



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: PEDRO GASPAR – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

Geometría Diferencial - MAT2860

Apuntes

06 de Marzo de 2025

Índice

1. Introducción	3
1.1. Evaluaciones	3
2. Curvas en \mathbb{R}^n	4
2.1. Curvas parametrizadas	4
2.2. Longitud y Parametro de Arco	4
2.3. Curvatura de un Curva Regular (Teoría Local de Curvas)	6
2.4. Teoría Local de Curvas en el Espacio	8

1. Introducción

1.1. Evaluaciones

Habrán tres interrogaciones (I1, I2, I3) cada una vale un 25 % y un examen (EX) que vale un 25 %. Las fechas son 14 de abril, 19 de Mayo, 16 de Junio y 3 de Julio respectivamente.

2. Curvas en \mathbb{R}^n

2.1. Curvas parametrizadas

Consideramos $\mathbb{R}^n := \{v = (v_1, \dots, v_n) : v_i \in \mathbb{R}\}$. Un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión n , con el producto escalar dado por

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i \quad \text{con } v, w \in \mathbb{R}^n$$

Definición 0.1. Una curva parametrizada en \mathbb{R}^n es una función continua $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con I un intervalo abierto. Escribimos $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$.

Diremos que α es diferenciable si sus funciones coordenadas $\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty$. En tal caso, el vector $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t))$ se llama vector tangente a la curva α en $t \in I$

Definición 0.2. La traza de una curva parametrizada $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es $\alpha(I) = \text{im}(\alpha)$.

Ejemplos

- a) Si $p, v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$, la curva parametrizada $\alpha(t) = tv + p$ con $t \in \mathbb{R}$ que describe una recta que pasa por $p = \alpha(0)$ con vector tangente $\alpha'(t) = v$.
- b) Sea $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\beta(t) := t^3 \cdot \vec{e}_1$ es una curva parametrizada diferenciable con $\beta'(t) = 3t^2 \cdot \vec{e}_1$.
- c) Sea $p \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$ consideramos $\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t)) + p$, una curva parametrizada diferenciable cuya traza es $\alpha(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y) - p| = r\}$
- d) Sean $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$ con $t \in \mathbb{R}$ se llama una helice circular. Además $\alpha'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b)$.
- e) Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ es una curva parametrizada diferenciable con $\alpha(-2) = \alpha(2) = 0$, pero $\alpha'(-2) \neq \alpha'(2)$.

2.2. Longitud y Parametro de Arco

Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada, consideremos $[a, b] \subseteq I$. Buscamos medir la longitud de $\alpha([a, b])$. Una estrategia, dada una partición $P := \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ de $[a, b]$ calculamos

$$\sum_{i=1}^n |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| =: L_a^b(\alpha, P)$$

esta suma corresponde a la longitud de una curva poligonal que pasa por los puntos $\alpha(t_i)$. Si $Q \supseteq P$ es otra partición de $[a, b]$, entonces $L_a^b(\alpha, Q) \geq L_a^b(\alpha, P)$.

Definición 0.3. La longitud de una curva parametrizada α sobre $[a, b] \subseteq I$ es

$$L_a^b(\alpha) = \sup\{L_a^b(\alpha, P) : P \text{ es partición de } [a, b]\}.$$

Si α es diferenciable sobre $[a, b]$ y hacemos $|P| = \max\{t_i - t_{i-1}\}$ muy pequeña, esperaríamos que $|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| \approx |\alpha'(\bar{t}_i)| (t_i - t_{i-1})$.

Proposición 0.1. Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable sobre $[a, b] \subseteq I$, entonces

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

(Para la demostración revisar Montiel-Ros, página 5)

Corolario 0.1. Tenemos que $|\alpha(a) - \alpha(b)| \leq L_a^b(\alpha)$.

Corolario 0.2. Si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cumple $|DF(p)v| = |v|$ para todo $p, v \in \mathbb{R}^n$, entonces $L_a^b(F \circ \alpha) = L_a^b(\alpha)$.

