Αναστάσιος Παπαζαφειρόπουλος 03118079

Διακριτά Μαθηματικά 2η σειρά Ασκήσεων.

Θέμα 1:

α) Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή του περιστερώνα. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε:

Περιστέρια: οι n φυσικοί (που επιλέγουμε)

Φωλιές: Τα διαφορετικά υποσύνολα των 2^n-2 αριθμών της εκφώνησης που ικανοποιούν την ιδιότητα: ο μεγαλύτερος από τους δύο αριθμούς είναι μικρότερος ή ίσος από το διπλάσιο του άλλου.

Μέσω παρατήρησης, βλέπουμε πως ως φωλιά μπορεί να χαρακτηριστεί το διάστημα από τον αριθμό k έως τον αριθμό $2k$. Δηλαδή, για $n=5$, ορίζονται οι εξής φωλιές: $\{1,2\}$, $\{3,4,5,6\}$, $\{7,8,9,10,11,\dots,14\}$, $\{15,16,\dots,29,30\}$. (πλήθος φωλιών: 4).

Θα αποδείξουμε με επαγωγή πως εάν έχουμε n αριθμούς οι φωλιές είναι $n-1$. Πιο συγκεκριμένα:

Επαγωγική βάση: για $n=2$, έχουμε το σύνολο $n=2$ για το οποίο προφανώς ισχύει το ζητούμενο

Επαγωγική υπόθεση: έστω ότι για $n=k$ έχουμε $k-1$ φωλιές

Επαγωγικό βήμα: έστω ότι $n=k+1$. Στο νέο σύνολο υπάρχουν οι φωλιές της υπόθεσης, συν άλλη μία φωλιά, αυτή που θα περιέχει τους αριθμούς από το 2^k-1 (επόμενος του 2^k-2) έως του $2^{k+1}-2$ (καινούριος μεγαλύτερος αριθμός). Αυτό ισχύει διότι $2^{k+1}-2=2(2^k-1)$.

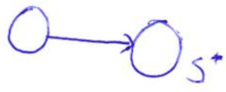
Άρα, οι φωλιές είναι τώρα k. Οπότε, αποδείχτηκε μέσω επαγωγής ότι: αν τα περιστέρια είναι n, τότε οι φωλιές είναι $n-1$. Συνεπώς, μέσω αρχής του περιστερώνα προκύπτει το ζητούμενο.

β) Αρχικά, παρατηρούμε ότι αν αποδείξουμε το ζητούμενο για $N=2^n$, ουσιαστικά το αποδεικνύουμε και για $N \geq 2^n$, καθώς αυτό θα εξακολουθεί να ισχύει και μετά την αύξηση του πλήθους της. Για να δείξουμε ότι υπάρχουν διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας τέτοιες ώστε το γινόμενο των αντίστοιχων αριθμών να είναι ένα τέλειο τετράγωνο αρκεί να δειχθεί ότι όλοι οι αριθμοί σε αυτές τις θέσεις επαναλαμβάνονται $2k$ φορές, όπου: $k=0,1,\dots$ Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ένα διάνυσμα n θέσεων (όσοι και οι διαφορετικοί αριθμοί) που αρχικά το αρχικοποιούμε με μηδενικά. Ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Διαβάζουμε την ακολουθία και ενημερώνουμε με 0 το διάνυσμα στη θέση που αντιστοιχεί ~~στον αριθμό~~ στο συγκεκριμένο αριθμό αν ο αριθμός αυτός συναντάται άρτιες φορές. Ομοίως, ενημερώνουμε με 1 αν συναντάται περιττές. Κάθε διάνυσμα αντιστοιχεί σε μια θέση της ακολουθίας. Κατά την πορεία της διαδικασίας αυτής, όταν επανεμφανιστεί το ίδιο διάνυσμα οι αριθμοί που βρίσκονται στις ενδιάμεσες θέσεις (εμφάνισης του ίδιου διανύσματος) σχηματίζουν τέλειο τετράγωνο, αυτό γιατί τα δύο διανύσματα διαφέρουν κατά το διάνυσμα: $\underbrace{(0,0,\dots,0)}_{n}$ που σημαίνει ότι μεταξύ των 2 διανυσμάτων θα περιέχονται όλοι οι αριθμοί σε άρτιο πλήθος. Στο παράδειγμα που μας δίνεται, έχουμε $n=3$, άρα ξεκινάμε από το διάνυσμα $(\underset{3}{0},\underset{5}{0},\underset{7}{0})$. Η ακολουθία είναι: 7, 5, 3, 5, 7, 5, 3, 7. Οπότε, ακολουθούν τα διανύσματα: $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$

Επαναλαμβάνεται το $(0,1,1)$, οπότε έχουμε τέλειο τετράγωνο στις έξι τελευταίες διαδοχικές θέσεις. Γενικότερα, αυτό συμβαίνει επειδή οι πιθανοί διαφορετικοί είναι 2^{n} (φωλιές), ενώ τα διανύσματα είναι 2^n+1 (περιστέρια). Οπότε, από την αρχή του περιστερώνα προκύπτει το ζητούμενο.

