- 均值和协方差矩阵估计量的迭代运算形式

假设已经计算了 N 个样本的均值估计量，若再加上一个样本，其新的估计量 $\hat{\boldsymbol{m}}(N+1)$ 为：

$$\hat{\boldsymbol{m}}(N+1)=\frac{1}{N+1}\sum_{j=1}^{N+1}\boldsymbol{x}^j=\frac{1}{N+1}\left[\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{x}^j+\boldsymbol{x}^{N+1}\right]=\frac{1}{N+1}[N\hat{\boldsymbol{m}}(N)+\boldsymbol{x}^{N+1}]$$

其中 $\hat{\boldsymbol{m}}(N)$ 为从 N 个样本计算得到的估计量。迭代的第一步应取 $\hat{\boldsymbol{m}}(1)=\boldsymbol{x}^1$。

协方差矩阵估计量的迭代运算与上述相似。取 $\hat{\boldsymbol{C}}(N)$ 表示 N 个样本时的估计量为：

$$\hat{\boldsymbol{C}}(N)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{x}^j(\boldsymbol{x}^j)^T-\hat{\boldsymbol{m}}(N)\hat{\boldsymbol{m}}^T(N)$$

加入一个样本，则：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{C}}(N+1)&=\frac{1}{N+1}\sum_{j=1}^{N+1}\boldsymbol{x}^j(\boldsymbol{x}^j)^T-\hat{\boldsymbol{m}}(N+1)\hat{\boldsymbol{m}}^T(N+1)\\&=\frac{1}{N+1}\left[\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{x}^j(\boldsymbol{x}^j)^T+\boldsymbol{x}^{N+1}(\boldsymbol{x}^{N+1})^T\right]-\hat{\boldsymbol{m}}(N+1)\hat{\boldsymbol{m}}^T(N+1)\\&=\frac{1}{N+1}[N\hat{\boldsymbol{C}}(N)+N\hat{\boldsymbol{m}}(N)\hat{\boldsymbol{m}}^T(N)+\boldsymbol{x}^{N+1}(\boldsymbol{x}^{N+1})^T]-\\&\quad\frac{1}{(N+1)^2}[N\hat{\boldsymbol{m}}(N)+\boldsymbol{x}^{N+1}][N\hat{\boldsymbol{m}}(N)+\boldsymbol{x}^{N+1}]^T\end{aligned}$$

（将

$\hat{\boldsymbol{m}}(N+1)=\frac{1}{N+1}(N\hat{\boldsymbol{m}}(N)+\boldsymbol{x}^{N+1}),\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{x}^j(\boldsymbol{x}^j)^T=N\hat{\boldsymbol{C}}(N)+N\hat{\boldsymbol{m}}(N)\hat{\boldsymbol{m}}^T(N)$ 代入上式第二步，可得最后的式子）

其中，$\hat{\boldsymbol{C}}(1)=\boldsymbol{x}^1(\boldsymbol{x}^1)^T-\hat{\boldsymbol{m}}(1)\hat{\boldsymbol{m}}^T(1)$ 且 $\hat{\boldsymbol{m}}(1)=\boldsymbol{x}^1$，因此 $\hat{\boldsymbol{C}}(1)=\boldsymbol{0}$ 为零矩阵。