

# 數位控制系統 Final Exam

機械所 系統控制組 劉育如 R09522826

機械所 系統控制組 莊源誠 R09522850

台科大 機械工程系 郭忠翔 B10531019

**1. (20%)PI control:** Design a current controller  $C_C(z) = C_{LP}(z)$  with zero steady state error, no overshoot, and 100Hz bandwidth ( $s = -100 \times 2\pi$  and  $z = e^{sT}$ ). You are asked to use direct Z-domain design method to let the whole system ( $I_a(z)/I_a^*(z)$ ) behave as a low pass filter. Show the controller  $CLP(z)$  transfer function with the numerical value.

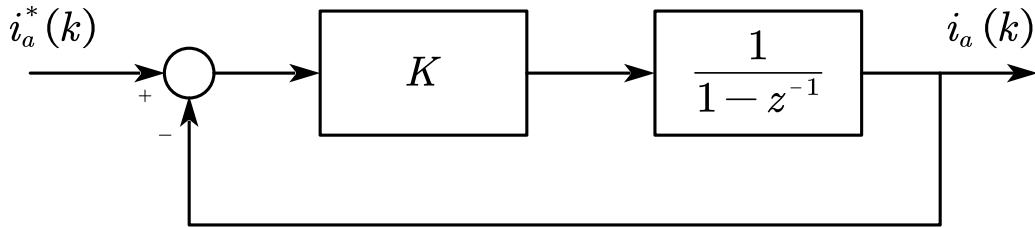
已知系統之 NSD 為：

$$NSD(z) = \frac{B_1 z^{-1}}{1 - A_1 z^{-1}} \quad (1.1)$$

為滿足閉迴路設計的三個設計要求：

1. 沒有穩態誤差
2. 沒有 overshoot
3. 頻寬為 100Hz

因此，透過直接設計(direct design)，可以令最後系統的轉移函數為 1<sup>st</sup> order filter：



$$1^{\text{st}} \text{ order filter: } G_{\text{dr}}(z) = \frac{\frac{K}{1-z^{-1}}}{1 + \frac{K}{1-z^{-1}}} \quad (1.2)$$

其中：

$$K = 1 - e^{-BW \cdot T} \Big|_{BW = 100 \cdot 2 \cdot \pi} \quad (1.3)$$

透過梅森增益公式(Mason's Gain Formula)，可得閉路轉移函數為：

$$G_{dr}(z) = \frac{C_{LP}(z) \cdot NSD(z)}{1 + C_{LP}(z) \cdot NSD(z)} \quad (1.4)$$

求解 $C_{LP}(z)$ 可得：

$$C_{LP}(z) = NSD(z)^{-1} \cdot \frac{G_{dr}(z)}{1 - G_{dr}(z)} \quad (1.5)$$

將(1.1)、(1.2)帶入(1.5)，可得閉迴路控制器為一 PI 控制器：

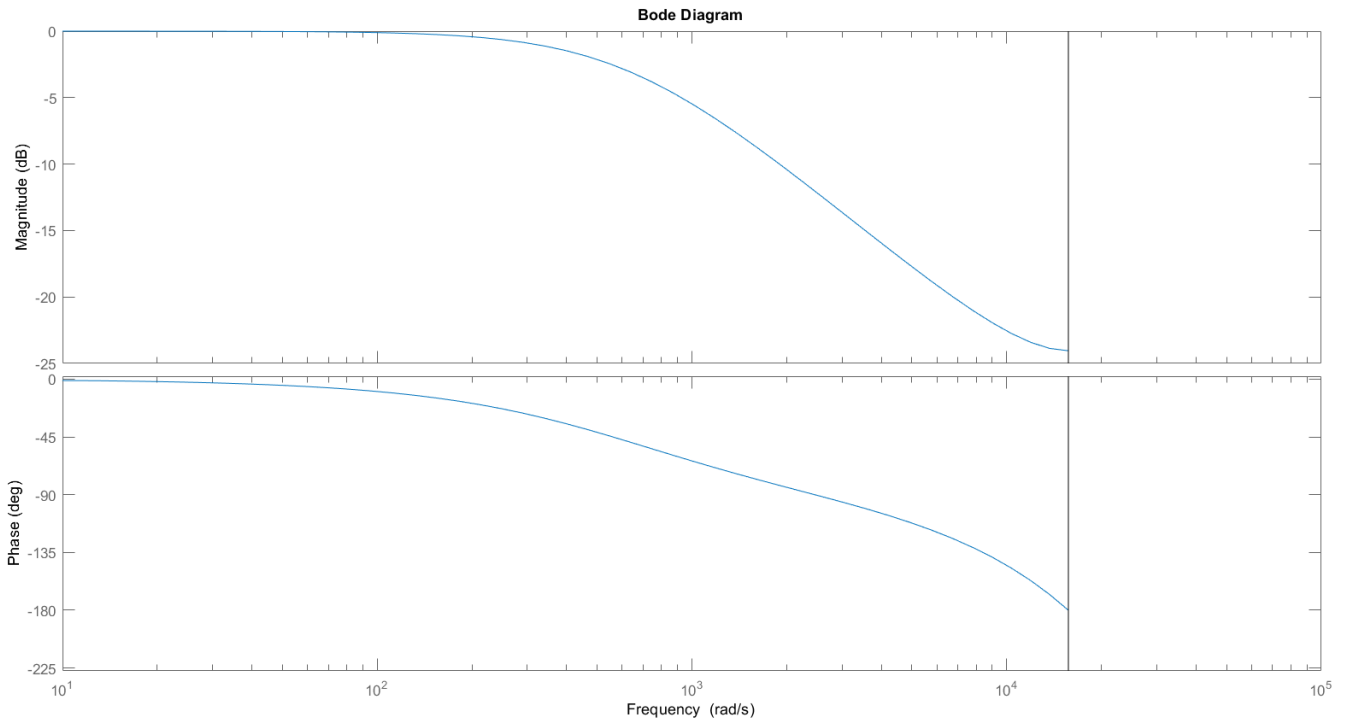
$$\begin{aligned} C_{LP}(z) &= K \cdot \frac{1 - A_1 z^{-1}}{B_1 - B_1 z^{-1}} \\ &= (1 - e^{-BW \cdot T}) \cdot \frac{1 - A_1 z^{-1}}{B_1 - B_1 z^{-1}} \end{aligned} \quad (1.6)$$

帶入系統參數可得：

$$C_{LP}(z) = 2.7010 \cdot \frac{z - 0.8805}{z - 1} \quad (1.7)$$

如此即完成控制器設計。

透過波德圖可知系統頻寬為 628 rad/s(約 100 Hz)，滿足設計需求：



**2.(20%)Deadbeat control:** You are asked to design a feedback control  $C_c(z)=C_{db}(z)$  with the fastest dynamic response. The deadbeat control is defined by  $G_{dr}(z) = I_a(z)/I_a^*(z) = z^{-1}$ . Show the controller  $C_{db}(z)$  transfer function with the numerical value.