Θέμα 2

a) tournament $T \rightarrow$ πλήρες και κατευθυνόμενο γράφημα.

Επαγωγική βάση: 2 κορυφές  s^* ισχύει τετριμμένα

Επαγωγική υπόθεση: Σε κάθε Tournament $T(V,E)$ με $|V|=n\geq 2$ κορυφές, υπάρχει κορυφή s^* που είναι προσπελάσιμη από κάθε άλλη κορυφή $v\in V\setminus\{s^*\}$ μέσω μονοπατιού (που σέβεται την κατεύθυνση των ακμών του) με μήκος το πολύ 2.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει και για $T'(V,E)$ με $|V|=n+1$.

Το $T'(V,E)$ έχει $n+1$ δυνατούς υπογράφους T_i n κορυφών, που διαφέρουν μεταξύ τους ως προς ένα στοιχείο (αυτό που λείπει για να είναι ίδια με το T). Αν σε αυτό το σύνολο υπογράφων υπάρχουν τουλάχιστον δύο στους οποίους η ίδια κορυφή s^* είναι προσπελάσιμη από κάθε άλλη κορυφή μέσω μονοπατιού με μήκος το πολύ 2 (σίγουρα υπάρχει τέτοια κορυφή σε κάθε υπογράφο από επαγωγική υπόθεση), τότε και στο γράφο με $n+1$ κορυφές, δηλαδή στο tournament $T(V,E)$ θα είναι η ίδια κορυφή που ικανοποιεί το ζητούμενο. Διαφορετικά, σε κάθε υπογράφο διαφορετική κορυφή s^* ικανοποιεί την επαγωγική υπόθεση, ~~τότε στο $T(V,E)$~~

Τότε, έστω V_1, V_2 δύο τέτοιες κορυφές. Επειδή το $T(V,E)$ είναι πλήρες και κατευθυνόμενο γράφημα, σε αυτό είτε η V_1 θα «δείχνει» τη V_2, είτε η V_2 θα «δείχνει» τη V_1. Επομένως, η κορυφή S^* θα είναι είτε η V_2, είτε η V_1 αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση η κορυφή S^* υπάρχει, οπότε ικανοποιείται το ζητούμενο.

β)

Ένα γράφημα n κορυφών έχει το πολύ $\frac{n(n-1)}{2}$ ακμές, οπότε πρέπει: $\frac{n(n-1)}{2} \le \frac{(r-1)n^2}{2r} \Leftrightarrow n-1 \le (r-1)\frac{n}{r} \Leftrightarrow$

$$n-1 \le \frac{rn}{r} - \frac{n}{r} \Leftrightarrow -1 \le -\frac{n}{r} \Leftrightarrow \frac{n}{r} \le 1 \Leftrightarrow \underline{n \le r}$$

επομένως, το ζητούμενο ισχύει για $n \le r$.

Θα αποδείξουμε με ισχυρή επαγωγή ότι το ζητούμενο ισχύει και για $n > r$.

<u>Επαγωγική υπόθεση</u>: έστω ότι το ζητούμενο ισχύει και για $k \in \{r+1, \ldots, n-2, n-1\}$, άρα τότε το γράφημα έχει το πολύ: $\frac{k^2(r-1)}{2r}$ ακμές.

Για $k=n$, μπορούμε να διαμερίσουμε τις κορυφές σε δύο ομάδες με r και $n-r$ κορυφές, όπως προτρέπει η υπόδειξη.

το πολύ $\frac{r(r-1)}{2}$ ακμές το πολύ $\frac{(r-1)(n-r)^2}{2r}$ ακμές.

