$.

- Dado $k \in \mathbb{R}$, definimos lo siguiente

$$C_l := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |g(x)| < \infty \quad \text{para } g \in S(\mathbb{R})$$

y para $x, t \in \mathbb{R}$ tenemos la siguiente desigualdad

$$|x|^k \leq (|x - t| + |t|)^k \leq (2 \max\{|x - t|, |t|\})^k \leq 2^k |x - t|^k + 2^k |t|^k$$

Dada $g \in S(\mathbb{R})$, usando lo anterior, para todo $t \in \mathbb{R}$, vemos lo siguiente

$$|x|^k |g(x - t)| \leq 2^k |x - t|^k |g(x - t)| + 2^k |t|^k |g(x - t)| \leq 2^k C_k + 2^k C_0 |t|^k \leq 2^k (C_k + C_0)(1 + |t|)^k$$

Definimos la constante $A_k := 2^k (C_k + C_0)$. Así, dado $g \in S(\mathbb{R})$ obtenemos lo siguiente

$$|x|^k |(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |x|^k |g(x - t)| |f(t)| dt \leq A_k \int_{\mathbb{R}} (1 + |t|)^{k+2} \cdot \frac{|f(t)|}{(1 + |t|)^2} dt \leq A_k C_{k+2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |t|)^2} dt < \infty$$

Donde $C_{k+2} := \sup_{t \in \mathbb{R}} (1 + |t|)^{k+2} |f(t)|$ que es finito por que $f \in S(\mathbb{R})$. Como $g \in S(\mathbb{R})$ entonces $g^{(l)} \in S(\mathbb{R})$, usando el mismo argumento y el lema inicial, concluimos que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l}{\partial x^l} (f * g) \right| < \infty \quad \text{para todo } k, l \in \mathbb{N}$$

- (6) Para $n \in \mathbb{N}$ por lo visto anteriormente resulta que $x^n f(x) \in S(\mathbb{R})$, entonces $x^n f(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$ y además por el problema 1.2.2.b tenemos una derivada l -ésima explícita para \hat{f} . Sean $k, l \in \mathbb{N}$, integrando por partes notamos lo siguiente

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi} \cdot \xi^k \frac{\partial^l \hat{f}}{\partial \xi^l}(\xi) &= \xi^k \cdot (-i)^l \mathcal{F}(x^l f(x))(\xi) = \xi^k (-i)^l \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} x^l f(x) dx \\ &= \xi^k (-i)^l \left(i \cdot \frac{e^{-ix\xi} x^l f(x)}{\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i}{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \frac{\partial}{\partial x} (x^l f(x)) dx \right) \\ &= \xi^{k-1} (-i)^{l+1} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \frac{\partial}{\partial x} (x^l f(x)) dx = \dots = (-i)^{l+k} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \frac{\partial^k}{\partial x^k} (x^l f(x)) dx\end{aligned}$$

Como $S(\mathbb{R})$ es cerrado bajo derivación y multiplicación por un polinomio se tiene que

$$\left| \xi^k \frac{\partial^l \hat{f}}{\partial \xi^l}(\xi) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (x^l f(x)) \right| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left\| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (x^l f(x)) \right\|_{L^1} < \infty$$

lo que prueba que $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$. Donde usamos que $S(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$.

- (7) Debemos probar los siguientes puntos:

- Integrando por partes se tiene que

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f'(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-ix\xi} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx \right) = \frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx = i\xi \hat{f}(\xi)$$

- Derivando bajo el signo de la integral obtenemos que (lo mismo que en 1.2.2.b)

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} (-ix f(x)) dx = \mathcal{F}(-ix f(x))(\xi)$$

- Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces haciendo cambio de variable se tiene que

$$\mathcal{F}(f(x-a))(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x-a) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x+a)\xi} f(x) dx = e^{-ia\xi} \mathcal{F}(f)(\xi)$$

- Dado $a \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\mathcal{F}(e^{iax} f(x))(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(\xi-a)} f(x) dx = \mathcal{F}(f)(\xi-a)$$

2. Transformada de Fourier - Versión discreta

Lema 2.1: Definimos $\varphi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\xi}$ para $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $\mathcal{B} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2([0, 2\pi))$.

Demostración. En primer lugar probaremos que \mathcal{B} es un conjunto ortonormal, sean $n, m \in \mathbb{N}$, luego

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\xi} e^{in\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\xi} d\xi$$

si $n = m$ entonces $\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = 1$, pero si $n \neq m$ se tiene que $\gamma = e^{i(n-m)\xi}$ es una parametrización de \mathbb{S}^1 , así por el teorema integral de cauchy $\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = 0$.

