2、请根据课本中 Z 变换的定义，证明如下结论。

(1) 若 x(n)的 Z 变换为 X(z)，则$(-1)^n x(n)$ 的 Z 变换为 X(−z)

(2) 若 x(n)的 Z 变换为 X(z)，x(−n) 的 Z 变换为 $X(\frac{1}{z})$

(3) 若 x(n)的 Z 变换为 X(z)，课本 280 页公式 7.1.2

有 Z 变换定义为：

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

(1) 令 $g(n) = (-1)^n x(n)$，则有：

$$\mathcal{Z}[g(n)] = \sum_{-\infty}^{\infty} g(n) z^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n x(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)(-1)^{-n} z^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)(-z)^{-n} = X(-z)$$

(2) 令 $h(n) = x(-n)$，则有：

$$\mathcal{Z}[h(n)] = \sum_{-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(-n) z^{-n}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x(-n) z^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(m) z^{m} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(m)(z^{-1})^{-m} = X(z^{-1})$$

(3)

$$x_{\text{down}}(n) = x(2n) \Leftrightarrow X_{\text{down}}(z) = \frac{1}{2}[X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2})]$$

令 $p(n) = x(2n)$，则有：

$$\mathcal{Z}[p(n)] = \sum_{-\infty}^{\infty} p(n) z^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(2n) z^{-n}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x(m) z^{-\frac{m}{2}}, m \text{ is an even number}$$

将其延拓为所有整数域，取 k 为任意整数，有：

$$x(m) = \frac{1 + (-1)^k}{2} x(k)$$

则有：

$$\mathcal{Z}[p(n)] = \sum_{-\infty}^{\infty} p(n) z^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(2n) z^{-n}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x(m) z^{-\frac{m}{2}} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + (-1)^k}{2} x(k) z^{-\frac{k}{2}} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} x(k) z^{-\frac{k}{2}} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2} x(k) z^{-\frac{k}{2}}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} x(k) z^{-\frac{k}{2}} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} x(k) (-z^{\frac{1}{2}})^{-k} = \frac{1}{2}\left[X\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$