由 deadbeat 控制器設計系統轉移函數為：

$$G_{dr}(z) = \frac{I_a(z)}{I_a^*(z)} = z^{-1} \quad (2.1)$$

透過梅森增益公式(Mason's Gain Formula)，可得閉路轉移函數為：

$$G_{dr}(z) = \frac{C_{db}(z) \cdot NSD(z)}{1 + C_{db}(z) \cdot NSD(z)} \quad (2.2)$$

求解  $C_{db}(z)$  可得：

$$C_{db}(z) = NSD(z)^{-1} \cdot \frac{G_{dr}(z)}{1 - G_{dr}(z)} \quad (2.3)$$

將(1.1)、(2.1)帶入(2.3)，可得 deadbeat 控制器：

$$C_{db}(z) = \frac{1 - A_1 z^{-1}}{B_1 - B_1 z^{-1}} \quad (2.4)$$

帶入系統參數可得：

$$C_{db}(z) = 22.8725 \cdot \frac{z - 0.8805}{z - 1} \quad (2.5)$$

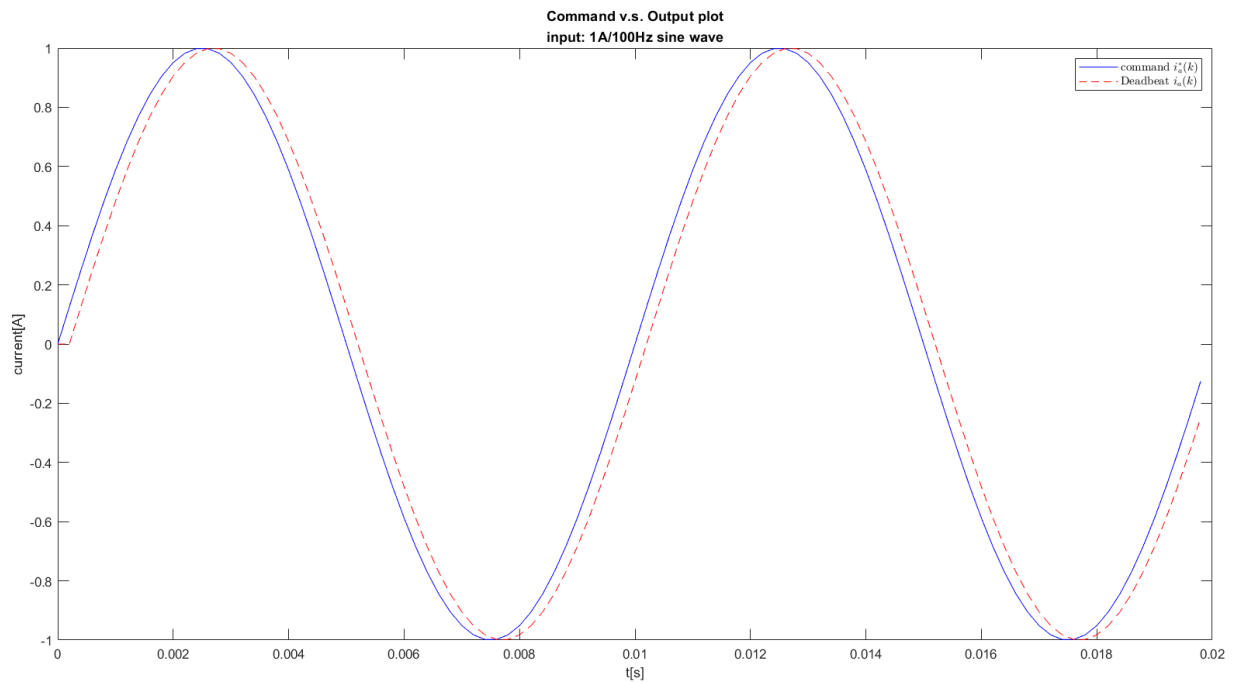
如此即完成控制器設計。

**NOTE:** 比較 PI 控制器與 deadbeat 控制器，雖然兩者的極、零點位置相同，其本質是相同的。但由於二者增益不同，這對後面在 tracking 及 disturbance rejection 的表現產生差異。

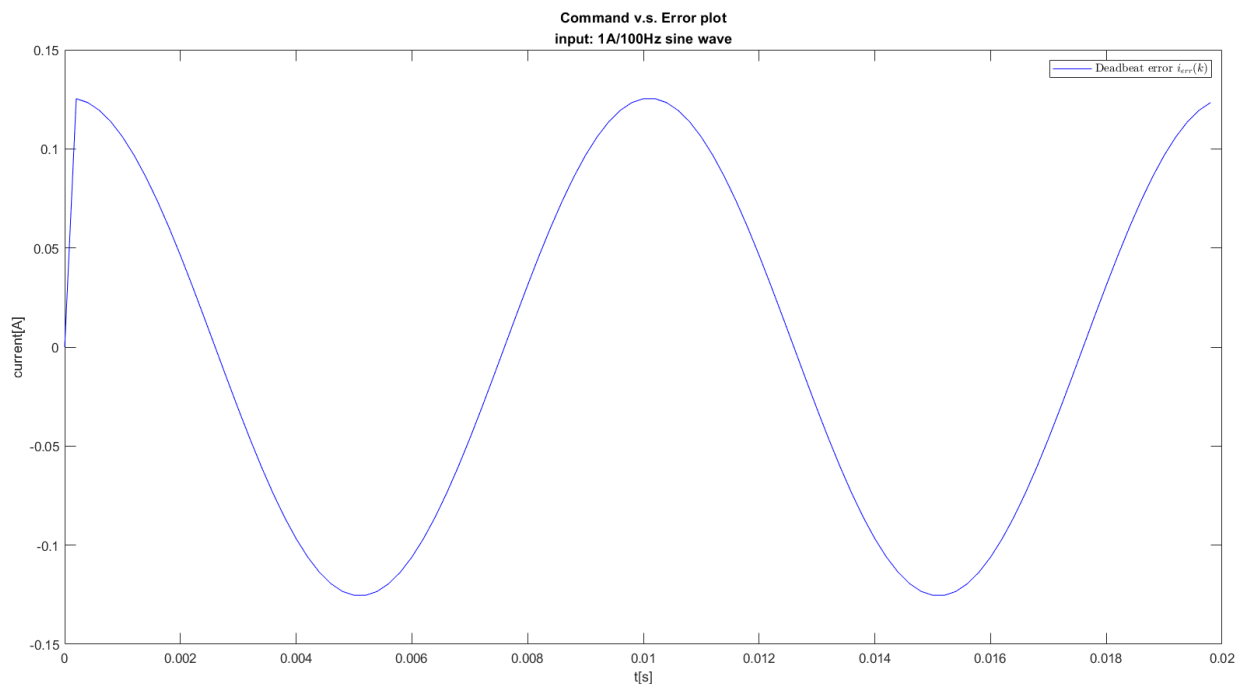
**3.(10%)One step delay:** Based on Simulink, apply a 1A/100Hz sine wave current command. Overlay two figures,  $i_a^*(k)$  &  $i_a(k)$  vs. time, and  $i_{err}(k) = i_a^*(k) - i_a(k)$  vs. time with deadbeat  $C_{db}(z)$  control. Explain the one step delay issue on  $i_a(k)$ . Propose your own controller to solve this delay. Otherwise, explain the reason why the one-step delay cannot resolve.

### 3.1 Simulation result of deadbeat controller :

當參考輸入為 1A/100Hz sine wave 時，其輸出  $i_a^*(k)$  &  $i_a(k)$  為：



其輸出誤差  $i_{err}(k) = i_a^*(k) - i_a(k)$  為：



