题 1：在一个 10 类的模式识别问题中，有 3 类单独满足多类情况 1，其余的类别满足多类情况 2。问该模式识别问题所需判别函数的最少数目是多少？

答：将 10 类问题可看作 4 类满足多类情况 1 的问题，可将 3 类单独满足多类情况 1 的类找出来，剩下的 7 类全部划到 4 类中剩下的一个子类中。再在此子类中，运用多类情况 2 的判别法则进行分类，此时需要 7*（7-1）/2=21 个判别函数。故共需要 4+21=25 个判别函数。

题 2：一个三类问题，其判别函数如下：

d1(x)=-x1, d2(x)=x1+x2-1, d3(x)=x1-x2-1

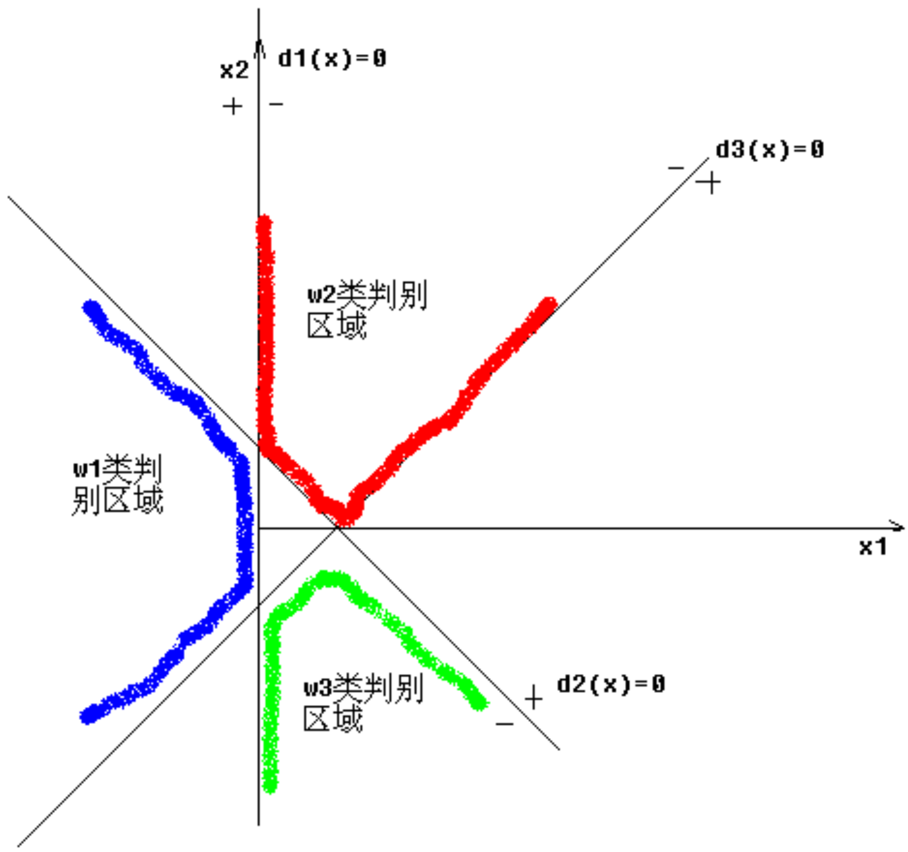
1.设这些函数是在多类情况 1 条件下确定的，绘出其判别界面和每一个模式类别的区域。

