ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Διδάσκοντες: Δ.Φωτάκης, Δ. Σούλιου
3η Γραπτή Εργασία

Θέμα 1 (Συνδυαστική, 2.8 μον.)

Εξετάζουμε τους τρόπους να μοιραστούν βιβλία Διακριτών Μαθηματικών σε 1000 φοιτητές. Στα υποερωτήματα που ακολουθούν, οι φοιτητές θεωρούνται διακεκριμένοι και κανένας φοιτητής δεν μπορεί να πάρει δύο ή περισσότερα βιβλία Διακριτών Μαθηματικών.
1. Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν 200 αντίτυπα Hunter στους 1000 φοιτητές;

Επιλογή 200 φοιτητών από τους 1000 που θα πάρουν το βιβλίο
$C(1000,200)$

2. Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν 200 αντίτυπα Hunter, 250 αντίτυπα Rosen, 100 αντίτυπα Liu, και 50 αντίτυπα Epp στους 1000 φοιτητές.

Όπως και στο ερώτημα 1 με $C(1000,200)$ τρόπους μοιράζω τα αντίτυπα Hunter. Για κάθε τέτοιο τρόπο από τους 800 φοιτητές που απομένουν επιλέγω τους 250 με $C(800,250)$ τρόπους και συνεχίζω έτσι οπότε προκύπτει το γινόμενο

$$C(1000,200)\cdot C(800,250)\cdot C(550,100)\cdot C(450,50)=$$
$$=\frac{1000!\cdot 800!\cdot 550!\cdot 450!}{800!\cdot 200!\cdot 550!\cdot 250!\cdot 450!\cdot 100!\cdot 400!\cdot 50!}=\frac{1000!}{200!\cdot 250!\cdot 100!\cdot 400!\cdot 50!}$$

3. Έχουμε 1000 αντίτυπα από καθένα από τα βιβλία των Hunter, Rosen, Liu και Epp. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλέξουν βιβλίο Διακριτών Μαθηματικών οι 1000 φοιτητές;

Ο πρώτος φοιτητής επιλέγει με 4 τρόπους, για κάθε επιλογή του πρώτου ο δεύτερος επιλέγει με 4 τρόπους κ.λπ. Επομένως έχουμε 4^{1000}

4. Έχουμε 1000 αντίτυπα από καθένα από τα βιβλία των Hunter, Rosen, Liu και Epp. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλέξουν βιβλίο Διακριτών Μαθηματικών οι 1000 φοιτητές, αν πρέπει να διατεθεί τουλάχιστον ένα αντίτυπο από κάθε βιβλίο;

Εφαρμόζουμε αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού. Από όλους τους τρόπους αφαιρώ αυτούς που ένα βιβλίο δεν επιλέχθηκε και αυτό μπορεί να συμβεί με $\binom{4}{1}$ τρόπους, στη συνέχεια προσθέτω τους τρόπους που δύο βιβλία δεν επιλέχθηκαν και αυτό μπορεί να συμβεί με $\binom{4}{2}$ τρόπους και τέλος προσθέτω τους τρόπους που 3 βιβλία δεν επιλέχθηκαν και αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{4}{3}$ τρόπους. Επομένως όλοι οι τρόποι να διατεθεί ένα αντίτυπο από κάθε βιβλίο είναι:

$$4^{1000} - \binom{4}{1} \cdot 3^{1000} + \binom{4}{2} \cdot 2^{1000} - \binom{4}{3} \cdot 1^{1000}$$

5. Έχουμε 4 (διακεκριμένα) σημεία διανομής όπου μοιράζεται μόνο το βιβλίο του Hunter. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν 1000 αντίτυπα του βιβλίου στα 4 σημεία διανομής, ώστε κάθε σημείο να μοιράσει 350 αντίτυπα το πολύ;