### 3.2 One step delay issue :

由模擬結果可以看出，系統有一個 one step delay。若我們希望透過 Deadbeat control 設計將此 one step delay 消除，我們必須設計系統為：

$$G_{dr}(z) = \frac{I_a(z)}{I_a^*(z)} = 1 \quad (3.1)$$

但透過閉路轉移函數可以發現：

$$\begin{aligned} G_{dr}(z) = 1 &= \frac{C_{db}(z) \cdot NSD(z)}{1 + C_{db}(z) \cdot NSD(z)} \\ \implies 1 + C_{db}(z) \cdot NSD(z) &= C_{db}(z) \cdot NSD(z) \\ \implies 1 &= 0 \text{ (impossible)} \end{aligned}$$

不論如何設計 Deadbeat control。我們都不可能設計理想的閉迴路系統為 1。

因此，Deadbeat control 不可能設計一個不包含 delay 的系統(i.e.透過閉迴路不可能做到 ideal tracking ! )。

**4. (20%)Command tracking:** Design a current feedforward controller  $C_{\text{cff}}(z)$ . Assuming the ideal parameter estimation, show  $C_{\text{cff}}(z)$  transfer function with the numerical value. Apply a 1A/100Hz sine wave current command to the PI plus CFF control system. Overlay another two figures,  $i_a^*(k)$  &  $i_a(k)$  vs. time, and  $i_{\text{err}}(k) = i_a^*(k) - i_a(k)$  vs. time. Compare  $i_a(k)$  response with Problem 2. With CFF, no phase delay should be observed? Otherwise, explain the reason why the delay still appears with CFF.

#### 4.1 CFF 控制器設計：

設計理想系統為 ideal tracking：

$$G_{\text{dr}}(z) = \frac{I_a(z)}{I_a^*(z)} = 1 \quad (4.1)$$

可得：

$$G_{\text{dr}}(z) = \text{CFF}(z) \cdot \text{NSD}(z) \quad (4.2)$$

因此，設計前饋控制器為：

$$\text{CFF}(z) = \text{NSD}(z)^{-1} = \frac{z - A_1}{B_1} \quad (\text{noncausal t.f.}) \quad (4.3)$$