2.设为多类情况 2，并使：d12(x)= d1(x), d13(x)= d2(x), d23(x)= d3(x)。绘出其判别界面和多类情况 2 的区域。

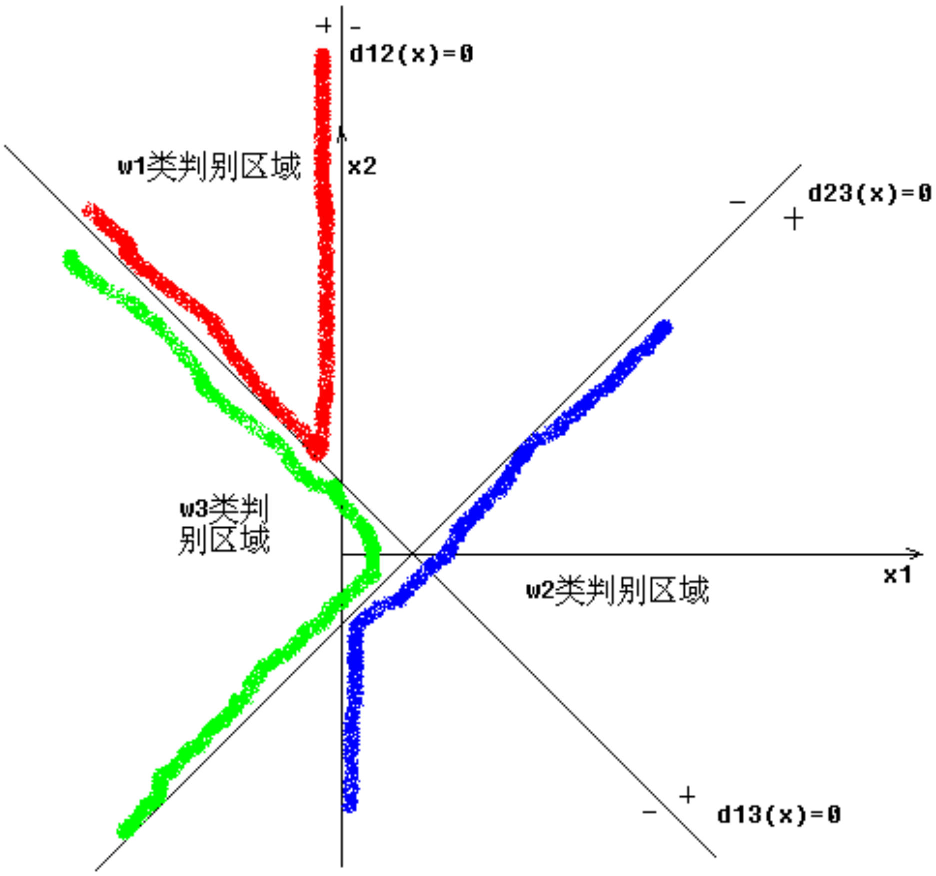
3.设 d1(x), d2(x)和 d3(x)是在多类情况 3 的条件下确定的，绘出其判别界面和每类的区域。

