ΛΥΣΕΙΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΙΙ ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

By TasosBot

(Οι παρακάτω λύσεις είναι ενδεικτικές και ενδέχεται να υπάρχουν λάθη. Για τα περισσότερα θέματα υπάρχουν περισσότερες από μια λύσεις)

Θέμα 1

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΙΙ

28 Ιουνίου 2024

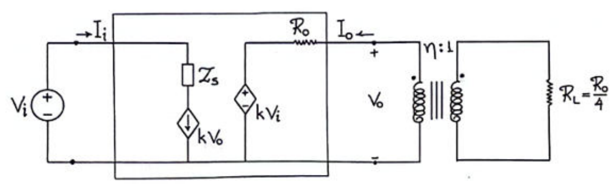
Θέμα 1 *(3.5 μονάδες)*

Το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος περιλαμβάνει ανεξάρτητη πηγή τάσης V_i, εξαρτημένη πηγή ρεύματος kV_o, εξαρτημένη πηγή τάσης kV_i, παθητικό μιγαδικό στοιχείο Z_s, ωμική αντίσταση R_o, ιδανικό μετασχηματιστή με λόγο σπειρών η:1, και ωμικό φορτίο $R_L=R_o/4$.

(1) Να υπολογιστεί το μητρώο των Z-παραμέτρων του τμήματος του κυκλώματος που βρίσκεται εντός του πλαισίου. *(1μον)*

(2) Να υπολογιστεί ο λόγος σπειρών η:1 του ιδανικού μετασχηματιστή, ώστε το φορτίο να καταναλώνει τη μέγιστη ισχύ. *(1μον)*

(3) Να υπολογιστεί η τιμή του R_o, αν η μέγιστη ενεργός ισχύς στο φορτίο συμπίπτει με την ενεργό ισχύ που παρέχει η ανεξάρτητη πηγή τάσης V_i. *(1.5μον)*



(1)

Από το σχήμα βλέπουμε ότι

$$I_i = kV_o \qquad (1)$$

(το ρεύμα I_i ταυτίζεται με αυτό της πηγής ρεύματος). Επίσης, ισχύει ότι

$$V_o - kV_i = I_o R_o \qquad (2)$$

(το ρεύμα ξεκινάει από το υψηλό στο χαμηλό δυναμικό και η πτώση τάσης είναι ίση με το υψηλό μείον το χαμηλό δυναμικό).

Αντικαθιστώντας στην (2) όπου V_o το $\frac{I_i}{k}$ από την σχέση (1) παίρνουμε (λύνοντας και ως προς V_i παίρνουμε

$$V_i = \frac{I_i}{k^2} - \frac{R_o}{k} I_o \qquad (3)$$

Από την σχέση (3) παίρνουμε ότι $Z_{11} = \frac{1}{k^2}$ και $Z_{12} = -\frac{R_o}{k}$. Επίσης, απευθείας από την σχέση (1) μπορούμε να πούμε ότι $Z_{21} = \frac{1}{k}$ και $Z_{22} = 0$

Άρα έχουμε

$$[\mathrm{Z}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{k^2} & -\frac{R_o}{k} \\ \frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix}$$

(2)

Αρχικά θα μετατρέψω το Z μητρώο στο αντίστοιχο T μητρωώ με την χρήση του τύπου

$$\left[T_1\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_{21}} \begin{bmatrix} Z_{11} & DZ \\ 1 & Z_{22} \end{bmatrix}$$

Με αντικατάσταση των παραμέτρων Z_{11},Z_{22},Z$_{12}$, και της $DZ = \frac{R_o}{k^2}$ (ορίζουσας του πίνακα των T παραμέτρων) παίρνουμε:

$$\left[T_1\right] = \frac{1}{\frac{1}{k}} * \begin{bmatrix} \frac{1}{k^2} & \frac{R_o}{k^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & \frac{R_0}{k} \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

Για το τετράπολο του ιδανικού μετασχηματιστή ισχύει

$$\left[T_2\right] = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

Θα πολλαπλασιάσουμε τα 2 μητρώα και θα καταλήξουμε στο ολικό T-μητρώο του κυκλώματος

$$\left[T\right] = \left[T_1\right] \left[T_2\right] = \begin{bmatrix} \frac{n}{k} & \frac{R_o}{kn} \\ kn & 0 \end{bmatrix}$$

