ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΣΤΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Διακριτά Μαθηματικά

1^{η} Σειρά Ασκήσεων

Στοιχεία Φοιτητή: Ονοματεπώνυμο: Αναστάσιος Παπαζαφειρόπουλος

Αριθμός Μητρώου: 03118079

Ακαδημαϊκό έτος: 2019-2020

<u>Θέμα 1:</u>

α) ιππότες: λένε πάντα αλήθεια

απατεώνες: λένε πάντα ψέματα

i. Ισχύουν: Αν A ιππότης → A, B ιππότες → B λέει ψέματα → B δεν είναι ιππότης, Άτοπο

Οπότε: A απατεώνας → B λέει αλήθεια → B ιππότης.

Επομένως, A απατεώνας και B ιππότης.

ii. Ισχύουν: Αν C ιππότης → C, D απατεώνες → C ιππότης και απατεώνας, Άτοπο.

Άρα: C απατεώνας → η πρόταση δεν ισχύει → αναγκαστικά D ιππότης.

Επομένως, C απατεώνας και D ιππότης.

iii. Ισχύουν οι περιπτώσεις: E ιππότης ↔ F απατεώνας

E απατεώνας ↔ F ιππότης

Επομένως, σε κάθε περίπτωση ένας από τους δύο είναι απατεώνας.

β) Αρχικά, θα φτιάξουμε τον πίνακα αληθείας της $σ_0 \equiv φ \rightarrow φ$.

Παρουσιάζεται παρακάτω:

φ	¬φ	φ→φ
True	False	True
False	True	True

Παρατηρούμε ότι ο προτασιακός τύπος $σ_0$ είναι ταυτολογία. Στη διαδικασία επίλυσης, θεωρούμε κάθε φορά τη συνεπαγωγή που βρίσκεται πιο δεξιά και εκτός παρενθέσεων ως «εξωτερική» συνεπαγωγή. Οπότε, για να αποφανθούμε αν ο προτασιακός τύπος $σ_n$ είναι ικανοποιήσιμος ή ταυτολογία εξετάζουμε κάθε φορά αν είναι δυνατό να υπάρξει η περίπτωση 2 (φ = 'False') που φαίνεται στον πίνακα αληθείας της σχέσης Α → Β, όπου "→": η «εξωτερική» συνεπαγωγή, "Α": το μέλος αριστερά της «εξωτερικής» συνεπαγωγής και "Β": φ. Αν καταλήξουμε σε άτοπο, ο τύπος είναι ταυτολογία, διαφορετικά είναι ικανοποιήσιμος.

Πίνακας Αληθείας της σχέσης Α → Β:

A	B	A → B
True	True	True
True	False	False
False	True	True
False	False	True

Εφαρμόζοντας αυτή τη διαδικασία για κάθε n=0,1,2,… παρατηρούμε ότι για τις περιττές τιμές του n ο $σ_n$ είναι ικανοποιήσιμος, ενώ για τις άρτιες τιμές του n ο $σ_n$ είναι ταυτολογία. Επίσης, για τις περιττές τιμές του n ισχύει: $σ_n \models σ_{n+1}$.

γ)

i. Από τις 100 προτάσεις δε γίνεται να αληθεύει πάνω από 1, γιατί σε εκείνη την περίπτωση αυτομάτως θα είχαμε νοηματική αντίφαση. Οπότε, αναγκαστικά αληθής είναι η πρόταση 99 για να μην έχουμε «αριθμητική» αντίφαση.

ii. Όταν προστεθεί το «τουλάχιστον», οι 50 πρώτες προτάσεις είναι αληθείς και οι επόμενες 50 είναι ψευδείς.

iii. Αν αντί για 100, έχουμε 99 δηλώσεις σαν αυτές στο (ii) τότε αν η πρόταση 50 είναι αληθής καταλήγουμε σε αντίφαση, καθώς τότε ενώ δηλώνει ότι: τουλάχιστον 50 προτάσεις είναι ψευδείς, έχουμε 49 ψευδείς προτάσεις. Αντίστοιχα, αν η πρόταση 50 είναι ψευδής, καταλήγουμε ξανά σε αντίφαση. Επομένως, δε μπορούμε να αποφανθούμε για την αλήθεια της πρότασης 50.

δ)

T: άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων

φ: αυθαίρετα επιλεγμένος προτασιακός τύπος

i. Από πληρότητα: T|=φ → T |– φ.