答：三种情况分别如下图所示：

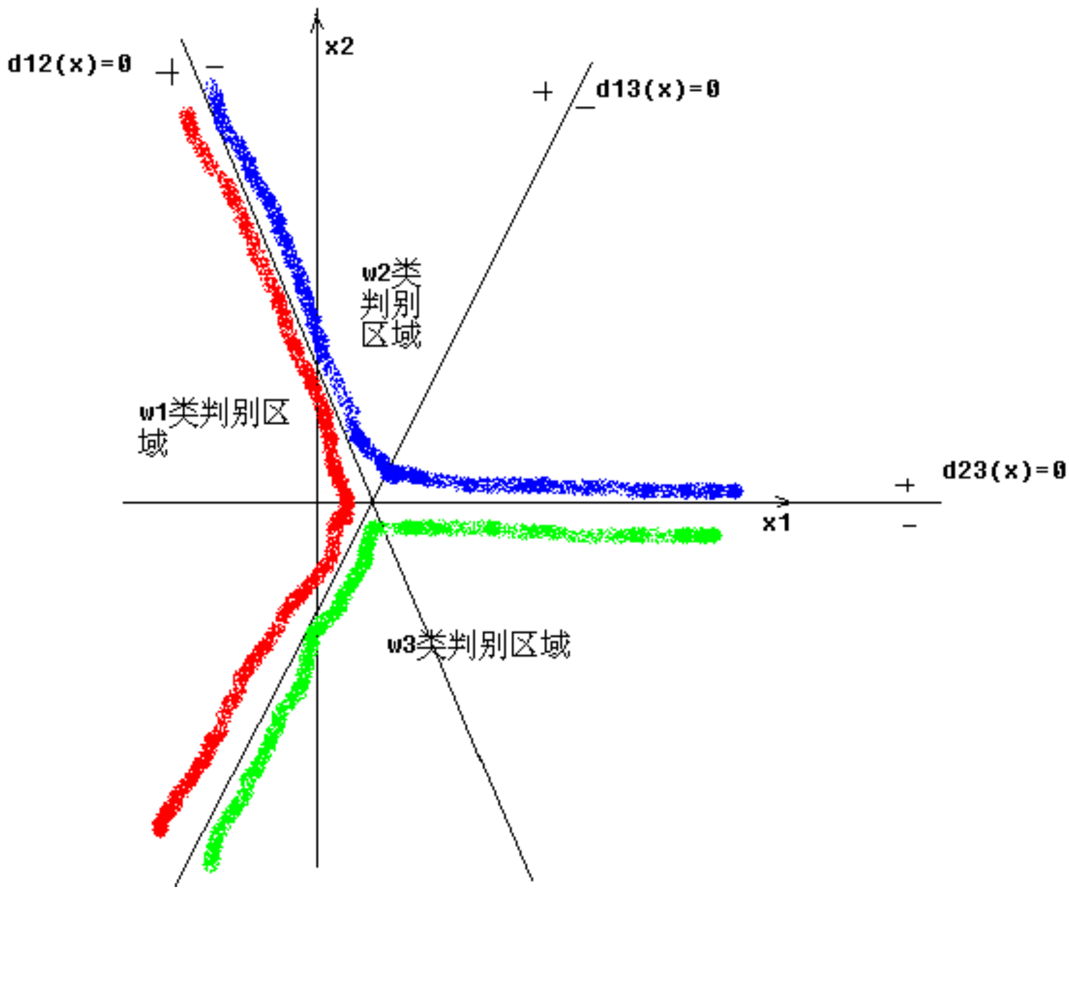
1．



2．


+
-
d12(x)=0
x2
w1类判别区域
-
d23(x)=0
+
w3类判
别区域
x1
w2类判别区域
+
-
d13(x)=0

3 .


x2
d12(x)=0
+
-
+
d13(x)=0
-
w2类
判别
区域
w1类判别区
域
+
d23(x)=0
x1
-
w3类判别区域

题 3：两类模式，每类包括 5 个 3 维不同的模式，且良好分布。如果它们是线性可分的，问权向量至少需要几个系数分量？假如要建立二次的多项式判别函数，又至少需要几个系数分量？（设模式的良好分布不因模式变化而改变。）

答：（1）若是线性可分的，则权向量至少需要 $N=n+1=4$ 个系数分量；

（2）若要建立二次的多项式判别函数，则至少需要 $N=\frac{5!}{2!3!}=10$ 个系数分量。

题 4：用感知器算法求下列模式分类的解向量 w:

ω1: {(0 0 0)T, (1 0 0)T, (1 0 1)T, (1 1 0)T}

ω2: {(0 0 1)T, (0 1 1)T, (0 1 0)T, (1 1 1)T}

解：将属于 w_2 的训练样本乘以 (-1)，并写成增广向量的形式

$x1=[0\ 0\ 0\ 1]',x2=[1\ 0\ 0\ 1]',x3=[1\ 0\ 1\ 1]',x4=[1\ 1\ 0\ 1]';$

$x5=[0\ 0\ \text{-}1\ \text{-}1]',x6=[0\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1]',x7=[0\ \text{-}1\ 0\ \text{-}1]',x8=[\text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1]';$

迭代选取 $C=1$，$w(1)=(0,0,0,0)'$，则迭代过程中权向量 w 变化如下：

$w(2)=(0\ 0\ 0\ 1)'$；$w(3)=(0\ 0\ \text{-}1\ 0)'$；$w(4)=(0\ \text{-}1\ \text{-}1\ \text{-}1)'$；

$w(5)=(0\ \text{-}1\ \text{-}1\ 0)'$；$w(6)=(1\ \text{-}1\ \text{-}1\ 1)'$；$w(7)=(1\ \text{-}1\ \text{-}2\ 0)'$；

