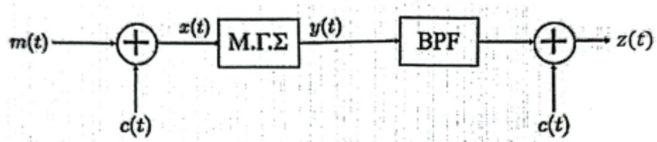
ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2025
(Οι παρακάτω λύσεις είναι ενδεικτικές και ενδέχεται να υπάρχουν λάθη)

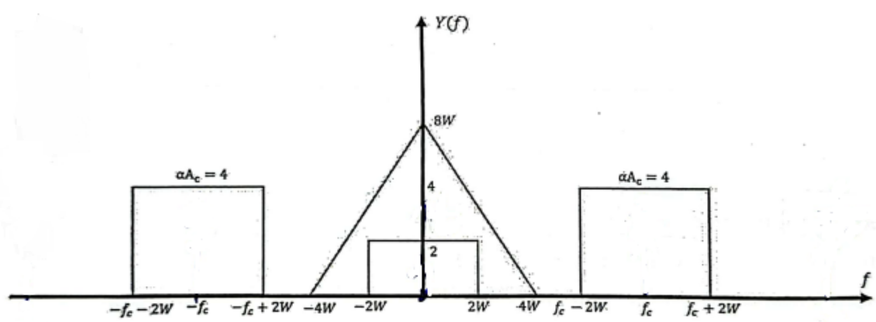
Θέμα 1

Θέμα 1ο (30)

Το σήμα πληροφορίας $m(t)$ διαμορφώνεται κατά AM-DSB-TC με τη βοήθεια της διάταξης του Σχήματος 1, όπου Μ.Γ.Σ. είναι ένα μη γραμμικό στοιχείο, του οποίου η χαρακτηριστική εξίσωση εξόδου-εισόδου δίνεται από τη σχέση $y(t) = \alpha x^2(t) + \beta x(t)$. Το φέρον δίνεται ως $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$. Το φάσμα $\Upsilon(f)$ δίνεται στο Σχήμα 2, με τις ώσεις που προκύπτουν από τον μετασχηματισμό Fourier του $y(t)$ να έχουν αφαιρεθεί.



Σχήμα 1: Διάταξη διαμορφωτή.



Σχήμα 2: $Y(f)$.

α-15) Να βρεθούν τα α, β, A_c, να υπολογιστεί συναρτήσει του W το $m(t)$, καθώς και να προστεθούν στο φάσμα οι όροι που λείπουν.

β-08) Να διαλέξετε τις συχνότητες του ζωνοπερατού φίλτρου (BPF) και την ενίσχυσή του, έτσι ώστε το $z(t)$ να είναι το διαμορφωμένο κατά AM-DSB-TC σήμα.

γ-07) Να βρεθεί η ελάχιστη επιτρεπόμενη f_c ώστε να μπορεί να ανακτηθεί σωστά το σήμα, καθώς και για ποιες τιμές του W δεν έχω υπερδιαμόρφωση, δεδομένου ότι $\min(\text{sinc}(t)) \approx -0.2$.

α)

Στο σχήμα μας δίνεται το φάσμα ενός σήματος $x(t)$ αφού αυτό διέλθει από το Μη Γραμμικό Στοιχείο του οποίου η συνάρτηση δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = \alpha x^2 + \beta x(t)$$

Για να μπορέσουμε να βρούμε τα α,β,A_c, πρέπει να πάρουμε τον Μετασχηματισμό $Fourier$ του $y(t)$ Έχουμε:

$$Y(F) = aFT(x^2(t)) + bX(F) \text{ ,όπου } x(t) = m(t) + c(t) = m(t) + A_c cos(2\pi f_c t)$$

