數位控制系統 Project #2

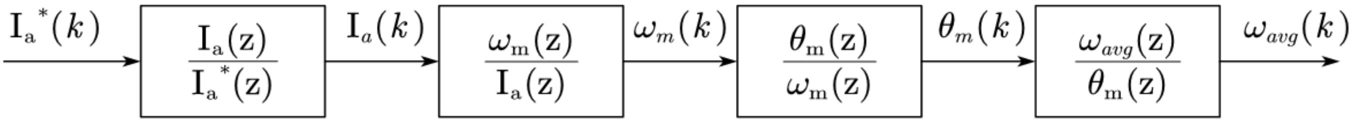
機械所 系統控制組 劉育如 R09522826

機械所 系統控制組 莊源誠 R09522850

台科大 機械工程系 郭忠翔 B10531019

1. Plot the discrete-time "cascaded" block diagram in Z-domain with energy flow from $\mathrm{i}_a^*(\mathrm{k}) \Longrightarrow \mathrm{i}_a(\mathrm{k}) \Longrightarrow \omega(\mathrm{k}) \Longrightarrow \theta_\mathrm{m}(\mathrm{k}) \Longrightarrow \omega_\mathrm{avg}(\mathrm{k})$. Express all functions with numerical values.

系統的方塊圖可以表示為：



當系統參數為：

$$\begin{aligned} Jp &= 0.01 && Kg-m^2 \\ K_T &= 0.14 && Nm/Amp \\ \tau_i &= 0.0003 && sec \\ T &= 0.0002 && sec \end{aligned}$$

其中系統的子轉移函數分別為：

Transfer function for $\mathrm{i}_a^*(\mathrm{k}) \Longrightarrow \mathrm{i}_a(\mathrm{k})$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{I_a(z)}}{\mathrm{I_a^*(z)}} &= (1-\mathrm{z}^{-1}) \cdot \mathscr{Z}\left(\frac{1}{\mathrm{s}(\tau_\mathrm{i}\mathrm{s}+1)}\right) \\ &= \frac{\left(1-e^{-\frac{T}{\tau_i}}\right) \cdot \mathrm{z}^{-1}}{1-e^{-\frac{T}{\tau_i}} \cdot \mathrm{z}^{-1}} = 0.4866 \cdot \frac{\mathrm{z}^{-1}}{(1-0.5134 \cdot \mathrm{z}^{-1})} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Transfer function for $\mathrm{i}_a(\mathrm{k}) \Longrightarrow \omega(\mathrm{k})$:

$$\frac{\omega_\mathrm{m}(\mathrm{z})}{\mathrm{I_a(z)}} = 1.55 \times 10^{-3} \cdot \frac{1+0.801\mathrm{z}^{-1}}{1-\mathrm{z}^{-1}} \tag{1.2}$$

Transfer function for $\omega(\mathrm{k}) \Longrightarrow \theta_{\mathrm{m}}(\mathrm{k})$:

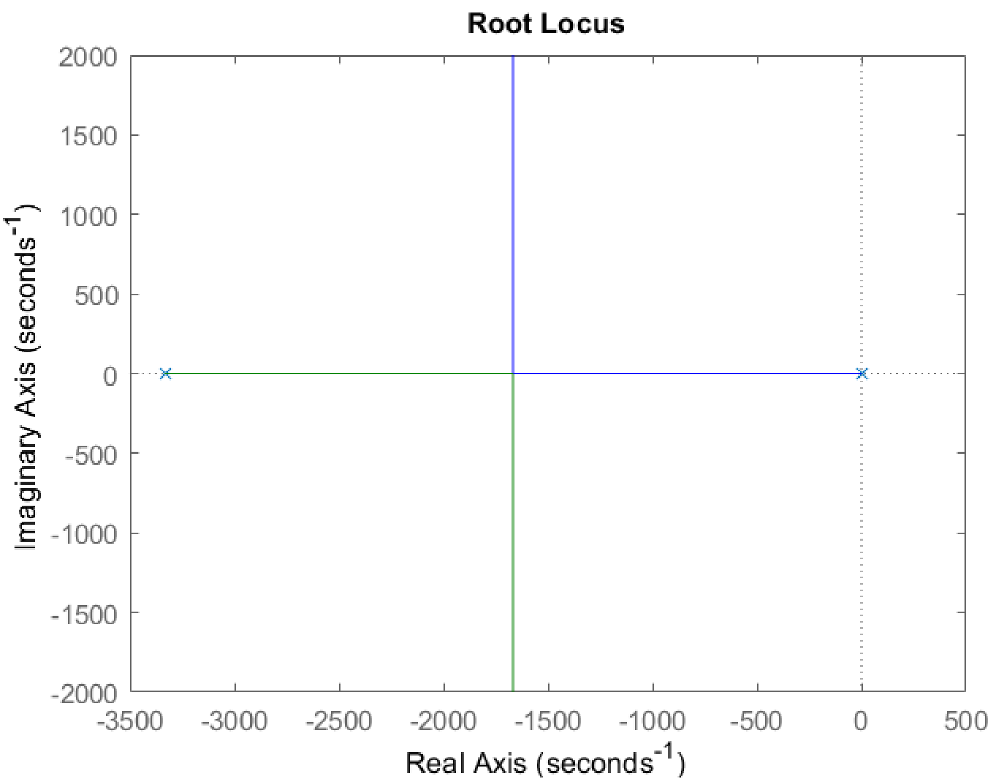
$$\frac{\theta_{\mathrm{m}}(\mathrm{z})}{\omega_{\mathrm{m}}(\mathrm{z})}=\frac{7.0196\times10^{-5}(1+3.1904\mathrm{z}^{-1})(1+0.2247\mathrm{z}^{-1})}{(1-\mathrm{z}^{-1})(1+0.801\mathrm{z}^{-1})} \tag{1.3}$$

Transfer function for $\theta_{\mathrm{m}}(\mathrm{k}) \Longrightarrow \omega_{\mathrm{avg}}(\mathrm{k})$:

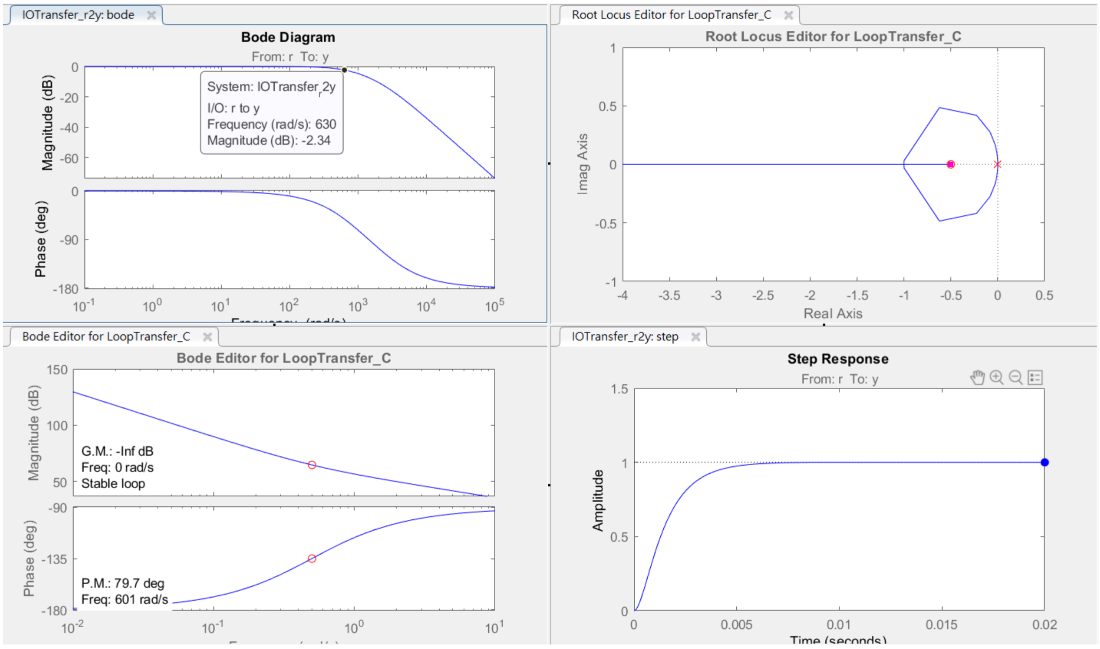
$$\frac{\omega_{avg}(\mathrm{z})}{\theta_{\mathrm{m}}(\mathrm{z})}=\frac{\omega_{avg}(\mathrm{z})}{\omega_{\mathrm{m}}(\mathrm{z})}\cdot\frac{\omega_{\mathrm{m}}(\mathrm{z})}{\theta_{\mathrm{m}}(\mathrm{z})}=5.0003\times10^{3}\cdot(1-\mathrm{z}^{-1}) \tag{1.4}$$

2. C(z) design based on continuous approximation: Design a discrete-time speed controller with zero steady state error and 100Hz bandwidth (s = -2π×100Hz). You may apply the pole/zero cancellation in continuous-time. Explain the design procedure and show the controller transfer function ($\frac{\mathrm{I}_a^*(\mathrm{z})}{\omega_{\mathrm{err}}(\mathrm{z})}$ = ?) with both parameter and numerical values. Please pay attention on the non-minimum phase zero at Z = -3.1904.

首先，由開路系統的時域根軌跡可以發現，此開路系統為穩定：



為達成「頻寬為 100 Hz」且「沒有穩態誤差」兩個設計條件，透過 Controller System Designer 設計 PI 控制器：



為達設計條件，將時域之 PI 控制器設計為以下形式：

$$C_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \tag{2.1}$$

$$Kp = 43.6159,\ K_i = 21.8090 \tag{2.2}$$

經過設計後可以發現，最終閉路系統的頻寬為 737.9135 rad/s (約 117.3 Hz)，且沒有穩態誤差，滿足設計需求。

最終，透過 bilinear transform:

$$s = \frac{2}{T}\frac{(z-1)}{(z+1)} \tag{2.3}$$

即可將式(2.1)改寫為離散控制器。最終，離散控制器為:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{I}_a^*(\mathrm{z})}{\omega_{\mathrm{err}}(\mathrm{z})} &= C(z)\cdot \hat{K}_T^{-1} = C_{PI}(z) \\ &= \left(K_p + K_i \frac{T}{2}\frac{(z+1)}{(z-1)}\right) \quad \text{where } Kp = 43.6159,\ K_i = 21.8090 \\ &= 43.6159 + 0.0022\cdot\frac{(z+1)}{(z-1)}\end{aligned} \tag{2.4}$$

Note：由於此系統開路時穩定，使用 PI 控制器控制系統仍穩定。因此，為與 direct design 比較，設計兩者的 PI 控制器的增益值相同。

3. C(z) design based on direct design: Design C(z) with the same requirement from Question#2. You may apply the pole/zero cancellation in discrete-time. Explain the design procedure and show the controller transfer function ($\frac{I_a^*(z)}{\omega_{err}(z)}$ = ?) with both parameter and numerical values. A non-minimum phase zero at Z = -3.1904 must be considered in your controller design.

透過子系統轉移函數的解析解：

Transfer function for $i_a^*(k) \Longrightarrow i_a(k)$:

$$\frac{I_a(z)}{I_a^*(z)} = \frac{\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau_i}}\right) \cdot z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau_i}} \cdot z^{-1}} \tag{3.1}$$

Transfer function for $i_a(k) \Longrightarrow \omega(k)$:

$$\frac{\omega_m(z)}{I_a(z)} = \frac{K_T}{J_p} \frac{B_{\omega i0} + B_{\omega i1} z^{-1}}{A_{\omega i}(1 - z^{-1})}$$
$$A_{\omega i} = \frac{1}{\tau_i}\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau_i}}\right),\ B_{\omega i0} = \frac{T}{\tau_i} - 1 + e^{-\frac{T}{\tau_i}},\ and\ B_{\omega i1} = 1 - e^{-\frac{T}{\tau_i}} - \frac{T}{\tau_i} e^{-\frac{T}{\tau_i}} \tag{3.2}$$

Transfer function for $\omega(k) \Longrightarrow \theta_m(k)$:

$$\frac{\theta_m(z)}{\omega_m(z)} = \frac{B_{\theta\omega 0} + B_{\theta\omega 1} z^{-1} + B_{\theta\omega 2} z^{-2}}{1 + A_{\theta\omega 1} z^{-1} + A_{\theta\omega 2} z^{-2}}$$
$$\begin{cases} A_{\theta\omega 1} = \dfrac{B_{\omega i1} - B_{\omega i0}}{B_{\omega i0}} \\ A_{\theta\omega 2} = \dfrac{-B_{\omega i1}}{B_{\omega i0}} \\ B_{\theta\omega 0} = \dfrac{T^2}{2\tau_i B_{\omega i0}} - \tau_i \\ B_{\theta\omega 1} = \dfrac{T^2}{2\tau_i B_{\omega i0}}\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau_i}}\right) - A_{\theta\omega 1}\tau_i \\ B_{\theta\omega 2} = -\dfrac{T^2}{2\tau_i B_{\omega i0}} e^{-\frac{T}{\tau_i}} - A_{\theta\omega 2}\tau_i \end{cases} \tag{3.3}$$

將(3.1)、(3.2)及(3.3)相乘，即可得在不同取樣時間下的 New System Dynamics:

$$NSD(z) = \frac{I_a(z)}{I_a^*(z)} \cdot \frac{\omega_m(z)}{I_a(z)} \cdot \frac{\theta_m(z)}{\omega_m(z)} \tag{3.4}$$