$w(8)=(1\ \text{-}1\ \text{-}2\ 1)'$；$w(9)=(2\ \text{-}1\ \text{-}1\ 2)'$；

$w(10)=(2\ \text{-}1\ \text{-}2\ 1)'$；$w(11)=(2\ \text{-}2\ \text{-}2\ 0)'$；

$w(12)=(2\ \text{-}2\ \text{-}2\ 1)'$；收敛

所以最终得到解向量 $w=(2\ \text{-}2\ \text{-}2\ 1)'$，相应的判别函数为 $d(x)=2x_1-2x_2-2x_3+1$。

题 5：用多类感知器算法求下列模式的判别函数：

ω1: (-1 -1)T，ω2: (0 0)T，ω3: (1 1)T

解：采用一般化的感知器算法，将模式样本写成增广形式，即

$$x_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},x_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

取初始值 $w_1=w_2=w_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，取 $C=1$，则有

第一次迭代：以 x_1 为训练样本，$d_1(1)=d_2(1)=d_3(1)=0$，故

$$w_1(2)=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},w_2(2)=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},w_3(2)=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

第二次迭代：以x_2为训练样本，$d_1(2)=1,d_2(2)=-1,d_3(2)=-1$，故

$$w_1(3)=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix},w_2(3)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},w_3(3)=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

第三次迭代：以x_3为训练样本，$d_1(3)=-2,d_2(3)=2,d_3(3)=0$，故

$$w_1(4)=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix},w_2(4)=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},w_3(4)=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

第四次迭代：以x_1为训练样本，$d_1(4)=2,d_2(4)=-1,d_3(4)=-5$，故

$w_1(5)=w_1(4),w_2(5)=w_2(4),w_3(5)=w_3(4)$ 第五次迭代：以x_2为训练样本，$d_1(5)=0,d_2(5)=-1,d_3(5)=-1$，故

$$w_1(6)=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},w_2(6)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},w_3(6)=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$$

第六次迭代：以x_3为训练样本，$d_1(6)=-3,d_2(6)=0,d_3(6)=2$，故

$w_1(7)=w_1(6),w_2(7)=w_2(6),w_3(7)=w_3(6)$ 第七次迭代：以x_1为训练样本，$d_1(7)=1,d_2(7)=0,d_3(7)=-6$，故

$w_1(8)=w_1(7),w_2(8)=w_2(7),w_3(8)=w_3(7)$ 第八次迭代：以x_2为训练样本，$d_1(8)=-1,d_2(8)=0,d_3(8)=-2$，故

$w_1(9)=w_1(8), w_2(9)=w_2(8), w_3(9)=w_3(8)$ 由于第六、七、八次迭代中对 x_3, x_1, x_2 均以正确分类，故权向量的解为：

$$w_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, w_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, w_3=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$$

，可得三个判别函数为：

$$d_1=-x_1-x_2-1$$

$$d_2=0$$

$$d_3=2x_1+2x_2-2$$

题 6：采用梯度法和准则函数

$$J_{(w,x,b)}=\frac{1}{8\|x\|^2}\left[(w^t x-b)-|w^t x-b|\right]^2$$

，式中实数 b〉0，试导出两类模式的分类算法。

解：$$\frac{\partial J}{\partial w}=\frac{1}{4||x||^2}[(w^t x-b)-|w^t x-b|]*[x-x*sgn(w^t x-b)]$$

其中：$$sgn(w^t x-b)=\begin{cases}1, w^t x-b>0\\-1, w^t x-b\le 0\end{cases}$$

得迭代式：

$$w(k+1)=w(k)+\frac{C}{4||x||^2}[(w(k)^t x-b)-|w(k)^t x-b|]*[x-x*sgn(w(k)^t x-b)]$$

$$w(k+1)=w(k)+C\begin{cases}0 & w^t x-b>0\\ \dfrac{(b-w^t x)}{\|x\|^2}x & w^t x-b\le 0\end{cases}$$

题 7：用 LMSE 算法求下列模式的解向量：

ω1: {(0 0 0)T, (1 0 0)T, (1 0 1)T, (1 1 0)T}

ω2: {(0 0 1)T, (0 1 1)T, (0 1 0)T, (1 1 1)T}

解：写出模式的增广矩阵 X：

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X=(X^tX)^{-1}X^t=(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix})^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=(2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix})^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