De hecho, $F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable, con

$$|(F \circ \alpha)'(t)| = |DF(\alpha(t))\alpha'(t)| = |\alpha'(t)|$$

para todo $t \in I$, basta con integrar sobre $[a, b]$. Si $p_0 \in \mathbb{R}^n$ y $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal ortogonal, esto es, $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$, entonces $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $F(p) = Ap + p_0$ cumple

$$DF(p)v = \frac{d}{dt}F(p + tv)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(A(p + tv) + p_0)\Big|_{t=0} = Av$$

Por lo tanto $|DF(p)v| = |Av| = |v|$.

Corolario 0.3. Si $h : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ es un difeomorfismo y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una curva parametrizada diferenciable, entonces

$$L_a^b(\alpha \circ h) = L_c^d(\alpha)$$

donde $h([a, b]) = [c, d]$ para todo $[a, b] \subseteq J$.

Por regla de la cadena tenemos que $(\alpha \circ h)'(t) = h'(t)\alpha'(h(t))$. La curva $\alpha \circ h$ tiene la misma traza que α , en efecto $(\alpha \circ h)(J) = \alpha(h(J)) = \alpha(I)$. Decimos que $\alpha \circ h$ es una reparametrización de la curva α .

Demostración. Como h y h^{-1} son diferenciables, se tiene que $h'(t) \neq 0$ para todo $t \in J$. Veamos que

$$1 = \frac{d}{dt}(t) = (h^{-1} \circ h)'(t) = (h^{-1})'(h(t))h'(t)$$

Luego como J es un intervalo y h' es continua, tenemos que $h' < 0$ o $h' > 0$.

- Si $h' < 0$, entonces $h(a) = c$, $h(b) = d$,

$$\int_a^b |(\alpha \circ h)'(t)| dt = \int_a^b |\alpha'(h(t))| |h'(t)| dt = \int_c^d |\alpha'(s)| ds = L_c^d(\alpha)$$

- Si $h' > 0$, entonces $h(b) = c$, $h(a) = d$,

$$\int_a^b |(\alpha \circ h)'(t)| dt = \int_a^b |\alpha'(h(t))| |h'(t)| dt = \int_d^c -|\alpha'(s)| ds = \int_c^d |\alpha'(s)| ds = L_c^d(\alpha)$$

Definición 0.4. Se dice que una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Si además $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$ se dice que α está parametrizada por el arco.

Una curva α parametrizada por el arco tienen las siguientes propiedades

- $\alpha'(t)$ es ortogonal a $\alpha''(t)$ para todo $t \in I$, en efecto

$$0 = \frac{d}{dt}(|\alpha'(t)|^2) = \frac{d}{dt}(\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle) = 2 \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle$$

- Se tiene que $L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt = b - a$.

Teorema 1. Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada diferenciable regular, entonces α admite una parametrización por arco. Concretamente, si $t_0 \in I$ y definimos $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$s(t) := \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$$

entonces s es un difeomorfismo sobre $J \subseteq \mathbb{R}$ y $\alpha \circ s^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ está parametrizada por el arco.

Demostración. Por TFC, sabemos que s es diferenciable, mas aun, $s'(t) = |\alpha'(t)|$ para todo $t \in I$. Luego, $s' > 0$, es decir, s es creciente y $s(I) = J$ es un intervalo abierto. Además, por teorema de la función inversa, vemos que

$$(s^{-1})'(r) = \frac{1}{s'(s^{-1}(r))} = \frac{1}{|\alpha'(s^{-1}(r))|} \quad \forall r \in J$$

Por lo tanto $|(\alpha \circ s^{-1})'(r)| = 1$ para todo $r \in J$, luego $\alpha \circ s^{-1}$ esta parametrizada por el arco.