可以發現如此設計的前饋控制器為一非因果系統，因此必須乘上一個 one step delay。最終，設計前饋控制器為：

$$\text{CFF}(z) = \text{NSD}(z)^{-1} = \frac{z - A_1}{B_1 \cdot z} \quad (4.4)$$

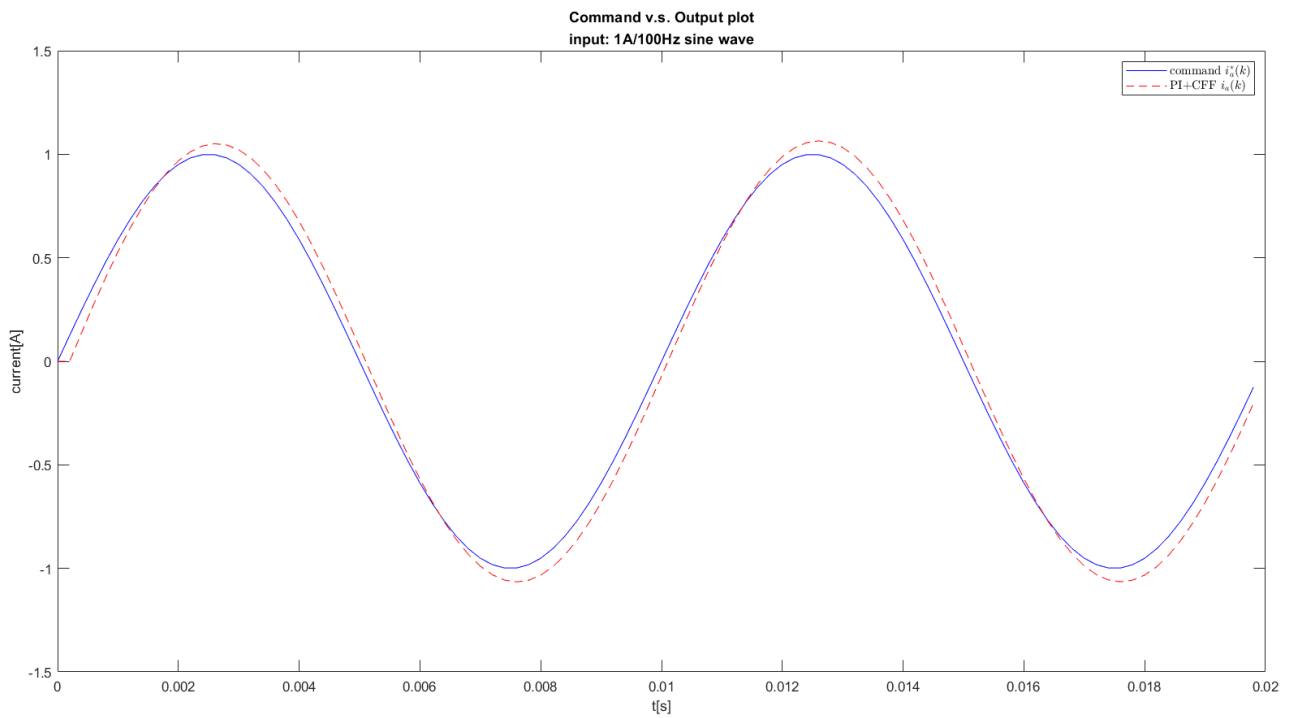
帶入系統參數可得：

$$\text{CFF}(z) = 22.8833 \cdot \frac{z - 0.8805}{z} \quad (4.5)$$

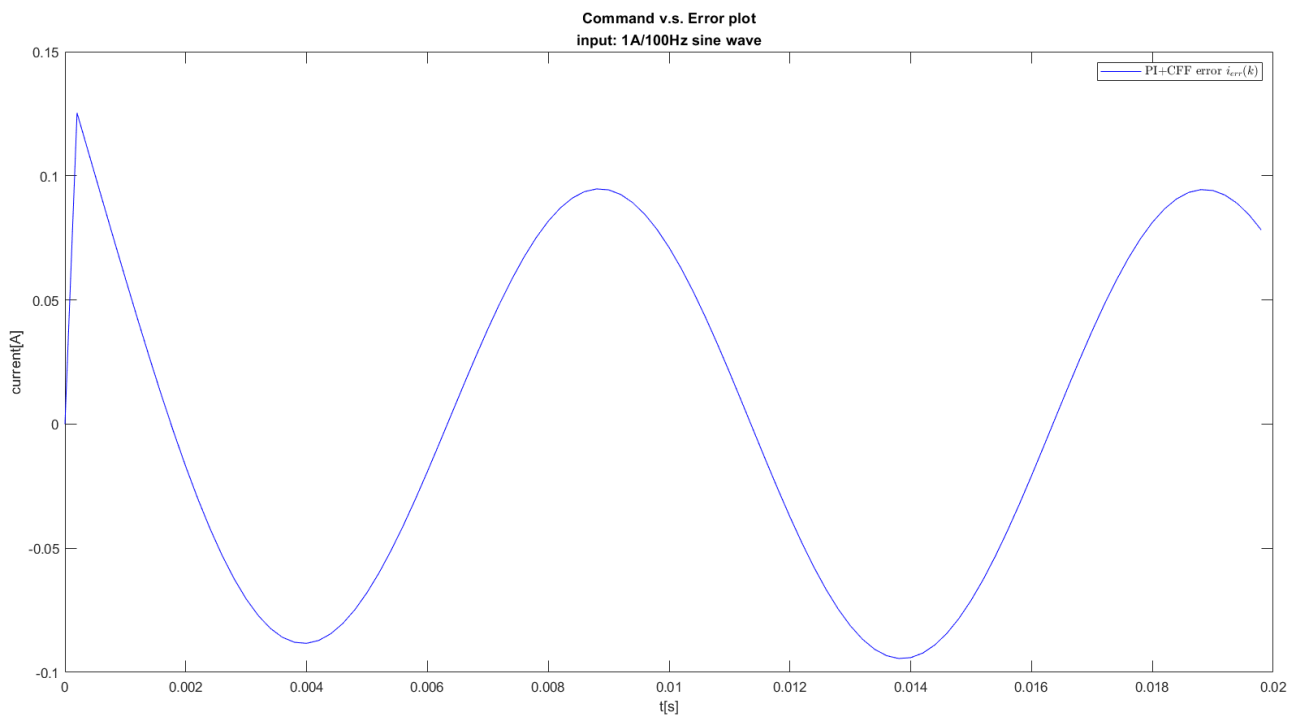
且透過觀察可知當系統輸入為 1A/100Hz sine wave 時，其輸出同樣也是弦波為可以實現的(feasible input)，即完成前饋控制器的設計。