Τα σημεία που μπορεί να μοιραστούν πάνω από 350 βιβλία είναι το πολύ 2 γιατί αν έχω παραπάνω δεν επαρκούν τα βιβλία.
Επομένως εφαρμόζω Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού όπως και στο ερώτημα 3. Από τους τρόπους να μοιραστούν τα 1000 αντίτυπα στα 4 σημεία $(C(1000+4-1,3))$, αφαιρώ αυτούς με τους οποίους μοιράζονται 351 αντίτυπα σε 1 σημείο (αυτό μπορεί να είναι σε οποιοδήποτε από τα τέσσερα σημεία) και απομένουν 649 για να μοιραστούν σε όλα τα σημεία με $(4C(4+649-1,3))$ τρόπους. Στη συνέχεια προσθέτω τους διαφορετικούς τρόπους να μοιραστούν 351 αντίτυπα σε 2 σημεία είναι το γινόμενο επιλογής των σημείων επί τους τρόπους να μοιραστούν τα 298 αντίτυπα στα 4 σημεία $(6C(4+298-1,3))$. Συνολικά οι τρόποι διανομής με τον περιορισμό είναι: $(C(1000+4-1,3)) - (4C(4+649-1,3)) + (6C(4+298-1,3))$

6. Έχουμε 4 σημεία διανομής, καθένα μοιράζει ένα από τα βιβλία των Hunter, Rosen, Liu, Epp. Σε κάθε σημείο διανομής υπάρχουν διαθέσιμα 1000 αντίτυπα από το βιβλίο που μοιράζεται. Με πόσους τρόπους μπορούν να σταθούν οι 1000 φοιτητές στις 4 ουρές αναμονής για να πάρουν βιβλίο;

Διανομή 1000 φοιτητών σε 4 υποδοχές με τη σειρά να έχει σημασία $\mathrm{C}(1000+4-1,3)*1000! = \frac{1003!}{3!}$

7. Όπως στο (6), αλλά σε κάθε σημείο διανομής υπάρχουν διαθέσιμα μόνο 350 αντίτυπα από το βιβλίο που μοιράζεται.

Η διαφορά με το ερώτημα 5 είναι ότι εδώ πρέπει να πολλαπλασιάσω με 1000! γιατί οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι.
$(\mathrm{C}(1000+4-1,3) - 4\cdot\mathrm{C}(649+4-1,3) + 6\cdot\mathrm{C}(298+4-1,3))\cdot 1000!$

Θέμα 2 (Συνδυαστική, 0.6 μον.)

Διαμερίζουμε σε κλάσεις ισοδυναμίας το σύνολο των προτασιακών τύπων που ορίζονται σε $n \geq 5$ προτασιακές μεταβλητές $p_1, p_2, ..., p_n$, ώστε κάθε κλάση της διαμέρισης να περιέχει όλους τους ταυτολογικά ισοδύναμους τύπους.
(i) Πόσες είναι οι διαφορετικές κλάσεις που σχηματίζονται;
(ii) Πόσες από τις κλάσεις αυτές περιέχουν τύπους ψ για τους οποίους αληθεύει η συνεπαγωγή $[(p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge p_4 \wedge p_5] \to \psi$;

(i) Αν οι προτασιακές μεταβλητές είναι n και κάθε μία μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής έχουμε 2^n διαφορετικές αποτιμήσεις. Κάθε αποτίμηση μπορεί να δώσει στον προτασιακό τύπο ψευδή ή αληθή τιμή. Επομένως το πλήθος των κλάσεων είναι 2^{2^n}.
(ii) Ο ψ πρέπει να είναι αληθής στις αποτιμήσεις (Α,Α,Α,Α,Α), (Α,Α,Ψ,Α,Α), (Α,Ψ,Α,Α,Α), (Α,Ψ,Ψ,Α,Α), (Ψ,Α,Α,Α,Α), (Ψ,Α,Ψ,Α,Α), (Ψ,Ψ,Ψ,Α,Α) στις οποίες το αριστερό μέρος της συνεπαγωγής είναι αληθές. Άρα έχω $7 \cdot 2^{n-5}$ αποτιμήσεις στις οποίες ο ψ πρέπει να είναι αληθής. Κατά συνέπεια απομένουν $2^n - 7 \cdot 2^{n-5}$ αποτιμήσεις για τον ψ που είναι ελεύθερες. Οι διαφορετικοί συνδυασμοί αυτών των αποτιμήσεων είναι $2^{2^n - 7 \cdot 2^{n-5}}$. Αυτό είναι το πλήθος των κλάσεων που ικανοποιούν την συνεπαγωγή.

Θέμα 3 (Συνδυαστική, Γεννήτριες Συναρτήσεις, 2.0 μον.)