Ejemplos

a) Sea $\alpha(t) = tv + p_0$ con $p_0, v \in \mathbb{R}^n$ y $v \neq 0$. Como $\alpha'(t) = v$, tenemos

$$s(t) = \int_0^t |v| dx = t |v|$$

entonces $\alpha \circ s^{-1}(x) = x \cdot \frac{v}{|v|} + p_0$ es una parametrización por el arco de α .

b) Consideremos $\alpha(t) = (rcost, rsent) + p_0$ con $p_0 \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$. Como $\alpha'(t) = (-rsent, rcost)$ entonces $|\alpha'(t)| = r$, tenemos que

$$s(t) = \int_0^t r dx = rt$$

y $(\alpha \circ s^{-1})(x) = (rcos(\frac{x}{r}), rsen(\frac{x}{r})) + p_0$ es una curva parametrizada por el arco para α .

c) Definimos $\alpha(t) = (acost, asent, bt)$ con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ una curva parametrizada por el arco es

$$(\alpha \circ s^{-1})(x) = \left(acos\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), asen\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

2.3. Curvatura de un Curva Regular (Teoría Local de Curvas)

Notación: Notamos por \mathcal{J} a la función $\mathcal{J} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\mathcal{J}(x, y) = (-y, x)$ que cumple lo siguientes

- \mathcal{J} es una transformación lineal ortogonal.
- $\langle u, \mathcal{J}u \rangle = 0$ y $\mathcal{J}(\mathcal{J}u) = -u$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$.
- Si $|u| = 1$, entonces $\{u, \mathcal{J}u\}$ es una base ortonormal positiva de \mathbb{R}^2 .
- Si $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal ortogonal, entonces $\mathcal{J}A = \det(A)A\mathcal{J}$.

Nuestro objetivo es asociar a una curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una cantidad geometrica, para ello queremos definir una función $K(= K_\alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- a) K es invariante bajo movimientos rigidos.
- b) K es invariante por parametrizaciones.
- c) $K \equiv 0$ si y solo si α corresponde a un segmento de recta.

Si tenemos $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por el arco, definimos por $T : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(s) := \alpha'(s)$ y $N : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $N(s) := \mathcal{J}T(s)$. Recordemos que $\{T(s), N(s)\}$ es una base ortonormal en \mathbb{R}^2 para cada $s \in I$ (Tiedro de Frenet).

Notemos que $N(s) \perp T(s)$ y $T'(s) \perp T(s)$, luego, existe un $k(s) \in \mathbb{R}$ tal que $T'(s) = K(s)N(s)$. La función $K_\alpha = K : I \rightarrow \mathbb{R}$ se llama la curva de α . Tomando el producto con $N(s)$,

$$K(s) = \langle K(s)N(s), N(s) \rangle$$

Por lo tanto $K(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$. Por otro lado, observemos que

$$N'(s) = \frac{d}{ds}(\mathcal{J}T(s)) = \mathcal{J} \frac{d}{ds}(T(s)) = \mathcal{J}(K(s)N(s)) = \mathcal{J}(K(s)\mathcal{J}T(s)) = -K(s)T(s)$$

Proposición 1.1. Para una curva parametrizada por el arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ vale que $T' = KN$ y $N' = -KT$.

Ejemplos:

a) Una recta parametrizada por el arco $\alpha(s) := s \cdot \frac{v}{|v|} + p_0$ con $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, tenemos que

$$T(s) = \frac{v}{|v|}, N(s) = \frac{\mathcal{J}v}{|v|} = \frac{\mathcal{J}v}{|\mathcal{J}v|} \text{ y } K(s) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

b) Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ esta parametrizada y $K \equiv 0$, entonces $T'(s) = 0$ para todo $s \in I$, es decir, $\alpha''(s) = 0$ para todo $s \in I$. Integrando dos veces concluimos que cada coordenada de α es una función lineal, luego α es un segmento de recta.

c) Sea $\alpha(s) := (r \cos(\frac{s}{r}), r \sin(\frac{s}{r})) + p_0$, entonces

$$T(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right) \text{ y } N(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \right)$$

Notemos que

$$T'(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right) = \frac{1}{r} N(s)$$

Por lo tanto $K(s) = \frac{1}{r} \langle N(s), N(s) \rangle = \frac{1}{r}$.