Θα εκτελέσουμε τις πράξεις για την $Y(F)$:
$Y(F) = aFT((m(t) + A_c)^2) + \beta M(F) + \frac{\beta}{2}(\delta(f - f_c)) + \delta(f + f_c)) + \beta M(F) =$
$= aFT(m^2(t) + 2m(t)A_c cos2\pi f_c + A_c^2 cos^2 2\pi f_c t) + \frac{\beta}{2}(\delta(f - f_c)) + \delta(f + f_c)) + \beta M(F) =$
$aFT(m^2)(t) + 2\alpha FT(m(t)) * \frac{A_c}{2}(\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) + \frac{A_c^2 \alpha}{4}((\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)) * ((\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)) + \frac{\beta}{2}(\delta(f - f_c)) + \delta(f + f_c)) + \beta M(F) =$
$aFT(m^2)(t) + 2\alpha M(F) * \frac{A_c}{2}(\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) + \frac{A_c^2 \alpha}{4}((\delta(f - 2f_c)) + \delta(f + 2f_c)) + 2\delta(f) + \frac{\beta}{2}(\delta(f - f_c)) + \delta(f + f_c)) + \beta M(F) =$
$aFT(m^2)(t) + A_c\alpha(M(f - f_c) + M(f + f_c)) + \frac{A_c^2 \alpha}{4}((\delta(f - 2f_c) + \delta(f + 2f_c)) + 2\delta(f)) + \frac{\beta}{2}(\delta(f - f_c)) + \delta(f + f_c)) + \beta M(F)$

Από αυτήν την τελευταία σχέση
$Y(F) = aFT(m^2(t)) + A_c\alpha(M(f - f_c) + M(f + f_c)) + \frac{A_c^2 \alpha}{4}((\delta(f - 2f_c) + \delta(f + 2f_c)) + 2\delta(f)) + \frac{\beta}{2}(\delta(f - f_c)) + \delta(f + f_c)) + \beta M(F) \quad (1)$
θα αντλήσουμε πληροφορίες για τα α,β,A_c καθώς και για το $m(t)$

Αρχικά, λόγω του τετραγωνικού παλμού γύρω από το 0 και λόγω της έλλειψης W καταλαβαίνουμε ότι το $M(F) = rect(f/4W)$
Άρα

$$\boxed{\boldsymbol{m(t) = 4Wsinc(4Wt)}}$$

Επιπλέον, έχουμε:

$$m^2(t) = 16W^2 sinc^2(4Wt)$$

και άρα

$$M^2(F) = \frac{16W^2}{4W} tri(\frac{f}{4W}) = 4Wtri(\frac{f}{4W})$$

που μέσω της σχέσης (1) δικαιολογεί την ύπαρξη του τριγωνικού παλμού από $-4W$ ως $4W$.
Στον υπολογισμό τον α,β τώρα έχουμε:

$$\boxed{\boldsymbol{\beta = 2}}$$

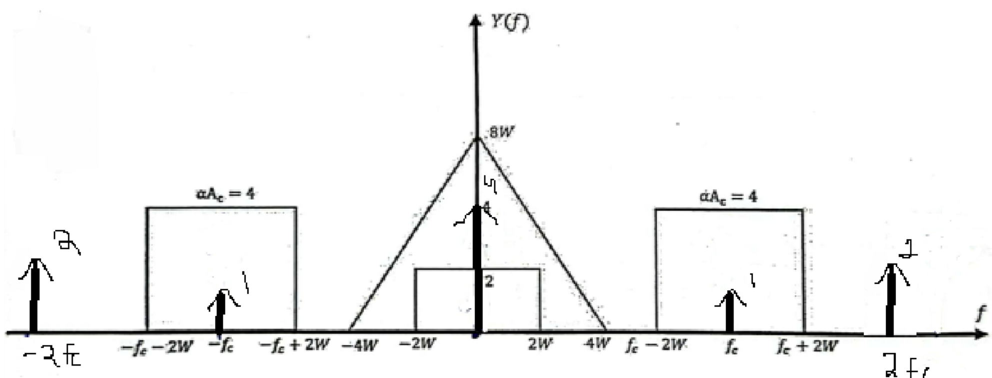
λόγω της (1) και του όρου $\beta M(F)$ και του σχήματος
Επιπλέον, λόγω του όρου $\alpha FT(m^2(t))$ και του σχήματος έχουμε:

$$4W\alpha = 8W => \boxed{\boldsymbol{\alpha = 2}}$$

Ακόμη, δίνεται ότι

$$\alpha A_c = 4 => \boxed{\boldsymbol{A_c = 2}}$$

Στο μεταξύ, στο δοθέν φάσμα βλέπουμε και τους άλλους όρους της (1), όπως τους τετραγωνικούς παλμούς γύρω από τις συχνότητες $-fc$ και fc.Το μόνο που λείπει από την σχέση (1) είναι οι διάφορες ώσεις (τελευταίο ζητούμενο). Αν προσθέσουμε τις ώσεις από την σχέση (1), με κατάλληλες αντικαταστάσεις έχουμε το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2: $Y(f)$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα πλάτη των ώσεων προκύπτουν άμεσα από τη σχέση (1).