Στην προηγούμενη εξεταστική, είχαμε διαθέσιμα τέσσερα αμφιθέατρα, τα 1 - 4, για το μάθημα "Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα". Στην εξέταση συμμετείχαν 190 φοιτητές. Στο Αμφ. 1 είχαμε 80 φοιτητές, στα αμφιθέατρα 2 και 3 είχαμε 35 φοιτητές στο καθένα, και στο Αμφ. 4 είχαμε 40 φοιτητές. Είχαμε μαζί μας 155 αντίτυπα θεμάτων τύπου Α και μόλις 35 αντίτυπα θεμάτων τύπου Β.

1. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε τα δύο είδη θεμάτων στα 4 αμφιθέατρα, αν μας ενδιαφέρει μόνο πόσα θέματα κάθε είδους θα έχουμε σε κάθε αμφιθέατρο.

Σε κάθε αμφιθέατρο μπορώ να μοιράσω από 0 έως 35 αντίτυπα θεμάτων τύπου Β. Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 το πλήθος των αντιτύπων θεμάτων τύπου Β που μοίρασα στα αμφιθέατρα 1,2,3,4 αντίστοιχα. Ισχύει πως $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 35$ και $x_i \geq 0$ για $i = 1,2,3,4$.

Επομένως οι τρόποι είναι $C(4+35-1,35) = C(38,35) = \frac{38!}{35!3!} = 8436$

2. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε τα δύο είδη θεμάτων, αν μας ενδιαφέρει ο τύπος του θέματος που θα πάρει κάθε φοιτητής (ως συνήθως, οι φοιτητές θεωρούνται διακεκριμένοι).

Έχουμε 190 διακεκριμένους φοιτητές και 155 θέματα τύπου Α και 35 θέματα τύπου Β

$\frac{190!}{155!35!}$

3. Ποια είναι η πιθανότητα να μην έχουμε θέματα τύπου Β σε τουλάχιστον ένα από τα Αμφ. 2 ή 3;

Χωρίς τον περιορισμό έχουμε 190 διακεκριμένους φοιτητές και 155 θέματα τύπου Α και 35 θέματα τύπου Β $\frac{190!}{155!35!}$.

Αν μοιράσω στο αμφ2 μόνο θέματα τύπου Α θα έχω $\frac{155!}{120!35!}$ τρόπους να μοιράσω τα θέματα στα υπόλοιπα 3 αμφιθέατρα. Το ίδιο ισχύει όταν συμβεί το ίδιο με το αμφ.3. Αν και στα δύο αμφιθέατρα 2 και 3 μοιράσω θέματα τύπου Α θα έχω $\frac{120!}{85!35!}$ τρόπους να μοιράσω τα θέματα στα 2 υπόλοιπα αμφιθέατρα. Επομένως η πιθανότητα να μην έχουμε θέματα τύπου Β σε ένα τουλάχιστον από τα δύο αμφιθέατρα είναι οι τρόποι να μην έχω θέματα τύπου Β στο 2 ή 3 δια το σύνολο των τρόπων χωρίς τον περιορισμό δηλ. $\left(2 \cdot \frac{155!}{120!35!} - \frac{120!}{85! \cdot 35!}\right) \Big/ \left(\frac{190!}{155! \cdot 35!}\right)$.

Αν ερμηνεύσουμε διαφορετικά την εκφώνηση και θεωρήσουμε πως τα θέματα τύπου Β μοιράζονται ισοπίθανα στα αμφιθέατρα έως ότου τελειώσουν και μετά μοιράζονται τα θέματα τύπου Α τότε η πιθανότητα να μην έχουμε θέματα τύπου Β σε τουλάχιστον ένα από τα Αμφ. 2 ή 3 είναι $\frac{2 \cdot 3^{35} - 3^{35}}{4^{35}}$.

4. Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους διαφορετικούς τρόπους να μοιράσουμε τους δύο τύπους θεμάτων στα

τέσσερα αμφιθέατρα, αν μας ενδιαφέρει ο τύπος του θέματος που θα πάρει κάθε φοιτητής και θέλουμε να έχουμε τουλάχιστον 10 και άρτιο πλήθος θεμάτων τύπου Α στα Αμφιθέατρα 2,3 και 4, και τουλάχιστον 15 θέματα τύπου Α στο Αμφ.1.

