

# 數位控制系統 Project #3

機械所 系統控制組 劉育如 R09522826

機械所 系統控制組 莊源誠 R09522850

台科大 機械工程系 郭忠翔 B10531019

**1. No CFF control (10%): By selecting  $C(z) = K_p + K_i \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}}$  where  $K_p = 33.964$  and  $K_i = 1.714$ , an approximately 100 Hz average speed control bandwidth can be realized. Develop an offset cosine  $\omega_{avg}^* = \frac{\omega^*_{max}}{2}(1 - \cos(2\pi ft))$  speed command to verify the controller bandwidth. Please overlay both  $\omega_{avg}^*(k)$  and  $\omega_{avg}(k)$  within a single plot among three different frequencies,  $f = 10\text{Hz}$ ,  $100\text{Hz}$  and  $1000\text{Hz}$  respectively.**

根據 project #2，我們可以對系統設計 PI 控制器如以下形式：

$$C(z) = K_p + K_i \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (1.1)$$

並令控制器增益為：

$$\begin{cases} K_p = 33.964 \\ K_i = 1.714 \end{cases} \quad (1.2)$$

令平均馬達轉速之參考輸入  $\omega_{avg}^*$  為：

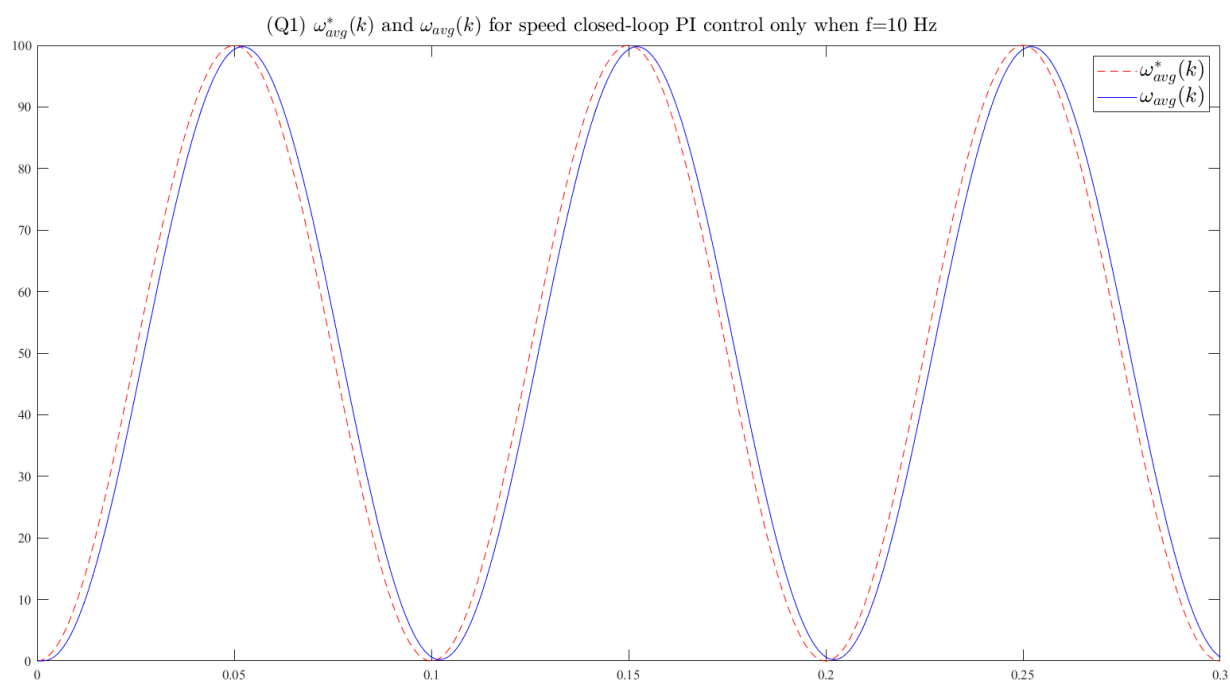
$$\omega_{avg}^* = \frac{\omega^*_{max}}{2}(1 - \cos(2\pi ft)) \quad (1.3)$$

其中，輸入之最大的值  $\omega^*_{max}$  為：

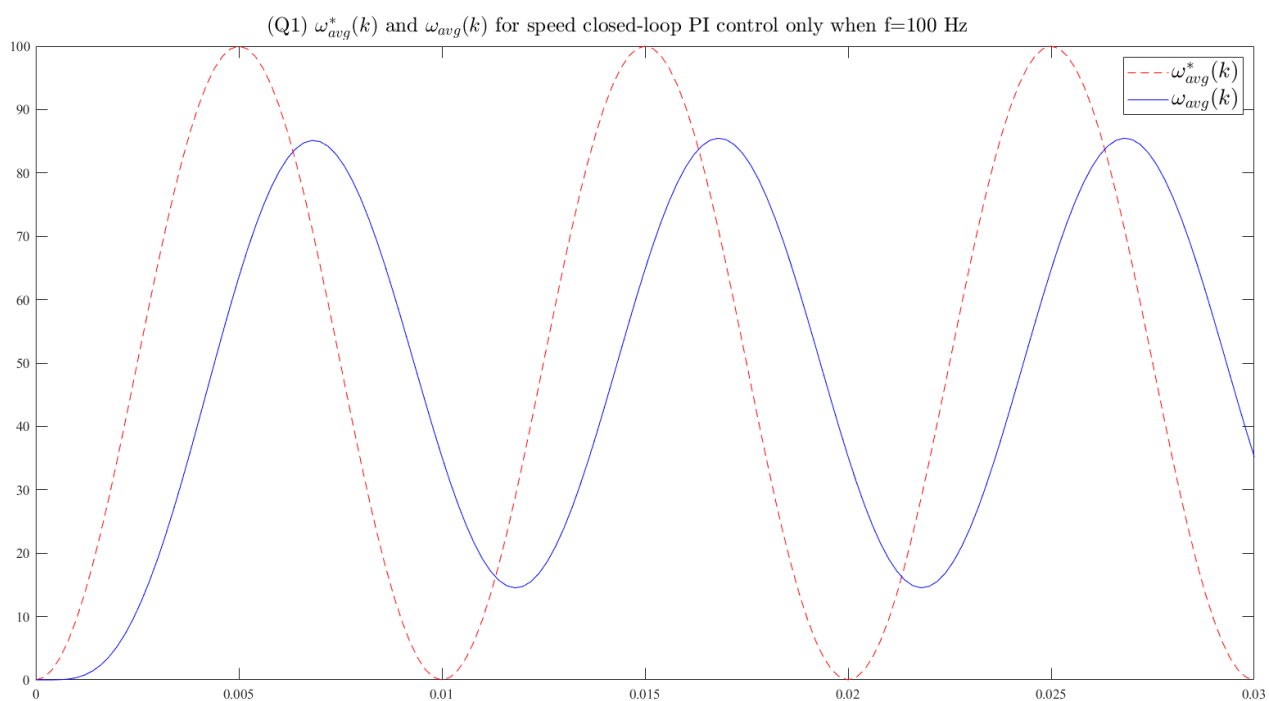
$$\omega^*_{max} = 100 \text{ rad/s} \quad (1.4)$$