Όμως, το σύνολο των υποθέσεων που εκκινούμε για να αποδειχτεί ο φ είναι πεπερασμένο. Επομένως, υπάρχει πεπερασμένο $T_0 \subseteq T$ τέτοιο ώστε: T_0|– φ. Συνεπώς, T_0|– φ → T_0|=φ από εγκυρότητα. Αποδείχτηκε το ζητούμενο,

ii. Αφού το T είναι μη ικανοποιήσιμο, ισχύει: T|=φ, ∀φ. Επιλέγουμε φ, τέτοιο ώστε να είναι αντίφαση. Σύμφωνα με το (i), υπάρχει πεπερασμένο $T_0 \subseteq T$ τέτοιο ώστε τέτοιο ώστε να ισχύει: T_0|=φ. Όμως, επειδή ο φ είναι αντίφαση, αναγκαστικά το T_0 είναι μη ικανοποιήσιμο.

Θέμα 2:

α)

1) $\exists x \left(CS(x) \rightarrow \exists z \exists y\big(z \neq y \wedge M(z) \wedge M(y) \wedge L(x,y) \wedge L(x,y)\big)\right)$

2) $\exists x\big(OS(x) \wedge \forall y(CS(y) \leftrightarrow U(y,x))\big)$

3) $\exists x \exists y\big(x \neq y \wedge OS(x) \wedge OS(y) \wedge \forall z(OS(z) \rightarrow z = y \vee z = x) \wedge \forall k(CS(k) \rightarrow U(k,x) \vee U(k,y))\big)$

4) $\exists x \exists y\big(x \neq y \wedge OS(x) \wedge OS(y) \wedge \forall z(M(z) \rightarrow (U(z,x) \leftrightarrow U(z,y)))\big)$

5) $\exists x \exists y \left(x \neq y \wedge OS(x) \wedge OS(y) \wedge \exists z\big(M(z) \wedge U(z,x) \wedge U(z,y)\big) \wedge \forall k(k \neq z \wedge M(k) \wedge L(k,z) \rightarrow U(k,x) \vee U(k,y)) \wedge \ \forall m(CS(m) \rightarrow U(m,x) \vee U(m,y))\right)$

β)

Είναι: $\{\forall x Q_1(x), \forall x Q_1(x) \rightarrow \forall x Q_2(x), \ldots, \forall x Q_{n-1}(x) \rightarrow \forall x Q_n(x)\} \models \forall x\big(Q_1(x) \leftrightarrow Q_n(x)\big)$

Έστω ότι η δοθείσα λογική συνεπαγωγή γράφεται στη μορφή T|=φ, όπου:

T=$\{\forall x Q_1(x), \forall x Q_1(x) \rightarrow \forall x Q_2(x), \ldots, \forall x Q_{n-1}(x) \rightarrow \forall x Q_n(x)\}$ και φ=$\forall x\big(Q_1(x) \leftrightarrow Q_n(x)\big)$.

Τότε η λογική συνεπαγωγή είναι έγκυρη αν και μόνο αν φ έπεται αναγκαστικά από υποθέσεις στο T. Πράγματι, από διαδοχική εφαρμογή του αποδεικτικού κανόνα Modus Ponens στις υποθέσεις του T προκύπτει ότι τα $Q_1(x), Q_n(x)$ αληθεύουν $\forall x$. Όμως, στον φ, ουσιαστικά ορίζεται το κατηγόρημα $Q_1(x) = Q_n(x)$, που προφανώς αληθεύει για το σύνολο υποθέσεων T. Επομένως, η λογική συνεπαγωγή είναι έγκυρη.

Θέμα 3:

α)

1. Είναι :
   ϕ=$\forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y \left(P(x,y) \rightarrow \forall z\big(P(x,z) \vee P(z,y)\big)\right) \rightarrow \forall x \forall y\big(P(x,y) \vee P(y,x)\big)$
   Αν θεωρήσουμε στην υπόθεση της παραπάνω πρότασης την ειδικότερη περίπτωση όπου το y παίρνει την τιμή x. Τότε η υπόθεση μας θα είναι:
   $$\forall x P(x,x) \wedge \forall x \left(P(x,x) \rightarrow \forall z\big(P(x,z) \vee P(z,x)\big)\right)$$

   Οπότε και εφαρμογή του κανόνα Modus Ponens προκύπτει ότι: $\forall z\big(P(x,z) \vee P(z,x)\big)$ αληθεύει $\forall x$, το οποίο είναι μια ισοδύναμη γραφή του συμπεράσματος αν σε αυτό θέσουμε όπου y το z. Επομένως, σε αυτή την ειδική περίπτωση υπάρχει λογική εγκυρότητα. Όμως, αυτό σημαίνει πως μια ασθενέστερη μορφή της υπόθεσης είναι ικανή για να προκύψει το συμπέρασμα. Συνεπώς, το συμπέρασμα θα προκύπτει και από την αρχική υπόθεση της ϕ. Άρα, η ϕ είναι λογικά έγκυρη.