Οι απαριθμητές έχουν ως εξής:

Για το αμφιθέατρο 1: $\binom{80}{15}x^{15} + \binom{80}{16}x^{16} + \ldots + \binom{80}{80}x^{80}$

Για τα αμφιθέατροα 2 και 3: $\binom{35}{10}x^{10} + \binom{35}{12}x^{12} + \ldots + \binom{35}{34}x^{34}$

Για το αμφιθέατρο 4: $\binom{40}{10}x^{10} + \binom{40}{12}x^{12} + \ldots + \binom{40}{40}x^{40}$

Και η Γ.Σ. προκύπτει από το γινόμενο:

$$\left(\binom{80}{15}x^{15} + \binom{80}{16}x^{16} + \ldots + \binom{80}{80}x^{80}\right)\left(\binom{35}{10}x^{10} + \binom{35}{12}x^{12} + \ldots + \binom{35}{34}x^{34}\right)\left(\binom{35}{10}x^{10} + \binom{35}{12}x^{12} + \ldots + \binom{35}{34}x^{34}\right)$$
$$\left(\binom{40}{10}x^{10} + \binom{40}{12}x^{12} + \ldots + \binom{40}{40}x^{40}\right)$$

Και αναζητούμε τον συντελεστή του X^{155}

Θέμα 4 (Γεννήτριες Συναρτήσεις, 1.6 μον.)

Έστω ότι 100 φοιτητές καλούνται να συνδεθούν σε 100 εικονικές αίθουσες για να εξεταστούν στο μάθημα των Διακριτών Μαθηματικών. Θεωρούμε ότι οι εικονικές αίθουσες είναι πανομοιότυπες (δεν έχουμε διαφοροποίηση στην ώρα εξέτασης, στα θέματα, κλπ.). Θεωρούμε ακόμη ότι οι φοιτητές δεν είναι διακεκριμένοι και μας ενδιαφέρουν μόνο οι διαφορετικές κατανομές των φοιτητών (π.χ., μετράμε την κατανομή $(50,50,0...,0)$ μια μόνο φορά, αφού οι αίθουσες θεωρούνται πανομοιότυπες και δεν ενδιαφέρει σε ποιες ακριβώς αίθουσες πήγαν οι 50 φοιτητές και ποιες αίθουσες έμειναν άδειες). Προφανώς, σε πολλές από τις κατανομές, αρκετές αίθουσες μένουν κενές. Να διατυπώσετε τη Γεννήτρια Συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο, αν:

1. δεν υπάρχουν άλλοι περιορισμοί.

Έστω z_i οι χωρητικότητες, και έστω $z_1 \geq z_2 \geq ... \geq z_{100}$.

Αναζητούμε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης: $z_1 + z_2 + ... + z_{100} = 100$

Ισχύει πως

$z_1 = c_1 + z_2$, $z_2 = c_2 + z_3$, . . . , $z_i = c_i + z_{i+1}$, . . . $z_{99} = c_{99} + z_{100}$

Επομένως $z_1 + z_2 + ... + z_{100} = 100 \Rightarrow ... \Rightarrow c_1 + 2 \cdot c_2 + 3 \cdot c_3 + ... + 100 z_{100} = 100$

100 Διακεκριμένες Υποδοχές 100 φοιτητές

Απαριθμητές

c_1: $1 + x + x^2 + ... + x^{100} + ...$

c_2: $1 + x^2 + .x^4 + ...$

c_3: $1 + x^3 + .x^6 + ...$

.

.

.

c_{99}: $1 + x^{99} + ...$

c_{100}: $1 + x^{100} + ...$

Γ.Σ. $(1 + x + x^2 + ... + x^{100} + ...) \cdot (1 + x^2 + .x^4 + ...) \cdot ... \cdot (1 + x^{99} + ...) \cdot (1 + x^{100} + ...)$ και αναζητούμε το συντελεστή του x^{100}

Ουσιαστικά μελετάμε διαμερίσεις φυσικών αριθμών σε αθροίσματα

2. Οι εικονικές αίθουσες που δεν είναι κενές πρέπει να έχουν διαφορετικό αριθμό φοιτητών.