在不加入 CFF 控制器下，系統的響應分別為：

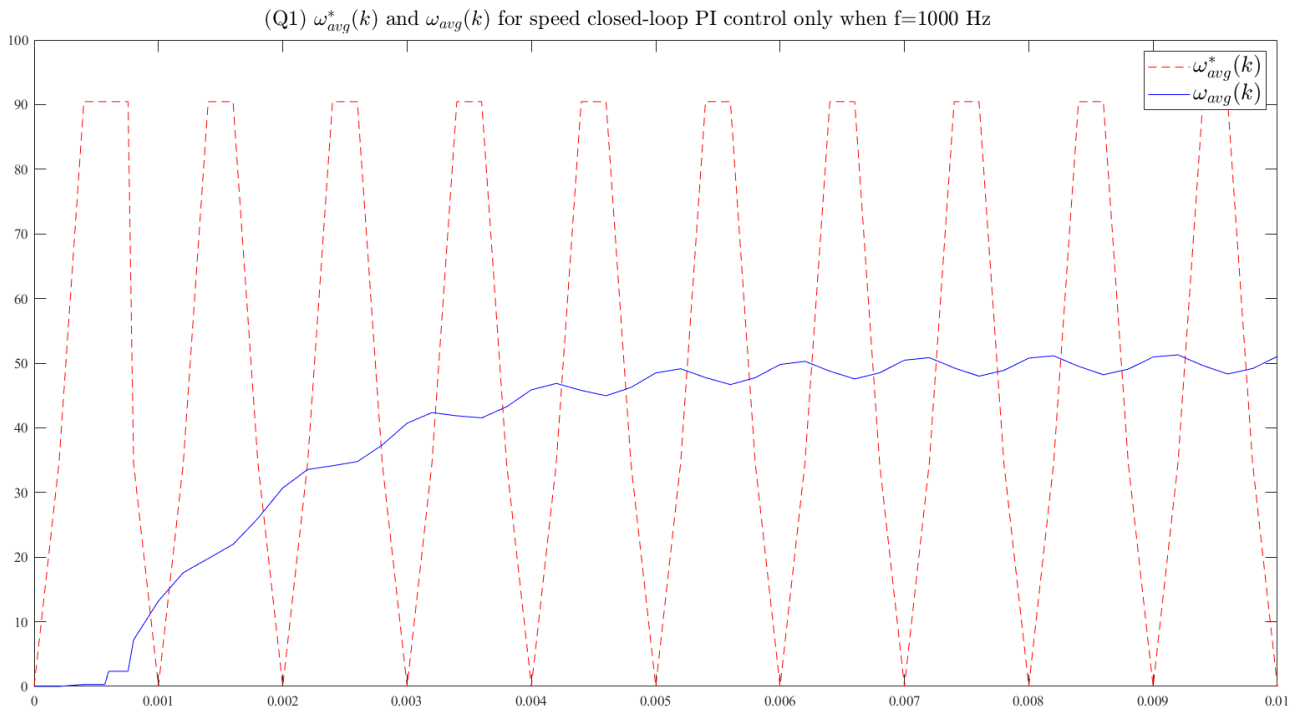
● **f = 10 Hz :**



● **f = 100 Hz :**



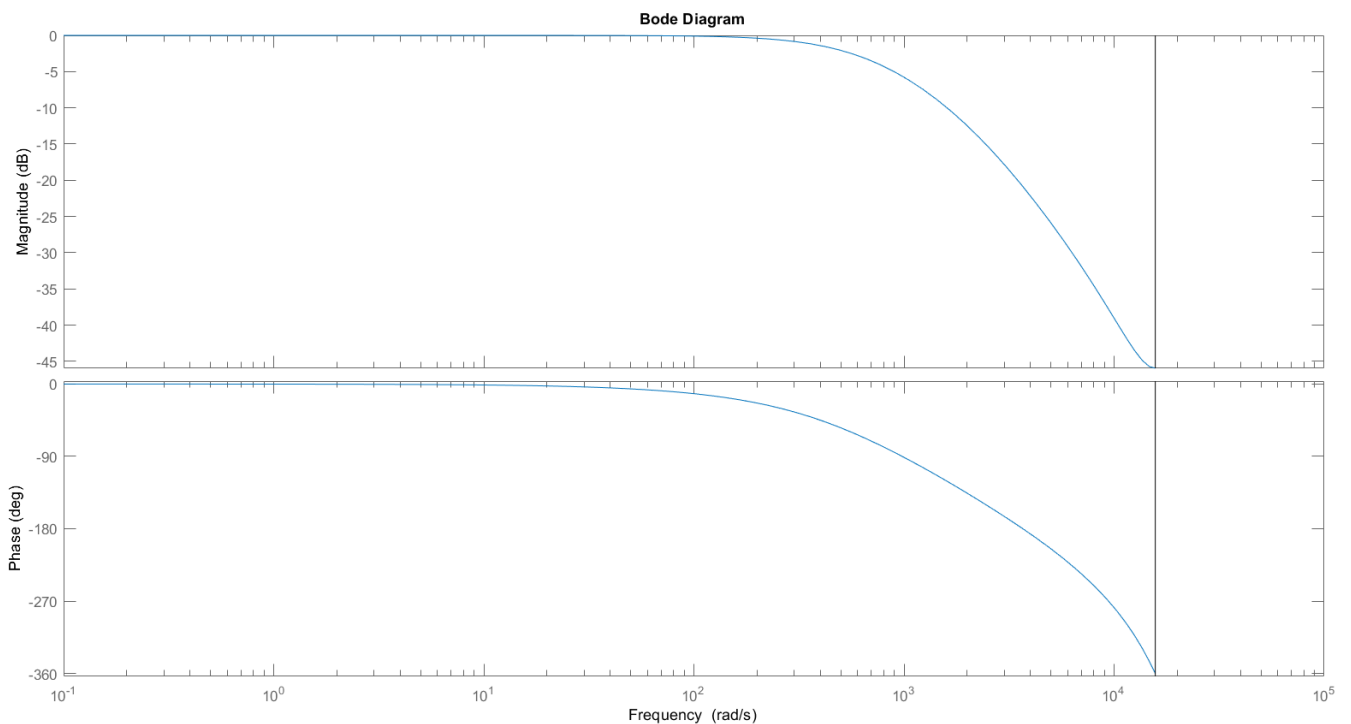
● **f = 1000 Hz :**



由輸出響應可以發現，系統響應之振幅、相位皆隨著輸入訊號的頻率提升而下降，

透過觀察系統波德圖也可以發現與結果相符。系統的頻寬為 630.9019 rad/s (100.4

Hz)，達到設計要求。但為提升系統在大於頻寬後的表現，我們需要前饋控制器。



**2. CFF control only (20%): Design a digital CFF controller to improve  $\omega_{avg}^*(k)$  speed tracking performance. By designing  $CFF(z) = \widehat{NSD}^{-1}$ , the current command  $i_{a\_cff}^*(k)$  might not be feasible. Explain why  $CFF(z) = \widehat{NSD}^{-1}$  is not possible for the digital implementation.**

透過 project #2，我們知道此系統由  $I^*(k) \rightarrow \omega_{avg}(k)$  之 NSD 為：

$$\begin{aligned} NSD(z) &= \frac{I_a(z)}{I_a^*(z)} \cdot \frac{\omega_m(z)}{I_a(z)} \\ &= \frac{5.294 \times 10^{-8} \cdot z^{-1} \cdot (1 + 3.1904z^{-1}) \cdot (1 + 0.2247z^{-1})}{(1 - 0.5134 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1})^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

**注意！其中包含一不穩定零點  $(1 + 3.1904z^{-1})$ 。**

因此，若我們令前饋控制器  $CFF(z)$  為：

$$\begin{aligned} CFF(z) &= \widehat{NSD}^{-1} \\ &= \frac{(1 - 0.5134 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1})^2}{5.294 \times 10^{-8} \cdot z^{-1} \cdot (1 + 3.1904z^{-1}) \cdot (1 + 0.2247z^{-1})} \end{aligned} \quad (2.2)$$

不難發現，此控制器包含一不穩定極點，造成電流命令  $i_{a\_cff}^*(k)$  是不穩定的(亦可以說，此能量需要無限大訊號是無法實現的(**infeasible input**))。因此，需要重新設計前饋控制器。

**3. CFF control only (20%): Design a CFF with feasible  $i_{a\_cff}^*(k)$  due to the digital implementation limitation.**

● **CFF 穩定性分析：**

透過前題，我們知道此前饋控制器沒辦法實現的原因在於「在  $\omega_m(k) \rightarrow \theta_m(k)$  的轉移函數中包含一支不穩定零點，從而使設計的前饋控制器包含不穩定極點而不能使用。

因此，我們想到了一個新的想法。觀察系統方塊圖，若考慮在連續域下從  $\omega_m(t) \rightarrow \theta_m(t) \rightarrow \omega_{avg}(t)$  的過程只是單純的微分在積分，因此兩者可以互消。互消完後，再對剩下的二階系統取 NSD 可得：

$$\begin{aligned} NSD(z) &= \frac{I_a(z)}{I_a^*(z)} \cdot \frac{\omega_m(z)}{I_a(z)} \\ &= 7.542 \times 10^{-4} \cdot \frac{z^{-1}(1 + 0.801z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.5134 \cdot z^{-1})} \end{aligned} \quad (2.3)$$