## 4.2 Simulation result of PI+CFF controller :

當參考輸入為 1A/100Hz sine wave 時，其輸出  $i_a^*(k)$  &  $i_a(k)$  為：

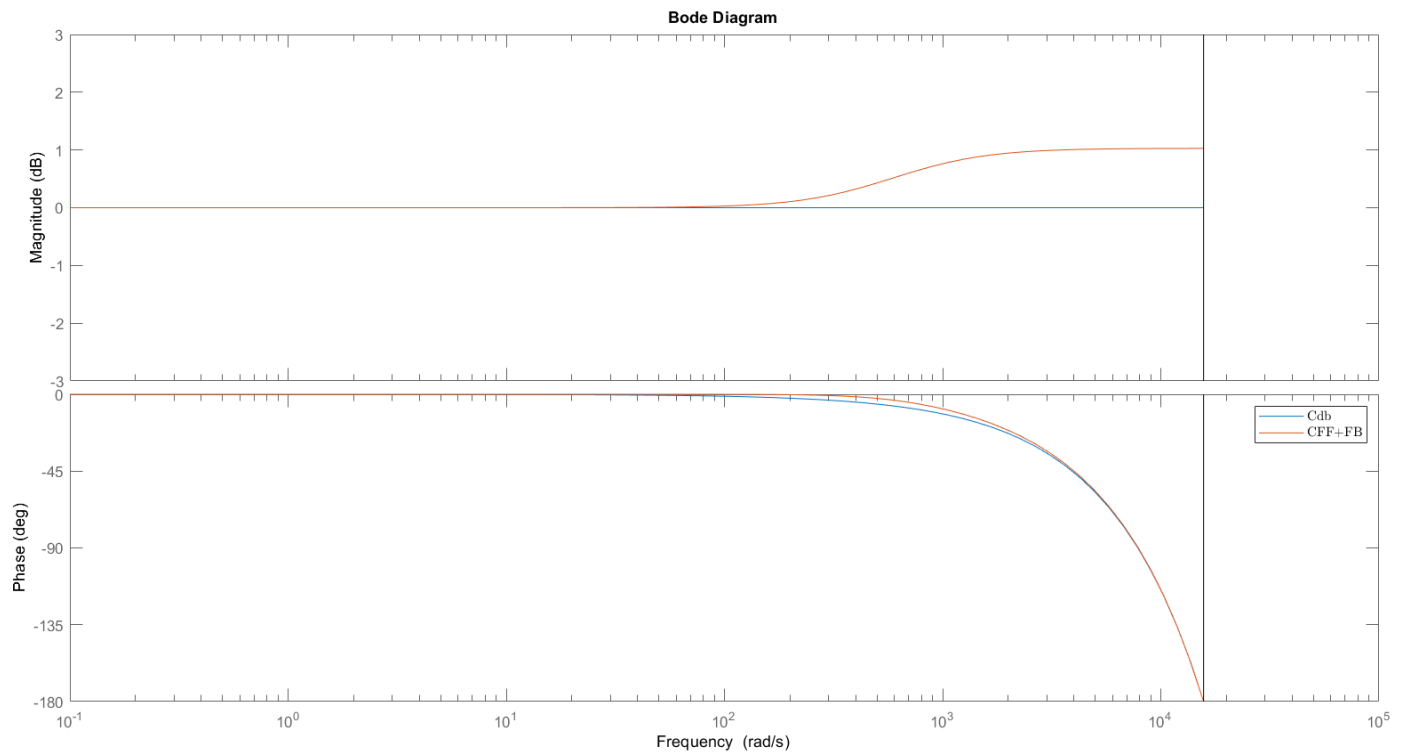


其輸出誤差  $i_{err}(k) = i_a^*(k) - i_a(k)$  為：



### 4.3 Compare $i_a(k)$ response with Problem 2 :

由模擬結果可以發現，雖然 PI+CFF controller 的振幅較大，但因為其相位落後並沒有 deadbeat controller 大。PI+CFF controller 的輸出誤差  $i_{err}(k)$  比 deadbeat controller 小。透過比較兩者系統波德圖可以印證這點。





#### 4.4 Phase delay issue using PI+CFF controller :

由前節所得的系統響應可以看出其相位會產生落後。在此，我們透過證明可以知道，不論是 PI 控制器還是 CFF 控制器都會使系統的相位落後。在此，分別對兩個控制器造成相位落後的原因進行說明：

- Phase delay issue using PI controller :

由 3.2 節已經證明，使用回授系統不可能做到 ideal tracking，在系統的響應勢必包含 delay。

- Phase delay issue using CFF controller :

由 4.1 節 CFF 控制器設計可知，若想要達到 ideal tracking 我們必須設計 CFF 控制器為：

$$\text{CFF}(z) = \text{NSD}(z)^{-1} = \frac{z - A_1}{B_1} \quad (\text{noncausal t.f.}) \quad (4.6)$$

若觀察 CFF 轉移函數，可得系統的差分方程式為：

$$\begin{aligned} \frac{e_a(z)}{i_a^*(z)} &= \frac{z - A_1}{B_1} \\ \implies B_1 \cdot E_a(k) &= I_a^*(k+1) - A_1 \cdot I_a^*(k) \end{aligned} \quad (4.7)$$

當前的狀態  $E_a(k)$  與未來的輸出  $I_a^*(k+1)$  有關(非因果系統)，而無法實現。

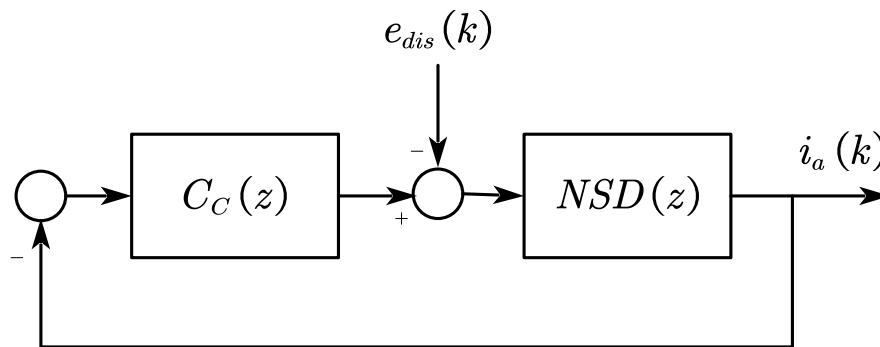
若希望控制器為因果系統，我們只能夠加一個 delay 上去，可得：

$$\begin{aligned} \frac{e_a(z)}{i_a^*(z)} &= \frac{z - A_1}{B_1} \cdot z^{-1} \\ \implies B_1 \cdot E_a(k) &= I_a^*(k) - A_1 \cdot I_a^*(k-1) \end{aligned} \quad (4.8)$$

因此，不論是 PI 控制器還是 CFF 控制器都會使系統的相位落後。

**5. (15%)Disturbance rejection:** Apply a discretized 1V/100Hz sine wave voltage disturbance  $e_{dis}(k)$  in Fig. 3. Explain the performance difference between PI plus CFF and deadbeat without CFF. Explain the performance difference between two different control methods.

由於我們現在希望知道雜訊對系統的影響，考慮雜訊對輸出的方塊圖可得：



可知系統的轉移函數為：

$$\frac{I_a(z)}{e_{dis}(z)} = \frac{NSD(z)}{1 + C_c(z) \cdot NSD(z)} \quad (5.1)$$

與 Project #2 不同的是，由於雜訊為弦波輸入，根據線性系統理論：

「若系統為線性的，當輸入為弦波時，輸出亦是弦波，但振幅與相位改變。」

我們並不能使用終值定理去計算終值，進而比較控制器的階數以說明哪個控制器對雜訊抑制的效果較佳。

雖然我們並不能夠透過上面的方法做弦波雜訊抑制的比較，但我們知道輸入為弦波時，其輸出亦是弦波。站在頻域分析的角度，我們只要比較兩者波德圖的振幅大小，即可知道哪一個控制器對弦波雜訊有更好的抑制效果(i.e.振幅響應越小的控制器，對弦波雜訊較佳)。