Θα κατασκευάσουμε την «χειρότερη» περίπτωση, δηλαδή κάθε κορυφή του υπογράφου r να συνδέεται με κάθε κορυφή του υπογράφου $n-r$. Τώρα, το γράφημα με n κορυφές έχει το πολύ:

$\frac{(r-1)r}{2} + \frac{(r-1)(n-r)^2}{2r} + r(n-r)$ ακμές. Όμως, το γράφημα αυτό δεν περιέχει το K_{r+1}, οπότε πρέπει να αφαιρέσουμε $n-r$ ακμές ώστε να μην εμφανίζεται το K_{r+1} ως υπογράφημα. Οπότε, τώρα το γράφημα με n κορυφές έχει το πολύ:

$$r(n-r) + \frac{(r-1)r}{2} + \frac{(r-1)(n-r)^2}{2r} - (n-r) =$$

$$= (r-1)(n-r) + \frac{(r-1)r}{2} + \frac{(r-1)(n-r)^2}{2r} =$$

$$= \frac{2nr^2 - 2rn + 2r^2 - 2r^3 + r^3 - r^2 + rn^2 - 2nr^2 + r^3 - n^2 + 2nr - r^2}{2r} =$$

$$= \frac{rn^2 - n^2}{2r} = \frac{n^2(r-1)}{2r}$$ ακμές, αποδείχτηκε το ζητούμενο.

Αν τώρα θεωρήσουμε $n = kr$, προκύπτει ότι υπάρχει γράφημα με $k \cdot r$ κορυφές και $\frac{(r-1)rk^2}{2}$ ακμές που δεν περιέχει το K_{r+1} ως υπογράφημα.

Θέμα 3

Έστω ότι υπάρχουν δύο διαφορετικές διαμερίσεις του γραφήματος, οι (X, Y) και (X', Y). Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το X' είναι γνήσιο υπερσύνολο του X, άρα στην αντίστοιχη διαμέριση το X' θα περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του Y. Όμως, τότε θα δημιουργηθεί κύκλος περιττού μήκους, αφού το γράφημα είναι και συνεκτικό. Άτοπο, συνεπώς υπάρχει μοναδική διαμέριση συνεκτικού διμερούς γραφήματος.

Αν τώρα το G έχει $k \geq 2$ συνεκτικές συνιστώσες και (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ... (X_k, Y_k) οι αντίστοιχες διαμερίσεις, για ~~τότε~~ κάθε συνεκτική συνιστώσα, τότε η τελική διαμέριση θα προκύψει συνδυάζοντας τις παραπάνω διαμερίσεις. Για κάθε συνεκτική συνιστώσα, τα ανεξάρτητα σύνολα εισάγονται στην τελική διαμέριση με δύο τρόπους, άρα προκύπτουν 2^k δυνατές διαμερίσεις. Όμως, επειδή διπλομετρήσαμε, τελικά παίρνουμε 2^{k-1} διαφορετικές διαμερίσεις.

Θέμα 4

1) G d-κανονικό → κάθε κορυφή έχει βαθμό d → σε κάθε κορυφή «ακουμπούν» d ακμές → κάθε κορυφή έχει d γείτονες.

<u>Ιδέα</u>: Θα διαγράφουμε κορυφές ώστε να σχηματίσουμε ανεξάρτητο σύνολο (οι κορυφές που κρατάμε ανήκουν στο ανεξάρτητο σύνολο).

Επιλέγουμε τυχαία μια κορυφή, έστω v, τη βάζουμε στο ανεξάρτητο σύνολο και διαγράφουμε τους γείτονές της. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία για τις υπόλοιπες κορυφές. Στο τέλος, θα έχουν διαγραφεί όλες οι κορυφές και θα έχουμε κρατήσει στο ανεξάρτητο σύνολο τις «τυχαία επιλεγμένες». Στη «χειρότερη» περίπτωση (περισσότερες διαγραφές) οι κορυφές δεν έχουν κοινούς γείτονες. Τότε κάθε φορά διαγράφονται d κορυφές. Έστω ότι στο ανεξάρτητο σύνολο υπάρχουν x κορυφές, τότε ισχύει:

$$\underbrace{x}_{\text{κορυφές που κρατήθηκαν}} + \overbrace{xd}^{\text{κορυφές που διαγράφτηκαν (γείτονες)}} = \underbrace{n}_{\text{συνολικές κορυφές}} \Rightarrow x = \frac{n}{d+1} \text{ κορυφές ανεξάρτητου συνόλου.}$$

Η ποσότητα x είναι η ελάχιστη δυνατή, γιατί σε περίπτωση που οι κορυφές είχαν κοινούς γείτονες, τότε θα διαγράφονταν λιγότερες κορυφές και ο παρονομαστής θα ήταν μικρότερος.

<u>Αλγόριθμος (αποδοτικός)</u>:
- Επιλογή τυχαίας κορυφής και εισαγωγή της στο ανεξάρτητο σύνολο
- BFS για να βρούμε τους γείτονες
- Διαγραφή γειτόνων
- Επανάληψη μέχρι να τελειώσουν οι κορυφές

7

2) Θα χρησιμοποιήσουμε την πιθανοτική μέθοδο.