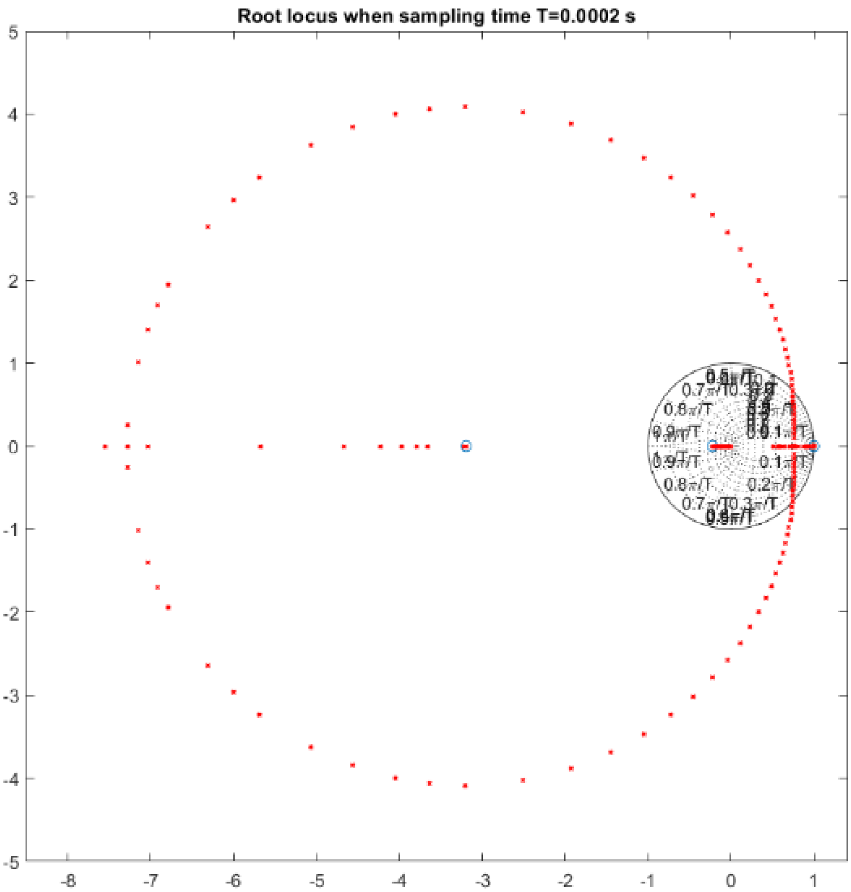
透過(1.1)、(1.2)及(1.3)相乘可得當取樣時間$T = 0.0002\ s$時，離散系統的$NSD(z)$為：

$$NSD(z) = \frac{5.294 \times 10^{-8} \cdot z^{-1} \cdot (1 + 3.1904 z^{-1}) \cdot (1 + 0.2247 z^{-1})}{(1 - 0.5134 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1})^{2}} \tag{3.5}$$

得到實際的離散系統，我們即可透過 pole/zero cancellation 的方式，將根放到我們想要的位置以滿足設計需求。因此，設計離散控制器為：

$$C_{\text{direct\_design}}(z) = K_c \cdot \frac{(z - \delta_c)}{(z - 1)} \tag{3.6}$$

值得注意的是，由於系統包含一支不穩定的零點，因此當增益太大時，仍會導致系統會發散。令$\delta_c = 0.9999$為一靠近 1 的零點。透過離散根軌跡可以發現，雖然系統包含一支不穩定的零點，導致當增益太大時系統仍會發散，但仍有一部份的根落在單位圓內，使系統穩定。且為避免震盪的現象，取增益值$K_c = 43.6181$使系統右邊的兩支極點重根(critical-damped)，即完成控制器設計。

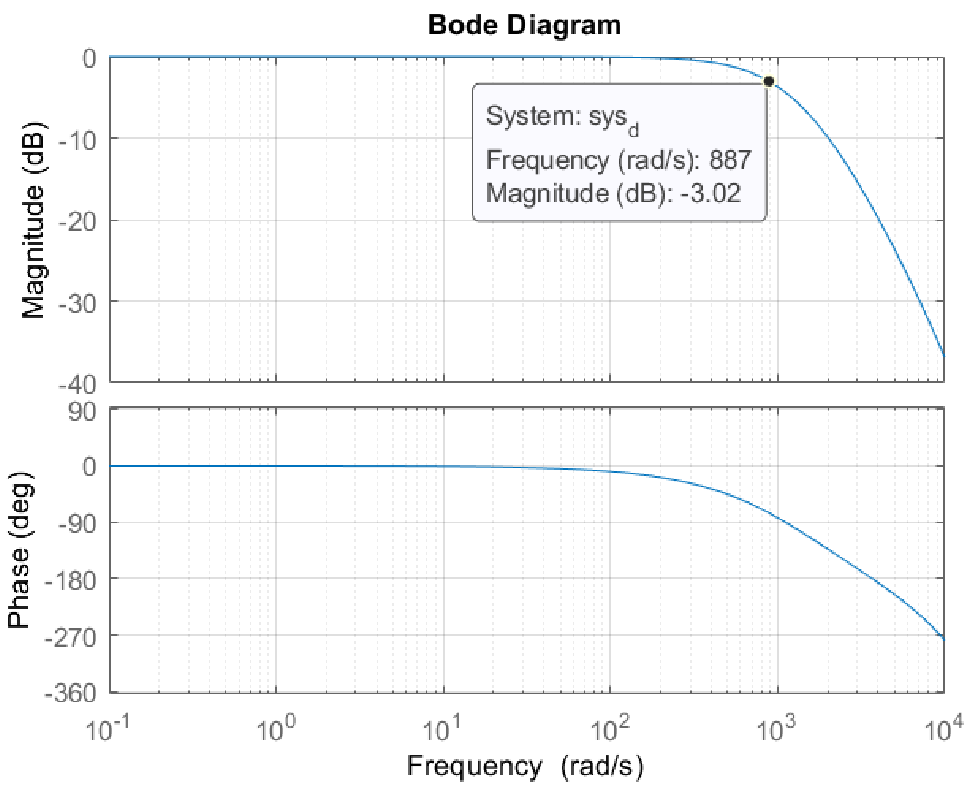


最終，離散控制器為:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{I}_a^*(\mathrm{z})}{\omega_{\mathrm{err}}(\mathrm{z})} &= C(z)\cdot \hat{K}_T^{-1} = C_{\mathrm{direct\_design}}(z) \\
&= K_c \cdot \frac{(z-\delta_c)}{(z-1)} \quad \text{where } K_c = 43.6181,\ \delta_c = 0.9999 \\
&= 43.6181 \cdot \frac{(z-0.9999)}{(z-1)}
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Note：由於我們知道系統的 NSD 的解析式，因此，當取樣時間改變時，我們即可得到針對不同取樣時間的 NSD。再經由上面的流程，即可設計針對不同取樣時間的控制器。