但不幸的是，由於  $z$  域對頻域的轉換並不是如時域(令  $s=j\omega$ )為有理函數，而是  $z=e^{j\omega T}$ 。因此，並不能  $z$  域轉移函數的極點、零點與增益去說明其與波德圖的關係。

● **Bilinear transformation :**

其中一個解決的辦法是，透過 bilinear transformation，我們可以將  $z$  域轉移函數轉移至一個新的空間—— $w$  域。在這樣的近似下，原本複雜的計算在  $w$  域下，有變回有理函數。

我們知道 bilinear transformation 為：

$$w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad (5.2)$$

可得 inverse bilinear transformation 為：

$$z = \frac{1 + \frac{wT}{2}}{1 - \frac{wT}{2}} \quad (5.3)$$

$w$  域為一複數平面，為求得虛部  $v$  與頻率  $\omega$  的關係，令  $s=j\omega$  且  $z=e^{j\omega T}$  代入(5.2)中並經由推導可得：

$$w = jv = j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2} \quad (5.4)$$

由(5.4)可知，當頻率  $\omega$  隨著定義域  $[0, \pi/T]$  改變時， $z$  在單位圓上移動，且  $v$  從 0 跑到無限大。由(5.4)亦可以發現， $v$  和  $\omega$  的關係並不是線性的，但當  $\omega \ll \omega_s/2 = \pi/T$  時  $\omega \approx v$ 。如此，兩者的差異即可省略。

最後，我們可以透過 bilinear transformation，將系統轉移函數轉移至頻域  $w$ ，以比較使用不同控制器下，系統對雜訊輸入的波德圖，以比較兩者的雜訊抑制效果。

**NOTE :**  $628 \text{ rad/s (100 Hz)} \ll \pi/T = 15708 \text{ rad/s}$ ，因此  $\omega \approx v$ 。

● 控制器之頻域響應比較：

當使用 **deadbeat 控制器**時，透過(5.2)的轉換，可得系統在頻域  $w$  的轉移函數為：

$$\frac{I_a(w)}{e_{dis}(w)} = \frac{B_1 T}{(1 - A_1)} \cdot \frac{w \cdot \left( \frac{w}{\frac{2}{T}} - 1 \right)}{\left( \frac{w}{\frac{2}{T}} - 1 \right) \left( \frac{\frac{w}{\frac{2}{T}}}{\frac{2(1 - A_1)}{T(1 + A_1)}} + 1 \right)} \quad (5.5)$$

代入系統參數可得：

$$\frac{I_a(w)}{e_{dis}(w)} = 7.3168e - 05 \cdot \frac{w \cdot \left( \frac{w}{10000} - 1 \right)}{\left( \frac{w}{10000} - 1 \right) \left( \frac{w}{635.51} + 1 \right)} \quad (5.6)$$

當使用 **PI+CFF 控制器**時，由對系統轉移，透過(5.2)的轉換，可得系統在頻域  $w$  的轉移函數為：

$$\frac{I_a(w)}{e_{dis}(w)} = \frac{B_1 T}{(1 - A_1)} \cdot \frac{e^{BW \cdot T}}{(e^{BW \cdot T} - 1)} \cdot \frac{w \cdot \left( \frac{w}{\frac{2}{T}} - 1 \right)}{\left( \frac{\frac{w}{\frac{2}{T}}}{\frac{2(e^{BW \cdot T} - 1)}{T(e^{BW \cdot T} + 1)}} - 1 \right) \left( \frac{\frac{w}{\frac{2}{T}}}{\frac{2(1 - A_1)}{T(1 + A_1)}} + 1 \right)} \quad (5.7)$$

代入系統參數可得：

$$\frac{I_a(w)}{e_{dis}(w)} = 6.1961e - 04 \cdot \frac{w \cdot \left( \frac{w}{10000} - 1 \right)}{\left( \frac{w}{635.51} - 1 \right) \left( \frac{w}{627.49} + 1 \right)} \quad (5.8)$$

**NOTE：比較 CFF 與 deadbeat 控制器**

CFF 與 deadbeat 控制器雖然都是基於 NSD 所設計的。然而，兩者最大的不同是，前者是開路控制器；後者是閉路控制器。由(5.1)可知，**command feedforward(CFF)**對雜訊一點辦法都沒有。而有別於 CFF，**deadbeat 控制器**可以做到雜訊抑制。當然，若雜訊已知，我們可以針對雜訊設計前饋控制器已達到雜訊抑制的效果，即 disturbance feedforward controller。