取 $b(1)=(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^t$ 和 $C=1$ 第一次迭代：

$w(1)=X^{\#}b(1)=(1 \quad -1 \quad -1 \quad 0.5)^t$

$e(1)=Xw(1)-b(1)=(-0.5 \quad 0.5 \quad -0.5 \quad -0.5 \quad -0.5 \quad 0.5 \quad -0.5 \quad -0.5)^t$

$w(2)=w(1)+CX^{\#}|e(1)|=(1.5 \quad -1.5 \quad -1.5 \quad 0.75)^t$

$b(2)=b(1)+C[e(1)+|e(1)|]=(1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1)^t$ 第二次迭代：

$e(2)=Xw(2)-b(2)=(-0.25 \quad 0.25 \quad -0.25 \quad -0.25 \quad -0.25 \quad 0.25 \quad -0.25 \quad -0.25)^t$

$w(3)=w(2)+CX^{\#}|e(2)|=(1.75 \quad -1.75 \quad -1.75 \quad 0.875)^t$

$b(3)=b(2)+C[e(2)+|e(2)|]=(1 \quad 2.5 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2.5 \quad 1 \quad 1)^t$

第三次迭代：

$e(3)=Xw(3)-b(3)=(-0.125 \quad 0.125 \quad -0.125 \quad -0.125 \quad -0.125 \quad 0.125 \quad -0.125 \quad -0.125)^t$

$w(4)=w(3)+CX^{\#}|e(3)|=(1.875 \quad -1.875 \quad -1.875 \quad 0.9375)^t$

$b(4)=b(3)+C[e(3)+|e(3)|]=(1 \quad 2.75 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2.75 \quad 1 \quad 1)^t$

第四次迭代：

$e(4)=Xw(4)-b(4)=(-0.0625 \quad 0.0625 \quad -0.0625 \quad -0.0625 \quad -0.0625 \quad 0.0625 \quad -0.0625 \quad -0.0625)^t$

$w(5)=w(4)+CX^{\#}|e(4)|=(1.9375 \quad -1.9375 \quad -1.9375 \quad 0.9688)^t$

$b(5)=b(4)+C[e(4)+|e(4)|]=(1 \quad 2.875 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2.875 \quad 1 \quad 1)^t$

第五次迭代：

$e(5)=Xw(5)-b(5)=(-0.0313 \quad 0.0313 \quad -0.0313 \quad -0.0313 \quad -0.0313 \quad 0.0313 \quad -0.0313 \quad -0.0313)^t$

$w(6)=w(5)+CX^{\#}|e(5)|=(1.9688 \quad -1.9688 \quad -1.9688 \quad 0.9844)^t$

$b(6)=b(5)+C[e(5)+|e(5)|]=(1 \quad 2.9375 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2.9375 \quad 1 \quad 1)^t$

第六次迭代：

$e(6)=Xw(6)-b(6)=(-0.0156\quad 0.0156\quad -0.0156\quad -0.0156\quad -0.0156\quad 0.0156\quad -0.0156\quad -0.0156)^t$

$w(7)=w(6)+CX\ |e(6)|=(1.9844\quad -1.9844\quad -1.9844\quad 0.9922)^t$

$b(7)=b(6)+C[e(6)+|e(6)|]=(1\quad 2.9688\quad 1\quad 1\quad 1\quad 2.9688\quad 1\quad 1)^t$

第七次迭代：

$e(7)=Xw(7)-b(7)=(-0.0078\quad 0.0078\quad -0.0078\quad -0.0078\quad -0.0078\quad 0.0078\quad -0.0078\quad -0.0078)^t$

$w(8)=w(7)+CX\ |e(7)|=(1.9922\quad -1.9922\quad -1.9922\quad 0.9961)^t$

$b(8)=b(7)+C[e(7)+|e(7)|]=(1\quad 2.9844\quad 1\quad 1\quad 1\quad 2.9844\quad 1\quad 1)^t$

第八次迭代：

$e(8)=Xw(8)-b(8)=(-0.0039\quad 0.0039\quad -0.0039\quad -0.0039\quad -0.0039\quad 0.0039\quad -0.0039\quad -0.0039)^t$