Από το ολικό μητρώο θα υπολογίσουμε την $Z_{th} = \frac{B}{A} = \frac{R_0}{n^2}$ και την $V_{th} = \frac{V_i}{A} = \frac{V_i k}{n}$

Γνωρίζουμε ότι για μέγιστη κατανάλωση ισχύος από το φορτίο πρέπει να ισχύει $R_{th} = R_L$ δηλαδή $\frac{R_o}{n^2} = \frac{R_o}{4}$ και άρα

$$n = 2 : 1$$

(3)

Γνωρίζουμε ότι η μέγιστη ισχύς στο φορτίο δίνεται από τον τύπο

$$P_{max} = \frac{V_{th}^2}{4 * R_{th}} \; (4)$$

ενώ αντίστοιχα για την ενεργό ισχύ της γεννήτριας θα πάρουμε τον τύπο

$$P_{gen} = \frac{V_i^2}{R_{in}} \; (5)$$

Για να βρούμε την τιμή της R_o θα πρέπει να εξισώσουμε τις (4) και (5). Για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την R_{in}. Ο υπολογισμός της R_{in} θα γίνει μέσω του T μητρώου του προηγούμενου ερωτήματος.Αρχικά θα εκφράσουμε το T μητρώο με εξισώσεις. Έχουμε:

$$V_i = AV_o + BI_o$$

$$I_i = CV_o + DI_o$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις και γνωρίζοντας ότι $R_{in} = \frac{V_i}{I_i}$ προκύπτει:

$$R_{in} = \frac{AV_o + BI_o}{CV_o + DI_o}$$

Στη συνέχεια, στην παραπάνω σχέση θα πάρουμε κοινό παράγοντα, το I_o και αντικαθιστώντας $R_L = \frac{V_o}{I_o}$ έχουμε:

$$R_{in} = \frac{AR_L + B}{CR_L + D}$$

Από την μέχρι στιγμής επίλυση της άσκησης ξέρουμε ότι: $R_L \frac{R_o}{4}$ και τους παράγοντες A, B, C, D από το μητρώο T (βλέπε προηγούμενο υποερώτημα προκύπτει:

$$R_{in} = \frac{\frac{n}{k}\frac{R_o}{4} + \frac{R_o}{kn}}{kn\frac{R_o}{4}}$$

Γνωρίζουμε ότι $n = 2$ (προηγούμενο υποερώτημα) και άρα έχουμε:

$$R_{in} = \frac{\frac{1}{k}(\frac{R_o}{2} + \frac{R_o}{2})}{k\frac{R_o}{2}} = \frac{2}{k^2}$$

Αντικαθιστούμε τώρα τις $R_{in} = \frac{2}{k^2}$, $R_{th} = \frac{R_o}{n^2}$, $V_{th} = \frac{V_i k}{n}$ που βρήκαμε πριν και εξισώνουμε τις (4) και (5) :

$$\frac{V_i^2 k^2}{4 * \frac{R_o}{n^2} n^2} = \frac{V_i^2}{\frac{2}{k^2}} = \frac{V_i^2 k^2}{2}$$

Έπειτα από τις εμφανείς απλοποιήσεις προκύπτει:

$$4R_o = 2$$

$$R_o = 0.5\ Ohm$$

Θέμα 2 *(3 μονάδες)*

Ο παράλληλος συνδυασμός της αντίστασης 1Ω και του πυκνωτή 0.01F αποτελούν το φορτίο του παρακάτω κυκλώματος.

Οι πηγές είναι: $I_{dc} = 2$ [Ampere] και $v_{ac}(t) = \sqrt{2}\,\text{συν}\left(100t + 60^{\circ}\right)$ [Volt].