Basta probar que $\text{span } \mathcal{B}$ es denso en el conjunto de las funciones continuas soporte compacto. Sea $K \subseteq [0, 2\pi)$ un conjunto compacto, probaremos que $\text{span } \mathcal{B}$ es denso en $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ usando Stone-Weierstras. Claramente $\text{span } \mathcal{B}$ es una subálgebra de $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ en la cual $\bar{f} \in \text{span } \mathcal{B}$ si $f \in \text{span } \mathcal{B}$. Veamos que separa puntos, sean $x, y \in K$ distintos, consideramos la función

$$f(\xi) = e^{-ix} e^{i\xi} \in \text{span } \mathcal{B}$$

como $x, y \in [0, 2\pi)$, entonces $y - x < 2\pi$ lo que implica que $f(x) \neq f(y)$. Por lo tanto $\text{span } \mathcal{B}$ es denso $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ según la norma uniforme. Sea $f \in \mathcal{C}_c([0, 2\pi), \mathbb{C})$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $g \in \text{span } \mathcal{B}$ tal que

$$\|f - g\|_{\infty} < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{entonces} \quad \|f - g\|_{L^2}^2 = \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \leq 2\pi \|f - g\|_{\infty}^2 < \varepsilon$$

lo que concluye la demostración del lema. □

Observación: (Pendiente - intercambiar integral con suma)

(1) Basta probar que \mathcal{F} es isometría con inversa por la derecha. Veamos lo primero, sea $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$, entonces

$$\|\mathcal{F}(\psi)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\xi} \psi(n) \right\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|e^{-in\xi} \psi(n)\|_{L^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\psi(n)|^2 = \|\psi\|_{\ell^2}^2$$

En la segunda igualdad usamos teorema de pitagoras y que $\sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{B}$ es conjunto ortogonal, por lo tanto \mathcal{F} es isometría. Queda ver el segundo punto, sea $f \in L^2([0, 2\pi))$, entonces por el lema

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \quad \text{esta identidad se usara en múltiples ocasiones}$$

luego,

$$\begin{aligned} (\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1})(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-inx} \int_0^{2\pi} e^{in\xi} f(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-inx} \int_0^{2\pi} e^{in\xi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{a_m}{\sqrt{2\pi}} e^{im\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{-inx} \int_0^{2\pi} e^{in\xi} e^{im\xi} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2\pi \cdot a_{-n} e^{-inx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx} = f(x) \end{aligned}$$

Lo que prueba lo pedido. Por otro lado, la identidad de Plancherel es inmediata del hecho de que \mathcal{F} es isometría.

(2) Sea $f \in L^2([0, 2\pi))$, entonces

$$\begin{aligned} (\mathcal{F} \Delta \mathcal{F}^{-1})(f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-inx} (\Delta \mathcal{F}^{-1})(f)(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-inx} (\mathcal{F}^{-1}(f)(n+1) + \mathcal{F}^{-1}(f)(n-1) - 2\mathcal{F}^{-1}(f)(n)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-inx} \left(\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\xi} f(\xi) d\xi + \int_0^{2\pi} e^{i(n-1)\xi} f(\xi) d\xi - 2 \int_0^{2\pi} e^{in\xi} f(\xi) d\xi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-inx} \left(\int_0^{2\pi} e^{in\xi} f(\xi) [e^{i\xi} + e^{-i\xi} - 2] d\xi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-inx} \left(\int_0^{2\pi} e^{in\xi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{a_m}{\sqrt{2\pi}} e^{im\xi} [e^{i\xi} + e^{-i\xi} - 2] d\xi \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-inx} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \left(\int_0^{2\pi} e^{i(n+m+1)\xi} + e^{i(n+m-1)\xi} - 2e^{i(n+m)\xi} d\xi \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-inx} \cdot 2\pi(a_{-n-1} + a_{-n+1} - 2a_{-n}) = (e^{ix} + e^{-ix} - 2)f(x) = (2\cos(x) - 2)f(x) \end{aligned}$$

(3) Notemos que

$$\begin{aligned} (S\mathcal{F}^{-1})(f)(n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{i(n-1)\xi} f(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{i(n-1)\xi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{a_m}{\sqrt{2\pi}} e^{im\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \int_0^{2\pi} e^{i(n+m-1)\xi} d\xi = a_{-n+1} \end{aligned}$$

entonces

$$(\mathcal{F} S \mathcal{F}^{-1})(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-inx} a_{-n+1} = e^{-ix} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} = e^{-ix} f(x)$$

Concluimos que S es unitariamente equivalente al operador de multiplicación \mathcal{M}_h , donde $h(x) = e^{-ix}$.