Ουσιαστικά αυτό που κάνει ο προηγούμενος αλγόριθμος είναι:

Αν σκεφτούμε τον γράφο ως μία ακολουθία κορυφών v, με $v \in \{1, 2, \dots, n\}$ και βαθμό $deg(v)$, τότε όποια κορυφή εμφανίζεται πριν από τους γείτονές της διαβάζοντας τη λίστα από τα αριστερά προς τα δεξιά μπαίνει στο ανεξάρτητο σύνολο. Έστω p η πιθανότητα να μπει αυτή η κορυφή στο ανεξάρτητο σύνολο, τότε:

$$p = \frac{\binom{n}{deg(v)+1}!\,(deg(v))!\,(n-deg(v)-1)!}{n!} = \frac{n!\,(deg(v))!\,(n-deg(v)-1)!}{n!\,(deg(v)+1)!\,(n-deg(v)-1)!} =$$

$$= \frac{(deg(v))!}{(deg(v)+1)!} = \frac{(deg(v))!}{(deg(v))!\,(deg(v)+1)} = \frac{1}{deg(v)+1} \iff$$

$$p = \frac{1}{deg(v)+1}$$

όπου: $\binom{n}{deg(v)+1}!$: η περίπτωση μια κορυφή να βρίσκεται πριν από τους γείτονές της

$(deg(v))!$: οι μεταθέσεις των υπόλοιπων κορυφών που είναι γείτονες της κορυφής που «εξετάζεται»

$(n-deg(v)-1)!$: οι μεταθέσεις των υπόλοιπων κορυφών (ούτε εξεταζόμενη ούτε γείτονές της)

$n!$: όλες οι δυνατές μεταθέσεις

έστω V_1 το ανεξάρτητο σύνολο, τότε:

$$Exp[|V_1|] = \sum_{v \in V_1} \frac{1}{deg(v)+1}.$$

Με πιθανοτική μέθοδο αποδείχτηκε το ζητούμενο

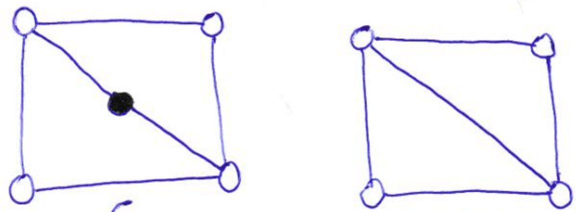
Θέμα 5

α)

Αφού τα γραφήματα G και H είναι ομοιομορφικά μπορούν να καταλήξουν ισομορφικά με διαδοχική εφαρμογή απλοποιήσεων σειράς, δηλαδή με διαδοχική απαλοιφή κορυφών βαθμού 2.

1) Δύο ισομορφικά γραφήματα συμφωνούν ως προς την ιδιότητα του κυκλώματος Euler. Επίσης, ένα συνεκτικό (μη-κατευθ.) γράφημα έχει κύκλωμα Euler αν και μόνο αν όλες οι κορυφές του είναι άρτιου βαθμού. Έστω G' και H' τα ισομομορφικά γραφήματα που θα προκύψουν μετά τις απαλοιφές κορυφών. Επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το H έχει κύκλωμα Euler, τότε και το H' θα έχει αφού διαγράφοντας κορυφές βαθμού 2 δεν επηρεάζεται ο βαθμός των υπόλοιπων κορυφών (παραμένει άρτιος). Άρα και το G' θα έχει (ισομορφικά). Συνεπώς και το G αφού θα έχει το G'. Αντίστοιχα, αν το G έχει κύκλωμα Euler. Αποδείχτηκε το ζητούμενο.

2) Ο ισχυρισμός αυτός δεν ισχύει. Για το σκοπό αυτό παραθέτουμε το παρακάτω γράφημα ως αντιπαράδειγμα:



G   G'

Το G' προκύπτει από το G με απλοποίηση σειράς διαγράφοντας τη χρωματισμένη κορυφή. Παρατηρούμε ότι το G' έχει κύκλο Hamilton σε αντίθεση με το G.

Οπότε ακόμα και αν το H έχει κύκλο Hamilton δεν είναι απαραίτητο ότι θα έχει και το H'. Αλλά, ακόμα και να έχει το H' και να συμφωνεί ως προς την ιδιότητα με το G' δεν είναι απαραίτητο ότι θα έχει και το G. Ο ισχυρισμός, επομένως, δεν αληθεύει. 9

β) <u>Επαγωγική βάση</u>: Για $n=3$, προφανώς ισχύει. Εύκολα φτιάχνουμε κύκλο Hamilton αφού έχουμε 3 ακμές.

<u>Επαγωγική υπόθεση</u>: Έστω πως ισχύει για $n=k-1$.