如此，系統不再包含不穩定的零點，即可重新設計一穩定的前饋控制器。

因此，重新設計的前饋控制器  $CFF(z)$  為：

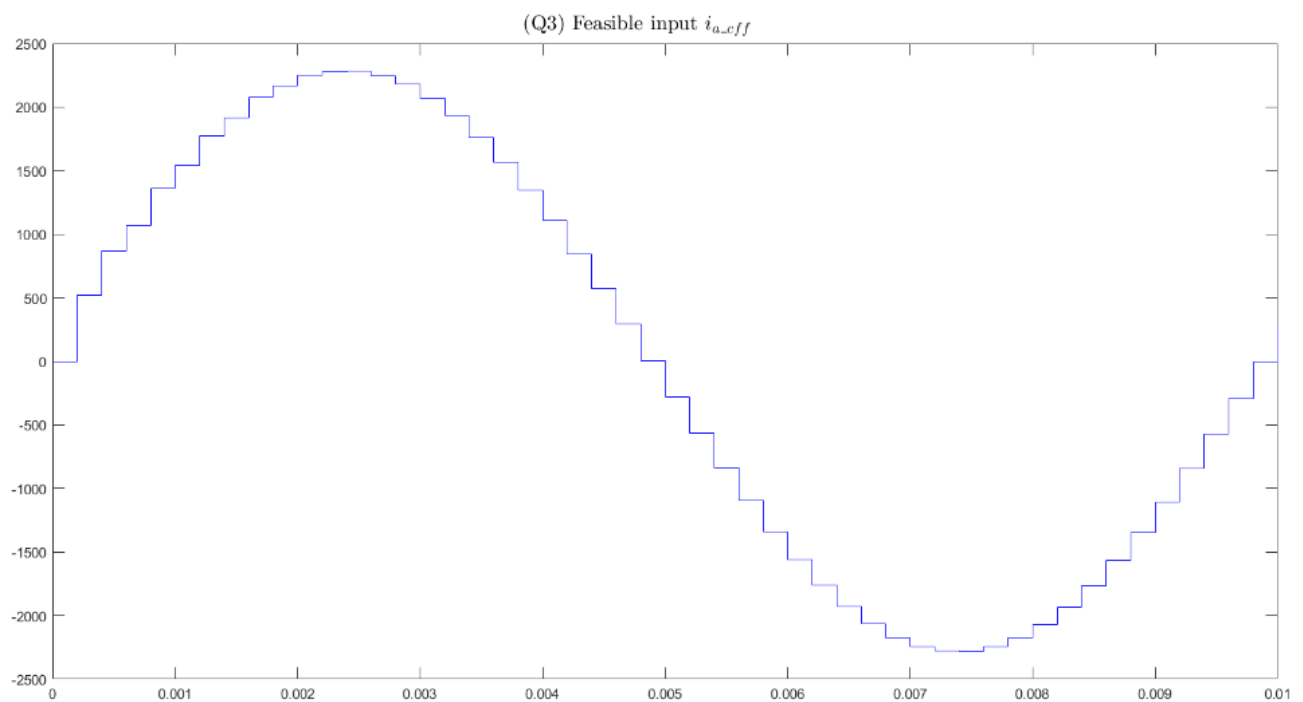
$$\begin{aligned} CFF(z) &= \widehat{NSD}^{-1} \\ &= \frac{(1 - z^{-1})(1 - 0.5134 \cdot z^{-1})}{7.542 \times 10^{-4} \cdot z^{-1}(1 + 0.801z^{-1})} \end{aligned} \quad (2.4)$$

在確認前饋控制器是穩定的後，我們還需要知道此控制器輸出的電流命令  $i_{a\_cff}^*(k)$  是可以實現的，才算完成設計。

●  $i_{a\_cff}^*(k)$  之可行性分析：

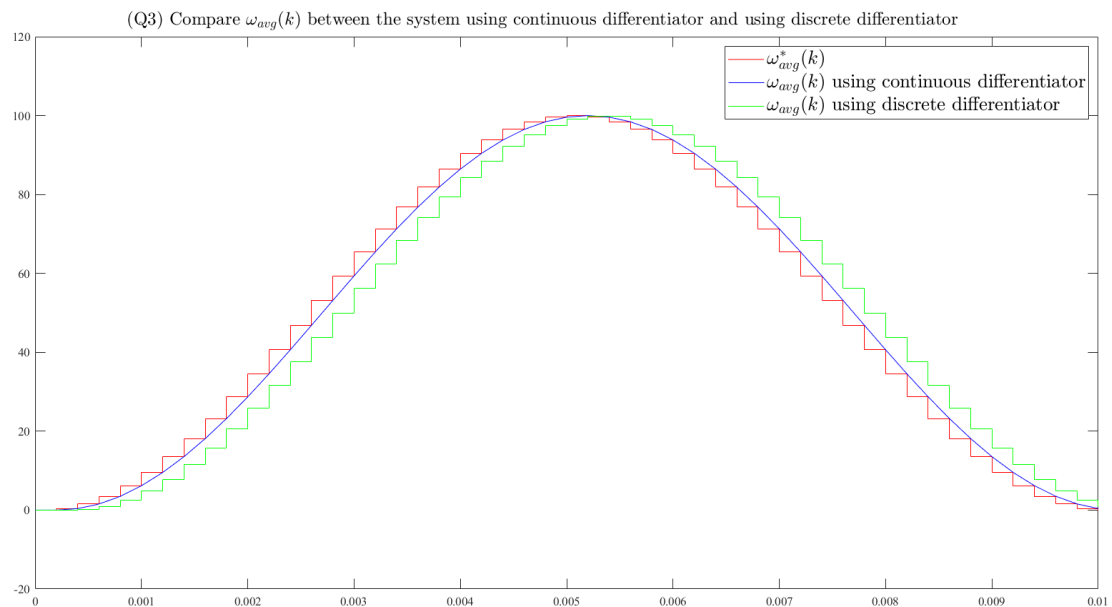
在設計完前饋控制器 CFF(z)後，我們接下來觀察當輸入 (即式(1.3))時，控制器輸出的電流命令  $i_{a\_cff}^*(k)$  是否可實現。令  $f=100$  Hz 時，可以發現  $i_{a\_cff}^*(k)$  為：

觀察  $i_{a\_cff}^*(k)$  為一弦波，並沒有瞬間的能量變動。因此，此控制器是可行的。

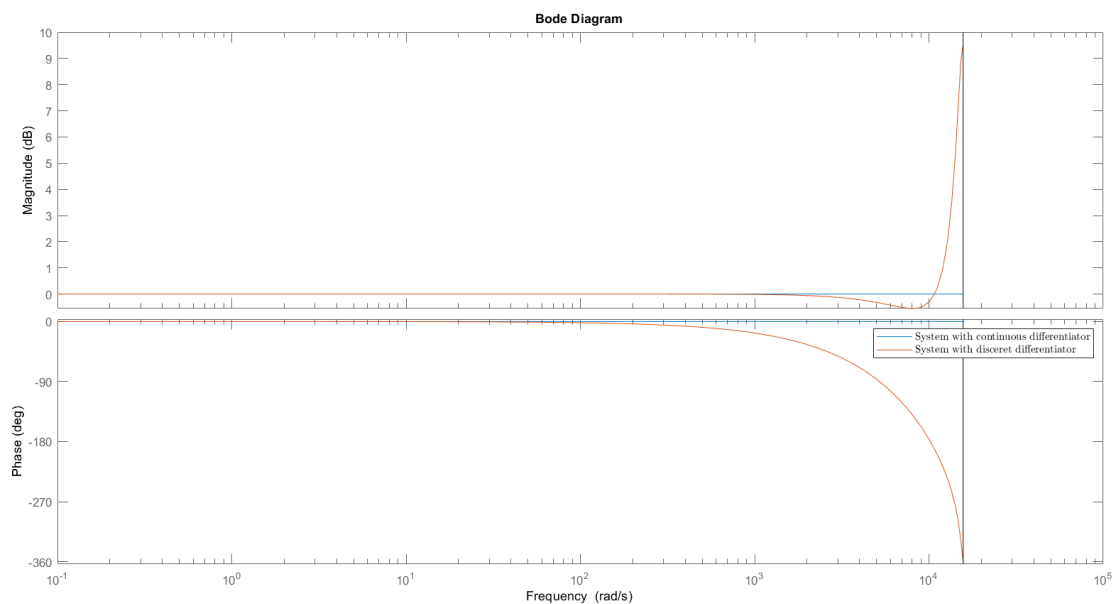


### ● 控制器效能分析：

由於此 CFF 控制器並不是建立在系統原本的 NSD 上去做設計，因此不可能使整個系統最後的轉移函數剛好是 1，而達到 ideal tracking。但透過比較我們可以發現比較原本的離散系統和連續系統，當  $f=100\text{ Hz}$  時，其響應最終並沒有太大的不同。觀察在連續系統之響應，其確實為 ideal tracking；而在離散系統，其有一個 one step delay 來自於 average process，也非常合理。



