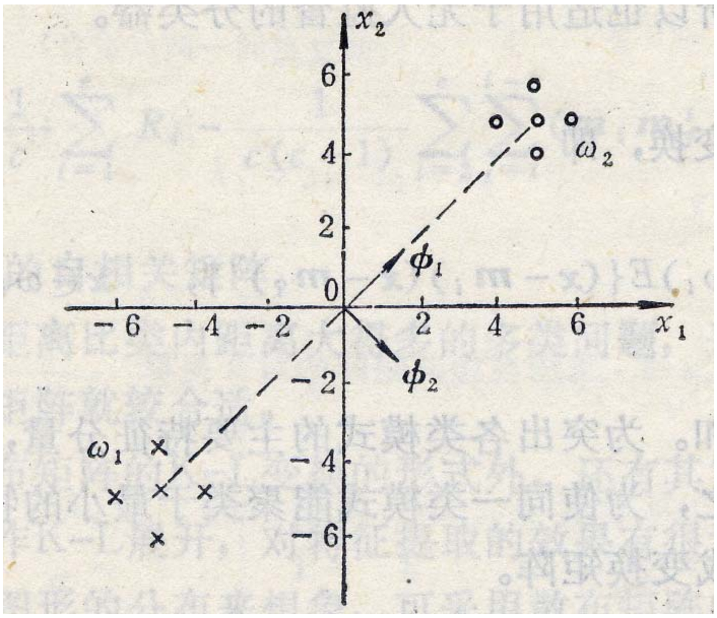
- K-L 变换实例

给定两类模式，其分布如图所示，试用 K-L 变换实现一维的特征提取（假定两类模式出现的概率相等）。



$P(\omega_1)= P(\omega_2)=0.5$, $\boldsymbol{m} = 0.5*\frac{1}{5}\sum_{\boldsymbol{x}^j\in\omega_1}\boldsymbol{x}^j + 0.5*\frac{1}{5}\sum_{\boldsymbol{x}^j\in\omega_2}^{N_i}\boldsymbol{x}^j = (0,0)^T$

符合 K-L 变换进行特征压缩的最佳条件。

因 $P(\omega_1)= P(\omega_2)=0.5$，故

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{2} P(\omega_i)E\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\sum_{\boldsymbol{x}^j\in\omega_1}^{5}\boldsymbol{x}^j(\boldsymbol{x}^j)^T\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\sum_{\boldsymbol{x}^j\in\omega_2}^{5}\boldsymbol{x}^j(\boldsymbol{x}^j)^T\right] = \begin{pmatrix} 25.4 & 25.0 \\ 25.0 & 25.4 \end{pmatrix}$$

解特征值方程$|\boldsymbol{R}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$，求 $\boldsymbol{R}$ 的特征值。

由$(25.4-\lambda)^2 - 25.0^2 = 0$，得特征值 $\lambda_1=50.4$，$\lambda_2=0.4$

其对应的特征向量可由 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{\varphi}_i = \lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i$ 求得：

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}，\quad \boldsymbol{\varphi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

选 λ_1 对应的变换向量作为变换矩阵，由 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 得变换后的一维模式特征为：

$$\omega_1:\left\{-\frac{10}{\sqrt{2}},-\frac{9}{\sqrt{2}},-\frac{9}{\sqrt{2}},-\frac{11}{\sqrt{2}},-\frac{11}{\sqrt{2}}\right\}\ \omega_2:\left\{\frac{10}{\sqrt{2}},\frac{11}{\sqrt{2}},\frac{11}{\sqrt{2}},\frac{9}{\sqrt{2}},\frac{9}{\sqrt{2}}\right\}$$