<u>Επαγωγικό βήμα</u>: Θέλουμε να δείξουμε πως για $n=k$ το γράφημα G με τουλάχιστον $\frac{(k-1)(k-2)}{2}+2$ ακμές έχει κύκλο Hamilton.

Στο G με $n=k$ κορυφές, ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει κορυφή με βαθμό τουλάχιστον $k-2$. Θα το αποδείξουμε ως εξής: έστω ότι ο μέγιστος βαθμός κορυφής είναι $k-3$, τότε ο μέγιστος αριθμός ακμών είναι: $\frac{k(k-3)}{2}$, όμως τότε ισχύει: $\frac{(k-1)(k-2)}{2}+2>\frac{k(k-3)}{2}$ ($\Leftrightarrow \frac{k^2-3k}{2}+3>\frac{k^2-3k}{2} \Leftrightarrow 3>0$) Άτοπο, από υπόθεση. Άρα, υπάρχει κορυφή του G με τουλάχιστον $k-2$ ακμές. Έστω, ότι υπάρχει κορυφή με βαθμό $k-1$, τότε αφαιρώντας την θα πρέπει θα πρέπει να ισχύει (γράφημα με $k-1$ κορυφές): $\frac{(k-1)(k-2)}{2}+2-(k-1)\geq\frac{(k-2)(k-3)}{2}+2$ $\Rightarrow 0\geq 6$. Άτοπο, άρα σε αυτή την περίπτωση δεν ισχύει η επαγωγική μας υπόθεση. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει κορυφή με βαθμό $k-1$, στο γράφημα G υπάρχει κορυφή με βαθμό ακριβώς $k-2$. Την αφαιρούμε. Τώρα το γράφημα θα έχει $\frac{(k-1)(k-2)}{2}+2-(k-2)=\frac{(k-2)(k-3)}{2}+2$ ακμές. Επομένως, ικανοποιείται η επαγωγική υπόθεση για $n=k-1$, άρα το νέο γράφημα έχει κύκλο Hamilton. Αφού η κορυφή που αφαιρέσαμε έχει βαθμό $k-2$, θα έχει $k-2$ γείτονες, οπότε συνδέεται με όλες τις υπόλοιπες κορυφές εκτός από μία (όταν την ξαναπροσθέτουμε). Συνεπώς, αναγκαστικά θα μπει μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών του γραφήματος με $k-1$ κορυφές. Άρα το G θα έχει κύκλο Hamilton.

Στην περίπτωση τώρα που υπάρχει κορυφή με βαθμό $k-1$, το γράφημα με τις $n-1$ κορυφές θα έχει $\frac{(k-2)(k-3)}{2}+1$ ακμές.
(αφού: $\frac{(k-1)(k-2)}{2}+2-(k-1)=\frac{(k-2)(k-3)}{2}+1$.

Παρατηρούμε ότι λείπει μια ακμή για να έχουμε κύκλο Hamilton, όμως έχουμε μονοπάτι Hamilton. Η n-οστή κορυφή είναι βαθμού $k-1$, οπότε συνδέεται με όλες τις υπόλοιπες κορυφές. Συνδέοντας την κορυφή αυτή με αυτές που δεν έκλεινε ο κύκλος Hamilton, σχηματίζουμε κύκλο Hamilton. Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση το γράφημα G έχει κύκλο Hamilton.

Επίσης, το πλήρες γράφημα με $n-1$ κορυφές (K_{n-1}) και μια ακμή γέφυρα από κάποια κορυφή του πλήρους γραφήματος σε μεμονωμένη κορυφή είναι γράφημα n κορυφών με $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ ακμές, που δεν έχει κύκλο Hamilton. (Αναφερόμαστε σε $n \geq 3$).

Θέμα 6

α) <u>Ευθύ ($\Rightarrow$):</u>

Υποθέτουμε ότι: $d_1+d_2+\ldots+d_n=2(n-1)$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει δέντρο T με αυτή την ακολουθία βαθμών κορυφής. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή.

<u>Επαγωγική βάση</u>: $n=2$, $d_1+d_2=2 \xrightarrow[\text{ακέραιοι}]{\text{θετικοί}} d_1=d_2=1$
οπότε το γράφημα είναι αναγκαστικά δέντρο: o—o.

<u>Επαγωγική υπόθεση</u>: Υπάρχει δέντρο T για $n=k$, για κάποιο $k\geq 2$.

<u>Επαγωγικό βήμα</u>: Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$.

