黄磊　计 702　2022E8013282156

2、假设我们有一个[0，1]上的均匀分布随机数发生器 U(0,1), 请基于它构造指数分布的随机数发生器，推导出随机数生成方程。若我们有一个标准正态分布的随机数发生器 N(0,1)，请推导出对数正态分布的随机数生成方程。

均匀随机分布概率密度函数为：

$$p(x) \sim U(0,1) = 1 \cdot sgn(0 \le x \le 1)$$

指数分布概率密度函数为：

$$p(y) = ae^{-ay} \cdot sgn(y \ge 0)$$

累积分布函数需要相等，则：

$$\int_0^x dx = \int_0^y ae^{-ay} dy$$

因此：

$$x = 1 - e^{-ay}$$

$$\therefore y = -\frac{\ln(1-x)}{a}\ , x \sim U(0,1)$$

同理，标准正态分布概率密度函数：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

对数正态分布的概率密度函数：

$$h(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

累积分布函数需要相等，则：

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}} dy$$

令：

$$y = g(x)$$

$$\therefore x = g^{-1}(y)$$

上式对 $y$ 求导得到：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{g^{-1}(y)^2}{2}} \cdot {g^{-1}}'(y)$$

因此求的：

$$g^{-1}(y) = \frac{\ln y}{\sigma} - \mu$$

因此得到：

$$y = e^{\sigma x + \mu}, x \sim N(0,1)$$