Να προσδιοριστούν επάνω στο φορτίο:

(α) Οι χρονικές εκφράσεις της ολικής τάσης και του ολικού ρεύματος. (*0.5μον*)

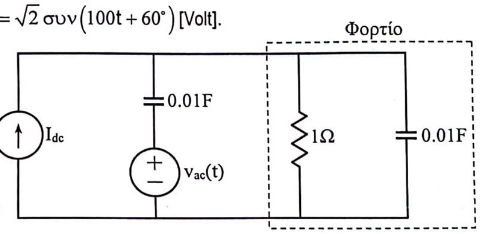
(β) Η πραγματική ισχύς. (*0.5μον*)

(γ) Η άεργος ισχύς. (*0.5μον*)

(δ) Η ισχύς παραμόρφωσης. (*0.5μον*)

(ε) Ο συντελεστής ισχύος. (*0.5μον*)

(στ) Ο συντελεστής παραμόρφωσης. (*0.5μον*)



Θέμα 2

α)

Αρχικά, προκειμένου να επηλήσουμε το κύκλωμα θα αξιοποιήσουμε την αρχή της υπέρθεσης (ή αρχή της επαλληλίας). Αυτό είναι απαραίτητα γιατί οι πηγές που δίνονται είναι διαφορετικής συχνότητας (0 και $100rad$).

Ας ξεκινήσουμε την ανάλυση μας κρατώντας την πηγή συνεχούς ρεύματος I_{dc}. Για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει να βραχυκυκλώσουμε την πηγή τάσης V_{ac}, ενώ θα πρέπει να υπολογίσουμε και τις μιγαδικές αντιστάσεις (Z) των πυκνωτών και των πηνίων. Στο dc οι πυκνωτές γίνονται ανοικτοκυκλώματα ($\frac{1}{j\omega C} = \infty$) ενώ τα πηνία βραχυκλώματο $j\omega L = 0$ αφού ω=0 (αν και εδώ δεν υπάρχουν πηνία).Το κύκλωμα γίνεται ως εξής:

Το κύκλωμα που προκύπτει είναι αρκετά απλό. Προκύπτει

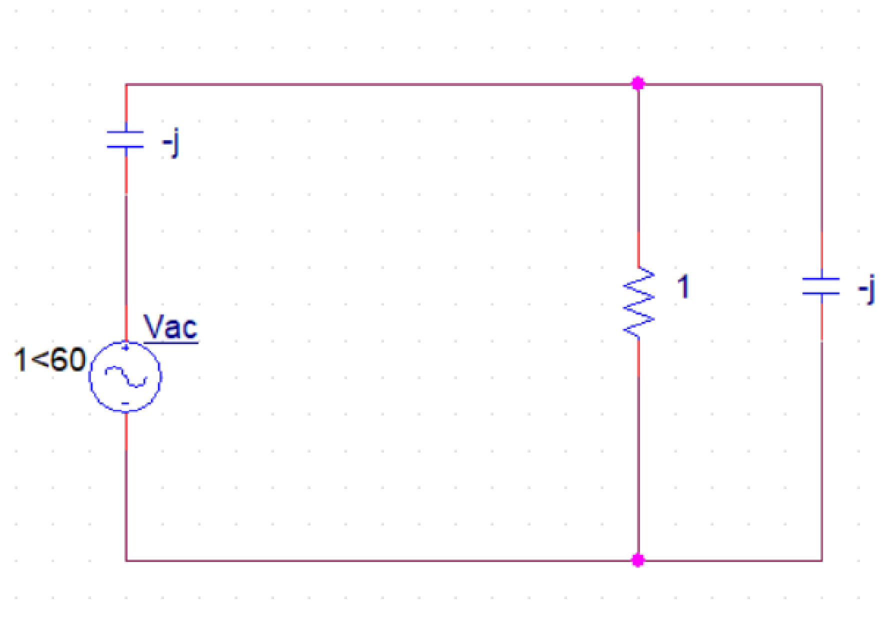
$$I_{L_{dc}} = 2\ Ampere$$

και

$$V_{L_{dc}} = 2\ Volt$$

(από νόμο του Ωμ)

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμαι με την άλλη πηγή. Την πηγή εναλλασσόμενης τάσης. Επειδή δίνεται το πλάτος $\sqrt{2}Volt$ θα πάρουμε η πηγή θα είναι $1\angle 60^{\circ}$ και ω=100ραδ. Επίσης, οι πυκνωτές χωρητικότητας $0.01F$, θα έχουν αντίσταση $\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j100*0.01} = -j$ ενώ η πηγή ρεύματος γίνεται ανοικτό κύκλωμα. Το κύκλωμα γίνεται ως εξής:



Αρχικά θα βρούμε το ρεύμα που διαρρέι το κύκλωμα (και άρα το ρεύμα που διαρρέει το φορτίο). Για να το κάνουμε αυτό θα υπολογίσουμε την ολική αντίσταση του κυκλώματος

$$Z_{o\lambda} = -j + \frac{1*(-j)}{1-j} = 0.5 - 1.5j \ Ohm$$

Από τον νόμο του Ωμ βρίσκουμε το ρεύμα

$$I = \frac{V}{Z_{o\lambda}} = \frac{1\angle 60}{0.5-1.5j} = 0.632455\angle 131.565^\circ \ Ampere$$

ενώ η τάση είναι

$$V_{Lac} = I_{Lac} * Z_l = 0.632455\angle 131.565 * \frac{1*(-j)}{1-j} = 0.4472133\angle 86.565^\circ \ Volt$$

Από τα παραπάνω προκύπτουν οι συνολικές εκφράσεις τάσης και ρεύματος του φορτίου (ΠΡΟΣΟΧΗ: ΜΗΝ ΞΕΧΑΣΕΤΕ ΤΟ $\sqrt{2}$)

$$v_L(t) = 2 + 0.4472133\sqrt{2}cos(100t + 86.565^\circ) \ Volt$$
$$i_L(t) = 2 + 0.632455\sqrt{2}cos(100t + 131.565^\circ) \ Ampere$$

β)

Αρχικά θα βρούμε τις rms τιμές της τάσης και του ρεύματος

$$V_{L_{rms}} = \sqrt{2^2 + 0.4472133^2} = 2.04939\ Volt\ rms$$

$$I_{L_{rms}} = \sqrt{2^2 + 0.632455^2} = 2.097618\ Ampere\ rms$$

Για την εύρεση της ενεργού ισχύος έχουμε

$$P = \frac{V_{L_{rms}}^2}{R} = \frac{2.04939^2}{1} = 4.1999\ Watt = 4.2\ Watt$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους με τα ρεύμαατα γιατί οι αντιστάσεις (αντίσταση και πυκνωτής) του φορτίου είναι παράλληλα και άρα δεν έχουν ίδιο ρεύμα αλλά ίδια τάση.Αντίστοιχα αν οι αντιστάσεις του φορτίου ήταν σε σειρά δεν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους με την τάση.

γ)

Για την άεργο ισχύ έχουμε

$$Q = \frac{V_{L_{ac}}^2}{X} = \frac{0.4472133^2}{-1} = -0.199999\ VAR = -0.2\ VAR$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για το Q, θέλουμε κάθε V_{Lac} ξεχωριστά γιατί τα Χ διαφέρουν από συχνότητα σε συχνότητα.

δ)

$$S = V_{L_{rms}} * I_{L_{rms}} = 2.04939 * 2.097618 = 4.2988374\ VA$$

και άρα

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{4.2988374^{-}4.1999^2 - 0.199999^2} = 0.894476\ VA$$

ε)

$$\varepsilon\varphi(\varphi) = \frac{Q}{P} = \frac{0.19999}{4.1999} = 0.0476167$$

και άρα

$$\varphi = 2.7262^\circ$$

$$pf = 0.998868$$

(χωρητικός)

στ)

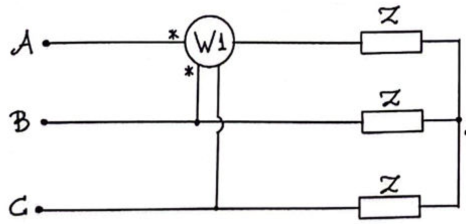
$$df = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{S} = \frac{\sqrt{4.2^2 + 0.2^2}}{4.2988374} = 0.978115$$

Θέμα 3 *(3.5 μονάδες)*

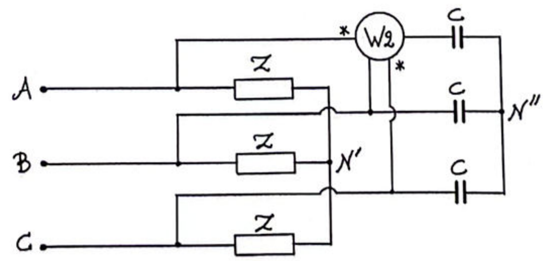
Συμμετρική τριφασική γεννήτρια ABC, με τάση γραμμής V_L = 400 Volt rms και συχνότητα 50Hz, συνδέεται με συμμετρικό τριφασικό φορτίο σε συνδεσμολογία αστέρα, η κάθε φάση του οποίου είναι μιγαδικής τιμής Z, με μέτρο 10Ω (|Z|=10Ω).