1ος τρόπος

Ουσιαστικά ζητάμε διαμερίσεις του 100 με τον περιορισμό κάθε θετικός ακέραιος να εμφανίζεται το πολύ μία φορά. Άρα ζητάμε το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$z_1 + 2z_2 + ... + 99z_{99} + 100z_{100}$, με $z_i \geq 0$ και τον περιορισμό $z_i \leq 1$

Η Γ.Σ. θα είναι:

$(1 + x) \cdot (1 + x^2) \cdot (1 + x^3) \cdot ... \cdot (1 + x^{100})$

και αναζητούμε το συντελεστή του x^{100}

$2^{ος}$ τρόπος

Καταρχάς μπορώ να έχω έως 99 αίθουσες κενές και στην τελευταία να έχω 100 φοιτητές. Επίσης μπορώ να έχω έως 13 αίθουσες μη κενές διότι θέλω διαφορετικό πλήθος φοιτητών.

$1+2+3+\ldots 13 = 13 \cdot 14/2 = 91$

Ισχύει πως

$z_1 = c_1 + z_2,\ z_2 = c_2 + z_3, \ldots, z_{i-1} = c_{i-1} + z_i,\ z_i = z_i,\ z_{i+1} = 0 \ldots, z_{100} = 0$

Για 99 κενές θέσεις η εξίσωση είναι $z_1 = 100$ και η Γ.Σ. $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

Για 98 κενές θέσεις η εξίσωση είναι $z_1 + z_2 = 100 \Rightarrow 2z_1 + c_1 = 100$ και η Γ.Σ.

$(1 + x + x^2 + x^4 + \ldots)(x + x^2 + x^3 + \ldots)$

Για 97 κενές θέσεις η εξίσωση είναι $z_1 + z_2 + z_3 = 100 \Rightarrow 3z_1 + 2c_1 + c_2 = 100$ και η Γ.Σ.

$(1 + x^3 + x^6)(x^2 + x^4 + \ldots)(x + x^2 + x^3 + \ldots)$

…

Για 87 κενές θέσεις η εξίσωση είναι $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_{13} = 100$ και και η Γ.Σ.

$(1 + x^{13} + x^{26})(x^{12} + x^{26} + \ldots)\ldots(x + x^2 + x^3 + \ldots)$

Η Γεννήτρια Συνάρτηση προκύπτει από το άθροισμα των Γεννητριών Συναρτήσεων και αναζητούμε το συντελεστή του x^{100}.

Θέμα 5 (Γεννήτριες Συναρτήσεις, 2.0 μον.)

(α) Θέλουμε να υπολογίσουμε το πλήθος των τρόπων να μοιράσουμε 500 διαφορετικά βιβλία στις βιβλιοθήκες 8 Ελληνικών Πανεπιστημίων. Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο, αν θεωρήσουμε ότι κάθε βιβλιοθήκη πρέπει να πάρει τουλάχιστον 20 βιβλία και το πολύ 100 βιβλία, και:

1. **δεν έχει** σημασία η σειρά με την οποία τα βιβλία φτάνουν στις βιβλιοθήκες.

500 διακεκριμένα βιβλία 8 διακεκριμένες υποδοχές

Απαριθμητής κάθε βιβλιοθήκης: $\frac{x^{20}}{20!}+\frac{x^{21}}{21!}+\ldots+\frac{x^{100}}{100!}$

Γεννήτρια Συνάρτηση: $\left(\frac{x^{20}}{20!}+\frac{x^{21}}{21!}+\ldots+\frac{x^{100}}{100!}\right)^8$

Αναζητούμε τον συντελεστή του $\frac{x^{500}}{500!}$

2. **έχει** σημασία η σειρά με την οποία τα βιβλία φτάνουν στις βιβλιοθήκες.

Απαριθμητής κάθε βιβλιοθήκης: $20!\frac{x^{20}}{20!}+21!\frac{x^{21}}{21!}+\ldots+100!\frac{x^{100}}{100!}$

Γεννήτρια Συνάρτηση: $\left(20!\frac{x^{20}}{20!}+21!\frac{x^{21}}{21!}+\ldots+100!\frac{x^{100}}{100!}\right)^8$

Αναζητούμε τον συντελεστή του $\frac{x^{500}}{500!}$

β) Να υπολογίσετε το πλήθος των δεκαδικών συμβολοσειρών μήκους $n \geq 4$ στις οποίες καθένα από τα ψηφία 0 και 1 εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά, καθένα από τα ψηφία 2 και 4 έχει άρτιο πλήθος εμφανίσεων, καθένα από τα ψηφία 7 και 9 έχει περιττό πλήθος εμφανίσεων, και δεν υπάρχουν περιορισμοί για το πλήθος των εμφανίσεων των υπόλοιπων ψηφίων (δηλ. των 3, 5, 6 και 8). *Σημείωση:* Αν δυσκολευτείτε στις πράξεις, είναι αποδεκτό να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο λογισμικό.

