- 离散的有限 K-L 展开式的形式

设一连续的随机实函数 $\boldsymbol{x}(t)$，$T_1 \le t \le T_2$，则 $\boldsymbol{x}(t)$可用已知的正交函数集$\{\varphi_j(t), j=1,2,\ldots\}$的线性组合来展开，即：

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + \cdots + a_j\varphi_j(t) + \cdots \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} a_j\varphi_j(t), \quad T_1 \le t \le T_2
\end{aligned}
\tag{1}
$$

式中，a_j 为展开式的随机系数，$\varphi_j(t)$为一连续的正交函数，它应满足：

$$
\int_{T_1}^{T_2} \varphi_n^{(t)} \tilde{\varphi}_m(t)dt = \begin{cases} 1, & if\ m = n \\ 0 & if\ m \ne n \end{cases}
$$

其中 $\tilde{\varphi}_m(t)$ 为 $\varphi_m(t)$的共轭复数式。

将上式写成离散的正交函数形式，使连续随机函数 $\boldsymbol{x}(t)$和连续正交函数 $\varphi_j(t)$在区间 $T_1 \le t \le T_2$ 内被等间隔采样为 n 个离散点，即：

$$
\boldsymbol{x}(t) \to \{x(1), x(2), \cdots, x(n)\}
$$

$$
\varphi_j(t) \to \{\varphi_j(1), \varphi_j(2), \cdots, \varphi_j(n)\}
$$

写成向量形式：

$$
\boldsymbol{x} = (x(1), x(2), \cdots, x(n))^T
$$

$$
\boldsymbol{\varphi}_j = (\varphi_j(1), \varphi_j(2), \cdots, \varphi_j(n))^T,\ j = 1, 2, \cdots, n
$$

将式(1)取 n 项近似，并写成离散展开式：

$$
\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j\boldsymbol{\varphi}_j = \boldsymbol{\Phi a}, \quad T_1 \le t \le T_2 \tag{2}
$$

其中，$\boldsymbol{a}$ 为展开式中随机系数的向量形式，即：

$$
\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}
$$

$\boldsymbol{\Phi}$ 为 n x n 维矩阵，即：

$$\boldsymbol{\Phi}=(\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2,\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n)=\begin{bmatrix}\varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \cdots & \varphi_n(1)\\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \cdots & \varphi_n(2)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_1(n) & \varphi_2(n) & \cdots & \varphi_n(n)\end{bmatrix}$$

其中，每一列为正交函数集中的一个函数，小括号内的序号为正交函数的采样点次序。因此，$\boldsymbol{\Phi}$ 实质上是由 $\boldsymbol{\varphi}_\mathrm{j}$ 向量组成的正交变换矩阵，它将 $\boldsymbol{x}$ 变换成 $\boldsymbol{a}$。