β)

Είναι γνωστό ότι τα τα διαμορφωμένα κατα $AM-DSB-TC$ σήματα έχουν την μορφή

$$z(t) = (A_c + m(t))cos2\pi f_c t = A_c cos2\pi f_c t + m(t)cos2\pi f_c t$$

Στο πεδίο της συχνότητας:

$$Z(F) = \frac{A_c}{2}(\delta(f-f_c)) + \delta(f+f_c)) + \frac{1}{2}(M(f-f_c)) + M(f+f_c))$$

Το ζητούμενο για να έχουμε διαμόρφωση AM είναι να πάρουμε στην έξοδο της διάταξης το παραπάνω σήμα. Άρα θα πάρουμε ένα ζωνοπερατό φίλτρο γύρω από την συχνότητα f_c με συνολικό εύρος $4W$. Αν το κάνουμε αυτό θα πάρουμε τον ορθογωνικό παλμό πλάτους 4. Όμως θέλουμε πλάτος $\frac{1}{2}$. Άρα, η ενίσχυση θα είναι $\frac{1}{8}$

$$\boxed{\boldsymbol{H(f) = \begin{cases} \frac{1}{8} & , f_c - 2W < f_c < f_c + 2W \\ 0 & , \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}}}$$

γ)

Για να μπορεί να ανακτηθεί το σήμα θα πρέπει μετά το BPF να πάρουμε το σήμα χωρίς παρεμβολές $(alliasing)$. Για να συμβεί αυτό πρέπει να εξασφαλιστεί ότι δεν θα επικαλύπτονται τα φάσματα του τριγωνικού και του ορθογωνικού παλμού. Άρα πρέπει να ικανοποίειται η ανίσωση:

$$f_c - 2W > 4W => \boxed{\boldsymbol{f_c > 6W}}$$

Αντίστοιχα, για να πιάσει η διαμόρφωση AM (δηλαδή να μην έχουμε υπερδιαμόρφωση στην προκειμένη περίπτωση) πρέπει ο δείκτης διαμόρφωσης να είναι μικρότερος της μονάδας. Έτσι:

$$\mu = \frac{|min(m(t)|}{Ac} < 1 \quad => \frac{|4W * (-0.2)|}{2} < 1$$

Άρα:

$$\boxed{\boldsymbol{W < 2.5}}$$

Θέμα 2ο (35)

A. Το ημιτονοειδές σήμα πληροφορίας $m(t) = A_m \cos(12.85 \cdot 10^6 t)$, διαμορφώνεται κατά FM από φέρον με συχνότητα $f_c = 90$ MHz και πλάτος $A_c = 6$ V. Το φέρον είναι της μορφής $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$. Η απόκλιση συχνότητας του διαμορφωτή αντιστοιχίζεται σε 5 kHz για 1.5 mV σήματος εισόδου.

α-13) Ποια είναι η μέγιστη τιμή του πλάτους A_m, ώστε το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος να μην υπερβαίνει το 5% της φέρουσας συχνότητας;

B. Το παραπάνω διαμορφωμένο σήμα εισέρχεται σε υπερετερόδυνο δέκτη που λειτουργεί στην περιοχή συχνοτήτων 85 MHz - 95 MHz. Στην είσοδο του δέκτη υπάρχει RF φίλτρο με ζώνη διέλευσης 70 - 100 MHz και δίνεται ότι $f_l = 8$ MHz και $f_{IF} = 98$ MHz.

β-12) Να βρεθεί η εικονική συχνότητα f_{im}. Θα προκληθούν παρεμβολές στον δέκτη;

γ-10) Να εκφράσετε το σήμα μετά τον τοπικό ταλαντωτή στο πεδίο του χρόνου και να σχεδιάσετε το θετικό φάσμα αυτού (θεωρήστε ότι 0.1 << 1).

ΘΕΜΑ 2

A.