Consideremos ahora una curva regular $\beta : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$ y una reparametrización $\alpha = \beta \circ h : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por el arco, donde $h : I \rightarrow \tilde{I}$ es un difeomorfismo con $h' > 0$. Con esto

$$|\beta'(t)| = |(\beta \circ h \circ h^{-1})'(t)| = |(\alpha \circ h^{-1})'(t)| = (h^{-1})'(t)$$

Así, definimos el diedro de Frenet de la curva α por

$$T_\beta(t) := \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = \frac{(\alpha \circ h^{-1})'(t)}{|(\alpha \circ h^{-1})'(t)|} = \frac{\alpha'(h^{-1}(t))h^{-1}(t)}{|\alpha'(h^{-1}(t))h^{-1}(t)|} = T_\alpha(h^{-1}(t))$$

Por otro lado

$$N_\beta = \mathcal{J}T_\beta(t) = \mathcal{J}T_\alpha(h^{-1}(t)) = N_\alpha(h^{-1}(t))$$

y definimos la curvatura de la curva β por

$$K_\beta(t) := K_\alpha(h^{-1}(t)), t \in \tilde{I}$$

Como $\beta'(t) = |\beta'(t)| T_\alpha(h^{-1}(t))$ se tiene que

$$\beta'' = (|\beta'|)' T_\alpha \circ h^{-1} + |\beta'|^2 (T'_\alpha \circ h^{-1})$$

y además $N_\alpha \circ h^{-1} = \mathcal{J}T_\beta = \frac{\mathcal{J}\beta'}{|\beta'|}$ se sigue que

$$\frac{\langle \beta'', \mathcal{J}\beta' \rangle}{|\beta'|} = \left\langle (|\beta'|)' T_\alpha \circ h^{-1} + |\beta'|^2 (T'_\alpha \circ h^{-1}), N_\alpha \circ h^{-1} \right\rangle = |\beta'|^2 \langle T'_\alpha \circ h^{-1}, N_\alpha \circ h^{-1} \rangle = |\beta'|^2 K_\alpha \circ h^{-1}$$

Concluimos que $K_\beta = \frac{\langle \beta'', \mathcal{J}\beta' \rangle}{|\beta'|^3}$.

Proposición 1.2. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular, entonces

a) Si $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$ es un difeomorfismo entonces $K_{\alpha \circ \phi} = \text{sgn}(\phi') K_\alpha \circ \phi$.

b) Si $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un movimiento rigido, entonces $K_{F \circ \alpha} = (\det DF) K_\alpha$.

Demostración. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular

a) Como $(\alpha \circ \phi)'(t) = \phi'(t)\alpha'(\phi(t))$, se sigue que $|(\alpha \circ \phi)'(t)| = |\phi'(t)| |\alpha'(\phi(t))|$, escrito de otro modo

$$|(\alpha \circ \phi)| = \text{sgn}(\phi') \cdot \phi' |\alpha' \circ \phi|$$

Luego

$$\begin{aligned} K_{\alpha \circ \phi} &= \frac{\langle (\alpha \circ \phi)'', \mathcal{J}(\alpha \circ \phi)' \rangle}{|(\alpha \circ \phi)'|^3} = \frac{\langle \phi''(\alpha' \circ \phi) + (\phi')^2 \alpha'' \circ \phi, \phi' \mathcal{J}(\alpha' \circ \phi) \rangle}{\text{sgn}(\phi')(\phi')^3 |\alpha' \circ \phi|^3} \\ &= \frac{(\phi')^3 \langle \alpha'' \circ \phi, \mathcal{J} \alpha' \circ \phi \rangle}{(\phi')^3 |\alpha' \circ \phi|^3} \text{sgn}(\phi') = \text{sgn}(\phi') K_\alpha \circ \phi \end{aligned}$$

