Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Pedro Gaspar – Estudiante: Benjamín Mateluna

Geometría Diferencial - MAT2860
Tarea 2
30 de mayo de 2025

Problema 1

a) Recordemos que se tiene el resultado

$$K_\Sigma \circ X = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

como $F \equiv 0$, vemos que

$$(K_\Sigma \circ X) \cdot EG = eg - f^2$$

Por otro lado, se tienen las siguientes identidades para E_{vv} y G_{uu},

$$\begin{aligned} E_{vv} &= \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\langle X_u, X_u\rangle\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(2\langle X_{uv}, X_u\rangle\right) = 2\left(\langle X_{uvv}, X_u\rangle + \langle X_{uv}, X_{uv}\rangle\right) \\ G_{uu} &= \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\langle X_v, X_v\rangle\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(2\langle X_{vu}, X_v\rangle\right) = 2\left(\langle X_{vuu}, X_v\rangle + \langle X_{vu}, X_{vu}\rangle\right) \end{aligned}$$

Para la expresiones $\left|(X_{uv})^T\right|^2$ y $\left\langle (X_{uu})^T, (X_{vv})^T\right\rangle$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left|(X_{uv})^T\right|^2 &= \langle X_{uv} - \langle X_{uv}, N^x\rangle N^x, X_{uv} - \langle X_{uv}, N^x\rangle N^x\rangle \\ &= \langle X_{uv} - fN^x, X_{uv} - fN^x\rangle = |X_{uv}|^2 - f^2 - f^2 + f^2 = |X_{uv}|^2 - f^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left\langle (X_{uu})^T, (X_{vv})^T\right\rangle &= \langle X_{uu} - \langle X_{uu}, N^x\rangle N^x, X_{vv} - \langle X_{vv}, N^x\rangle N^x\rangle \\ &= \langle X_{uu} - eN^x, X_{vv} - gN^x\rangle = \langle X_{uu}, X_{vv}\rangle - eg - eg + eg = \langle X_{uu}, X_{vv}\rangle - eg \end{aligned}$$

recordando que $e = \langle N^x, X_{uu}\rangle$, $f = \langle N^x, X_{uv}\rangle$ y $g = \langle N^x, X_{vv}\rangle$. Además, tenemos lo siguiente como consecuencia de que la parametrización es ortogonal

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\langle X_u, X_v\rangle\right) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\langle X_{uv}, X_v\rangle + \langle X_u, X_{vv}\rangle\right) \\ &= \langle X_{uvu}, X_v\rangle + \langle X_{uv}, X_{vu}\rangle + \langle X_{uu}, X_{vv}\rangle + \langle X_u, X_{vvu}\rangle \end{aligned}$$

lo que implica que

$$-\langle X_{uu}, X_{vv}\rangle = \langle X_{uvu}, X_v\rangle + \langle X_{uv}, X_{vu}\rangle + \langle X_u, X_{vvu}\rangle$$

Usando lo anterior, se sigue que

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\left(E_{vv} + G_{uu}\right) + \left|(X_{uv})^T\right|^2 - \left\langle (X_{uu})^T, (X_{vv})^T\right\rangle \\ &= -\langle X_{uvv}, X_u\rangle - \langle X_{uv}, X_{uv}\rangle - \langle X_{vuu}, X_v\rangle - \langle X_{vu}, X_{vu}\rangle + |X_{uv}|^2 - f^2 + eg - \langle X_{uu}, X_{vv}\rangle \\ &= eg - f^2 \end{aligned}$$

y se tiene lo pedido. (Para esta parte trabaje en conjunto con Ricardo Larraín)

b) Como $\{X_u, X_v, N\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$, existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$X_{uu} = aX_u + bX_v + cN$$

Notemos que $\langle X_{uu}, N^x\rangle = e$, veamos las siguientes igualdades para $\langle X_{uu}, X_u\rangle$ y $\langle X_{uu}, X_v\rangle$

$$\langle X_{uu}, X_u\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\langle X_u, X_u\rangle\right) = \frac{1}{2}E_u$$

y usando que $F \equiv 0$ vemos que

$$0 = \frac{\partial}{\partial u}\left(\langle X_u, X_v\rangle\right) = \langle X_{uu}, X_v\rangle + \langle X_u, X_{vu}\rangle = \langle X_{uu}, X_v\rangle + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\langle X_u, X_u\rangle\right) = \langle X_{uu}, X_v\rangle + \frac{1}{2}E_v$$

entonces tomando producto interno con X_u, X_v y N^x respectivamente y usando que $F \equiv 0$, N^x es unitario y ortogonal a $\{X_u, X_v\}$, tenemos que

$$a = \frac{\langle X_{uu}, X_u\rangle}{\langle X_u, X_u\rangle} = \frac{E_u}{2E} \qquad b = \frac{\langle X_{uu}, X_v\rangle}{\langle X_v, X_v\rangle} = -\frac{E_v}{2G} \qquad c = \langle X_{uu}, N^x\rangle = e$$

Del mismo modo que antes, tenemos $X_{uv} = a_0X_u + b_0X_v + c_0N$, veamos que $\langle X_{uv}, N^x\rangle = f$ y además

$$\langle X_{uv}, X_v\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\langle X_v, X_v\rangle\right) = \frac{1}{2}G_u$$
$$\langle X_{uv}, X_u\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\langle X_u, X_u\rangle\right) = \frac{1}{2}E_v$$

luego

$$a_0 = \frac{\langle X_{uv}, X_u\rangle}{\langle X_u, X_u\rangle} = \frac{E_v}{2E} \qquad b_0 = \frac{\langle X_{uv}, X_v\rangle}{\langle X_v, X_v\rangle} = \frac{G_u}{2G} \qquad c_0 = \langle X_{uv}, N^x\rangle = f$$

Queda ver $X_{vv} = a_1X_u + b_1X_v + c_1N$. Recordemos que $\langle X_{vv}, N^x\rangle = g$ y adicionalmente

$$\langle X_{vv}, X_v\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\langle X_v, X_v\rangle\right) = \frac{1}{2}G_v$$

por otro lado se tiene que

$$0 = \frac{\partial}{\partial v}\left(\langle X_u, X_v\rangle\right) = \langle X_{uv}, X_v\rangle + \langle X_u, X_{vv}\rangle = \frac{1}{2}G_u + \langle X_u, X_{vv}\rangle$$

entonces

$$a_0 = \frac{\langle X_{vv}, X_u\rangle}{\langle X_u, X_u\rangle} = -\frac{G_u}{2E} \qquad b_0 = \frac{\langle X_{vv}, X_v\rangle}{\langle X_v, X_v\rangle} = \frac{G_v}{2G} \qquad c_0 = \langle X_{vv}, N^x\rangle = g$$

lo que demuestra lo pedido.

c)

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5