α)

Αρχικά θα βρούμε την σταθερά ευαισθησίας συχνότητας η οποία είναι ίση με

$$K_f = \frac{\Delta f_i}{V_i} = \frac{5kHz}{1.5mV} = \boldsymbol{\frac{10}{3} 10^6 \;\; Hz/Volt}$$

Στη συνέχεια θα βρούμε την συχνότητα f_m του σήματος η οποία είναι ίση με

$$f_m = \frac{12.85}{2\pi} 10^6 Hz$$

Από το K_f μπορούμε να πάρουμε το β απευθείας από την σχέση

$$\beta = \frac{K_f A_m}{f_m}$$

Επίσης από την εκφώνηση θέλουμε το ενεργό εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος να μικρότερο ή ίσο του 5% του f_m, δηλαδή μικρότερο από το 0.05 του f_c.Από τον κανόνα του $Carson$ $B = 2f_m(\beta + 1)$ έχουμε:

$$B = 2f_m(\beta + 1)$$

$$2f_m(\beta+1) \leq 0.05f_c$$

$$\beta + 1 \leq \frac{0.05f_c}{2f_m} = \frac{0.05 * 90 * 10^6}{2 * \frac{12.85}{2\pi} * 10^6} = 1.1000168...$$

Άρα

$$\beta \leq 0.1000168... = 0.1$$

ή

$$\beta_{max} = 0.1$$

Από την παραπάνω σχέση για το β μπορούμε να υπολογίσουμε απευθείας το A_{max}. Έτσι:

$$A_{max} = \frac{\beta_{max} * fm}{K_f} = \frac{0.1 * \frac{12.85}{2*\pi} * 10^6}{\frac{10}{3} * 10^6} = \boxed{\mathbf{0.061354}\boldsymbol{Volt}}$$

Β.

β)

Επειδή

$$f_{if} > f_c$$

και

$$f_l = f_if - f_c = (98 - 90 = 8MHz)$$

έχουμε άνω μετατροπή με έγχυση χαμηλής ζώνης. Άρα για την (κεντρική) εικονική συχνότητα έχουμε:

$$f_{im} = 2f_{if} - f_c = 196 - 90 = \boxed{\mathbf{106}\boldsymbol{MHz}}$$

Αν λάβουμε υπόψιν και το εύρος του σήματος πληροφορίας

$$f_m = \frac{12.85}{2\pi} = 2.04514MHz$$

μπορούμε να δούμε ότι

$$f_{im,min} = 106 - 2.04514 = 103.95486MHz$$

και

$$f_{im,max} = 106 + 2.04514 = 108.04514MHz$$

Άρα σε **καμία περίπτωση του σήματος πληροφορίας δεν έχουμε παρεμβολή εικονικής συχνότητας** αφού το RF Φίλτρο αποκόπτει συχνότητες πέρα από τα $100MHz$

γ)

Έχουμε βρει από το πρώτο υποερώτημα ότι $\beta_{max} = 0.1$. Εδώ από την εκφώνηση θεωρούμε ότι $0.1 \ll 1$. Άρα έχουμε μια περίπτωση διαμόρφωσης $NBFM$ αφού $\beta << 1$

Για διευκόλυνση πράξεων θα βρω αρχικά το σήμα $\varphi(t)$. (δεν είναι απαραίτητο αλλά θα μειώσει τις πράξεις για να πάρω έτοιμο τύπο). Γενικά είναι

$$\phi(t) = 2\pi K_f \int_{-\infty}^{\tau} m(\tau)\, d\tau = 2\pi K_f \int_{-\infty}^{\tau} A_{max} cos 2\pi f_m \tau \, d\tau$$

Το διαμορφωμένο κατά $NBFM$ σήμα θα είναι (σχέση 4.139 του βιβλίου. Παραλείπω την ανάλυση)

$$X(F) = \frac{A_c}{2}\delta(f-f_c) + \frac{A_c}{2}\delta(f+f_c) + \frac{jA_c}{2}\Phi(f-f_c) - \frac{jA_c}{2}\Phi(f-f_c) =$$

