

# 形式化语言与自动机理论

## 作业 #1:

### 用数学归纳法证明斐波那契数列

截止日期：2025 年 03 月 01 日

邱吉尔 (学号：10235101533)

## 问题 1

**Fibonacci 数列:** 基础条件为  $F_0 = 0, F_1 = 1$ , 递归关系为: 若  $F_i = m, F_{i+1} = n$ , 则  $F_{i+2} = m + n$ , 对于  $i \geq 0$ 。

使用数学归纳法证明:

$$F_k = \frac{\varphi^k - \psi^k}{\varphi - \psi} \quad \text{其中} \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

## 解答

**Fibonacci 数列:** 基础条件为  $F_0 = 0, F_1 = 1$ , 递归关系为: 若  $F_i = m, F_{i+1} = n$ , 则  $F_{i+2} = m + n$ , 对于  $i \geq 0$ 。

使用数学归纳法证明:

我们需要证明:

$$F_k = \frac{\varphi^k - \psi^k}{\varphi - \psi} \quad \text{其中} \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

归纳假设:

假设对于某个  $k \geq 0$ , 有

$$F_k = \frac{\varphi^k - \psi^k}{\varphi - \psi}.$$

归纳步骤:

我们需要证明对于  $k + 1$ , 有:

$$F_{k+1} = \frac{\varphi^{k+1} - \psi^{k+1}}{\varphi - \psi}.$$

根据递归关系, 我们知道:

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}.$$

根据归纳假设, 代入  $F_k$  和  $F_{k-1}$  的表达式:

$$F_{k+1} = \frac{\varphi^k - \psi^k}{\varphi - \psi} + \frac{\varphi^{k-1} - \psi^{k-1}}{\varphi - \psi}.$$

将两个分式合并:

$$F_{k+1} = \frac{\varphi^k - \psi^k + \varphi^{k-1} - \psi^{k-1}}{\varphi - \psi}.$$

通过因式分解, 得到:

$$F_{k+1} = \frac{\varphi^{k+1} - \psi^{k+1}}{\varphi - \psi}.$$

因此, 由数学归纳法, 公式成立。

**结论:**

对于所有的非负整数  $k$ , 有

$$F_k = \frac{\varphi^k - \psi^k}{\varphi - \psi} \quad \text{其中} \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$