2. Είναι: ψ=$\forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y \left(P(x,y) \rightarrow \forall z\big(P(x,z) \vee P(z,y)\big)\right) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$
   Θέλουμε να δειχθεί ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της ψ. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

   Έστω n ο πληθάριθμος του σύμπαντος (n πεπερασμένο).

   <u>Βάση επαγωγής</u>: n=1:
   Τότε το σύμπαν έχει ένα μοναδικό στοιχείο, οπότε το συμπέρασμα γίνεται: $\exists x P(x,x)$ που είναι άμεση απόρροια της υπόθεσης =$\forall x P(x,x)$. Άρα ισχύει.

   <u>Επαγωγικό Βήμα</u>: Έστω ότι αληθεύει για n, τότε θα δειχθεί ότι αληθεύει και για n+1.

   Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i. Η ερμηνεία δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις της ψ (τετριμμένη περίπτωση)
   Τότε η υπόθεση είναι ψευδής k στοιχεία του σύμπαντος, άρα και αφού προσθέσουμε στο σύμπαν το (k+1)-οστό στοιχείο η υπόθεση θα συνεχίσει να είναι ψευδής (αφού σε αυτήν οι μεταβλητές υπάγονται σε ποσοδείκτες ∀ που δηλώνουν σύζευξη). Επομένως, η συνεπαγωγή θα συνεχίσει να είναι αληθής και η ερμηνεία να αποτελεί μοντέλο της ψ.

ii. Η ερμηνεία ικανοποιεί τις υποθέσεις της ψ
   Εδώ θα δείξουμε ότι αν ψ αληθής για n=k στοιχεία τότε είναι αληθής και n=k+1 στοιχεία. Θεωρούμε τη διμελή σχέση P ως εξής: $P(x,y)$: «ο x δείχνει τον y» και τον γράφο G που εκφράζει την ψ. Τότε ο γράφος G έχει (k+1) υπογράφους G_i k στοιχείων που διαφέρουν μεταξύ τους ως προς ένα στοιχείο (αυτό που τους λείπει για να είναι ίδιοι με τον G). Η επαγωγική υπόθεση μπορεί να γραφτεί: Σε κάθε υπογράφο G_i υπάρχει κόμβος x που δείχνει όλους τους κόμβους y.
   Αναπαριστούμε τον κάθε υπογράφο με πίνακα γειτνίασης. Ο πίνακας θα έχει διαστάσεις k×k. Από την επαγωγική υπόθεση κάθε πίνακας θα έχει τουλάχιστον μία γραμμή συμπληρωμένη με άσσους. Τώρα θεωρούμε τον πίνακα γειτνίασης του γράφου G με διαστάσεις (k+1)×(k+1).

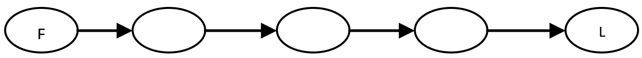
Επειδή αυτός ο πίνακας πρέπει να είναι συμβατός -ως προς τις τιμές των στοιχείων του- με τους πίνακες γειτνίασης των υπογράφων, αν υπάρχει κοινό στοιχείο στους πίνακες $k \times k$ που έχει γραμμή συμπληρωμένη με άσσους, αυτό θα διατηρήσει αυτή την ιδιότητα και στον $(k+1) \times (k+1)$ πίνακα. Επομένως, θα δείχνει όλα τα στοιχεία και είναι το στοιχείο που αληθεύει την ψ.
Αν δεν υπάρχει τέτοιο στοιχείο, δηλαδή σε κάθε υπογράφο διαφορετικό στοιχείο δείχνει όλα τα υπόλοιπα. Τότε επιλέγουμε τυχαία δύο τέτοιους υπογράφους. Έστω α το στοιχείο που δείχνει σε όλα τα υπόλοιπα στον έναν και έστω β αυτό που δείχνει σε όλα τα υπόλοιπα στον άλλον. Τα στοιχεία αυτά ανήκουν στον γράφο G και δείχνουν σε όλα τα υπόλοιπα εκτός ίσως από το α στο β και το β στο α. Όμως, από την πρόταση φ (που αποδείχτηκε ότι είναι λογικά έγκυρη παραπάνω) προκύπτει ότι όλα τα στοιχεία που ικανοποιούν τις υποθέσεις των ψ, φ σχετίζονται μεταξύ τους, ή ακριβέστερα: το ένα από τα δύο δείχνει το άλλο. Άρα για τα α, β έχουμε ότι το α δείχνει το β ή το β δείχνει το α. Σε κάθε περίπτωση έχουμε τουλάχιστον ένα στοιχείο που δείχνει όλα τα υπόλοιπα σε σύμπαν με n=k+1 στοιχεία.