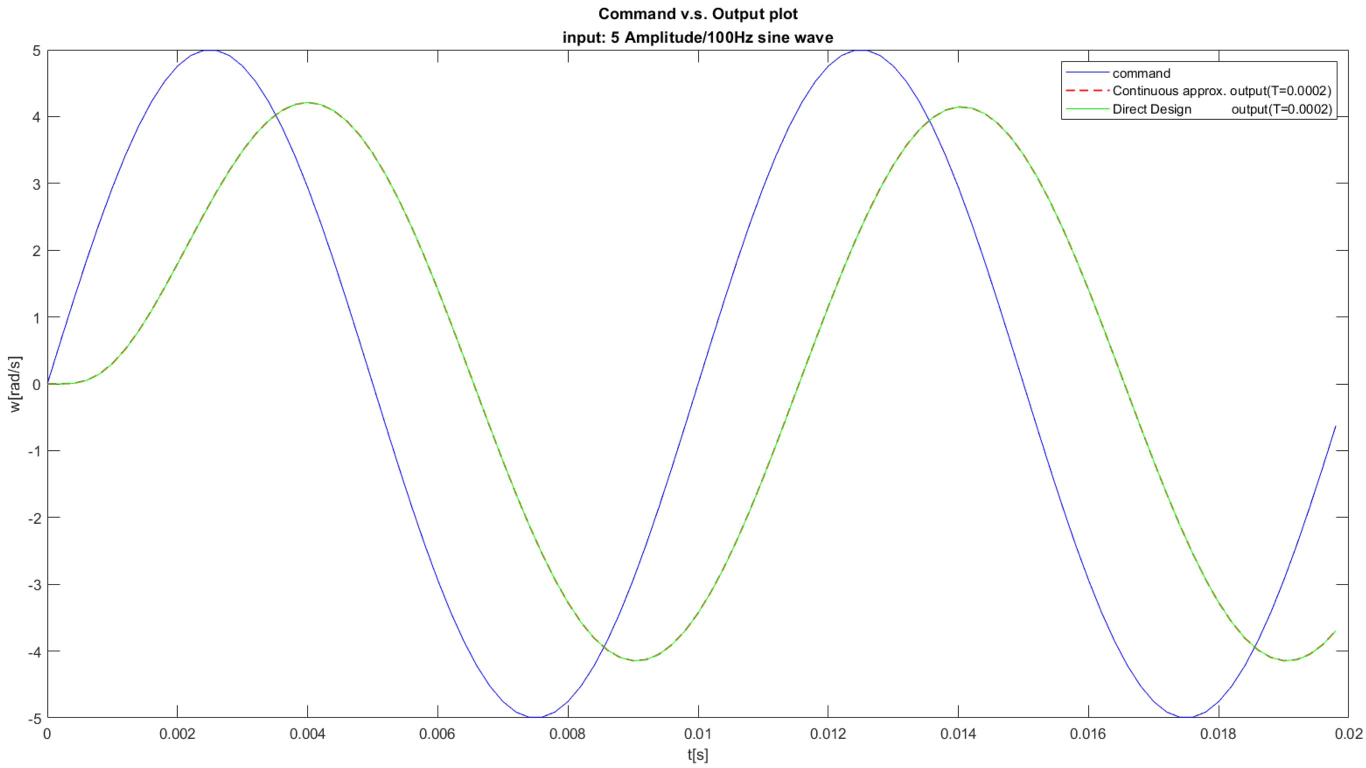
由離散系統的波德圖可以發現，此離散閉路系統的頻寬為 887 rad/s (約 141.1 Hz)，且沒有穩態誤差，滿足設計需求。



4. Tracking comparison: Construct a Simulink model from the example file. Apply a 5A/100Hz sine-wave speed command to compare these two controllers. Compare two different sample time T respectively at 0.0002 sec and 0.0005 sec. Please overlay $\omega^*_{avg}(k)$, $\omega_{avg}(k)$ (continuous approximation) and $\omega_{avg}(k)$ (direct design) in one plot to demonstrate the performance difference. Two figures with different sample time should be given.

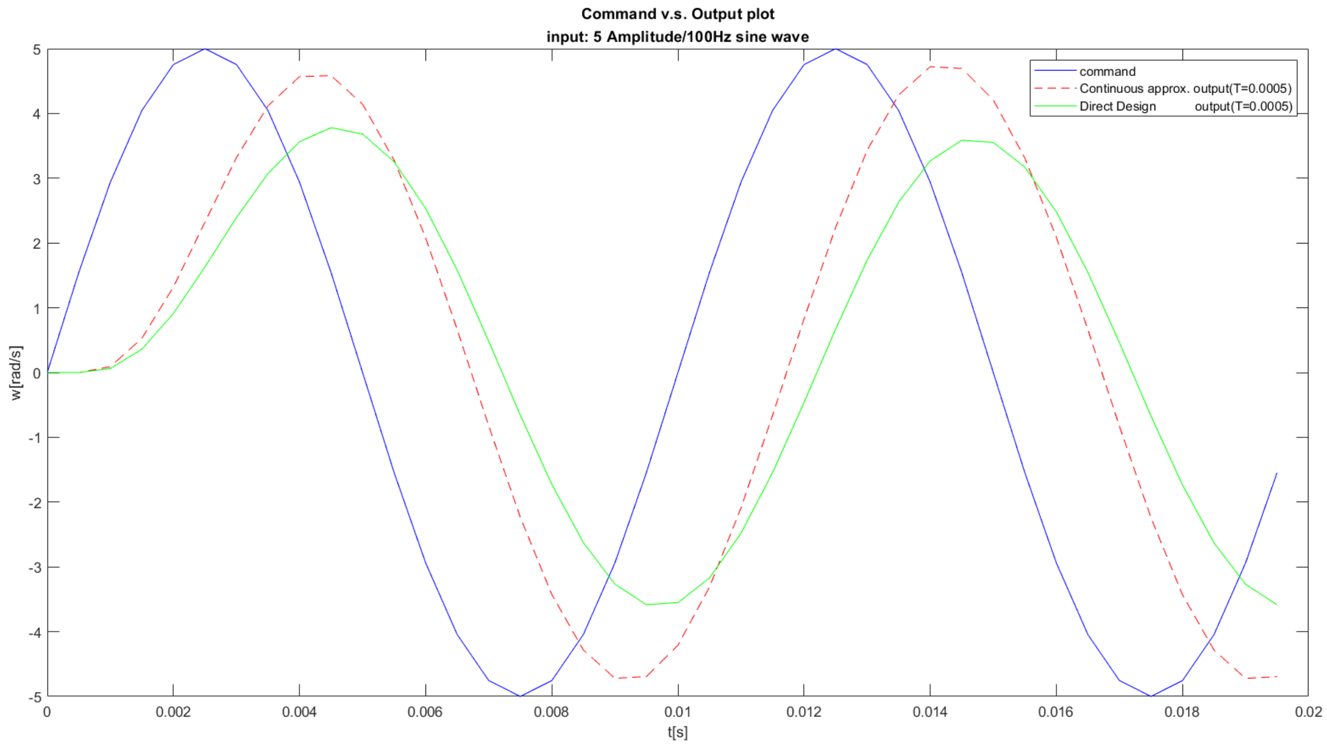
- **取樣時間為 T=0.0002:**

當取樣時間為 T=0.0002 時，由結果可以發現最終的響應兩者重合，原因是前題在兩個控制器時，特意藉由 continuous approximation 及 direct design 不同的設計方法，得到相同一個控制器。而這麼做的目的在於，這樣可以更好的比較兩者控制器因取樣時間改變而造成的影響。