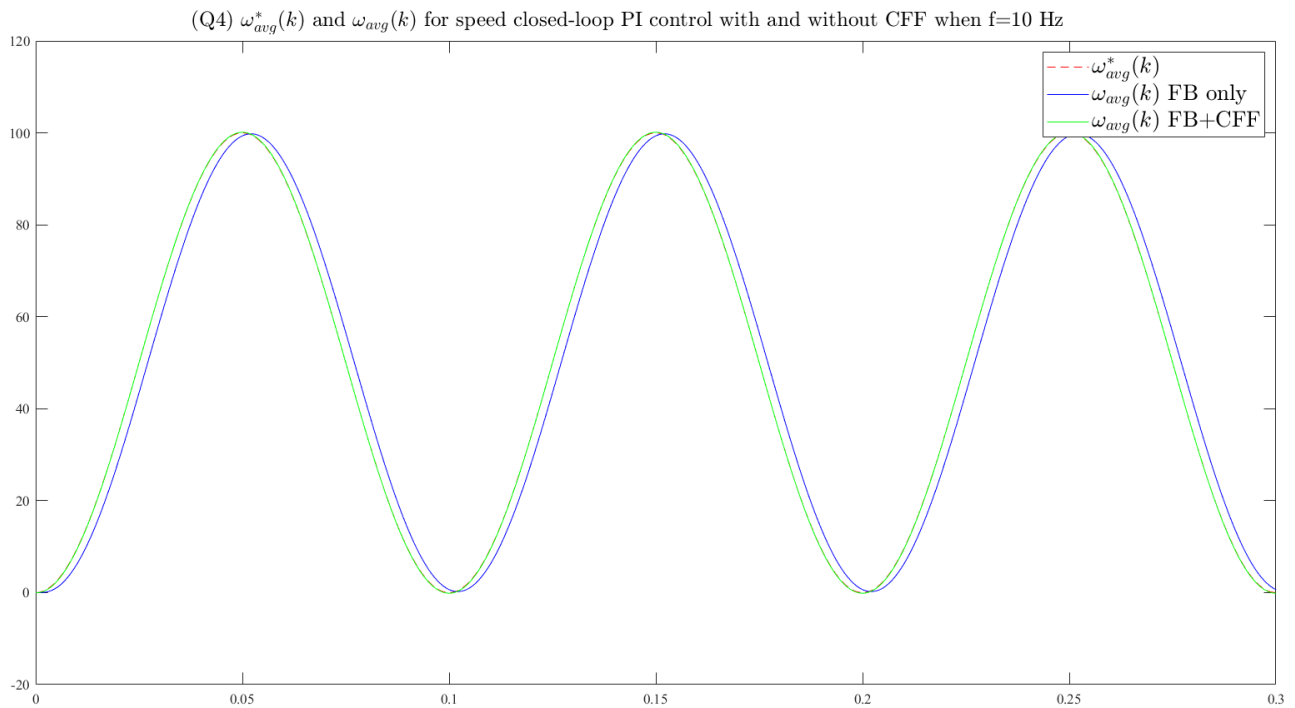
比較兩者的波德圖也可以應證這一現象，可以發現在連續系統下確實為 ideal tracking。而離散系統雖然在高頻並沒有追得很好，其原因來自於輸入頻率  $f$  接近 Nyquist frequency ( $2500\text{ Hz} = 15707\text{ rad/s}$ )，導致 aliasing 現象產生。



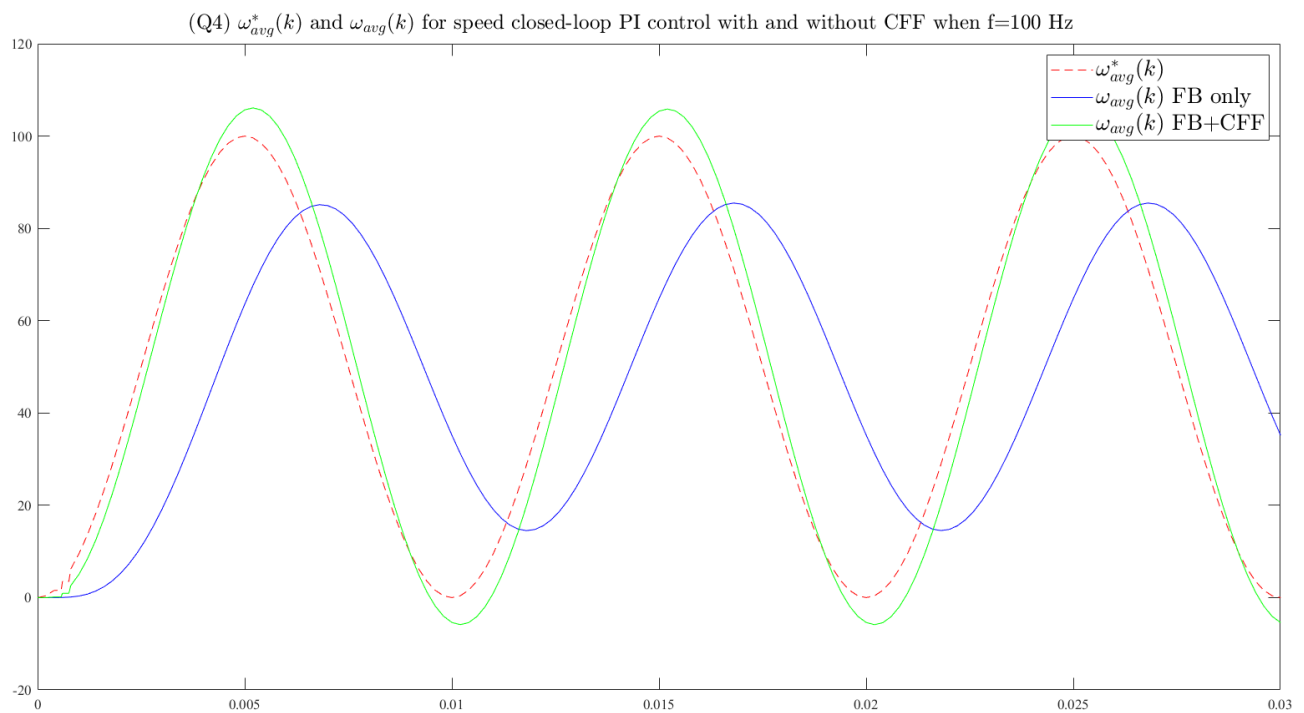
**4. CFF verification (20%): Compare discrete-time  $\omega_{avg}^*(k)$  and  $\omega_{avg}(k)$  within a single plot for speed closed-loop control with and without CFF. Analyze three different frequencies,  $f = 10\text{Hz}$ ,  $100\text{Hz}$  and  $1000\text{Hz}$  respectively.**