Αποδείχτηκε το ζητούμενο. Επομένως, κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της ψ.

3. Θεωρούμε την ερμηνεία A, με σύμπαν $|A| = \mathbb{Z}$ και $P(a, b) = a \leq b$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις της ψ:
   $\forall a, a \leq a$
   $\forall a \forall b, a \leq b \rightarrow \forall z\ a \leq z$ ή $z \leq b$

   Όμως δεν ικανοποιείται το συμπέρασμα. Δηλαδή, ο τύπος $\exists x \forall y P(x, y)$ είναι ψευδής σε αυτή την περίπτωση, καθώς το σύνολο των ακεραίων δεν έχει κάτω φράγμα. Επομένως, η ερμηνεία A δεν αποτελεί μοντέλο της ψ.

β) Θα προσπαθήσουμε να «μεταφράσουμε» την πρόταση ξ στον κόσμο μας. Έχοντας στο μυαλό μας την απεικόνιση που φαίνεται παρακάτω και αναπαριστώντας τη σχέση P με βέλος, έχουμε:



Υποθέσεις:

$\forall x \neg P(x, x)$: δεν ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα

$\exists x \forall y \neg P(y, x)$: υπάρχει κόμβος y που σε αυτόν δε δείχνει κάποιος κόμβος (F)

$\forall x \forall y \forall z (P(x, y)\ \Lambda\ P(x, z) \rightarrow\ y = z)$: κάθε κόμβος δείχνει σε μόνο ένα κόμβο

$\forall x \forall y \forall z (P(y, x)\ \Lambda\ P(z, x) \rightarrow\ y = z)$: σε κάθε κόμβο δείχνει μόνο ένας κόμβος

Συμπέρασμα:

$\exists x \forall y \neg P(x,y)$: υπάρχει κόμβος y που δε δείχνει σε άλλο κόμβο (L σε πεπερασμένο σύμπαν)

Παρατηρούμε, πως η πρόταση ξ αληθεύει σε πεπερασμένο σύμπαν, όμως όχι σε άπειρο σύμπαν. Ως αντιπαράδειγμα, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την ερμηνεία A, όπου:

$|A| = \mathbb{Z}$-$\mathbb{N}$ και $P(x,y): y = x - 1$

Η ερμηνεία A ικανοποιεί τις υποθέσεις της ξ, όχι όμως και το συμπέρασμά της, αφού το σύνολο των ακεραίων αριθμών δεν έχει κάτω φράγμα.

<u>Θέμα 4</u>:

α)

Αφού το A={$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$} είναι πεπερασμένο, κάθε σύνολο από τα A, A^2, A^3,…, A^k θα είναι πεπερασμένο. Αφού θα είναι πεπερασμένα, θα είναι και αριθμήσιμα, καθώς θα είναι ισάριθμα του {1, 2,…, m_i} για κάποιο φυσικό $m_i \geq 1$. Το m_i είναι ο αντίστοιχος πληθικός αριθμός του συνόλου A^i. Το A^* εκφράζει την ένωση πεπερασμένου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων, άρα είναι και αυτό αριθμήσιμο. Ως διαδικασία απαρίθμησης θα μπορούσαμε να πούμε πως αρχίζουμε να αριθμούμε τις ακολουθίες με μήκος 1 στοιχείο, μετά με μήκος 2 στοιχεία, μετά μήκος 3 κ.ο.κ.