$= \frac{A_c}{2}\delta(f-f_c) + \frac{A_c}{2}\delta(f+f_c) + \frac{A_{max}K_f}{f_m}\frac{jA_c}{2}[\frac{1}{2j}[\delta(f-f_c-f_m) - \delta(f-f_c+f_m)]] - \frac{jA_c}{2}[\frac{1}{2j}[\delta(f+f_c-f_m) - \delta(f+f_c+f_m)]] \quad (1)$

(Υπενθύμιση: Ο FT του $sin 2\pi f_0 t$ είναι

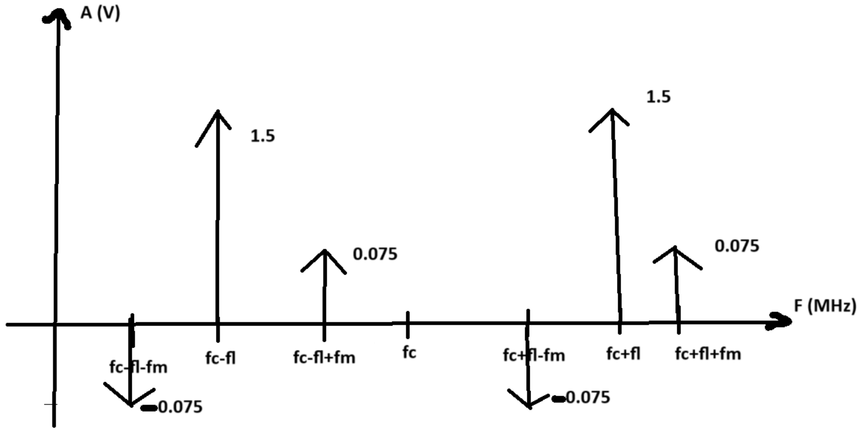
$$FT(sin 2\pi f_0 t) = \frac{1}{2j} * (\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0))$$

Το $X(F)$ της σχέσης (1) θα περάσει από τον ταλαντωτή με FT

$$FT(cos 2\pi f_l t) = \frac{1}{2}(\delta(f-f_l) + \delta(f+f_l))$$

Επομένως, όλες οι συναρτήσεις θα μετακινηθούν κατά +f_l και $-f_l$ και θα υποδιπλασιάσουν τα πλάτη τους Αν ονομάσω $Y(F)$ το σήμα μετά τον ταλαντωτή θα έχω (τα j απλοποιούνται)
$Y(F) = \frac{1}{2}[\frac{A_c}{2}\delta(f-f_c-f_l) + \frac{A_c}{2}\delta(f+f_c-f_l) + \frac{A_{max}K_f}{f_m}\frac{A_c}{2}[\frac{1}{2}[\delta(f-f_c-f_m-f_l) - \delta(f-f_c+f_m-f_l)]] - \frac{A_c}{2}[\frac{1}{2}[\delta(f+f_c-f_m-f_l) - \delta(f+f_c+f_m-f_l)]]ww + \frac{A_c}{2}\delta(f-f_c+f_l) + \frac{A_c}{2}\delta(f+f_c+f_l) + \frac{A_{max}K_f}{f_m}\frac{A_c}{2}[\frac{1}{2}[\delta(f-f_c-f_m+f_l) - \delta(f-f_c+f_m+f_l)]] - \frac{A_c}{2}[\frac{1}{2}[\delta(f+f_c-f_m+f_l) - \delta(f+f_c+f_m+f_l)]]]$

Αν κάνουμε τις επιμεριστικές για να πάρουμε το πλάτος κάθε όρου θα έχουμε:
$Y(F) = \frac{A_c}{4}\delta(f-f_c-f_l) + \frac{A_c}{4}\delta(f+f_c-f_l) + \frac{A_{max}K_fA_c}{8f_m}\delta(f-f_c-f_m-f_l) - \frac{A_{max}K_fA_c}{8f_m}\delta(f-f_c+f_m-f_l) - \frac{A_{max}K_fA_c}{8f_m}\delta(f+f_c-f_m-f_l) - \frac{A_{max}K_fA_c}{8f_m}\delta(f+f_c+f_m-f_l) + \frac{A_c}{4}\delta(f-f_c+f_l) + \frac{A_c}{4}\delta(f+f_c+f_l) + \frac{A_{max}K_fA_c}{8f_m}\delta(f-f_c-f_m+f_l) - \frac{A_{max}K_fA_c}{8f_m}\delta(f-f_c+f_m+f_l) - \frac{A_{max}K_fA_c}{8f_m}\delta(f+f_c-f_m+f_l) - \frac{A_{max}K_fA_c}{8f_m}\delta(f+f_c+f_m+f_l)$



