● 两类（M=2）情况的贝叶斯最小风险判别

选 M=2，即全部的模式样本只有ω_1和ω_2两类，要求分类器将模式样本分到ω_1和ω_2两类中，则平均风险可写成：

当分类器将 $\boldsymbol{x}$ 判别为ω_1时：

$$r_1(\boldsymbol{x}) = L_{11} p(\boldsymbol{x} \mid w_1) P(\omega_1) + L_{21} p(\boldsymbol{x} \mid w_2) P(\omega_2)$$

当分类器将 x 判别为ω_2时：

$$r_2(\boldsymbol{x}) = L_{12} p(\boldsymbol{x} \mid \omega_1) P(\omega_1) + L_{22} p(\boldsymbol{x} \mid \omega_2) P(\omega_2)$$

若 $r_1(x)<r_2(x)$，则 x 被判定为属于ω_1，此时：

$$\begin{aligned} & L_{11} p(\boldsymbol{x} \mid \omega_1) P(\omega_1) + L_{21} p(\boldsymbol{x} \mid \omega_2) P(\omega_2) < \\ & L_{12} p(\boldsymbol{x} \mid \omega_1) P(\omega_1) + L_{22} p(\boldsymbol{x} \mid \omega_2) P(\omega_2) \end{aligned}$$

即

$$(L_{21} - L_{22}) p(\boldsymbol{x} \mid \omega_2) P(\omega_2) < (L_{12} - L_{11}) p(\boldsymbol{x} \mid \omega_1) P(\omega_1)$$

通常取 $L_{ij}>L_{ii}$，有：

$$\text{当}\ \frac{p(\boldsymbol{x} \mid \omega_1)}{p(\boldsymbol{x} \mid \omega_2)} > \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)} \cdot \frac{L_{21} - L_{22}}{L_{12} - L_{11}}\ \text{时，} \quad \boldsymbol{x} \in \omega_1$$

该式左边为似然比：$l_{12} = \dfrac{p(\boldsymbol{x} \mid \omega_1)}{p(\boldsymbol{x} \mid \omega_2)}$

右边为阈值：$\theta_{21} = \dfrac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)} \cdot \dfrac{L_{21} - L_{22}}{L_{12} - L_{11}}$

故得两类模式的贝叶斯判别条件为：

（1）若 $l_{12}(\boldsymbol{x})>\theta_{21}$，则 $\boldsymbol{x} \in \omega_1$

（2）若 $l_{12}(\boldsymbol{x})<\theta_{21}$，则 $\boldsymbol{x} \in \omega_2$

（3）若 $l_{12}(\boldsymbol{x})=\theta_{21}$，则可做任意判别。

通常，当判别正确时，不失分，可选常数 L_{11}=L_{22}=0；判别错误时，可选 L_{12}=L_{21}=1，此时 $\theta_{21}=\dfrac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}$。