β)

Κάθε πρόβλημα απόφασης στους φυσικούς μπορεί να αναπαρασταθεί από το υποσύνολο των φυσικών για τους οποίους η απάντηση είναι «ναι». Άρα, κάθε πρόβλημα απόφασης αντιστοιχεί σε ένα σύνολο με στοιχεία φυσικούς αριθμούς. Επομένως, το σύνολο όλων τον προβλημάτων απόφασης εκφράζεται από το 2^N. Επιπλέον, κάθε πρόγραμμα που μπορεί να γραφτεί σε μία συγκεκριμένη γλώσσα (εδώ, για παράδειγμα στην C) μπορεί να αντιστοιχιστεί σε έναν μη προσημασμένο ακέραιο (αριθμό Gödel), άρα σε έναν φυσικό. Οπότε για να δειχθεί ότι υπάρχουν άπειρα προβλήματα απόφασης στους φυσικούς για τα οποία δεν υπάρχει λύση, αρκεί να δειχθεί ότι δεν υπάρχει διαδικασία απαρίθμησης που να αντιστοιχίζει το σύνολο των προβλημάτων στο σύνολο των λύσεων. Δηλαδή, ότι το σύνολο 2^N είναι μη αριθμήσιμο.

Έστω ότι το 2^N είναι αριθμήσιμο, άρα ισάριθμο του N. Τότε υπάρχει αντιστοιχία του 2^N με φυσικούς στο N. Με βάση αυτή απαριθμούμε $S_0, S_1,\ldots$ όλα τα υποσύνολα του N που αποτελούν στοιχεία του 2^N. Θεωρούμε το «διαγώνιο» σύνολο $D = \{ k \in N : k \notin S_k \}$. Το D εξ’ ορισμού διαφέρει από κάθε σύνολο S_k στο k-οστό στοιχείο, αφού αυτό ανήκει είτε στο D είτε στο S_k. Το D πάντα θα υπάρχει, καθώς αν θεωρήσουμε boolean «πίνακα $S_k \times N$», έστω A, όπου το στοιχείο a_{ij}, αν είναι 1, δηλώνει πως ο φυσικός αριθμός της στήλης j ανήκει στο σύνολο που αντιστοιχεί στη γραμμή i, το σύνολο D προκύπτει ως συμπλήρωμα της διαγωνίου αυτού του πίνακα και είναι διαφορετικό από κάθε γραμμή k (αρχή της διαγωνιοποίησης). Επομένως, καταλήγουμε σε άτοπο καθώς το D δεν εμφανίζεται πουθενά στην απαρίθμηση. Οπότε, το 2^N είναι μη αριθμήσιμο και υπάρχουν άπειρα προβλήματα απόφασης στους φυσικούς για τα οποία δεν υπάρχει λύση.

γ)

Περιγραφή διαδικασίας:

«Μαντεύουμε» τις τιμές: α_d, α_{d-1},…, α_0, x_0, q κάθε 30 δευτερόλεπτα, ενώ υπολογίζουμε το x_t για τη στιγμή t, ως εξής:

$x_1 = p(x_0) \bmod q$

$x_2 = p(x_1) \bmod q$

…

$x_t = p(x_{t-1}) \bmod q$

(Η χρονική στιγμή t είναι γνωστή, καθώς γνωρίζουμε πόσα δευτερόλεπτα έχουν περάσει από το τελευταίο reset)

Αν δεν βρήκαμε τον κωδικό «μαντεύουμε» ξανά τις τιμές: α_d, α_{d-1},…, α_0, x_0, q και ξαναδοκιμάζουμε. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να βρεθεί ο κωδικός. Επειδή ο πληθικός αριθμός του συνόλου: α_d, α_{d-1},…, α_0, x_0, q είναι πεπερασμένος αριθμός και παίρνει τιμές μόνο από τους φυσικούς αριθμούς, τα διαφορετικά σύνολα που θα προκύψουν είναι αριθμήσιμα. Επομένως, αυτή η μέθοδος εγγυάται ότι θα αποκτήσουμε πρόσβαση στον υπερυπολογιστή σε πεπερασμένο χρόνο.

