



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: GREGORIO MORENO – ESTUDIANTE: BENJAMÍN MATELUNA

Teoría de Integración - MAT2534

Tarea 3

06 de junio de 2025

Problema 1

a) Sea $t > 0$, notemos que $e^{-tx^2} < e^{-tx}$ para $x > 1$, es positiva y continua, luego

$$I = \int_0^\infty e^{-tx^2} dx = \int_{(0,\infty)} e^{-tx^2} d\lambda(x)$$

entonces

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{(0,\infty)} e^{-tx^2} d\lambda(x) \right) \left(\int_{(0,\infty)} e^{-ty^2} d\lambda(y) \right) = \int_{(0,\infty)} e^{-ty^2} \left(\int_{(0,\infty)} e^{-tx^2} d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(0,\infty)} e^{-t(x^2+y^2)} d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \end{aligned}$$

Como la función $e^{-t(x^2+y^2)}$ es continua y positiva, por tonelli, vemos que

$$I^2 = \int_{(0,\infty)^2} e^{-t(x^2+y^2)} (\lambda \otimes \lambda) dx dy$$

Consideremos el cambio de variables $x = r \cos(\theta)$ y $y = r \sin(\theta)$ con $r \in (0, \infty)$ y $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ con determinante jacobiano igual a r , luego, por cambio de variables se sigue que

$$I^2 = \int_{(0,\infty)^2} e^{-t(x^2+y^2)} (\lambda \otimes \lambda) dx dy = \int_{(0,\frac{\pi}{2}) \times (0,\infty)} r e^{-tr^2} (\lambda \otimes \lambda) d\theta dr$$

por tonelli, vemos que

$$I^2 = \int_{(0,\frac{\pi}{2})} \left(\int_{(0,\infty)} r e^{-tr^2} dr \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\infty r e^{-tr^2} dr \right) d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty r e^{-tr^2} dr$$

donde la segunda igualdad se debe a la continuidad y positividad. Utilizando el cambio de variable $u = tr^2$, observamos que

$$\int_0^\infty r e^{-tr^2} dr = \frac{1}{2t} \int_0^\infty e^{-u} du = \frac{1}{2t} - e^{-u} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2t} < \infty$$

De este modo,

$$I^2 = \frac{\pi}{4t}$$

concluimos que $g(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}}$.

- b) Consideremos la función $F(x, t) = e^{-x^2} \cos(tx)$. Dado $t_0 \in \mathbb{R}$ vemos que la función $F(x, t_0)$ es continua y por ende medible, además, $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Para $t = 0$ notamos que

$$f(0) = \int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

y por lo tanto $f(x, 0)$ es integrable. Por otro lado,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| = \left| -xe^{-x^2} \sin(tx) \right| \leq |x| e^{-x^2} =: g$$

es claro que g es una función integrable, basta notar que su integral impropia es finita. Luego, la función f es diferenciable y como $|F(x, t)| \leq e^{-x^2}$ se tiene que

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(tx) dx \right) = \frac{d}{dt} \left(\int_{(0, \infty)} e^{-x^2} \cos(tx) d\lambda(x) \right) = \int_{(0, \infty)} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-x^2} \cos(tx)) d\lambda(x) \\ &= \int_{(0, \infty)} -xe^2 \sin(tx) d\lambda(x) = \int_0^\infty -xe^2 \sin(tx) dx \\ &= \frac{e^{-x^2}}{2} \sin(tx) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{t}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(tx) dx = \frac{t}{2} f(t) \end{aligned}$$

Tenemos una EDO de variables separables $f' = -\frac{t}{2}f$ con condición inicial $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Luego

$$\int \frac{df}{f} = \int -\frac{t}{2} dt$$

se sigue que

$$\log(f) = -\frac{t^2}{4} + C \quad \text{entonces} \quad f = e^{-\frac{t^2}{4} + C}$$

evaluando en la condición inicial vemos que

$$f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{t^2}{4}}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

- c) Sean $0 < a < b < \infty$. Notemos que

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-tx} dt$$

La función e^{-tx} es continua y positiva, por tonelli vemos que

$$\begin{aligned} \int_{(0, \infty) \times (a, b)} e^{-tx} dt dx &= \int_{(a, b)} \int_{(0, \infty)} e^{-tx} dx dt = \int_a^b \int_0^\infty e^{-tx} dx dt = \int_a^b \int_0^\infty -\frac{e^u}{t} du dt \\ &= \int_a^b -\frac{1}{t} e^u \Big|_0^{-\infty} dt = \int_a^b \frac{1}{t} dt = \log \left(\frac{b}{a} \right) \end{aligned}$$

la segunda igualdad se debe a la continuidad y que la función e^{-tx} es positiva. Por otro lado tenemos que

$$\int_{(0, \infty) \times (a, b)} e^{-tx} dt dx = \int_{(0, \infty)} \int_{(a, b)} e^{-tx} dt dx = \int_0^\infty \int_a^b e^{-tx} dt dx = h(a, b)$$

Por lo tanto $h(a, b) = \log \left(\frac{b}{a} \right)$.