Τα πλάτη των ώσεων που υπάρχουν θα υπολογιστούν (για να γίνει ο σχεδιασμός):

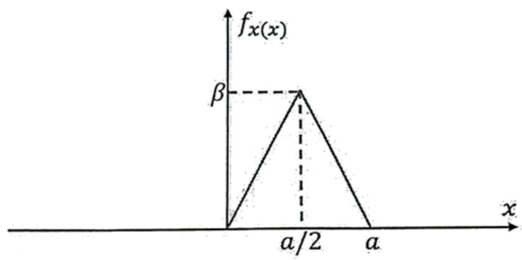
$$\frac{A_c}{4} = \frac{6}{4} = 1.5$$

$$\frac{A_{max} K_f A_c}{8 f_m} = 0.075$$

Οι ώσεις που ζητείται να σχεδιαστούν είναι στις θετικές συχνότητες, δηλαδή εκείνες που είναι στο ημιεπίπεδο (και άρα αυτές που έχουν $-f_c$ αφού το $-f_c$ θα εξασφαλίζει ότι βρίσκονται στο θετικό ημιεπίπεδο.(Στο σχήμα δεν αντικαθιστώ τις συχνότητες αλλά αυτές είναι $f_c = 90MHz$, $f_l = 8MHz$,$f_m = 2.04MHz$ περίπου.

Θέμα 3ο (35)

Ενα σήμα πληροφορίας $x(t)$ μοντελοποιείται ως δείγμα μιας τυχαίας διαδικασίας με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από το Σχήμα 3 και για την οποία ισχύει $\Pr\{x(t) \leq 1\} = 0.5$. Το σήμα εισάγεται σε ομοιόμορφο κβαντιστή, ο οποίος καλύπτει όλο το εύρος τιμών του σήματος. Ο αριθμός των bits είναι $R = 2$. (Θεωρήστε ότι η διακύμανση του θορύβου δίνεται ως $\sigma_q^2 = \Delta^2/12$, όπου Δ το βήμα κβάντισης)



Σχήμα 3: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $x(t)$.

α-10) Να βρεθούν τα α, β.

β-10) Να υπολογιστεί η σηματοθορυβική σχέση κβάντισης σε dB.

γ-08) Να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή του σφάλματος κβάντισης ανάλογα με τον ομοιόμορφο κβαντιστή που θα επιλέξετε. Τι παρατηρείτε;

δ-07) Να σχεδιάσετε μια παραλλαγή ενός ομοιόμορφου κβαντιστή που να επιτυγχάνει το ελάχιστο μέγιστο σφάλμα κβάντισης.

Γνωστές τριγωνομετρικές σχέσεις:

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

ΘΕΜΑ 3

α)

Αρχικά, αφού γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι ΣΠΠ, ξέρουμε ότι το ολοκλήρωμα της ως προς x θα δίνει μονάδα.Επειδή όμως έχουμε γνωστό γεωμετρικό σχήμα (τρίγωνο) μπορούμε να πούμε ότι το εμβαδόν πρέπει να είναι ίσο με 1.

$$E = \frac{\beta \upsilon}{2} = \frac{\alpha\beta}{2} = 1 => \boldsymbol{\alpha\beta = 2} \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα αξιοποιήσουμε την πληροφορία που δίνεται για την πιθαανότητα. Όπως γνωρίζουμε η ολοκλήρωση της ΣΠΠ μπορεί να μας δώσει μια ορισμένη πιθανότητα.Γενικά είναι:

$$P(x \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_x(x)\, dx$$

Στην περίπτωση μας είναι:

$$P(x \leq 1) = \int_{0}^{1} f_x(x)\, dx$$

(αφού η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x < 0$)

Επειδή η συνάρτηση δεν είναι σταθερή για όλα τα x διακρίνονται δύο περιπτώσεις ολοκλήρωσης:

Αν $\frac{\alpha}{2} \leq 1$

$$P(x \leq 1) = \int_0^1 f_{x1}(x)\, dx$$

ενώ αν $\frac{\alpha}{2} > 1$

$$P(x \leq 1) = \int_0^{\frac{\alpha}{2}} f_{x1}(x)\, dx + \int_{\frac{\alpha}{2}}^1 f_{x2}(x)\, dx$$

όπου $f_{x1}(x)$ και $f_{x2}(x)$ οι ευθείες του σχήματος.