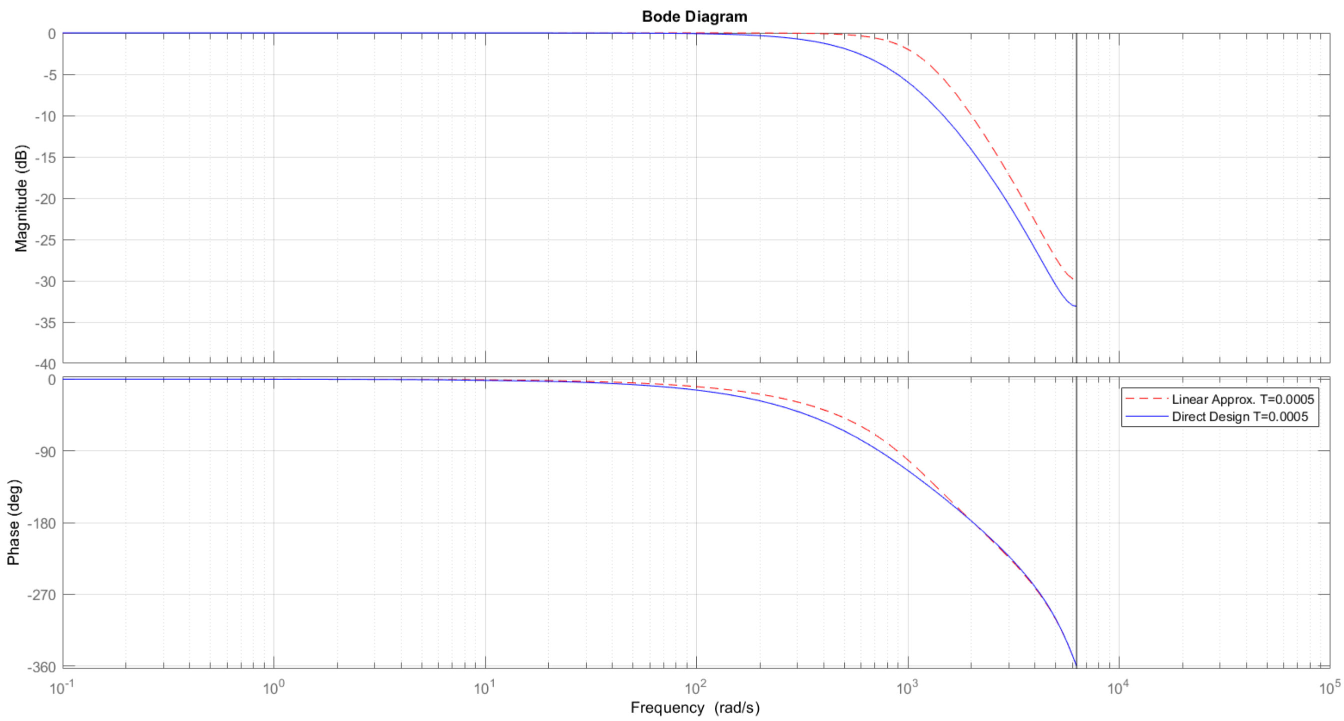


- **取樣時間為 T=0.0005:**

當取樣時間為 T=0.0005 時，可以發現藉由 continuous approximation 所設計的控制器，其響應較由 direct design 所設計的控制器更好接近原本的相位與振幅。

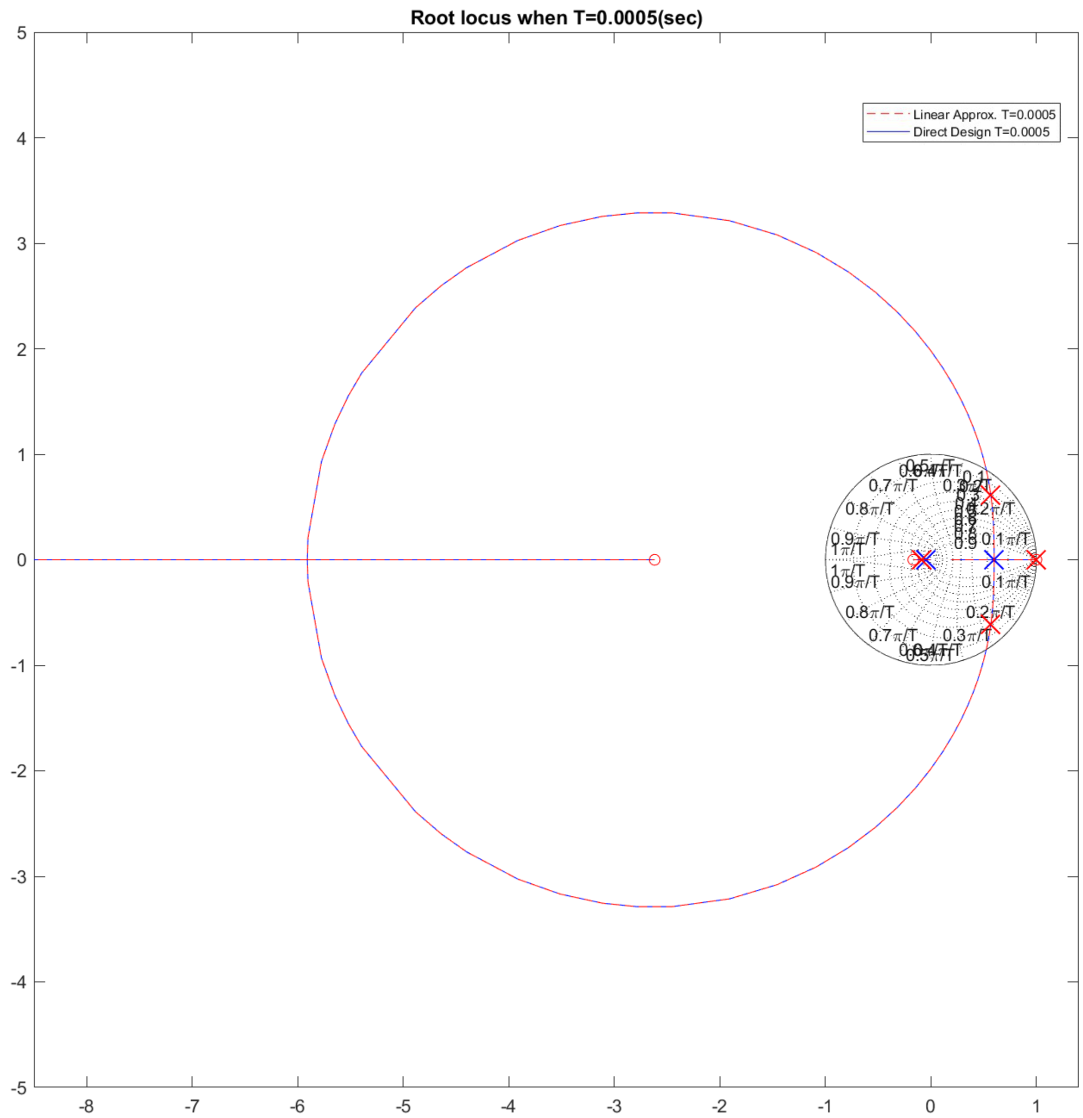


由二者的波德圖亦可以看出，藉由 continuous approximation 所設計的控制器相較於由 direct design 所設計的控制器有較大的頻寬。