Problema 2

- a)
- b)

Problema 3

En primer lugar, notemos que

$$I = \int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy} (\lambda \otimes \lambda)(dxdy) = \int_{[0,1]^2} \sum_{n \geq 1} (xy)^{n-1} (\lambda \otimes \lambda)(dxdy)$$

como xy es positiva en $[0,1]^2$, por convergencia monótona y tonelli se sigue que

$$I = \sum_{n \geq 1} \int_{[0,1]^2} (xy)^{n-1} (\lambda \otimes \lambda)(dxdy) = \sum_{n \geq 1} \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} x^{n-1} y^{n-1} dxdy = \sum_{n \geq 1} \left(\int_{[0,1]} x^{n-1} dx \right) \left(\int_{[0,1]} y^{n-1} dy \right)$$

la última igualdad se debe a la independencia entre las variables. Por continuidad, vemos que

$$I = \sum_{n \geq 1} \left(\int_0^1 x^{n-1} dx \right) \left(\int_0^1 y^{n-1} dy \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

Por otro lado, consideramos el cambio de variable $x = u + v$ e $y = u - v$ con determinante jacobiano igual a 2, luego la nueva región de integración \mathcal{R} esta determinado por

$$\mathcal{R} := \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq \frac{1}{2}, -u \leq v \leq u \right\} \cup \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq u \leq 1, 1+u \leq v \leq 1-u \right\}$$

Así,

$$I = \int_{\mathcal{R}} \frac{2}{1 - (u+v)(u-v)} (\lambda \otimes \lambda)(dxdy) = 2 \int_{\mathcal{R}} \frac{1}{1 - u^2 + v^2} (\lambda \otimes \lambda)(dxdy)$$

Diremos que $\mathcal{R}_+ := \mathcal{R} \cap \{v \geq 0\}$. Por simetría respecto a v , vemos que

$$I = 4 \int_{\mathcal{R}_+} \frac{1}{1 - u^2 + v^2} (\lambda \otimes \lambda)(dxdy) = 4 \int_{[0,1] \times (R_+)^2(u)} \frac{1}{1 - u^2 + v^2} (\lambda \otimes \lambda)(dxdy)$$

donde $(R_+)^2(u)$ es la sección de R_+ respecto de u . Notemos que en la última igualdad se utilizo que la función es continua y positiva. Así, por tonelli se sigue que

$$I = 4 \int_{[0,1]} \int_{(R_+)^2(u)} \frac{1}{1 - u^2 + v^2} d\lambda(v) d\lambda(u) = 4 \int_0^1 \int_0^{f(u)} \frac{1}{1 - u^2 + v^2} dv du$$

con f función que describe el contorno superior de \mathcal{R}_+ en función de u . Luego

$$I = 4 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^u \frac{1}{1 - u^2 + v^2} dv du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-u} \frac{1}{1 - u^2 + v^2} dv du \right)$$

consideramos $a = \sqrt{1 - u^2}$ que esta bien definido pues $0 \leq u \leq 1$, así

$$\begin{aligned} I &= 4 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^u \frac{1}{a^2 + v^2} dv du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-u} \frac{1}{a^2 + v^2} dv du \right) \\ &= 4 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{v}{a}\right) \Big|_0^u du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{v}{a}\right) \Big|_0^{1-u} du \right) \\ &= 4 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du \right) = 4(I_1 + I_2) \end{aligned}$$

Para I_1 integramos por partes, en efecto

$$\begin{aligned} I_1 &= \arcsen(u) \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsen(u) \frac{1}{1+\frac{u^2}{1-u^2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{1}{1-u^2} du \\ &= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsen(u) \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{\pi^2}{36} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt = \frac{\pi^2}{36} - \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{72} \end{aligned}$$

donde realizamos el cambio de variable $t = \arcsen(u)$. Por otra parte, para I_2 consideramos el cambio de variable $u = \cos(\theta)$ y entonces

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{1}{\sen(\theta)} \arctan\left(\frac{1-\cos(\theta)}{\sen(\theta)}\right) \sen(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \arctan\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \arctan(\tan(w)) dw = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} w dw = w^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{36} \end{aligned}$$

Luego

$$I = 4(I_1 + I_2) = \left(\frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi^2}{36}\right) = 4 \cdot \frac{3\pi^2}{72} = \frac{\pi^2}{6}$$

Problema 4

Problema 5

Sea $I = (c, d) \subseteq [a, b]$ un intervalo, como g es absolutamente continua, por TFC se sigue que

$$\lambda(g(I)) = \lambda((g(c), g(d))) = g(d) - g(c) = \int_{(c,d)} g' d\lambda$$

además utilizamos el hecho de que g es creciente y $g(I)$ un intervalo. Sea $(I_n)_n$ intervalos disjuntos de a pares contenidos en $[a, b]$, entonces como g es estrictamente creciente, en particular es inyectiva, se sigue que $g(I_n)$ son disjuntos de a pares. Notemos que

$$\lambda\left(g\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n\right)\right) = \lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} g(I_n)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(g(I_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{I_n} g' d\lambda = \int \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{I_n} g' d\lambda = \int_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n} g' d\lambda$$

en donde para intercambiar la suma con la integral usamos teorema de convergencia dominada. Como todo abierto se puede escribir como unión numerable de intervalos abiertos disjuntos de a pares, lo anterior prueba el argumento para abiertos $U \subseteq [a, b]$.

Sea $G \in \mathcal{G}_\delta$, existen $(U_n)_n$ abiertos de $[a, b]$ tales que

$$G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

sin pérdida de generalidad podemos suponer que estos abiertos están encajonados. Como $[a, b]$ es compacto entonces $g([a, b])$ es compacto, así

$$\lambda(g(G)) = \lambda\left(g\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n\right)\right) = \lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} g(U_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(g(U_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U_n} g' d\lambda = \int_G g' d\lambda$$

donde la última igualdad se debe al teorema de convergencia dominada, notando que $\mathbb{1}_{U_n}$ converge a $\mathbb{1}_G$. Sea $E \subseteq [a, b]$ medible, existe $G \in \mathcal{G}_\delta$ tal que $\lambda(G \setminus E) = 0$ lo que implica que