當使用 PI 回授控制在加入與不加入 CFF 控制器下，系統的響應分別為：

●  **$f = 10\text{ Hz}$  :**



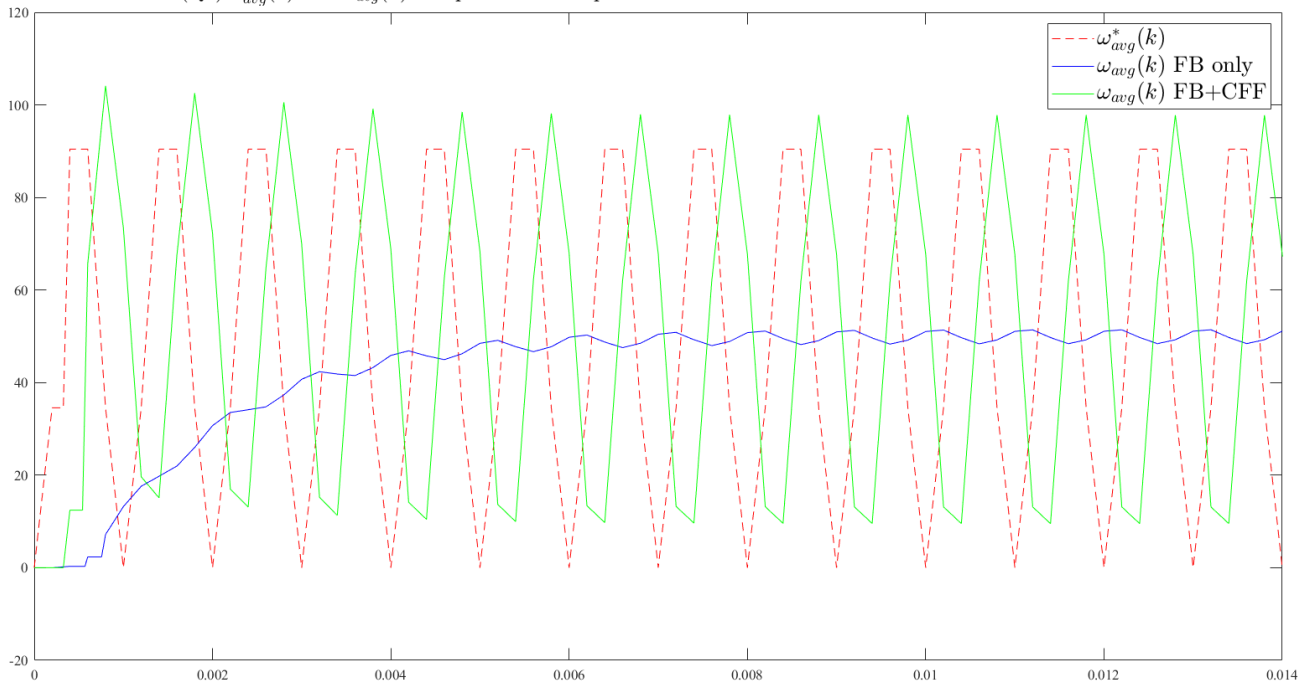
●  **$f = 100\text{ Hz}$  :**



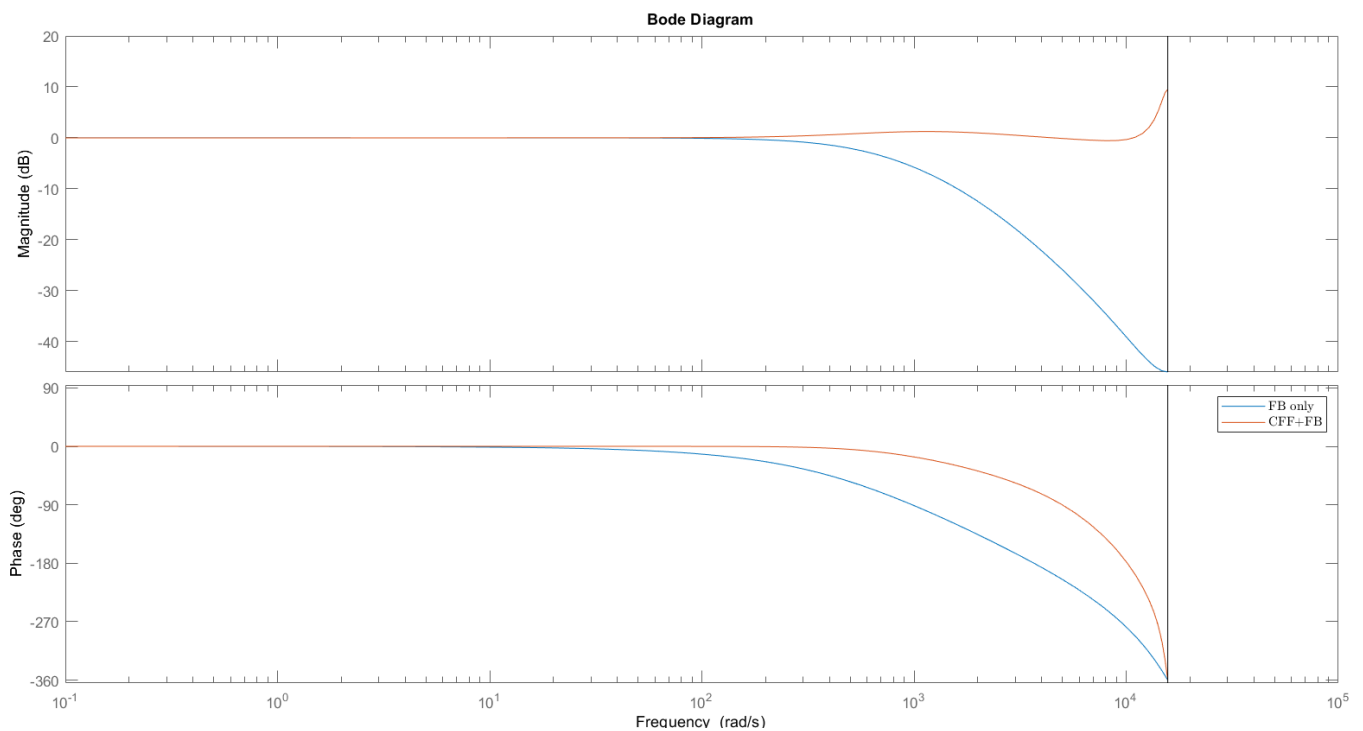


● **f = 1000 Hz :**

(Q4)  $\omega_{avg}^*(k)$  and  $\omega_{avg}(k)$  for speed closed-loop PI control with and without CFF when f=1000 Hz



觀察系統響應可以發現，「FB + CFF」的響應確實比「FB only」的響應還要好，雖然說並不是 ideal tracking，但「FB + CFF」在振幅與相位的表現都比只有 FB 好(更大的振幅、相位落後不多)。透過比較二者之波德圖，也可以應證這一現象：

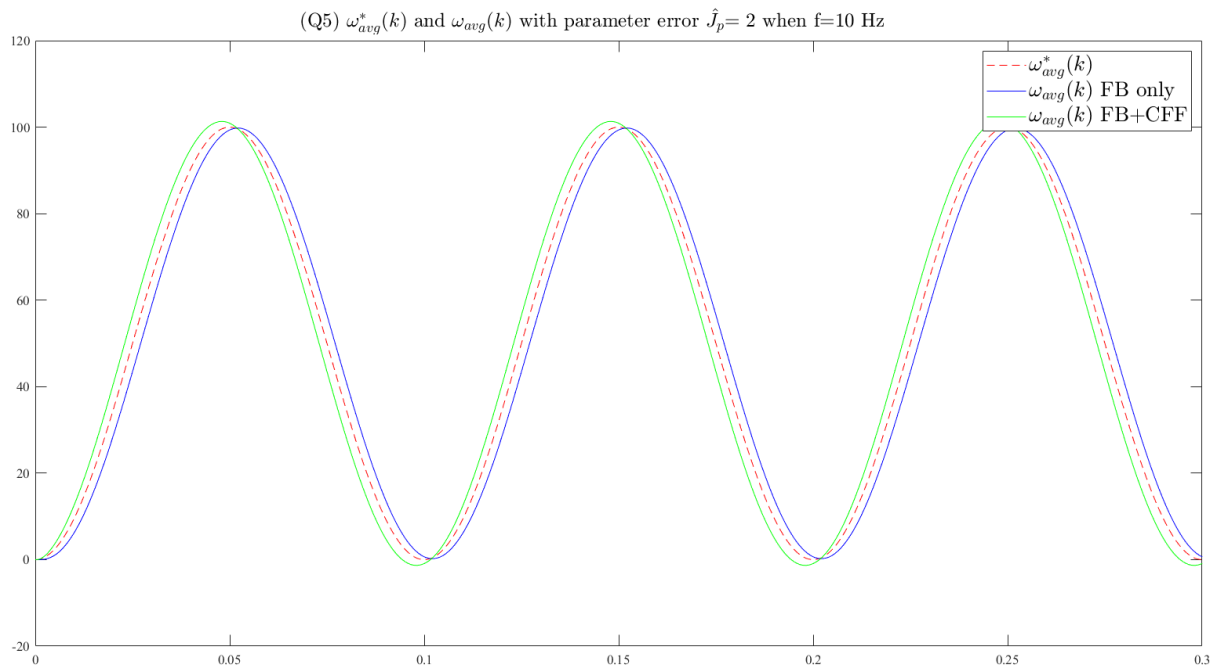


**5. Parameter error (20%): Compare discrete-time  $\omega_{avg}^*(k)$  and  $\omega_{avg}(k)$  within a single plot for speed control with and without CFF. Assuming  $\hat{J}_p = 2J_p$  and  $\hat{J}_p = 0.5J_p$ , show three different frequencies,  $f = 10\text{Hz}$ ,  $100\text{Hz}$  and  $1000\text{Hz}$  respectively.**