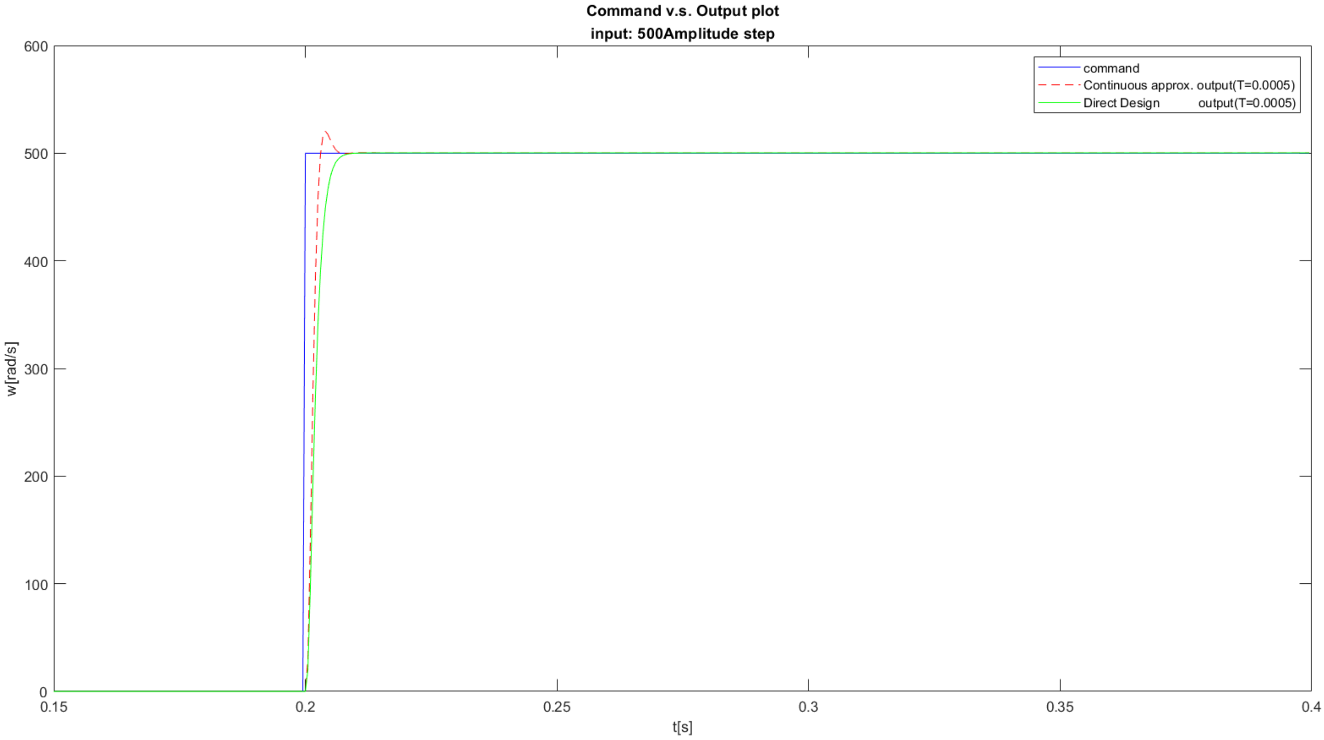


由上述的結果，但難道這意味著藉由 continuous approximation 所設計的控制器相較於由 direct design 所設計的控制器更好嗎?

其實不然，透過比較兩者的根軌跡可以發現，當 T=0.0005 sec 時，透過 continuous approximation 所設計的控制器，其根的位置落在 $z=0.5671\pm i0.6161$ 的共軛虛根(under-damped)，且已經接近單位圓；而透過 direct design 所設計的控制器，其根的位置落在 $z=0.599$ 的重根(critical-damped)。因此，雖然 continuous approximation 所設計的根的實部小於 direct design 所設計的根的實部，具有較大的頻寬(e.g. exp(-BW*2π*T))，但更容易發生振盪

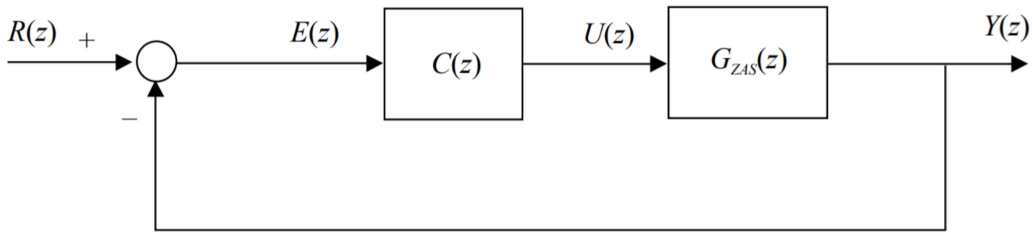


比較兩者的步階響應可以明顯地看出透過 continuous approximation 的響應有明顯的 overshoot，而 direct design 所設計的控制器沒有這一現象，與根軌跡的結果相符。



5. (20%)Disturbance rejection: Apply a 30A step disturbance Td at kT=5. The speed is controlled at 500 rad/s. Compare two different sample time T respectively at 0.0002 sec and 0.0005 sec. Please overlaid ω_{avg}(k) (continuous approximation) and ω_{avg}(k) (direct design) in one plot to demonstrate the transient setting time and steady state error. Figures with two different sample times should be given.

透過以下的方塊圖：



系統的誤差 E(z)可以表示為：

$$E(z)=\frac{R(z)}{1+G_{ZAS}(z)C(z)} \tag{5.1}$$

對上式取終值定理，即可得穩態誤差為：

$$\begin{aligned} e(\infty) &= (1-z^{-1})E(z)\big|_{z=1} \\ &= (1-z^{-1})\left.\frac{R(z)}{1+G_{ZAS}(z)C(z)}\right|_{z=1} \end{aligned} \tag{5.2}$$

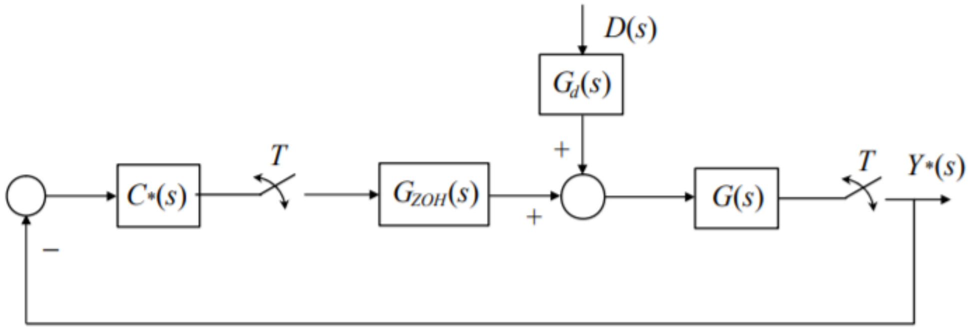
由於輸入為步階函數時，其分母為(z-1)與(5.2)中的(z-1)相消：

$$R(z)=\frac{z}{z-1} \tag{5.3}$$

導致穩態誤差產生。

若控制器或受控廠本身的分母帶有 n 個在 1 的極點(即$(1-z^{-1})^n$)，我們即稱系統的階數為 n。因此若系統的階數大於等於輸入的階數，即可達到消除穩態誤差的效果。