$w(9)=w(8)+CX\ |e(8)|=(1.9961\quad -1.9961\quad -1.9961\quad 0.9980)^t$

$b(9)=b(8)+C[e(8)+|e(8)|]=(1\quad 2.9922\quad 1\quad 1\quad 1\quad 2.9922\quad 1\quad 1)^t$

第九次迭代：

$e(9)=Xw(9)-b(9)=(-0.0020\quad 0.0020\quad -0.0020\quad -0.0020\quad -0.0020\quad 0.0020\quad -0.0020\quad -0.0020)^t$

$w(10)=w(9)+CX\ |e(9)|=(1.9980\quad -1.9980\quad -1.9980\quad 0.9990)^t$

$b(10)=b(9)+C[e(9)+|e(9)|]=(1\quad 2.9961\quad 1\quad 1\quad 1\quad 2.9961\quad 1\quad 1)^t$

第十次迭代：

$e(10)=Xw(10)-b(10)=1.0\times 10^{-3}\times(-0.9766\quad 0.9766\quad -0.9766\quad -0.98\quad -0.98\quad 0.98\quad -0.98\quad -0.98)^t$

$w(11)=w(10)+CX\ |e(10)|=(1.9990\quad -1.9990\quad -1.9990\quad 0.9995)^t$

$b(11)=b(10)+C[e(10)+|e(10)|]=(1\quad 2.9980\quad 1\quad 1\quad 1\quad 2.9980\quad 1\quad 1)^t$

由于$e<1.0\times 10^{-3}$，可以认为此时权系数调整完毕，最终的权系数为：

$w\approx(2\quad -2\quad -2\quad 1)^t$ 相应的判别函数为：

$d(x)=2x_1-2x_2-2x_3+1$ 题 8：用二次埃尔米特多项式的势函数算法求解以下模式的分类问题

ω1: {(0 1)T, (0 -1)T}　ω2: {(1 0)T, (-1 0)T}

$\phi_1(x)=\phi_1(x_1,x_2)=H_0(x_1)H_0(x_2)=1$

$\phi_2(x)=\phi_2(x_1,x_2)=H_0(x_1)H_1(x_2)=2x_2$

$\phi_3(x)=\phi_3(x_1,x_2)=H_0(x_1)H_2(x_2)=4x_2^2-2$

$\phi_4(x)=\phi_4(x_1,x_2)=H_1(x_1)H_0(x_2)=2x_1$

$\phi_5(x)=\phi_5(x_1,x_2)=H_1(x_1)H_1(x_2)=4x_1x_2$

$\phi_6(x)=\phi_6(x_1,x_2)=H_1(x_1)H_2(x_2)=2x_1(4x_2^2-2)$

$\phi_7(x)=\phi_7(x_1,x_2)=H_2(x_1)H_0(x_2)=4x_1^2-2$

$\phi_8(x)=\phi_8(x_1,x_2)=H_2(x_1)H_1(x_2)=2x_2(4x_1^2-2)$

$\phi_9(x)=\phi_9(x_1,x_2)=H_2(x_1)H_2(x_2)=(4x_1^2-2)(4x_2^2-2)$ 所以，势函数 $K(x,x_k)=\sum_{i=1}^{9}\phi_i(x)\phi_i(x_k)$ 第一步：取 $X_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in w_1$，故

$K_1(X)=-15+20x_2+40x_2^2+24x_1^2-32x_1^2x_2-64x_1^2x_2^2$ 第二步：取 $X_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\in w_1$，$K_1(X_2)=5>0$，故 $K_2(X)=K_1(X)$ 第三步：取 $X_3=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in w_2$，$K_2(X_3)=9>0$，故 $K_3(X)=K_2(X)-K(X,X_3)=20x_2+16x_2^2-20x_1-16x_1^2$ 第四步：取 $X_4=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\in w_2$，$K_3(X_4)=4>0$，故 $K_4(X)=K_3(X)-K(X,X_4)=15+20x_2-56x_1^2-8x_2^2-32x_1^2x_2+64x_1^2x_2^2$

第五步：取 $X_5=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in w_1$，$K_4(X_5)=27>0$，故 $K_5(X)=K_4(X)$ 第六步：取 $X_6=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\in w_1$，$K_5(X_6)=-13<0$，故