Θα βρούμε πρώτα την $f_{x1}(x)$ για να πάρουμε την πρώτη περίπτωση. Αν βγάλουμε α'2 θα απορριφθεί και θα πάρουμε την 2η περίπτωση. Είναι:

$$f_{x1}(x) = \frac{2\beta}{\alpha}x$$

(προκύπτει αν λυθεί σύστημα $y = \lambda x + \kappa$ για $y_1 = 0, x_1 = 0$ και $y_2 = \beta, x_2 = \frac{\alpha}{2}$ και βρεθούν τα κ,λ. Θεωρώ $y = fx_1(x)$)

Επομένως έχω:

$$P(x \leq 1) = \int_0^1 \frac{2\beta}{\alpha}x\, dx = [\frac{2\beta}{\alpha}\frac{x^2}{2}]_0^1 = \frac{\beta}{\alpha}$$

Όμως δίνεται:

$$P(x \leq 1) = 0.5 => \frac{\beta}{\alpha} = 0.5 => \boldsymbol{\alpha = 2\beta} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) εύκολα προκύπτει με αντικατάσταση ότι

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha = 2, \beta = 1}}$$

(Σημείωση: Η υπόθεση που κάναμε ήταν σωστή)

β)

Καλούμαστε να βρούμε τον σηματοθορυβικό λόγο σε dB. Είναι

$$SNR = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2}$$

Αρχικά ας βρούμε το σ_q^2 Είναι:

$$\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12}$$

όπου

$$\Delta = \frac{V_{pp}}{2^R} = \frac{\alpha}{2^2} = \frac{2}{4} = 0.5$$

(ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: Το V_{pp} καθορίζεται από τα x ΠΑΝΤΑ ανεξάρτητα από τον άξονα στον οποίον βρίσκονται)
Τελικά

$$\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{0.25}{12} = \frac{1}{48}$$

Για το σ_x^2 έχουμε:

$$\sigma_x^2 = \int_0^1 (x-1)^2 fx_1(x)\,dx + \int_1^2 (x-1)^2 fx_2(x)\,dx$$

όπου $fx_1(x) = \frac{2\beta}{\alpha}x = x$ και fx_2 μπορεί να υπολογιστεί. (ΠΡΟΣΟΧΗ: Η μέση τιμή της ΣΠΠ είναι 1 και για αυτό ο όρος είναι $(x-1)^2$)

Λόγω συμμετρίας γύρω από το 1 το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται

$$\sigma_x^2 = 2\int_0^1 (x-1)^2 x\,dx = \frac{1}{6}$$

(οι πράξεις παραλείπονται) Επομένως είναι:

$$SNR = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{48}} = \frac{48}{6} = 8$$

και σε dB:

$$(SNR)_{dB} = 10log(SNR) = 10log(8) = \boxed{\mathbf{9.03}\boldsymbol{dB}}$$

γ)

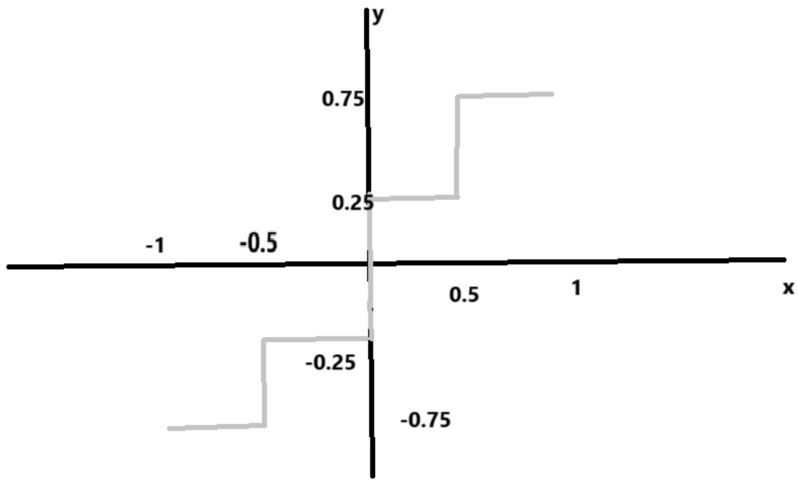
Θα επιλέξω ομοιόμορφο κβαντιστή $mid-rise$ με βήμα