Έχουμε πρόβλημα διάταξης και επομένως χρησιμοποιούμε εκθετική Γεννήτρια Συνάρτηση.
Έχουμε ως υποδοχές τα ψηφία $0,1,2,\ldots,9$ και n μπαλάκια (όσα και το μήκος)
Δεν μας ενδιαφέρει η σειρά
Απαριθμητές
$0,1$: $\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots=e^x-1$

2,4: $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

7,9: $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

3,5,6,8: $1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots=e^x$

Πολλαπλασιάζω τους 10 απαριθμητές και έχω την Γ.Σ.

$$\left(e^x-1\right)^2\cdot\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\cdot\left(e^x\right)^4 = \text{. . . πράξεις . . . } =$$

$$=\frac{1}{16}\left(e^{10x}-2e^{9x}+e^{8x}-2e^{6x}+4e^{5x}-2e^{4x}+e^{2x}-2e^x+1\right)$$

Αναζητώ τον συντελεστή του $\frac{x^n}{n!}$ όπου $n\geq 4$ και επειδή $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

ισούται με $\frac{1}{16}\left(10^n-2\cdot 9^n+8^n-2\cdot 6^n+4\cdot 5^n-2\cdot 4^n+2^n-2\right)$

Θέμα 6 (Αναδρομικές σχέσεις, 1 μονάδα)
Θέλουμε να προσδιορίσουμε το πλήθος των συμβολοσειρών μήκους n που σχηματίζονται από 6 χαρακτήρες, π.χ. τα a,b,c,d,e,f στις οποίες οι χαρακτήρες a ή b δεν εμφανίζονται (σε οποιαδήποτε θέση) μετά τους χαρακτήρες c ή d (π.χ. οι συμβολοσειρές $a, cefb, bcfa, cffea$ κοκ. δεν είναι αποδεκτές). Να διατυπώσετε μια αναδρομική σχέση για το πλήθος αυτών των συμβολοσειρών και να την επιλύσετε με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων.

Αν A={a,b,c,d,e,f} είναι το αλφάβητο, φτιάχνουμε από αυτό αποδεκτές συμβολοσειρές μήκους n.

Έστω a_n το πλήθος των συμβολοσειρών για τις οποίες ισχύει ο κανόνας.

Για $n=0$ $a_0=1$.

Έστω a_{n-1} το πλήθος των αποδεκτών συμβολοσειρών μήκους $n-1$.

Από κάθε τέτοια συμβολοσειρά κατασκευάζουμε αποδεκτή συμβολοσειρά μήκους n.

Έστω η συμβολοσειρά a_n τελειώνει σε a ή b (στην a_{n-1} δεν έχω c ή d) $2\cdot 4^{n-1}$

Έστω η συμβολοσειρά a_n τελειώνει σε c ή d ή e ή f $\quad 4a_{n-1}$

Επομένως $a_n = 4a_{n-1} + 2\cdot 4^{n-1}$ με $a_0 = 1$ και $n \geq 1$

$$a_n = 4a_{n-1} + 2\cdot 4^{n-1} \Rightarrow a_n - 4a_{n-1} = 2\cdot 4^{n-1} \Rightarrow \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 4\Sigma_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 2\Sigma_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} x^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x) - a_0 - 4xA(x) = \frac{2x}{1-4x} \Rightarrow A(x)(1-4x) = \frac{2x}{1-4x+1} \Rightarrow A(x) = \frac{2x}{(1-4x)^2} + \frac{1}{1-4x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{2x+1-4x}{(1-4x)^2} = \frac{1-2x}{(1-4x)^2} = \frac{1}{2(1-4x)} + \frac{2}{2(1-4x)^2}$$

Τελικά

$$a_n = \frac{1}{2}4^n + \frac{1}{2}4^n\binom{n+1}{n} = \frac{1}{2}4^n(n+1+1) = \frac{1}{2}4^n(n+2)$$