Αρχικά στο σύστημα συνδέεται βαττόμετρο όπως φαίνεται στο *Σχήμα (α)*. Η ένδειξη του βαττομέτρου είναι W_1=8000Watt.
(1) Με βάση τα άνω δεδομένα, ζητείται ο συντελεστής ισχύος του τριφασικού φορτίου. (*1.5μον*)

Στη συνέχεια, τρεις όμοιοι πυκνωτές συνδέονται παράλληλα στο φορτίο και το βαττόμετρο συνδέεται όπως φαίνεται στο *Σχήμα (β)*. Αυτή τη φορά, η ένδειξη του βαττομέτρου είναι W_2=3380.9Watt. Με βάση τα δεδομένα του *Σχήματος (β)*:
(2) Να υπολογιστεί η χωρητικότητα C των πυκνωτών. (*1μον*)
(3) Να υπολογιστεί ο νέος συντελεστής ισχύος στη θέση του φορτίου λαμβάνοντας υπόψη και τους τρεις πυκνωτές. (*1μον*)



Σχήμα (α)



Σχήμα (β)

Θέμα 3

(1)

Θα θεωρήσουμε ως τάση αναφοράς την τάση $V_{AB} = V_L\angle 0^\circ = 400\angle 0^\circ\ Volt\ rms$

Από την θεωρία και την εικόνα γνωρίζουμε ότι η ένδειξη του βαττομέτρου δίνεται από τον τύπο (συνδεσμολογία βαττομέτρου)

$$W_1 = |V_{BC}||I_A|cos(\angle V_{BC} - \angle I_A)(1)$$

Η $V_{BC} = 400\angle -120^\circ\ Volt\ rms$ (μετατροπή γωνιών) ενώ για την $I_A = \frac{V_A\angle -30^\circ}{Z\angle\varphi^\circ} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ}{10\angle\varphi} = \frac{40}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ - \varphi\ Ampere\ rms$ (όπως προκύπτει από το ισοδύναμο μονοφασικό χωρίς μετατόπιση ουδετέρου αφού το φορτίο είναι συμμετρικό από την εκφώνηση)

Με αντικατάσταση στον τύπο (1) παίρνουμε

$$W_1 = 400 * \frac{40}{\sqrt{3}} * cos(-120^\circ + 30^\circ + \varphi) = \frac{16000}{\sqrt{3}} * cos(\varphi - 90^\circ) = \frac{16000}{\sqrt{3}} sin(\varphi)$$

(Έγινε χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας $cos(90^\circ - \varphi) = sin(\varphi)$)

Επιλύοντας ως προς φ έχουμε :

$$sin(\varphi) = \frac{8000 * \sqrt{3}}{16000} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

