- 势函数法

实例 1：用第一类势函数的算法进行分类

（1）选择合适的正交函数集{$\varphi_i(\boldsymbol{x})$}

选择 Hermite 多项式，其正交域为(-∞，+∞)，其一维形式是

$$\varphi_k=\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2^k\cdot k!\sqrt{\pi}}}H_k(x),\quad k=0,1,2,\cdots$$

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

其正交性：$\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ 2^n n!\sqrt{\pi} & m=n\end{cases}$

其中，$H_k(\boldsymbol{x})$前面的乘式为正交归一化因子，为计算简便可省略。因此，Hermite 多项式前面几项的表达式为

$H_0(x)=1$,　　$H_1(x)=2x$,　　$H_2(x)=4x^2-2$,

$H_3(x)=8x^3-12x$,　　$H_4(x)=16x^4-48x^2+12$

（2）建立二维的正交函数集

二维的正交函数集可由任意一对一维的正交函数组成，这里取四项最低阶的二维的正交函数

$$\varphi_1(\boldsymbol{x})=\varphi_1(x_1,x_2)=H_0(x_1)H_0(x_2)=1$$

$$\varphi_2(\boldsymbol{x})=\varphi_2(x_1,x_2)=H_1(x_1)H_0(x_2)=2x_1$$

$$\varphi_3(\boldsymbol{x})=\varphi_3(x_1,x_2)=H_0(x_1)H_1(x_2)=2x_2$$

$$\varphi_4(\boldsymbol{x})=\varphi_4(x_1,x_2)=H_1(x_1)H_1(x_2)=4x_1x_2$$

（3）生成势函数

按第一类势函数定义，得到势函数

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^k)=\sum_{i=1}^{4}\varphi_i(\boldsymbol{x})\varphi_i(\boldsymbol{x}^k)=1+4x_1x_1^k+4x_2x_2^k+16x_1x_2x_1^kx_2^k$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}^k=(x_1^k,x_2^k)^{\mathrm{T}}$

（4）通过训练样本逐步计算累积位势 $K(x)$

给定训练样本：ω_1 类为 $\boldsymbol{x}^1=(1\ 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}^2=(0\ -1)^{\mathrm{T}}$

ω_2 类为 $\boldsymbol{x}^3=(-1\ 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}^4=(0\ 1)^{\mathrm{T}}$

累积位势 $K(x)$的迭代算法如下

第一步：取 $\boldsymbol{x}^1=(1\ 0)^{\mathrm{T}}\in\omega_1$，故

$$K_1(\boldsymbol{x})=K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^1)=1+4x_1\cdot1+4x_2\cdot0+16x_1x_2\cdot1\cdot0=1+4x_1$$

第二步：取 $\boldsymbol{x}^2=(0\ -1)^{\mathrm{T}}\in\omega_1$，故 $K_1(\boldsymbol{x}^2)=1+4\cdot0=1$

因 $K_1(\boldsymbol{x}^2)>0$ 且 $\boldsymbol{x}^2\in\omega_1$，故 $K_2(\boldsymbol{x})=K_1(\boldsymbol{x})=1+4x_1$

第三步：取 $\boldsymbol{x}^3=(-1\ 0)^{\mathrm{T}}\in\omega_2$，故 $K_2(\boldsymbol{x}^3)=1+4\cdot(-1)=-3$

因 $K_2(\boldsymbol{x}^3)<0$ 且 $\mathrm{x}^3\in\omega_2$，故 $K_3(\boldsymbol{x})=K_2(\boldsymbol{x})=1+4x_1$

第四步：取 $\boldsymbol{x}^4=(0\ 1)^{\mathrm{T}}\in\omega_2$，故 $K_3(\boldsymbol{x}^4)=1+4\cdot0=1$

因 $K_3(\boldsymbol{x}^4)>0$ 且 $\boldsymbol{x}^4\in\omega_2$，

故 $K_4(\boldsymbol{x})=K_3(\boldsymbol{x})-K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^4)=1+4x_1-(1+4x_2)=4x_1-4x_2$

将全部训练样本重复迭代一次，得

第五步：取 $\boldsymbol{x}^5=\boldsymbol{x}^1=(1\ 0)^{\mathrm{T}}\in\omega_1$，$K_4(\boldsymbol{x}^5)=4$

故 $K_5(\boldsymbol{x})=K_4(\boldsymbol{x})=4x_1-4x_2$

第六步：取 $\boldsymbol{x}^6=\boldsymbol{x}^2=(0\ -1)^{\mathrm{T}}\in\omega_1$，$K_5(\boldsymbol{x}^6)=4$

故 $K_6(\boldsymbol{x})=K_5(\boldsymbol{x})=4x_1-4x_2$

第七步：取 $\boldsymbol{x}^7=\boldsymbol{x}^3=(-1\ 0)^{\mathrm{T}}\in\omega_2$，$K_6(\boldsymbol{x}^7)=-4$

故 $K_7(\boldsymbol{x})=K_6(\boldsymbol{x})=4x_1-4x_2$

第八步：取 $\boldsymbol{x}^8=\boldsymbol{x}^4=(0\ 1)^T\in\omega_2$，$K_7(\boldsymbol{x}^8)=-4$

故 $K_8(\boldsymbol{x})=K_7(\boldsymbol{x})=4x_1-4x_2$

以上对全部训练样本都能正确分类，因此算法收敛于判别函数

$d(\boldsymbol{x})=4x_1-4x_2$