Θέμα 5:

α)

Σχέση ισοδυναμίας: ανακλαστική, μεταβατική, συμμετρική

Ευθύ: ανακλαστική και κυκλική → ανακλαστική, μεταβατική, συμμετρική

Είναι: $\forall x \forall y \forall z\ (x,y)\epsilon R\ \Lambda\ (y,z)\epsilon R \rightarrow (z,x)\epsilon R$

$$\left.\begin{matrix} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=\gamma \end{matrix}\right\}\ (\alpha,\beta)\epsilon R\ \Lambda\ (\beta,\gamma)\epsilon R \rightarrow (\gamma,\alpha)\epsilon R\ (1)$$

$$\left.\begin{matrix} x=\gamma \\ y=\gamma \\ z=\alpha \end{matrix}\right\}\ (\gamma,\gamma)\epsilon R\ \Lambda\ (\gamma,\alpha)\epsilon R \rightarrow (\alpha,\gamma)\epsilon R\ (2)$$

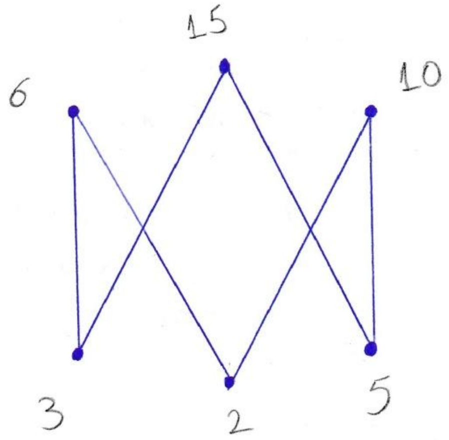
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η άμεσα η συμμετρική ιδιότητα. Επίσης, από τις (1) και (2):

$(\alpha,\beta)\epsilon R\ \Lambda\ (\beta,\gamma)\epsilon R \rightarrow\ (\alpha,\gamma)\epsilon R$: μεταβατική. Η ανακλαστική υπάρχει από υπόθεση.

Αντίστροφο: μεταβατική, συμμετρική, ανακλαστική → ανακλαστική, κυκλική

$(\alpha,\beta)\epsilon R\ \Lambda\ (\beta,\gamma)\epsilon R \rightarrow\ (\alpha,\gamma)\epsilon R \rightarrow\ (\gamma,\alpha)\epsilon R\ \}\ (\alpha,\beta)\epsilon R\ \Lambda\ (\beta,\gamma)\epsilon R \rightarrow (\gamma,\alpha)\epsilon R$: κυκλική. Η ανακλαστική υπάρχει.

β)



$(\{2,3,5,6,10,15\}, |)$

maximals : 6, 10, 15

minimals : 2, 3, 5

Με μπλε χρώμα είναι σχεδιασμένο το ζητούμενο διάγραμμα Hasse, ενώ με μαύρο έχει συμπληρωθεί ένα πιθανό παράδειγμα που «ταιριάζει» στο διάγραμμα.

γ)

R: Για m, n $\in \mathbb{N}$, (n,m) $\in$ R αν και μόνο αν κάθε πρώτος παράγοντας του n είναι και πρώτος παράγοντας του m.

Για να είναι η R σχέση διάταξης ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι να είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

Ανακλαστική, $(\alpha, \beta) \epsilon R$: ισχύει τετριμμένα (κάθε πρώτος παράγοντας ενός αριθμού είναι και πρώτος παράγοντας του «εαυτού» του)

Μεταβατική: Γράφουμε τους αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τη σχέση R, στην ακόλουθη μορφή:

$\alpha = \pi_1^{\alpha 1} \cdot \pi_2^{\alpha 2} \cdot \ldots \cdot \pi_k^{\alpha k}$, $\beta = \pi_1^{\beta 1} \cdot \pi_2^{\beta 2} \cdot \ldots \cdot \pi_k^{\beta k}$, $\gamma = \pi_1^{\gamma 1} \cdot \pi_2^{\gamma 2} \cdot \ldots \cdot \pi_k^{\gamma k}$, όπου π_i οι κοινοί πρώτοι παράγοντες

Προφανώς, ισχύει η $(\alpha, \beta) \epsilon R \ \Lambda \ (\beta, \gamma) \epsilon R \rightarrow \ (\alpha, \gamma) \epsilon R$. Άρα, ικανοποιείται η μεταβατική ιδιότητα.

Αντισυμμετρική: $(\alpha, \beta) \epsilon R \ \Lambda \ (\beta, \alpha) \epsilon R \rightarrow \ \alpha = \beta$. Προφανώς δεν ισχύει, καθώς μπορούμε να βρούμε δύο αριθμούς με ίδιους πρώτους παράγοντες, υψωμένους όμως σε διαφορετικές δυνάμεις, που δεν είναι ίσοι (αντιπαράδειγμα: 4 και 16).

Συνεπώς, αφού για την R δεν ισχύει η αντισυμμετρική ιδιότητα, η R δεν είναι σχέση διάταξης.