Έστω $d_1, d_2, \ldots, d_{k+1}$ μία ακολουθία $k+1$ θετικών ακεραίων με: $\sum_{i=1}^{k+1} d_i = 2k$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι οι όροι της ακολουθίας ικανοποιούν την εξής διάταξη:

$$d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \ldots \geq d_k \geq d_{k+1}$$

Αφού έχουμε $k+1$ θετικούς ακέραιους που ισούνται με $2k$: δε γίνεται να είναι όλοι ίσοι με 1 (γιατί τότε το άθροισμα θα ήταν $k+1<2k$) οπότε: $d_1 \geq 2$. Επιπλέον, τουλάχιστον 2 όροι είναι ίσοι με 1 (διαφορετικά το άθροισμα θα ήταν μεγαλύτερο από $2k$)
Άρα: $d_k = d_{k+1} = 1$. Τώρα, ας θεωρήσουμε την ακολουθία:

$$d_1 - 1, d_2, d_3, \ldots, d_k$$

Παρατηρούμε ότι ικανοποιείται η επαγωγική υπόθεση, αφού:

$$\sum_{i=1}^{k+1} d_i = 2k \Rightarrow d_1 - 1 + d_{k+1} + \sum_{i=2}^{k} d_i = 2k \xRightarrow{d_{k+1}=1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = 2(k-1)$$ Οπότε, υπάρχει δέντρο T′ με ακολουθία κορυφών: $v_1, v_2, \ldots, v_k$ με βαθμούς: $d_1 - 1, d_2, \ldots, d_k$ αντίστοιχα.

Προσθέτοντας την κορυφή v_{k+1} με βαθμό d_{k+1} στο T′: προκύπτει το T (η v_{k+1} δε κλείνει κύκλο γιατί έχει βαθμό $d_{k+1}=1$)

Αποδείχτηκε το ζητούμενο.

Αντίστροφο:

Αφού το T είναι δέντρο, ισχύει: $|E_T| = n-1$.

Όμως, για κάθε γράφημα (συμπεριλαμβανομένου και του T), ισχύει:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} d_i}_{\text{βαθμοί κορυφών}} = 2|E_T| = 2(n-1).$$

Αποδείχτηκε το ζητούμενο.

β) Έστω T το ΕΣΔ του G. Θα αποδείξουμε ότι:

$\max_{e \in P^*_{uv}}\{w(e)\} \leq \max_{e \in P_{uv}}\{w(e)\}$ (1) με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω δύο κορυφές u, v του G. Αν αυτές συνδέονται με μοναδικό μονοπάτι στο G, τότε η (1) ισχύει ως ισότητα. Αν υπάρχει κι άλλο μονοπάτι P που τις συνδέει υποθέτουμε ότι ισχύει:

$\max_{e \in P^*_{uv}}\{w(e)\} > \max_{e \in P_{uv}}\{w(e)\}$. Έστω e_1 η ακμή με το μέγιστο βάρος στο P^*, αφαιρώντας την, το δέντρο T χωρίζεται σε δύο συνεκτικές συνιστώσες. Συνδέοντας τις δύο συνεκτικές συνιστώσες του T με οποιονδήποτε άλλο «αποδεκτό» τρόπο, ώστε να δημιουργηθεί συνδετικό δέντρο T', παρατηρούμε ότι το συνολικό βάρος του T' είναι μικρότερο από αυτό του T (αφού η e_1 έχει μεγαλύτερο βάρος από οποιαδήποτε ακμή βρίσκεται στο P μονοπάτι).

Επομένως, το T δεν είναι το ΕΣΔ. Άτοπο, από υπόθεση.

Συνεπώς, ισχύει η (1) σε κάθε περίπτωση.

Θέμα 7

1) Έστω f ο αριθμός των όψεων του G. Αφού το μήκος κάθε κύκλου στο G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του k, κάθε όψη περιλαμβάνει τουλάχιστον k ακμές. Επομένως, το άθροισμα των ακμών όλων των όψεων είναι τουλάχιστον kf. Από την άλλη κάθε ακμή συμμετέχει το πολύ σε 2 όψεις. Συνεπώς, το άθροισμα των ακμών όλων των όψεων είναι το πολύ $2m$. Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες, έχουμε:

$$kf \leq \text{άθροισμα όλων των όψεων} \leq 2m \Rightarrow f \leq \frac{2}{k} m$$

Από τον τύπο του Euler:

$$m + 2 = n + f \leq n + \frac{2}{k} m \Rightarrow n - 2 \geq m\left(1 - \frac{2}{k}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{k}{k-2}(n-2).$$

2) Για τα παρακάτω ισχύει $k=6$.

i) Είναι: $\sum_{i=1}^{n} deg(i) = 2m \leq 3(n-2)$.