比較(5.6)與(5.8)，兩者同樣是包含一微分器、一不穩定零點及兩個穩定極點。而不穩定零點在頻域響應下只影響相位，對振幅無關，因此可以忽略。

● **低頻響應：**

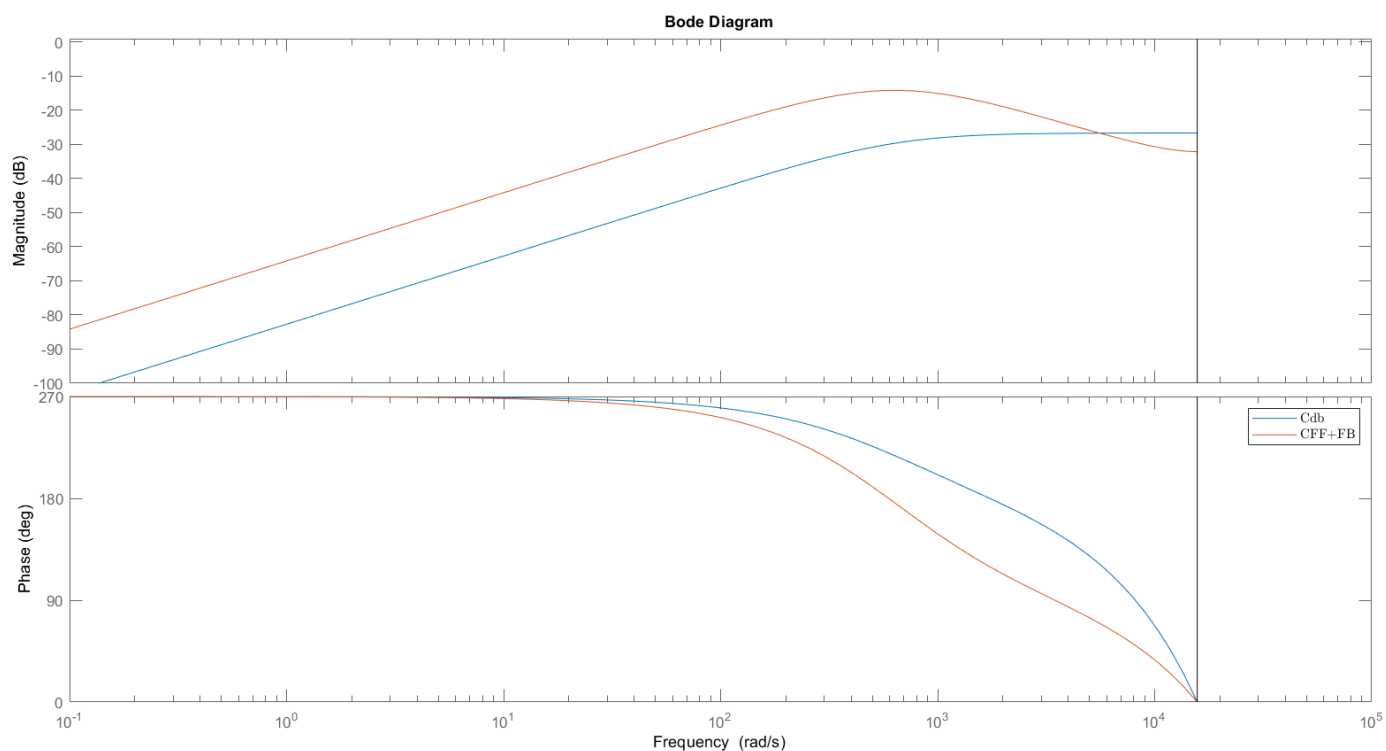
在低頻時，微分器在波德圖上是+20 dB/decade 的高通濾波器，觀察兩者增益值可以發現，PI+CFF 控制器的增益比 deadbeat 控制器多乘一項  $\frac{e^{BW \cdot T}}{(e^{BW \cdot T} - 1)}$ 。而  $\frac{e^{BW \cdot T}}{(e^{BW \cdot T} - 1)}$  恆大於 1 ( $BW > 0$ )。因此，PI+CFF 控制器的增益必大於 deadbeat 控制器的增益。因此，在低頻響應時，deadbeat 控制器抑制雜訊的效果會比 PI+CFF 控制器佳。

● **高頻響應：**

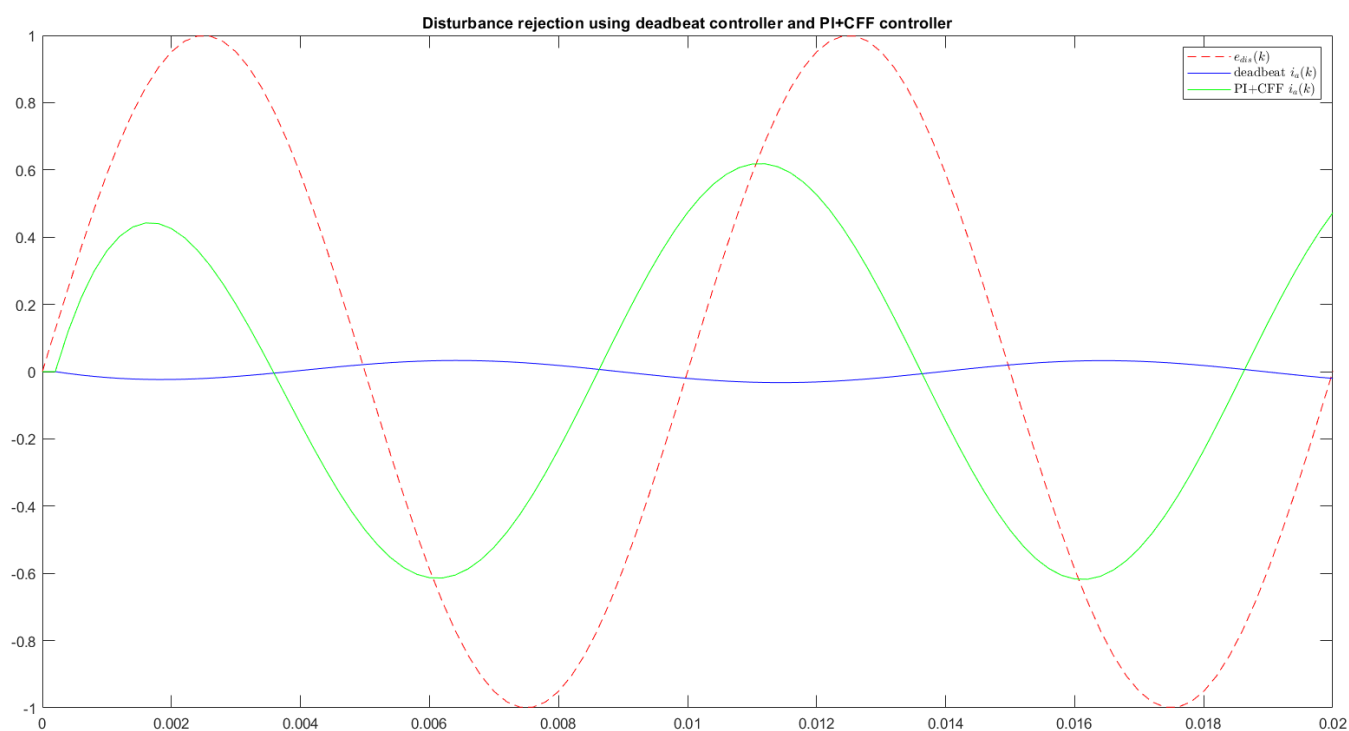
由於微分器在波德圖上是+20 dB/decade 的高通濾波器，因此若沒有低通濾波會導致高頻下的訊號被放大。幸運的是，不論是 PI+CFF 控制器還是 deadbeat 控制器都有兩個穩定極點，因此兩者都可以達到高頻率波的效果。但是由於 PI+CFF 的轉角頻率都小於 deadbeat 控制器。因此，在高頻響應時，PI+CFF 控制器抑制雜訊的效果會比 deadbeat 控制器佳。

	雜訊抑制效果
低頻雜訊	deadbeat 控制器較佳
高頻雜訊	PI + CFF 控制器較佳
628 rad/s (100 Hz)	deadbeat 控制器較佳

最終，比較兩者系統波的圖，可以印證上述的觀點。



因此當輸入雜訊為  $1\text{V}/100\text{Hz}$  時，雖然兩個控制器都能達到抑制雜訊的效果，但 deadbeat 控制器抑制雜訊的效果較佳。由模擬結果也能證明這一點。



**6.(15%)Parameter sensitivity:** Re-evaluate the command tracking (Problem 4) and disturbance rejection (Problem 5) on two different control methods, PI plus CFF and deadbeat without CFF. However, the parameter error is considered under  $\hat{R}_p = 4R_p$ . Considering the resistance parameter error, summary differences between two control methods from both command tracking and disturbance rejection. No simulation is required. Only theory explanation with the support from key equations are expected.