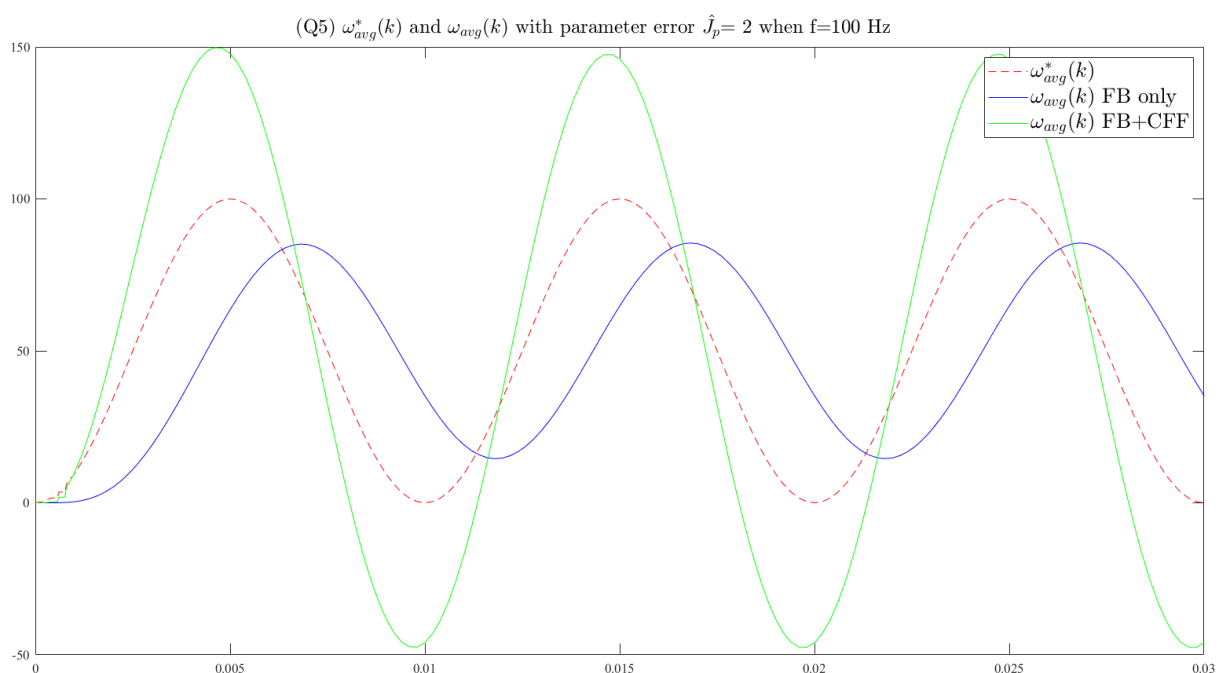
當使用 PI 回授控制在加入與不加入 CFF 控制器、且控制器存在參數誤差

$\hat{J}_p = 2J_p$  時，系統的響應分別為：

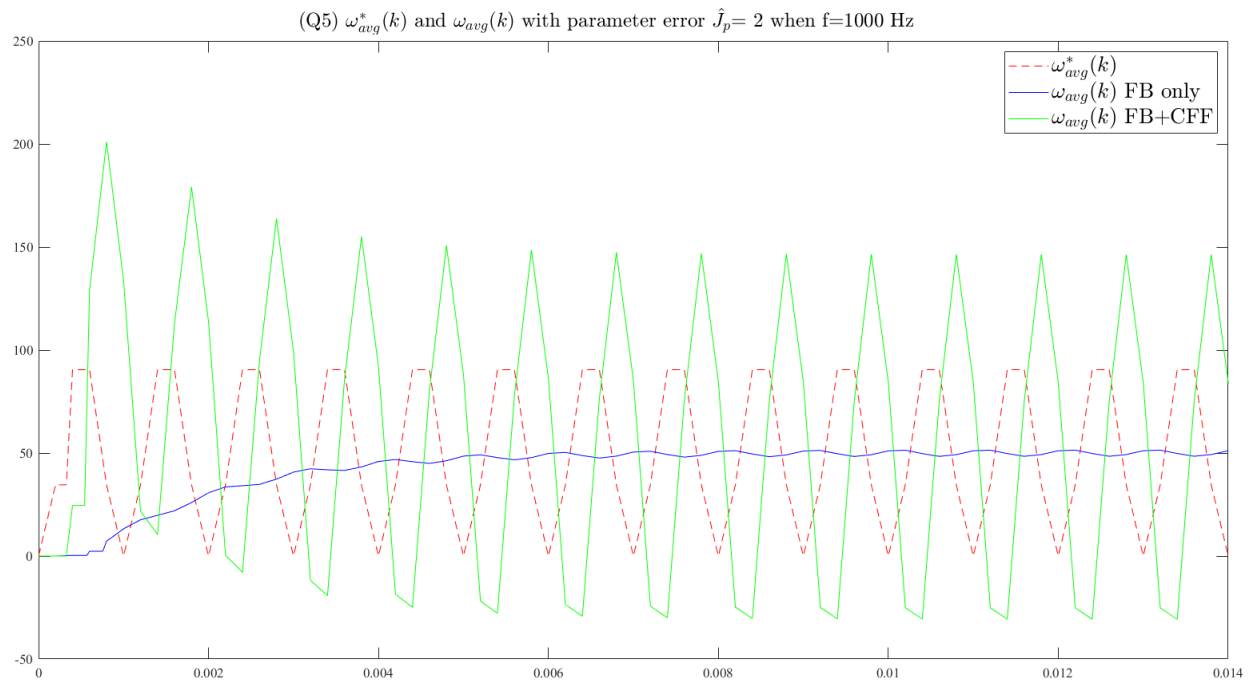
◆  $\hat{J}_p = 2J_p$  ,  $f = 10 \text{ Hz}$  :



◆  $\hat{J}_p = 2J_p$  ,  $f = 100 \text{ Hz}$



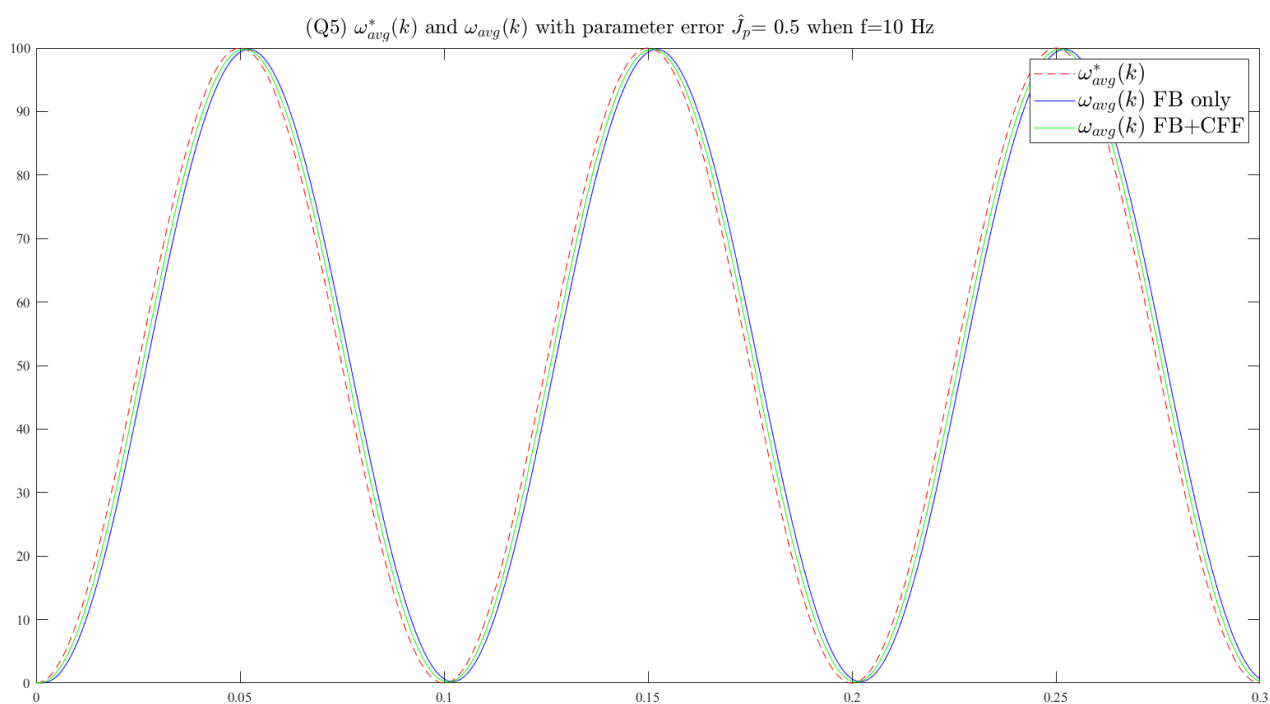
◆  $\hat{J}_p = 2J_p$  ,  $f = 1000$  Hz