$K_6(X)=K_5(X)+K(X,X_6)=-32x_1^2+32x_2^2$ 第七步：取 $X_7=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in w_2$，$K_6(X_7)=-32<0$，故

$K_7(X)=K_6(X)$ 第八步：取 $X_8=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\in w_2$，$K_7(X_8)=-32<0$，故

$K_8(X)=K_7(X)$ 第九步：取 $X_9=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in w_1$，$K_8(X_9)=32>0$，故

$K_9(X)=K_8(X)$ 第十步：取 $X_{10}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\in w_1$，$K_9(X_{10})=32>0$，故 $K_{10}(X)=K_9(X)$ 从第七步到第十步的迭代过程中，全部模式都已正确分类，故算法已经收敛于判别函数：

$d(X)=K_{10}(X)=-32x_1^2+32x_2^2$ 题 9：用下列势函数 $K(X,X_k)=e^{-\alpha\|X-X_k\|^2}$ 求解以下模式的分类问题

ω1: {(0 1)T, (0 -1)T}

ω2: {(1 0)T, (-1 0)T}

选取 $\alpha=1$，在二维情况下，势函数为

$K(X,X_k)=exp\{-||X-X_k||^2\}=exp\{-[(x_1-x_{k_1})^2+(x_2-x_{k_2})^2]\}$

以下为势函数迭代算法：

第一步：取 $X_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in w_1$，故 $K_1(X)=exp\{-x_1^2-(x_2-1)^2\}$ 第二步：取 $X_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\in w_1$，$K_1(X_2)=exp\{-4\}>0$，故 $K_2(X)=K_1(X)$ 第三步：取 $X_3=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in w_2$，$K_2(X_3)=exp\{-1\}>0$，故

$$K_3(X)=K_2(X)-K(X,X_3)=exp\{-x_1^2-(x_2-1)^2\}-exp\{-(x_1-1)^2-x_2^2\}$$

第四步：取 $X_4=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\in w_2$，$K_3(X_4)=exp\{-2\}-exp\{-4\}>0$，故

$$K_4(X)=K_3(X)-K(X,X_4)=exp\{-x_1^2-(x_2-1)^2\}-exp\{-(x_1-1)^2-x_2^2\}-exp\{-(x_1+1)^2-x_2^2\}$$

第五步：取 $X_5=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in w_1$，$K_4(X_5)=1-exp\{-2\}-exp\{-2\}>0$，故

$K_5(X)=K_4(X)$ 第六步：取 $X_6=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\in w_1$，$K_5(X_6)=exp\{-4\}-exp\{-2\}-exp\{-2\}<0$，故

$$K_6(X)=K_5(X)+K(X,X_6)=exp\{-x_1^2-(x_2+1)^2\}+exp\{-x_1^2-(x_2-1)^2\}-exp\{-(x_1-1)^2-x_2^2\}-exp\{-(x_1+1)^2-x_2^2\}$$

第七步：取 $X_7=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in w_2$，$K_6(X_7)=exp\{-2\}+exp\{-2\}-1-exp\{-4\}<0$，故

$K_7(X)=K_6(X)$ 第八步：取 $X_8=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\in w_2$，$K_7(X_8)=exp\{-2\}+exp\{-2\}-exp\{-4\}-1<0$，故

$K_8(X)=K_7(X)$ 第九步：取 $X_9=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in w_1$，$K_8(X_9)=exp\{-4\}+1-exp\{-2\}-exp\{-2\}>0$，故

$K_9(X)=K_8(X)$ 第十步：取 $X_{10}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\in w_1$，$K_9(X_{10})=1+exp\{-4\}-exp\{-2\}-exp\{-2\}>0$，故

$K_{10}(X)=K_9(X)$ 从第七步到第十步的迭代过程中，全部模式都已正确分类，故算法已经收敛于判别函数：

$$d(X) = K_{10}(X) = exp\{-x_1^2 - (x_2+1)^2\} + exp\{-x_1^2 - (x_2-1)^2\}$$
$$- exp\{-(x_1-1)^2 - x_2^2\} - exp\{-(x_1+1)^2 - x_2^2\}$$