● **Command tracking (redo Problem 4) :**

當使用 **deadbeat 控制器**時，透過(5.2)之 Bilinear transform，可得系統在頻域  $w$  的轉移函數為：

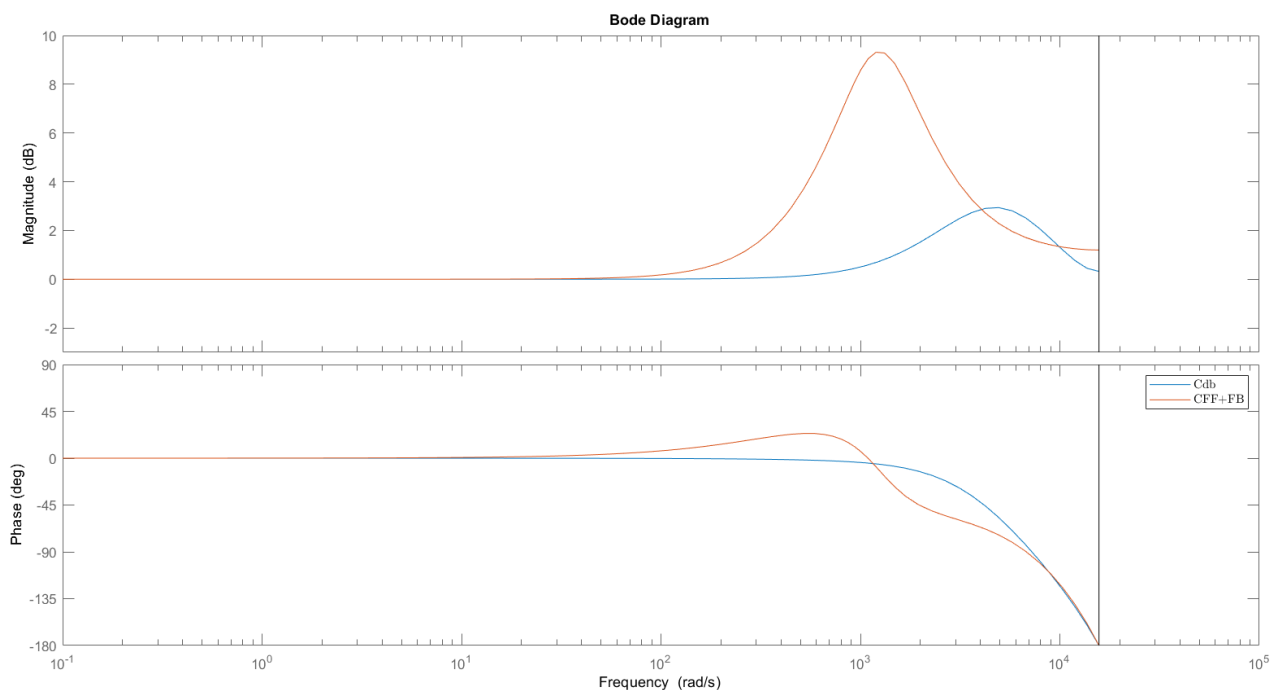
$$\frac{I_a(w)}{I_a^*(w)} = -0.9998 \cdot \frac{\left(\frac{w}{10000} - 1\right)\left(\frac{w}{2406} + 1\right)}{\left(\frac{w}{4586.6 + 1982.6i} + 1\right)\left(\frac{w}{4586.6 - 1982.6i} + 1\right)} \quad (6.1)$$

當使用 **PI+CFF 控制器**時，透過(5.2)之 Bilinear transform，可得系統在頻域  $w$  的轉移函數為：

$$\frac{I_a(w)}{I_a^*(w)} = -1.0006 \cdot \frac{\left(\frac{w}{10000} - 1\right)\left(\frac{w}{2406} + 1\right)\left(\frac{w}{558} + 1\right)}{\left(\frac{w}{10000} + 1\right)\left(\frac{w}{581 + 1096i} + 1\right)\left(\frac{w}{581 - 1096i} + 1\right)} \quad (6.2)$$

透過(6.1)及(6.2)可繪製系統波德圖，可知當參考輸入  $I_a^*(k)$  為 1A/100Hz sine 時，

CFF 受參數影響大。因此 **deadbeat 控制器 Command tracking 的響應較佳**：



● **Disturbance rejection (redo Problem 5) :**

當使用 **deadbeat 控制器**時，透過(5.2)之 Bilinear transform，可得系統在頻域  $w$  的轉移函數為：

$$\frac{I_a(w)}{e_{dis}(w)} = 1.8973e - 05 \cdot \frac{w \left( \frac{w}{10000} - 1 \right)}{\left( \frac{w}{4586.6 + 1982.6i} + 1 \right) \left( \frac{w}{4586.6 - 1982.6i} + 1 \right)} \quad (6.3)$$

當使用 **PI+CFF 控制器**時，透過(5.2)之 Bilinear transform，可得系統在頻域  $w$  的轉移函數為：

$$\frac{I_a(w)}{e_{dis}(w)} = 1.6067e - 04 \cdot \frac{w \left( \frac{w}{10000} - 1 \right)}{\left( \frac{w}{581 + 1096.4i} + 1 \right) \left( \frac{w}{581 - 1096.4i} + 1 \right)} \quad (6.4)$$

透過(6.3)及(6.4)可繪製系統波德圖，可知當雜訊  $e_{dis}(k)$  為  $1A/100Hz$  sine 時，**兩個控制器都能夠達到雜訊抑制的效果，但 deadbeat 控制器之雜訊抑制效果較佳：**