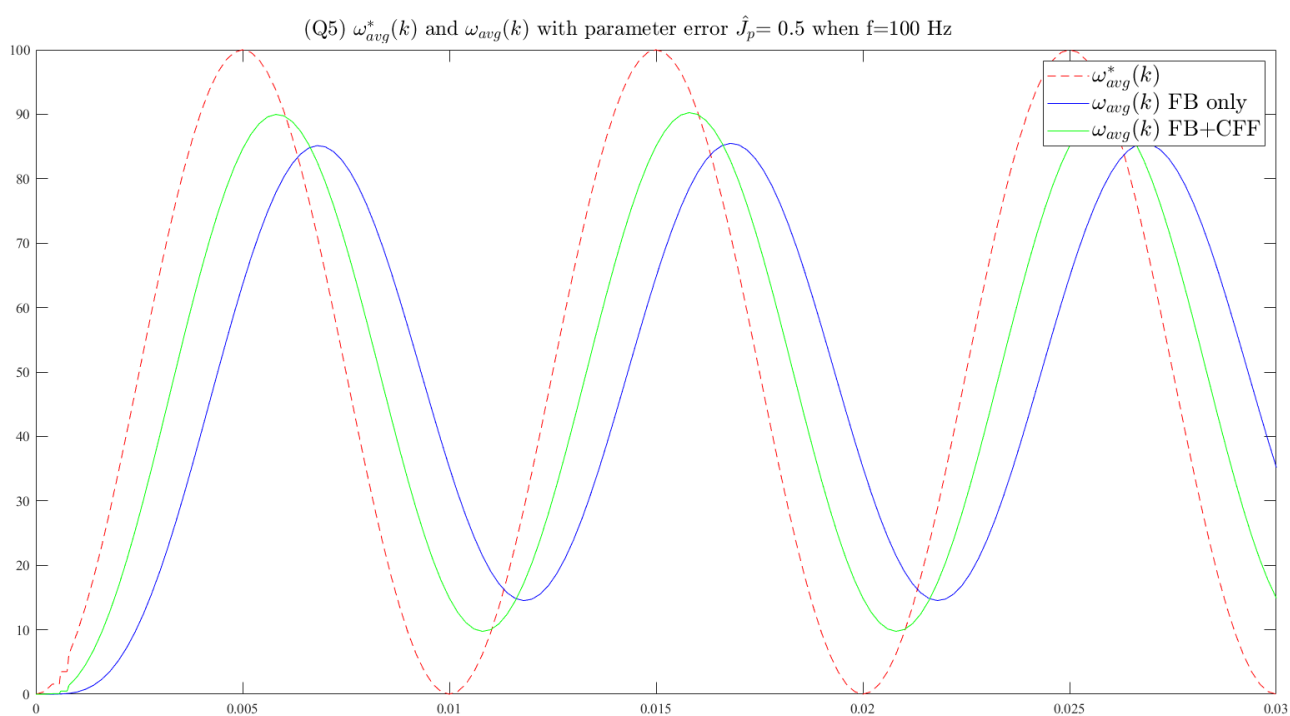
當使用 PI 回授控制在加入與不加入 CFF 控制器、且控制器之存在參數誤差

$\hat{J}_p = 0.5J_p$  時，系統的響應分別為：

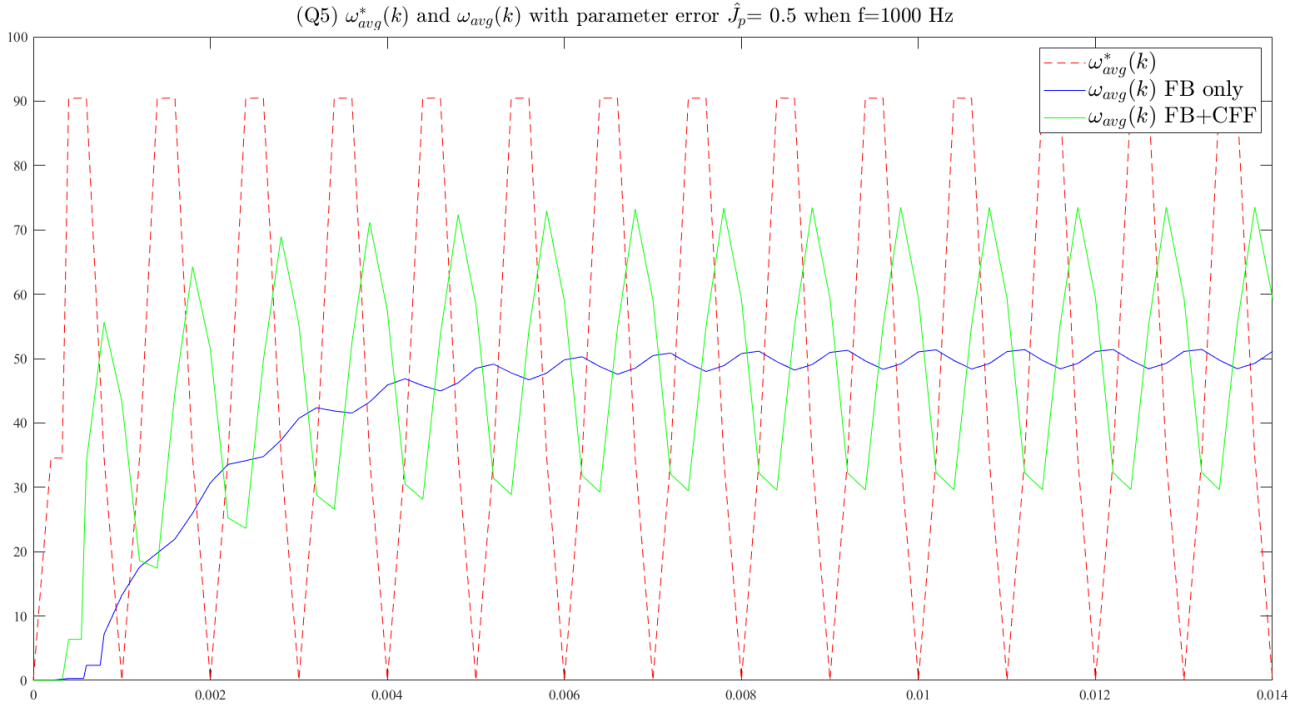
❖  $\hat{J}_p = 0.5J_p$  ,  $f = 10$  Hz



