Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Pedro Gaspar – Estudiante: Benjamín Mateluna

Geomtría Diferencial - MAT2860
Tarea I3
26 de junio de 2025

Problema 1

a)

b)

Problema 2

El toro, puede ser parametrizado por $X : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = ((R + rcos(u))cos(v), (R + rcos(u))sen(v), rsen(u))$$

Si intersectamos con el plano $z = 1$, entonces $rsen(u) = c$ y por lo tanto

$$rcos(u) = \pm\sqrt{r^2 - c^2} := c'$$

que esta bien definida pues $c \in [-r, r]$. Bajo esta restricción definimos

$$\eta := R + rcos(u) = R + c' > 0$$

Consideramos la curva $\alpha : (0, 2\pi\eta) \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco dada por

$$\alpha(t) = \left(\eta cos\left(\frac{t}{\eta}\right), \eta sen\left(\frac{t}{\eta}\right), c\right)$$

Buscamos calcular su curvatura geodésica, en primer lugar debemos calcular la aplicación de gauss de la superficie, para ello vemos lo siguiente

$$X_u(u, v) = (-rsen(u)cos(v), -rsen(u)sen(v), rcos(u))$$
$$X_v(u, v) = (-(R + rcos(u))sen(v), (R + rcos(u))cos(v), 0)$$

entonces

$$(X_u \times X_v)(u, v) = (-(R + rcos(u))rcos(u)cos(v), -(R + rcos(u))rcos(u)sen(v), -(R + rcos(u))rsen(v))$$

y además $|(X_u \times X_v)(u, v)| = (R + rcos(u))$. Usando que u es tal que $rsen(u) = c$, se sigue que

$$N(\alpha(t)) = -\frac{1}{r}\left(c' cos\left(\frac{t}{\eta}\right), c' sen\left(\frac{t}{\eta}\right), c\right)$$

Por otro lado vemos que

$$\alpha'(t) = \left(-sen\left(\frac{t}{\eta}\right), cos\left(\frac{t}{\eta}\right), 0\right) \quad \text{y entonces} \quad \alpha''(t) = -\frac{1}{\eta}\left(cos\left(\frac{t}{\eta}\right), sen\left(\frac{t}{\eta}\right), 0\right)$$

Nuestro objetivo ahora es determinar $\nabla_{\alpha'}\alpha'(t)$, para ello observemos que

$$\langle \alpha'', N \circ \alpha \rangle (t) = \frac{c'}{r\eta}$$

de este modo

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\alpha'}\alpha'(t) &= \alpha''(t) - \langle \alpha'', N\circ\alpha\rangle (t) N(\alpha(t)) \\
&= -\frac{1}{\eta}\left(cos\left(\frac{t}{\eta}\right), sen\left(\frac{t}{\eta}\right), 0\right) + \frac{c'}{r^2\eta}\left(c' cos\left(\frac{t}{\eta}\right), c' sen\left(\frac{t}{\eta}\right), c\right) \\
&= \left(\frac{-c^2}{r^2\eta} cos\left(\frac{t}{\eta}\right), \frac{-c^2}{r^2\eta} sen\left(\frac{t}{\eta}\right), \frac{cc'}{r^2\eta}\right)
\end{aligned}
$$

donde usamos que

$$
\frac{c'^2}{r^2\eta} - \frac{1}{\eta} = \frac{r^2 - c^2 - r^2}{r^2\eta} = \frac{-c^2}{r^2\eta}
$$

adicionalmente se tiene que

$$
N(\alpha(t)) \times \alpha'(t) = -\frac{c'}{r}\left(-cos\left(\frac{t}{\eta}\right), sen\left(\frac{t}{\eta}\right), 1\right)
$$

por último, se tiene que

$$
K_g = [\nabla_{\alpha'}\alpha'] = -\frac{c}{r^2\eta}\cdot\frac{-c'}{r}\left(-ccos^2\left(\frac{t}{\eta}\right) + csen^2\left(\frac{t}{\eta}\right) - c'\right) = -\frac{cc'}{r^3\eta}\left(ccos\left(\frac{2t}{\eta}\right) + c'\right)
$$

Problema 3

Problema 4

a) Notemos que

$$
\begin{aligned}
\omega_p(v) &= \left\langle v, \frac{Jp}{|p|^2}\right\rangle = \frac{1}{|p|^2}\left\langle v, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{|p|^2}(-v_1 y + v_2 x) \\
&= \frac{1}{|p|^2}(-dx(v)y + dy(v)x) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx(v) + \frac{x}{x^2+y^2}dy(v)
\end{aligned}
$$

conlcuimos que

$$
\omega_p = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy
$$

además, para $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ las funciones

$$
\omega_1 := \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{y} \quad \omega_2 := \frac{x}{x^2+y^2}
$$

son diferenciables, y por lo tanto la 1-forma ω_p es diferenciable.

b) Veamos la siguiente expresión

$$
\begin{aligned}
d\omega &= \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega_1}{\partial y}dy\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega_2}{\partial y}dy\right)\wedge dy = \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}dx - \frac{\partial\omega_1}{\partial y}dy\right) dx\wedge dy \\
&= \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) dx\wedge dy = 0
\end{aligned}
$$

c) Para finalizar, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\, dt &= \int_0^1 -\frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1^2(t)+\gamma_2^2(t)}\cdot\gamma_1'(t) + \frac{\gamma_1(t)}{\gamma_1^2(t)+\gamma_2^2(t)}\cdot\gamma_2'(t) = \int_0^1 F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\, dt \\
&= \int_\gamma F(x,y)\, ds
\end{aligned}
$$

es decir, la integral corresponde a la integral de línea del campo vectorial $F(x,y) = (\omega_1,\omega_2)(x,y)$ sobre la curva γ.

Problema 5

a) Se tiene lo siguiente

$$(\omega_{ij})_p(v) = \langle DE_i(p)v, E_j(p)\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial E_i}{\partial x_k}(p)v_k, E_j(p) \right\rangle = \sum_{k=1}^{3} \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial x_k}, E_j(p) \right\rangle v_k$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial x_k}, E_j \right\rangle (p)(dx_k)_p(v) = \left(\sum_{k=1}^{3} \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial x_k}, E_j \right\rangle (p)(dx_k)_p \right)(v)$$

es decir,

$$\omega_{ij} = \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial x}, E_j \right\rangle dx + \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial y}, E_j \right\rangle dy + \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial z}, E_j \right\rangle dz$$

como las funciones E_i y el producto interno son diferenciables, concluimos que ω_{ij} es una 1-forma diferenciable.

b) Se sigue que

$$(\omega_i)_p(v) = \langle v, E_i(p)\rangle = \sum_{k=1}^{3} (E_i)_k(p)v_k = \sum_{k=1}^{3} (E_i)_k(p)(dx_k)(v)$$

entonces

$$\omega_i = (E_i)_1 dx + (E_i)_2 dy + (E_i)_3 dz$$

por la misma razón que antes, la 1-forma ω_i es diferenciable. Por otro lado ...

c)