- 正交向量集$\{\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{j}}\}$的确定

设随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的总体自相关矩阵为 $\boldsymbol{R} = \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\}$。由

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j \boldsymbol{\varphi}_j = \boldsymbol{\Phi a}, \quad T_1 \le t \le T_2 \tag{1}$$

将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi a}$ 代入 $\boldsymbol{R} = \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\}$，得：

$$\mathrm{R} = \mathrm{E}\{\boldsymbol{\Phi a}\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\}=\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{E}\{\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\})\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}$$

要求系数向量 $\boldsymbol{a}$ 的各个不同分量应统计独立，即应使($a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_n$)满足如下关系：

$$E(a_j a_k) = \begin{cases} \lambda_j & if\ j = k \\ 0 & if\ j \ne k \end{cases}$$

写成矩阵形式，应使：$\mathrm{E}\{\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\} = \boldsymbol{D}_{\lambda}$，其中 $\boldsymbol{D}_{\lambda}$ 为对角形矩阵，其互相关成分均为 0，即：

$$\mathrm{D}_{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \lambda_{\mathrm{j}} & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{\mathrm{n}} \end{bmatrix}$$

则：

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\Phi D}_{\lambda}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}$$

由于 $\boldsymbol{\Phi}$ 中的各个向量 $\boldsymbol{\varphi}_j$ 都相互归一正交，

故有：

$$\boldsymbol{R\Phi}=\boldsymbol{\Phi D}_{\lambda}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi D}_{\lambda}$$

其中，$\boldsymbol{\varphi}_j$ 向量对应为：

$$\boldsymbol{R\varphi}_j=\lambda_j\boldsymbol{\varphi}_j$$

可以看出，λ_j是 $\boldsymbol{x}$ 的自相关矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的特征值，$\boldsymbol{\varphi}_j$是对应的特征向量。因为 $\boldsymbol{R}$ 是实对称矩阵，其不同特征值对应的特征向量应正交，即：

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T\boldsymbol{\varphi}_k=\begin{cases}1 & if\ \ j=k\\ 0 & if\ \ j\neq k\end{cases}$$

由式(1)，K-L 展开式系数应为：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$