- 势函数法

实例 2：用第二类势函数的算法进行分类

选择指数型势函数，取 $\alpha=1$，在二维情况下势函数为

$$K(x,x^k)=e^{-\left\|x-x^k\right\|^2}=e^{-[(x_1-x_1^k)^2+(x_2-x_2^k)^2]}$$

这里：ω_1 类为 $\boldsymbol{x}^1=(0\ 0)^T$, $\boldsymbol{x}^2=(2\ 0)^T$

ω_2 类为 $\boldsymbol{x}^3=(1\ 1)^T$, $\boldsymbol{x}^4=(1\ -1)^T$

可以看出，这两类模式是线性不可分的。算法步骤如下：

第一步：取 $\boldsymbol{x}^1=(0\ 0)^T\in\omega_1$，则

$$K_1(\boldsymbol{x})=K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^1)=e^{-[(x_1-0)^2+(x_2-0)^2]}=e^{-(x_1^2+x_2^2)}$$

第二步：取 $\boldsymbol{x}^2=(2\ 0)^T\in\omega_1$

因 $K_1(\boldsymbol{x}^2)=e^{-(4+0)}=e^{-4}>0$，

故 $K_2(\boldsymbol{x})=K_1(\boldsymbol{x})=e^{-(x_1^2+x_2^2)}$

第三步：取 $\boldsymbol{x}^3=(1\ 1)^T\in\omega_2$

因 $K_2(\boldsymbol{x}^3)=e^{-(1+1)}=e^{-2}>0$，

故 $K_3(\boldsymbol{x})=K_2(\boldsymbol{x})-K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^3)=e^{-(x_1^2+x_2^2)}-e^{-[(x_1-1)^2+(x_2-1)^2]}$

第四步：取 $\boldsymbol{x}^4=(1\ -1)^T\in\omega_2$

因 $K_3(\boldsymbol{x}^4)=e^{-(1+1)}-e^{-(0+4)}=e^{-2}-e^{-4}>0$，

故 $K_4(\boldsymbol{x})=K_3(\boldsymbol{x})-K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^4)$

$$=e^{-(x_1^2+x_2^2)}-e^{-[(x_1-1)^2+(x_2-1)^2]}-e^{-[(x_1-1)^2+(x_2+1)^2]}$$

需对全部训练样本重复迭代一次

第五步：取 $\boldsymbol{x}^5=\boldsymbol{x}^1=(0\ 0)^T\in\omega_1$，$K_4(\boldsymbol{x}^5)=e^0-e^{-2}-e^{-2}=1-2e^{-2}>0$

故 $K_5(\boldsymbol{x})=K_4(\boldsymbol{x})$

第六步：取 $\boldsymbol{x}^6=\boldsymbol{x}^2=(2\ 0)^{\mathrm{T}}\in\omega_1$，$K_5(\boldsymbol{x}^6)=\mathrm{e}^{-4}-\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-2}=\mathrm{e}^{-4}-2\mathrm{e}^{-2}<0$

故 $K_6(\boldsymbol{x})=K_5(\boldsymbol{x})+K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^6)$

$$=e^{-(x_1^2+x_2^2)}-e^{-[(x_1-1)^2+(x_2-1)^2]}-e^{-[(x_1-1)^2+(x_2+1)^2]}+e^{-[(x_1-2)^2+x_2^2]}$$

第七步：取 $\boldsymbol{x}^7=\boldsymbol{x}^3=(1\ 1)^{\mathrm{T}}\in\omega_2$，$K_6(\boldsymbol{x}^7)=\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{0}-\mathrm{e}^{-4}+\mathrm{e}^{-2}=2\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-4}-1<0$

故 $K_7(\boldsymbol{x})=\mathrm{K}_6(\boldsymbol{x})$

第八步：取 $\boldsymbol{x}^8=\boldsymbol{x}^4=(1\ -1)^{\mathrm{T}}\in\omega_2$，$K_7(\boldsymbol{x}^8)=\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-4}-\mathrm{e}^{0}+\mathrm{e}^{-2}=2\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-4}-1<0$

故 $K_8(\boldsymbol{x})=K_7(\boldsymbol{x})$

第九步：取 $\boldsymbol{x}^9=\boldsymbol{x}^1=(0\ 0)^{\mathrm{T}}\in\omega_1$，$K_8(\boldsymbol{x}^9)=\mathrm{e}^{0}-\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{-4}=1+\mathrm{e}^{-4}-2\mathrm{e}^{-2}>0$

故 $K_9(\boldsymbol{x})=K_8(\boldsymbol{x})$

第十步：取 $\boldsymbol{x}^{10}=\boldsymbol{x}^2=(2\ 0)^{\mathrm{T}}\in\omega_1$，$K_9(\boldsymbol{x}^{10})=\mathrm{e}^{-4}-\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{0}=1+\mathrm{e}^{-4}-2\mathrm{e}^{-2}>0$

故 $K_{10}(\boldsymbol{x})=K_9(\boldsymbol{x})$

经过上述迭代，全部模式都已正确分类，因此算法收敛于判别函数

$$d(\boldsymbol{x})=e^{-(x_1^2+x_2^2)}-e^{-[(x_1-1)^2+(x_2-1)^2]}-e^{-[(x_1-1)^2+(x_2+1)^2]}+e^{-[(x_1-2)^2+x_2^2]}$$