現在，考慮一帶有雜訊的系統：



經由推倒，我們可以知道系統輸出為：

$$Y(z)=\frac{(GG_d D)(z)}{1+G_{ZAS}(z)C(z)} \tag{5.4}$$

對上式取終值定理，即可得系統的穩態誤差為：

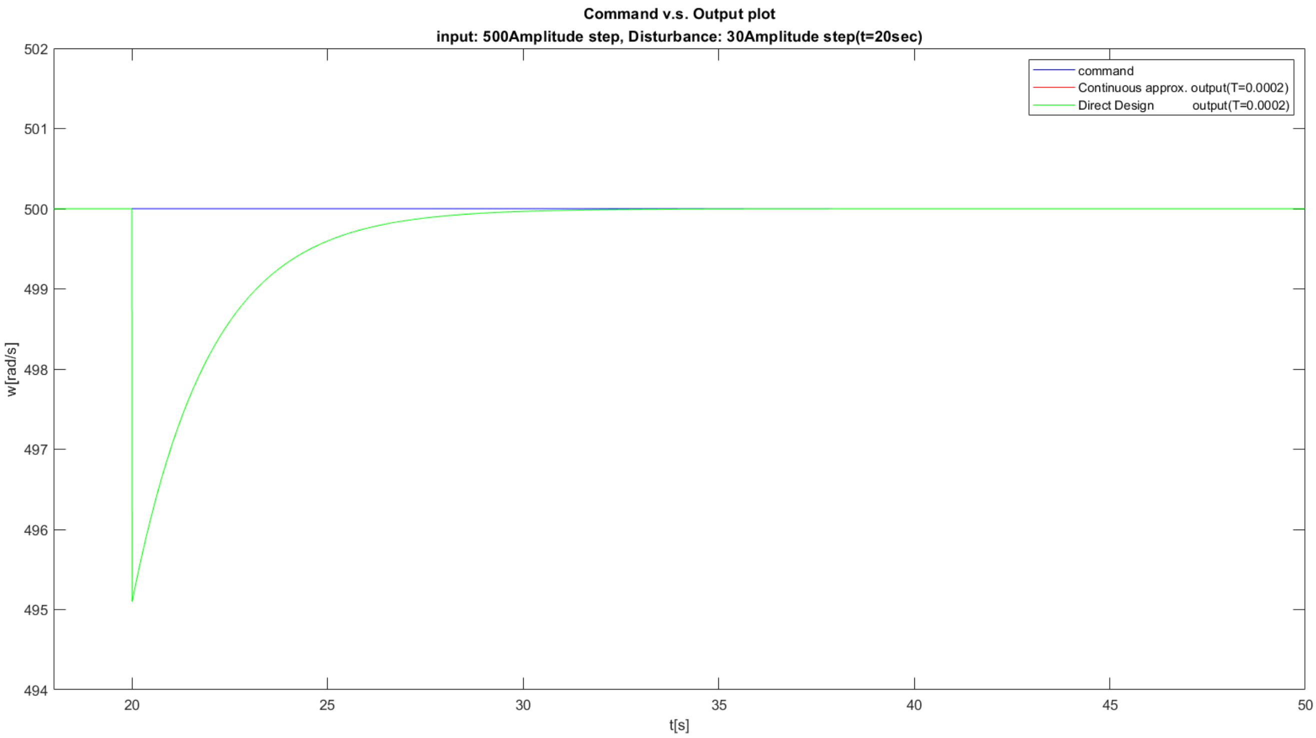
$$y(\infty)=(1-z^{-1})Y(z)|_{z=1} \tag{5.5}$$

透過前頁的相似推倒可的相同的結果，即系統的階數大於等於雜訊的階數，即可達到雜訊抑制的效果。

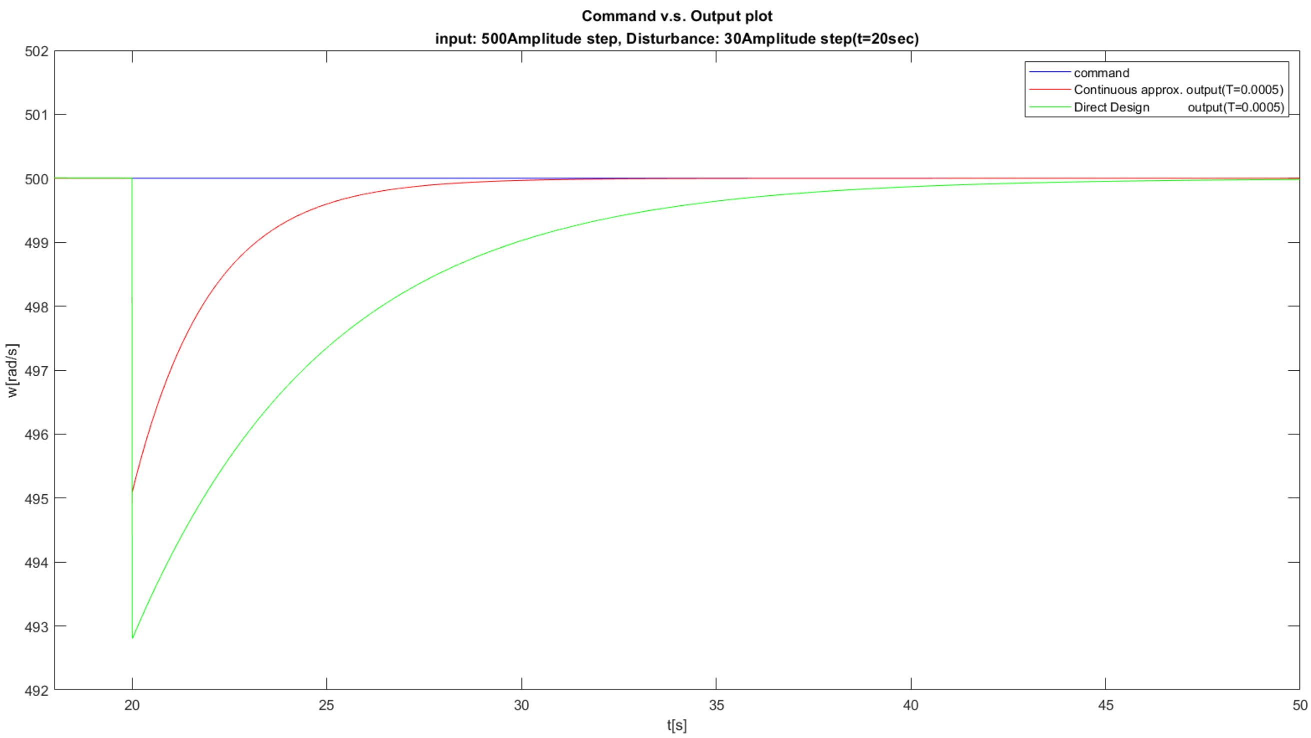
※ **Reference: "Digital Control Engineering (Second Edition), " M. Sami Fadali, Antonio Visioli.**

