1. 课本 322 页习题 7.10

7.10 以下列基本要素计算二元组$[3,2]^T$的扩展系数并写出对应的扩展：

★(a)以二元实数集合 $\mathbf{R}^2$ 为基础的 $\varphi_0=[1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]^T$ 和 $\varphi_1=[1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]^T$。

(b)以 $\mathbf{R}^2$ 为基础的 $\varphi_0=[1,0]^T$，$\varphi_1=[1,1]^T$ 和它的对偶，$\tilde{\varphi}=[1,-1]^T$，$\tilde{\varphi}_1=[0,1]^T$。

(c)以 $\mathbf{R}^2$ 为基础的 $\varphi_0=[1,0]^T$，$\varphi_1=[-1/2,\sqrt{3}/2]^T$ 和 $\varphi_1=[-1/2,-\sqrt{3}/2]^T$，以及对于 $i=\{0,1,2\}$，它们的对偶 $\tilde{\varphi}_i=2\varphi_i/3$。

提示：必须使用向量内积代替 7.2.1 节中的整数内积。

(a) 基正交，由公式 7.2.5 得到：

$$a_0=\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=5/\sqrt{2}$$

$$a_1=\left[\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=1/\sqrt{2}$$

因此得到：

$$f(x)=\sum_k a_k\varphi_k(x)=\frac{5}{\sqrt{2}}\varphi_0+\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1=\frac{5}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

(b) 基函数以及其对偶双正交，采用 7.2.3 进行计算：

$$a_0=\langle\tilde{\varphi}_0(x),f(x)\rangle=[1,-1]\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=1$$

$$a_1=\langle\tilde{\varphi}_1(x),f(x)\rangle=[0,1]\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=2$$

因此得到：

$$f(x)=\sum_k a_k\varphi_k(x)=1\varphi_0+2\varphi_1=1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

(c) 首先：

$$\left||f(x)|\right|^2=3^2+2^2=13$$

$$\sum_k|\langle\varphi_i(x),f(x)\rangle|^2=3^2+\left(-\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)^2=19.5$$

则$A=B=19.5/13=3/2$，因此得到：

$$f(x)=\frac{1}{A}\sum_k\langle\varphi_k(x),f(x)\rangle\,\varphi_k(x)$$

$$=\frac{2}{3}\left\{3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{2}\right)\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}+\left(\frac{-2\sqrt{3}-3}{2}\right)\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$