黄磊　计 702　 2022E8013282156

4、高斯型低通滤波器在频域中的传递函数是

$$\mathrm{H(u,v)} = \mathrm{Ae}^{-(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2)/2\sigma^2}$$

根据二维傅里叶性质，证明空间域的相应滤波器形式为

$$\mathrm{h(x,y)} = \mathrm{A}2\pi\sigma^2\mathrm{e}^{-2\pi^2\sigma^2(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)}$$

（这些闭合形式只适用于连续变量情况。）

在证明中假设已经知道如下结论：函数$\mathrm{e}^{-\pi(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)}$的傅立叶变换为$\mathrm{e}^{-\pi(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2)}$

即对其做傅立叶反变换：

$$h(x,y) = \mathcal{F}^{-1}[H(u,v)] = \int_{u=-\infty}^{+\infty}\int_{v=-\infty}^{+\infty} Ae^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}} e^{j2\pi(ux+vy)}\,dvdu$$

$$= \int_{u=-\infty}^{+\infty}\int_{v=-\infty}^{+\infty} Ae^{-\pi\left(\left(\frac{u}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^2+j2ux\right)-\pi\left(\left(\frac{v}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^2+j2vy\right)}\,dvdu \quad \text{(对其配方)}$$

$$= \int_{u=-\infty}^{+\infty}\int_{v=-\infty}^{+\infty} Ae^{-\pi\left(\left(\frac{u}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^2+j2ux-2\pi\sigma^2x^2+2\pi\sigma^2x^2\right)} e^{-\pi\left(\left(\frac{v}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^2+j2vy-2\pi\sigma^2y^2+2\pi\sigma^2y^2\right)}\,dvdu$$

$$= \int_{u=-\infty}^{+\infty}\int_{v=-\infty}^{+\infty} Ae^{-\pi\left(\left(\frac{u}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}+j\sqrt{2\pi}\,\sigma x\right)^2+2\pi\sigma^2x^2\right)} e^{-\pi\left(\left(\frac{v}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}+j\sqrt{2\pi}\sigma y\right)^2+2\pi\sigma^2y^2\right)}\,dvdu$$

进行变量替换：

$$t = \frac{u}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} + j\sqrt{2\pi}\,\sigma x, \qquad r = \frac{v}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} + j\sqrt{2\pi}\sigma y$$

得到：

$$h(x,y) = \int_{t=-\infty}^{+\infty}\int_{r=-\infty}^{+\infty} Ae^{-\pi(t^2+2\pi\sigma^2x^2)} e^{-\pi(r^2+2\pi\sigma^2y^2)}\,drdt$$

$$= Ae^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)} \int_{t=-\infty}^{+\infty}\int_{r=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(t^2+r^2)}\,drdt$$

该积分部分结果为 $2\pi\sigma^2$，因此得到：

$$h(x,y) = \ 2\pi\sigma^2 Ae^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}$$