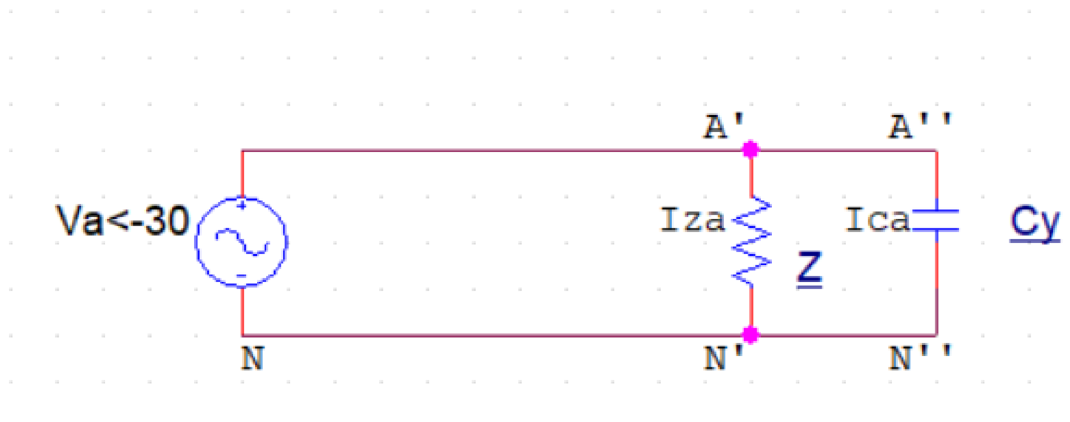
και άρα προκύπτει ότι

$$\varphi = 60^\circ \ (\varphi \in (-90^\circ, 90^\circ))$$

και άρα ο συντελεστής ισχύος είναι επαγωγικός και ίσος με

$$pf = cos(\varphi) = 0.5$$

(2)



Σχήμα 1: Ισοδύναμο μονοφασικό μετά την την προσθήκη παράλληλα όμοιων πυκνωτών. Λόγω ομοιότητας δεν έχουμε μετατόπιση ουδετέρου

Από την εικόνα βλέπουμε ότι η ένδειξη του βαττομέτρου θα είναι

$$W_2 = |V_{CB}| * |I_{c_A}| * cos(\angle V_{CB} - \angle I_{c_A}) \ (2)$$

Η $V_{CB} = 400\angle 60^\circ$ (+180 από την V_{BC} με ίδιο μέτρο) ενώ η $\angle I_{CA} = 60^\circ$ αφού εκείνος ο κλάδος περιέχει μόνο πυκνωτή και άρα πρέπει -30-60=-90°.

Έτσι, από την σχέση (2) επιλύουμε ως προς $|I_{C_A}|$

$$|I_{C_A}| = \frac{W_2}{|V_{CB}| * cos(\angle V_{CB} - \angle I_{c_A})} = 8.45225 \ Ampere \ rms$$

Από νόμο του Ωμ έχουμε:

$$\frac{1}{j\Omega C} = \frac{V_a \angle -30^\circ}{I_{CA}\angle 60^\circ}$$

$$-\frac{1}{2*\pi*f*C}\angle-90^\circ=\frac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{8.45225}\angle-90^\circ \ (3)$$

Το $f=50Hz$ από την εκφώνηση ενώ ο άγνωστος είναι ο C. Επιλύοντας ως προς C την σχέση 3 έχουμε

$$C=1.164992414*10^{-4}\ F\ =116.4992414\mu F$$

(3)

Θα υπολογίσουμε τον νέο συντελεστή ισχύος από την συνολική αντίσταση του κυκλώματος. Αυτή είναι

$$\frac{1}{j\omega C}//10\angle 60^\circ \ (4)$$

(ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Παίρνουμε μόνο έναν κλάδο του συμμετρικού τριφασικού κυκλώματος) Αντικαθιστώντας όπου ω τα 100π $(2*\pi*f)$ και όπου C τα 116.4992414 μF παίρνουμε

$$Z'=14.14167965\angle 45.001^\circ$$

Άρα η γωνία φ'=45°και άρα ο νέος συντελεστής είναι $pf=cos(\varphi')=cos(45^\circ)$

$$pf=\frac{\sqrt{2}}{2}=0.707$$

(επαγωγικός)

Σημείωση:Εναλλακτική επίλυση του υποερωτήματος αυτού προκύπτει με χρήση του τύπου

$$C=\frac{P*(\varepsilon\varphi(\varphi_{\alpha\rho\chi})-\varepsilon\varphi(\varphi_{\tau\varepsilon\lambda}))}{\omega V^2} \ (5)$$

όπου $P=8000W$ (πραγματική ισχύς κυκλώματος) ω=100π rad/s φ$_{\alpha\rho\chi}=60^\circ$.

Για να επιλύσουμε το υποερώτημα με τον παραπάνω τύπο πρέπει να βεβαιωθούμε ότι η τάση μένει σταθερή (εδώ ισχύει γιατί οι πυκνωτές προστίθενται παράλληλα). Πρέπει να επιλύσουμε ως προς $\varphi_{\tau\varepsilon\lambda}$. Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι το ίδιο.

Σημείωση: Η επίλυση δεν διαφέρει αν πάρουμε ως τάση αναφοράς την V_a.