Πρέπει: $S = \sum_{i=1}^{n} deg(i) \leq 3(n-2)$

έστω ότι όλες οι κορυφές έχουν βαθμό $deg(i) \geq 3$, τότε θα είναι: $S \geq 3n$, όμως ισχύει: $S \leq 3(n-2)$. Άτοπο. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον 1 κορυφή με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 2.

ii) Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή στο πλήθος των κορυφών του γραφήματος G.

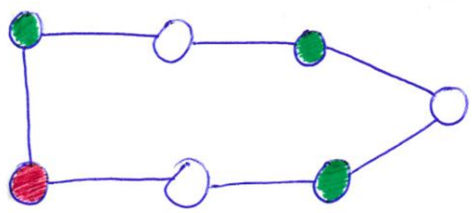
<u>Επαγωγική βάση</u>: ο ισχυρισμός είναι τετριμένα αληθής αν το γράφημα έχει μέχρι 3 κορυφές.

<u>Επαγωγική υπόθεση</u>: ο ισχυρισμός είναι αληθής για κάθε επίπεδο γράφημα με $n-1$ το πολύ κορυφές.

<u>Επαγωγικό βήμα</u>: Θα δειχθεί ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής και για κάθε επίπεδο γράφημε με n κορυφές.

Έστω $G'(V,E)$ απλό επίπεδο γράφημα με n κορυφές. Γνωρίζουμε από το (i) ότι: σε αυτό υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 2. Έστω v μια τέτοια κορυφή, και v_1, v_2 οι γείτονες της v. Αφαιρώντας τη v προκύπτει ένα επίπεδο γράφημα $n-1$ κορυφών που μπορεί να χρωματιστεί με το πολύ 3 χρώματα (λόγω επαγωγικής υπόθεσης). Θεωρούμε έναν τέτοιο χρωματισμό του γραφήματος G'/v. Ξαναπροσθέτοντας τη v, αν υπάρχουν δύο γείτονες της με το ίδιο χρώμα, τότε τη χρωματίζουμε με ένα από τα χρώματα που δε χρησιμοποιείται από τους γείτονές της και ολοκληρώνεται ο χρωματισμός του G' με το πολύ 3 χρώματα. Αν οι v_1, v_2 έχουν διαφορετικά χρώματα, χρωματίζουμε τη v με το χρώμα που δε χρησιμοποιείται από τις v_1, v_2. Οπότε, και πάλι, ο χρωματισμός του G' ολοκληρώνεται με το πολύ 3 χρώματα. Σε κάθε περίπτωση, το γράφημα G' έχει χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του 3, οπότε ισχύει το ζητούμενο.

3) Το ζητούμενο γράφημα είναι ο κύκλος με περιττό πλήθος κορυφών n. (όμως $k=6$, άρα: $n=7$)



3 χρώματα: κόκκινο
πράσινο
άσπρο

Θέμα 8

αρχικά είναι $\chi(K_q) = q$, αφού το γράφημα είναι πλήρες.

Ιδέα: Ουσιαστικά, βασιζόμαστε στον ορισμό του καρτεσιανού γινομένου και στο γεγονός ότι το γράφημα G δημιουργεί $|V_G|$ αντίγραφα του K_q, ενώ αντίστοιχα το K_q δημιουργεί q αντίγραφα του G. Επομένως κάθε κορυφή στο καρτεσιανό γινόμενο συνδέεται με τις κορυφές που συνδεόταν στο G και στο K_q. Οπότε, ισχύει: $\chi(G \times K_q) \geq \max\{\chi(G), q\}$. Επιλέγουμε τυχαία μια κορυφή. Αν χρωματίσουμε με τον $\max\{\chi(G), q\}$ όλους τους γείτονές κι αυτή που οφείλονται στο υπογράφημα με τον max χρωματικό αριθμό (είτε το G, είτε το K_q), τότε μένει να χρωματίσουμε τους γείτονές της που οφείλονται στο γράφημα με τον μικρότερο χρωματικό αριθμό. Προφανώς, το πλήθος χρωμάτων που έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί επαρκεί. Επειδή αυτή η απόδειξη είναι περισσότερο «διαισθητική» θα προσπαθήσουμε να το δείξουμε και πιο «αυστηρά». Για το σκοπό αυτό θα αναγκαστούμε να ορίσουμε την έννοια της χρωματικής συνάρτησης ενός γραφήματος G: $C_G: V_G \to J_m$, που αντιστοιχίζει το σύνολο των κορυφών σε ένα σύνολο ακεραίων (mod m), έτσι ώστε: $(v, v') \in E(G) \Rightarrow C_G(v) \neq C_G(v')$.

Δηλαδή, ουσιαστικά αντιστοιχίζει τα χρώματα σε ακέραιους αριθμούς (με V' συμβολίζεται η γειτονική κορυφή της V).