觀察第 2 題設計的 continuous approximated controller 與第 3 題設計的 direct designed controller，其中都帶有$(1-z^{-1})$，因此其階數為 1。而不論是輸出還是雜訊階是步階訊號，階數也是 1。因此兩者能夠達到消除穩態誤差及抑制雜訊的效果。透過實際的響應我們也能夠看到響應最終沒有穩態誤差。

- **當取樣時間為 T=0.0002:**



- **當取樣時間為 T=0.0005:**



Note：值得注意的是，由於所選的零點為 0.9999 非常趨近於 1。因此，雖然控制器的階數提升 1，沒有穩態誤差產生，但是其動態會被 0.9999 的零點抑制，造成穩態的時間需要非常久。

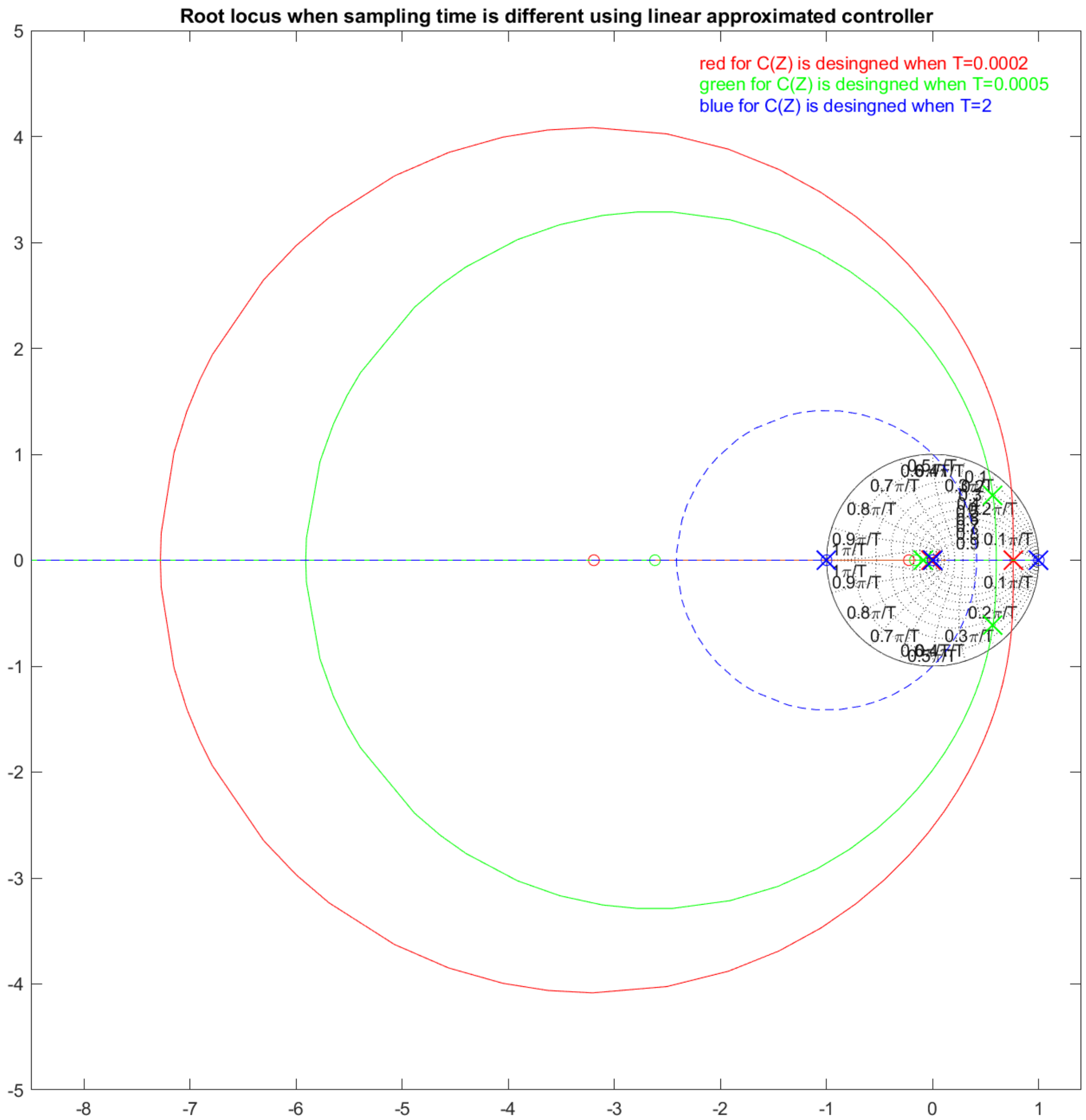
6. Explain the performance difference between two controllers.

由第 2 題設計的 continuous approximated controller 與第 3 題設計的 direct designed controller 觀察，不難看出其實兩個控制器的本質是相同的，都是 PI 控制器。其分子都是一個 Z 平面上的零點，使在 1 的兩個極點能夠被吸引回單位圓內使系統穩定；分母都是(z-1)，用以提升系統的階數以消除穩態誤差。

兩者最大的不同之處在於**取樣時間 T 所造成的影響**。透過 direct design 所設計的控制器，由於其離散系統(NSD)的解析式已知，因此即便取樣時間改變，我們仍然可以根據其系統 Z 平面上極零點的位置設計合適的零點與增益，使系統的根落在我們想要的位置(例如:critical-damped)，進而的到我們所希望的響應(沒有 overshoot)。

然而，透過 continuous approximation 所設計的控制器是在時域下所設計的，所以並沒有考慮**取樣時間 T 所造成的影響**，只能說當 T 趨近於 0 時，響應會越接近原本時域的系統。而當取樣時間 T 改變時，系統會因為 ZOH 的影響而有不同的 NSD，而控制器卻沒辦法做出相應的改變，進而影響響應的結果，甚至會因為過大的取樣時間，而使系統無法穩定。

下面我們就透過根軌跡證明上述的觀點，取第 2 題設計的 continuous approximated controller 分別帶入取樣時間不同時的 NSD，可以發現當取樣時見為 T=0.0002 sec 時，由下面的根軌跡看出系統的根落在 critical-damped 的位置，透過第 4 題步階響應的結果我們也可以看出其並沒有 overshoot 產生;當 T=0.0005 sec 時，由於控制器沒有做出相應的改變，由下面的根軌跡看出系統的根落在 under-damped 的位置，透過第 4 題步階響應的結果我們也可以看出 overshoot 產生；當 T=2 sec 時，由下面的根軌跡看出系統的根已經跑出單位圓外，使系統不穩定。



Note:當 T=2，C(Z)其中一支極點落在-6.10e+06(unstable)，因位置過遠無法畫出。