b) Sabemos que $F(p) = Ap + p_0$, entonces $DF = A$. Luego,

$$\begin{aligned} \langle (F \circ \alpha)'', \mathcal{J}(F \circ \alpha)' \rangle &= \langle (DF(\alpha)\alpha')', \mathcal{J}(DF(\alpha)\alpha') \rangle = \langle (A\alpha')', \mathcal{J}(A\alpha') \rangle \\ &= \langle A\alpha'', (\det A)A\mathcal{J}\alpha' \rangle = \det A \langle \alpha'', \mathcal{J}\alpha' \rangle \end{aligned}$$

Además $|(F \circ \alpha)'| = |A\alpha'| = |\alpha'|$. Juntando lo anterior vemos que

$$K_{F \circ \alpha} = \frac{\langle (F \circ \alpha)'', \mathcal{J}(F \circ \alpha)' \rangle}{|(F \circ \alpha)'|^3} = \det A \cdot K_\alpha$$

Proposición 1.3. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por el arco. Supongamos que existe una función diferenciable $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$. Entonces $K_\alpha = \frac{d\theta}{ds}$.

Demostración. Recordemos que

$$K_\alpha = \langle T'_\alpha, \mathcal{J}T_\alpha \rangle = \left\langle \left(-\frac{d\theta}{ds} \sin\theta, \frac{d\theta}{ds} \cos\theta \right), (-\sin\theta, \cos\theta) \right\rangle = \frac{d\theta}{ds} |(-\sin\theta, \cos\theta)|^2 = \frac{d\theta}{ds}$$

Teorema 2. Sea $K : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces existe una única curva parametrizada por el arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, salvo por movimientos rígidos, tal que $K_\alpha = K$.

2.4. Teoría Local de Curvas en el Espacio

Definición 2.1. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco. La curvatura de α en $s \in I$ es

$$K_\alpha := |T'(s)|$$

Observación: Para curvas en \mathbb{R}^3 , $K_\alpha \geq 0$. Además, $K_\alpha \equiv 0$ si y solo si α es un segmento de recta.

Definición 2.2. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco, tal que $K_\alpha > 0$. Definimos

$$N(s) := \frac{T'(s)}{|T'(s)|}$$

Observación: Como $T(s) \perp T'(s)$, pues $|T| = 1$, esta definición se condice con el caso en \mathbb{R}^2 , además de manera directa, obtenemos que $K_\alpha N(s) = T'(s)$.

Definición 2.3. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco. Definimos el vector binormal de α en $s \in I$ por

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

Observación: Por definición del producto cruz el conjunto $\{T, N, B\}$ es una base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 para todo $s \in I$ llamada el triedro de Frenet de α en $s \in I$.

Notemos que $B'(s) = \frac{d}{ds}(T(s) \times N(s)) = T'(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s) = T(s) \times N'(s)$. Además, $|B| = |T| |N| = 1$ y por lo tanto $B' \perp B$, por otro lado $\langle B', T \rangle = \langle T \times N', T \rangle = 0$, osea $B' \perp T$. Por lo tanto, existe $\tau(s) \in I$ tal que

$$B'(s) = \tau(s)N(s)$$

Se dice que $\tau(s) =: \tau_\alpha(s)$ es la torsión de α en $s \in I$. Finalmente, como $N' \perp N$, tenemos que

$$N'(s) = aT(s) + bB(s)$$

donde

$$\begin{aligned} a \langle T, T \rangle &= \langle N', T \rangle = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle - \langle N, T' \rangle \\ &= \frac{d}{ds} \langle N, T \rangle - \langle N, T' \rangle = -\langle N, KN \rangle = -K \end{aligned}$$

y similarmente obtenemos que $b = \langle N', B \rangle = -\tau(s)$.