Αν συμβολίσουμε με V μια κορυφή στο G και με k μια κορυφή στο K_q, έχουμε:

$$(V, V') \in E(G) \Longrightarrow C_G(V) \neq C_G(V')$$

$$(k, k') \in E(K_q) \Longrightarrow C_K(k) \neq C_K(k')$$

Τώρα, ορίζουμε τη χρωματική συνάρτηση του καρτεσιανού γινομένου $G \times K_q$ ως: $C : V(G \times K_q) \rightarrow J_m$ με:

$$C(V, k) = C_G(V) + C_K(k), \quad V \in V_G, \; k \in V_K$$

Είναι: $[(V,k),(V',k)] \in E(K_q \times G) \Rightarrow C(V,k) \neq C(V',k)$

Με βάση τον ορισμό του καρτεσιανού γινομένου υπάρχουν δύο περιπτώσεις ώστε να ισχύει αυτό:

$$\{V = V' \text{ και } (k, k') \in E(K)\} \text{ ή } \{k = k' \text{ και } (V, V') \in E(G)\}.$$

Αν επιλέξουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας την πρώτη περίπτωση, έχουμε:

$V = V' \Rightarrow C_G(V) = C_G(V')$ (1) και: $(k, k') \in E(K) \Rightarrow C_K(k) \neq C_K(k')$ (2)

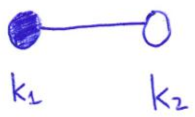
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει:

$C_G(V) + C_K(k) \neq C_G(V') + C_K(k') \Longleftrightarrow C(V, k) \neq C(V', k')$, επομένως αφού η χρωματική συνάρτηση C ικανοποιεί τη συνθήκη ορισμού της, ισχύει: $\chi(G \times K_q) \leq \max\{q, \chi(G)\}$

Ενώ: $\chi(G \times K_q) \geq \max\{\chi(G), q\}$, άρα: $\chi(G \times K_q) = \max\{\chi(G), q\}$

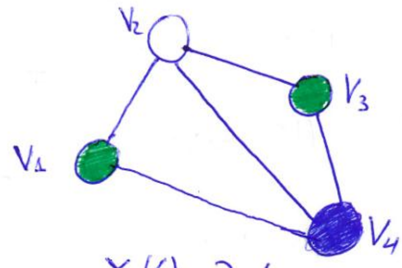
Παρακάτω παρατίθεται και ένα απλό παράδειγμα για καλύτερη κατανόηση της μεθόδου.

K_2:



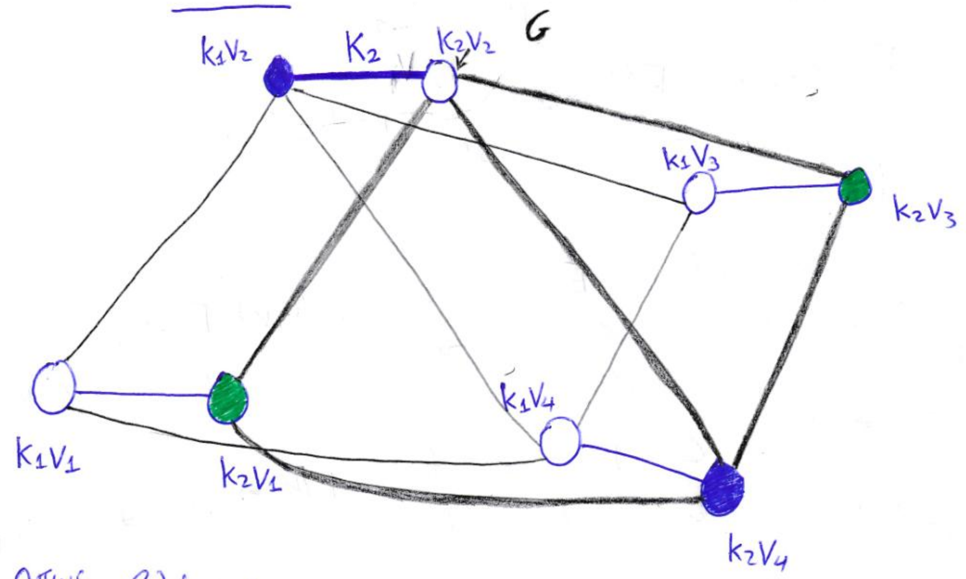
$q = 2$ (μπλε, άσπρο)

G:



$\chi(G) = 3$ (μπλε, άσπρο, πράσινο).

$K_2 \times G$:



Όπως βλέπουμε, ισχύει: $\chi(G \times K_2) = \max\{\chi(G), 2\} = 3$