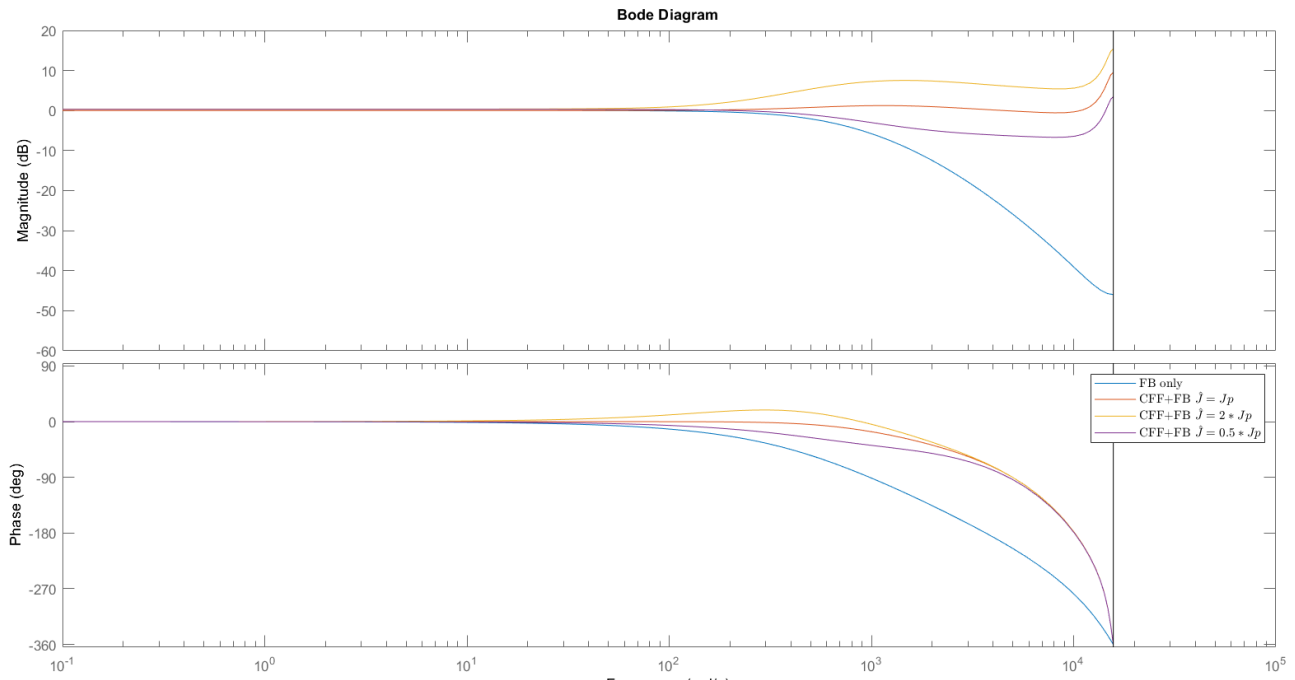
❖  $\hat{J}_p = 0.5J_p$  ,  $f = 100$  Hz



❖  $\hat{J}_p = 0.5J_p$  ,  $f = 1000$  Hz



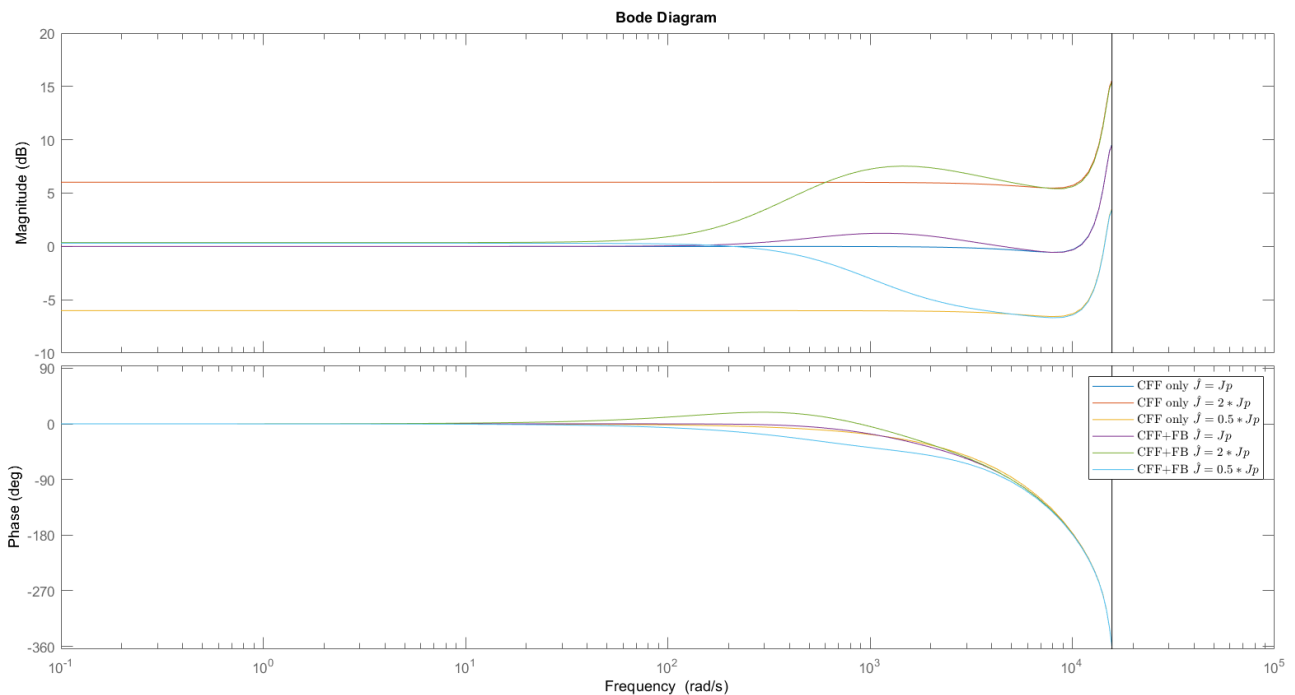
觀察系統響應可以發現，即便控制器存在一些參數誤差，在「FB+CFF」的響應確實比「FB only」的響應還要好。透過比較二者之波德圖可以應證：



此外，比較「FB + CFF」和「CFF only」的波德圖可以得到相似的結論，即：

1. 「FB + CFF」在 BW 之下：不會有相位落後且不會對參數敏感。
2. 「FB + CFF」在 BW 之上：不會有相位落後且對參數敏感。
3. 「FB only」在 BW 之上：有相位落後且振幅衰減。

而美中不足在於當「FB + CFF」在 BW 之上相位會落後，原因會在第 6 題探討。



## 6. (10%) Summarize the design approach for your CFF.

首先，我們先總結整個 CFF 控制器的設計過程。由於對於原本的 NSD 來說，我們並沒有辦法透過取倒數的方式設計 CFF 控制器，原因是因為原本的 NSD 包含一支不穩定的零點，以至於以此方法所設計之 CFF 控制器會包含一支不穩定極點，造成制器輸出的電流命令  $i_{a\_cff}^*(k)$  發散，因此無法實現。

因此，我們退而求其次的設計發法是：「既然我們無法對原本的 NSD 做 CFF 控制器設計，而原因是在  $\omega_m(k) \rightarrow \theta_m(k)$  的過程經過 ZOH 後不是單純的微分，從而包含不穩定的零點導致設計失敗。那何不考慮其為連續微分，如此微分與積分互為反運算而相消，不穩定的零點的問題即不復存在。」

透過上述的想法我們重新設計一 CFF 控制器，透過觀察系統的系統轉移函數，保證了控制器的穩定性；透過觀察弦波輸入所得到的輸出的電流命令  $i_{a\_cff}^*(k)$  亦是 feasible 的弦波訊號，保證了控制器的可行性。因此，即完成了 CFF 控制器之設計。

在模擬輸出響應中，我們比較了「FB+CFF 的控制方法」與「只有 FB 的控制方法」兩者的輸出響應，可以發現「FB+CFF 的控制方法」不論在「改變參考輸入  $\omega_{avg}^*(k)$  的頻率  $f$ 」還是「CFF 控制器之參數  $\hat{J}_p$  變動」的情況下，其表現都好於「只有 FB 的控制方法」，即：有更大的頻寬、更大的振幅和相位落後不多。

但我們所設計的 CFF 控制器仍然存在一個問題，即當輸入頻率  $f$  接近取樣頻率  $T^{-1}$  (此為 5000 Hz) 的時候，系統的表現開始下降。在此的猜測是因為輸入頻率  $f$  已經接近 Nyquist frequency (即取樣頻率的一半 2500 Hz)，導致 aliasing 現象開始出現，從而導致系統的表現開始隨  $f$  上升而下降。我們可以觀察「只有 CFF 控制器」的波德圖，來印證這一猜想。可以發現當頻率接近 Nyquist frequency (2500 Hz = 15707 rad/s) 時系統的表現急速下降，即 aliasing 現象產生。