- 判别函数产生逐步分析

设初始势函数 $K_0(x) = 0$

第一步：加入第一个训练样本 $\boldsymbol{x}^1$，则有

$$K_1(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^1) & if\ \ \boldsymbol{x}^1 \in \omega_1 \\ -K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^1) & if\ \ \boldsymbol{x}^1 \in \omega_2 \end{cases}$$

这里第一步积累势函数 $K_1(\boldsymbol{x})$描述了加入第一个样本时的边界划分。当样本属于 ω_1 时，势函数为正；当样本属于 ω_2 时，势函数为负。

第二步：加入第二个训练样本 $\boldsymbol{x}^2$，则有

（i） 若 $\boldsymbol{x}^2 \in \omega_1$ 且 $K_1(\boldsymbol{x}^2)>0$，或 $\boldsymbol{x}^2 \in \omega_2$ 且 $K_1(\boldsymbol{x}^2)<0$，则分类正确，此时 $K_2(\boldsymbol{x}) = K_1(\boldsymbol{x})$，即积累势函数不变。

（ii） 若 $\boldsymbol{x}^2 \in \omega_1$ 且 $K_1(\boldsymbol{x}^2)<0$，则

$$K_2(\boldsymbol{x}) = K_1(\boldsymbol{x}) + K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^2) = \pm K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^1) + K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^2)$$

（iii） 若 $\boldsymbol{x}^2 \in \omega_2$ 且 $K_1(\boldsymbol{x}^2)>0$，则

$$K_2(\boldsymbol{x}) = K_1(\boldsymbol{x}) - K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^2) = \pm K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^1) - K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^2)$$

以上（ii）、（iii）两种情况属于错分。假如 $\boldsymbol{x}^2$ 处于 $K_1(\boldsymbol{x})$定义的边界的错误一侧，则当 $\boldsymbol{x}^2 \in \omega_1$ 时，积累位势 $K_2(\boldsymbol{x})$要加 $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^2)$，当 $\boldsymbol{x}^2 \in \omega_2$ 时，积累位势 $K_2(\boldsymbol{x})$要减 $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^2)$。

第 K 步：设 $K_k(\boldsymbol{x})$为加入训练样本 $\boldsymbol{x}^1$，$\boldsymbol{x}^2$，…，$\boldsymbol{x}^k$ 后的积累位势，则加入第(k+1)个样本时，$K_{k+1}(\boldsymbol{x})$决定如下：

（i） 若 $\boldsymbol{x}^{k+1} \in \omega_1$ 且 $K_k(\boldsymbol{x}^{k+1})>0$，或 $\boldsymbol{x}^{k+1} \in \omega_2$ 且 $K_k(\boldsymbol{x}^{k+1})<0$，则分类正确，此时 $K_{k+1}(\boldsymbol{x}) = K_k(\boldsymbol{x})$，即积累位势不变。

（ii） 若 $\boldsymbol{x}^{k+1} \in \omega_1$ 且 $K_k(\boldsymbol{x}^{k+1})<0$，则 $K_{k+1}(\boldsymbol{x}) = K_k(\boldsymbol{x}) + K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{k+1})$

（iii） 若 $\boldsymbol{x}^{k+1} \in \omega_2$ 且 $K_k(\boldsymbol{x}^{k+1})>0$，则 $K_{k+1}(\boldsymbol{x}) = K_k(\boldsymbol{x}) - K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{k+1})$

因此，积累位势的迭代运算可写成：$K_{k+1}(\boldsymbol{x}) = K_k(\boldsymbol{x}) + r_{k+1}K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{k+1})$，$r_{k+1}$ 为校正系数：

$$r_{k+1} = \begin{cases} 0 & if\ \boldsymbol{x}^{k+1} \in \omega_1\ and\ K_k(\boldsymbol{x}^{k+1}) > 0 \\ 0 & if\ \boldsymbol{x}^{k+1} \in \omega_2\ and\ K_k(\boldsymbol{x}^{k+1}) < 0 \\ 1 & if\ \boldsymbol{x}^{k+1} \in \omega_1\ and\ K_k(\boldsymbol{x}^{k+1}) < 0 \\ -1 & if\ \boldsymbol{x}^{k+1} \in \omega_2\ and\ K_k(\boldsymbol{x}^{k+1}) > 0 \end{cases}$$

若从给定的训练样本集$\{\boldsymbol{x}^1$，$\boldsymbol{x}^2$，…，$\boldsymbol{x}^k$,…$\}$中去除不使积累位势发生变化的样本，即使 $K_j(\boldsymbol{x}^{j+1})>0$ 且 $\boldsymbol{x}^{j+1} \in \omega_1$，或 $K_j(\boldsymbol{x}^{j+1})<0$ 且 $\boldsymbol{x}^{j+1} \in \omega_2$ 的那些样本，则可得一简化的样本序列$\{\hat{\boldsymbol{x}}^1, \hat{\boldsymbol{x}}^2, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}^j, \ldots\}$，它们完全是校正错误的样本。此时，上述迭代公式可归纳为：

$$K_{k+1}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\hat{x}_j} a_j K(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{x}}^j)$$

其中

$$a_j = \begin{cases} +1 & for\ \hat{\boldsymbol{x}}^j \in \omega_1 \\ -1 & for\ \hat{\boldsymbol{x}}^j \in \omega_2 \end{cases}$$

也就是说，由 k+1 个训练样本产生的积累位势，等于 ω_1 类和 ω_2 类两者中的校正错误样本的总位势之差。