$$\frac{\Delta}{2} = 0.25$$

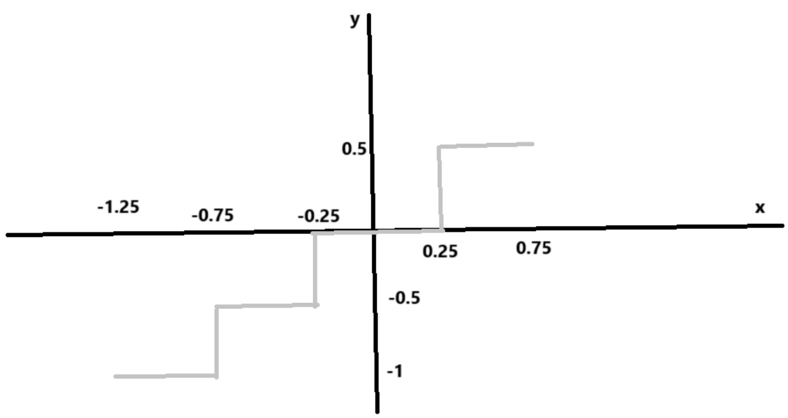
ενώ τα επίπεδα κβάντισης είναι $2^R = 2^2 = 4$ Σε ότι αφορά το σφάλμα αυτό είναι ίσο με 1.25 και προκύπτει όταν η τιμή $x = 2$ αποτυπωθεί στο $y = 0.75$
Αν επιλεγεί $mid-tread$ κβαντιστής το μέγιστο σφάλμα θα ήταν 1.5, και προκύπτει όταν η τιμή $x = 2$ αποτυπωθεί στο $y = 0.5$.
(Σημείωση 1:Συνήθως οι $mid-tread$ έχουν ένα παραπάνω αρνητικό επίπεδο (2 αρνητικά, 1 θετικό εδώ) και αυτή η παραδοχή υιοθετήθηκε)
(Σημείωση2:Η άσκηση μάλλον ήθελε και $mid-tread$ και $mid-rise$ και ανάλυση των σφαλμάτων)

δ)

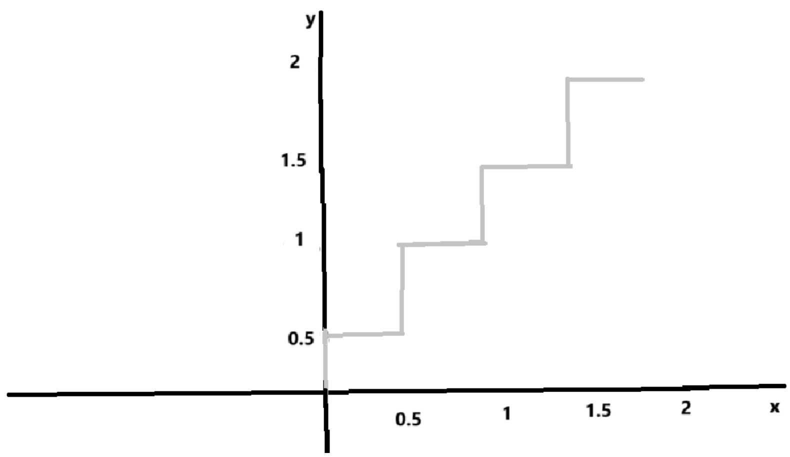
Μια παραλλαγή του κβαντιστή που θα επιτύγχανε σφάλμα $\frac{\Delta}{2} = 0.25$ θα ήταν η θετική μετατόπιση του $mid-rise$ κβαντιστή ώστε να είναι γύρω από το 1.



Σχήμα 1: Ο ομοιόμορφος $mid - rise$ κβαντιστής (γ ερώτημα)



Σχήμα 2: Ο ομοιόμορφος $mid - tread$ κβαντιστής (γ ερώτημα)



Σχήμα 3: Ο (βελτιωμένος) κβαντιστής (δ ερώτημα)