Proposición 2.1. *Ecuaciones de Frenet-Serret*

- $T'(s) = K(s)N(s)$
- $N'(s) = -K(s)T(s) - \tau(s)B(s)$
- $B'(s) = \tau(s)N(s)$

Ejemplos:

- a) Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco. Supongamos que $\alpha(I) \subseteq P$ con P un plano. Podemos describir el plano con la ecuación $\langle x - p_0, u \rangle = 0$, donde $p_0, u \in \mathbb{R}^3$ con u unitario y perpendicular al plano. Entonces $\langle \alpha(s) - p_0, u \rangle = 0$ para todo $s \in I$, derivando vemos que

$$\langle \alpha'(s), u \rangle = \langle T(s), u \rangle = 0 \quad \forall s \in I$$

En ese caso, $K(s)$ es el valor absoluto de la curvatura de α como una curva plana. Supongamos que $K(s) > 0$ para todo $s \in I$. Entonces

$$0 = \frac{d}{ds} \langle T, u \rangle = \langle T', u \rangle = K(s) \langle N, u \rangle$$

lo que implica que $N \perp u$ para todo $s \in I$. Luego, $B(s) = \pm u$ para todo $s \in I$, se sigue que $\tau(s) = \langle B', N \rangle = 0$.

- b) Supongamos que α es una curva parametrizada por el arco tal que $\tau_\alpha \equiv 0$, entonces $B' = \tau \cdot N = 0$ para todo $s \in I$ y por lo tanto $B = u$, con $u \in \mathbb{R}^3$ y $|u| = 1$, así $T \times N = u$ para todo $s \in I$.

Ahora, usando las ecuaciones de frenet vemos que $T \perp u$ y $N \perp u$ para todo $s \in I$ y concluimos que

$$\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), u \rangle = \left\langle \int_{s_0}^s T(x) dx, u \right\rangle = \int_{s_0}^s \langle T(x), u \rangle dx = 0 \quad \forall s \in I$$

Proposición 2.2. *Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco, $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineal, ortogonal y positiva. Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $F(p) = Ap + p_0$. Entonces*

$$\begin{aligned} K_{F \circ \alpha} &= K_\alpha & \tau_{F \circ \alpha} &= \tau_\alpha \\ T_{F \circ \alpha} &= AT_\alpha & N_{F \circ \alpha} &= AN_\alpha & B_{F \circ \alpha} &= AB_\alpha \end{aligned}$$

Podemos extender las definiciones de curvatura, torsión y del tiedro de frenet para curvas regulares $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$K_\beta(t) := K_\alpha(h^{-1}(t))$$

donde $\alpha = \beta \circ h$ es una parametrización por el arco, con h difeomorfismo, $h' > 0$ y $K_\beta > 0$. Se cumple lo siguiente

- $T_\beta(t) = T_\alpha(h^{-1}(t))$
- $N_\beta(t) = N_\alpha(h^{-1}(t))$
- $B_\beta(t) = B_\alpha(h^{-1}(t))$

$$\blacksquare \tau_\beta(t) = \tau_\alpha(h^{-1}(t))$$

Proposición 2.3. Sea $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular, entonces

$$a) \ K_\beta = \frac{|\beta' \times \beta''|}{|\beta'|^3}$$

$$b) \ \tau_\beta = \frac{-\det(\beta', \beta'', \beta''')}{|\beta' \times \beta''|^2} = -\frac{\langle \beta', \beta'' \times \beta''' \rangle}{|\beta' \times \beta''|^2}$$

$$c) \ T_\beta = \frac{\beta'}{|\beta'|}$$

$$d) \ B_\beta = \frac{\beta' \times \beta''}{|\beta' \times \beta''|}$$

$$e) \ N_\beta = \frac{|\beta'|^2 \beta'' - \langle \beta', \beta'' \rangle \beta'}{|\beta'|^2 \beta'' - \langle \beta', \beta'' \rangle \beta'|}$$