黄磊　2022E8013282156　计 702

4. 假设课本中给出完美重建滤波器的正交族对应的三个滤波器间的关系式是正确的，并以此为基础，推导 h_0, h_1 的关系。

根据完美重建滤波器原理，得到无失真重建：

$$\begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix} = \frac{2}{\det\left(\boldsymbol{H}_m(z)\right)} \begin{bmatrix} H_1(-z) \\ -H_0(-z) \end{bmatrix}$$

其中分析调制矩阵 $\boldsymbol{H}_m(z)$ 为：

$$\boldsymbol{H}_m(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix}$$

对于有限冲激响应（FIR）滤波器，调制矩阵的行列式是一个纯时延，即：

$$\det\left(\boldsymbol{H}_m(z)\right) = az^{-(2k+1)}$$

因此，交叉调制的准确形式是 a 的函数，$z^{-(2k+1)}$ 可被看作是任意的，因为其只改变滤波器的群时延。根据课本 7.1.23，有：

$$h_i(n) = g_i(2K - 1 - n)$$

$$g_1(n) = (-1)^n g_0(2K - 1 - n)$$

忽略时延，对上式做反变换，得到：

若 $a = 2$：

$$\begin{aligned} g_0(n) &= (-1)^n h_1(n) \\ g_1(n) &= (-1)^{n+1} h_0(n) \\ &= (-1)^n g_0(2K - 1 - n) \\ &= (-1)^n (-1)^{2K-1-n} h_1(2K - 1 - n) \end{aligned}$$

因此：

$$h_0(n) = (-1)^{2K-n} h_1(2K - 1 - n) = (-1)^n h_1(2K - 1 - n)$$

若 $a = -2$：

$$\begin{aligned} g_0(n) &= (-1)^{n+1} h_1(n) \\ g_1(n) &= (-1)^n h_0(n) \\ &= (-1)^n g_0(2K - 1 - n) \\ &= (-1)^n (-1)^{2K-n} h_1(2K - 1 - n) \end{aligned}$$

因此有：

$$h_0(n) = (-1)^{2K-n} h_1(2K-1-n) = (-1)^n h_1(2K-1-n)$$

因此，FIR 综合滤波器是分析滤波器的交叉调制副本，有且仅有一个符号相反。

得到关系为：

$$h_0(n) = (-1)^n h_1(2K-1-n)$$