



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: GIANCARLO URZÚA – AYUDANTE: BENJAMÍN MATELUNA

Introducción a la Geometría - MAT1304

Ayudantía 19

20 de octubre de 2025

Problema 1. Halle el máximo común divisor de los siguientes pares de polinomios y halle una combinación del lema de Bézout en cada caso

(1) $x^4 + x^3 + x^2 + 1$ y $x^3 + 1$ en $\mathbb{R}[x]$.

(2) $x^3 + 2x - i$ y $x^2 + 1$ en $\mathbb{C}[x]$.

Definición: Sea $F \in \mathbb{C}[x, y]$, se dice homogéneo si para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Problema 2. Demuestre que todo polinomio homogéneo en $\mathbb{C}[x, y]$ se puede escribir como el producto de polinomios lineales homogéneos.

Problema 3. Demuestre que $y^2 - x^3$ es irreducible en $\mathbb{C}[x, y]$.

Problema 4. Sean $f, g \in k[x, y]$, demuestre que

(1) El conjunto de ceros de fg es igual a la unión del conjunto de ceros de f y g .

(2) Si $k = \mathbb{R}$, el conjunto de ceros de $f^2 + g^2$ es igual a la intersección del conjunto de ceros de f y g .

Problema 5. Halle el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan del origen y $(-1, 1)$. Después, grafíquelo en el plano.