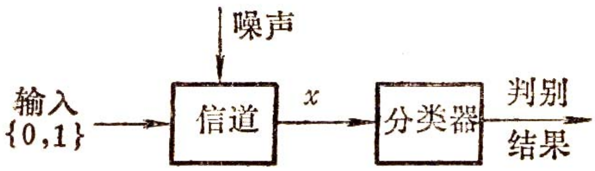
● 两类（M=2）情况的贝叶斯最小风险判别实例



如图所示为一信号通过一受噪声干扰的信道。

信道输入信号为 0 或 1，噪声为**高斯型**，其均值 $\mu=0$，方差为σ^2。

信道输出为 x，试求最优的判别规则，以区分 x 是 0 还是 1。

设送 0 为ω_1类，送 1 为ω_2类，从观察值 x 的基础上判别它是 0 还是 1。直观上可以看出，若 x<0.5 应判为 0，x>0.5 应判为 1。用贝叶斯判别条件分析：设信号送 0 的先验概率为 $P(0)$，送 1 的先验概率为 $P(1)$，$\boldsymbol{L}$ 的取值为：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ L = \begin{array}{c} \omega_1 \\ \omega_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & L_{12} \\ L_{21} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

这里 a_1 和 a_2 分别对应于输入状态为 0 和 1 时的正确判别，L_{12} 对应于实际上是ω_1类但被判成ω_2类(a_2)时的代价，L_{21} 对应于实际上是ω_2类但被判成ω_1类(a_1)时的代价。正确判别时 $\boldsymbol{L}$ 取 0。

当输入信号为 0 时，受噪声为正态分布 $N(0,\ \sigma^2)$的干扰，其幅值大小的概率密度为：

$$p(x\mid\omega_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

当输入信号为 1 时：$p(x\mid\omega_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}}$

则似然比为： $l_{12} = \frac{p(x \mid \omega_1)}{p(x \mid \omega_2)} = e^{\frac{1-2x}{2\sigma^2}}$，

若 $l_{12} > \theta_{21}$，即 $e^{\frac{1-2x}{2\sigma^2}} > \theta_{21} \Rightarrow x < \frac{1}{2} - \sigma^2 \ln \theta_{21}$，（$\theta_{21} = \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)} \cdot \frac{L_{21} - L_{22}}{L_{12} - L_{11}}$）则 $x \in \omega_1$，此时信号应是 0，即

$$x < \frac{1}{2} - \sigma^2 \ln\left(\frac{L_{21}}{L_{12}} \cdot \frac{P(1)}{P(0)}\right)$$

若取 $L_{21}=L_{12}=1$，$P(1)=P(0)$,则 $x<1/2$ 判为 0。

若无噪声干扰，即 $\sigma^2=0$，则 $x<1/2$ 判为 0。