ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΣΤΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Διακριτά Μαθηματικά

3η Σειρά Ασκήσεων

Στοιχεία Φοιτητή: Ονοματεπώνυμο: Αναστάσιος Παπαζαφειρόπουλος

Αριθμός Μητρώου: 03118079

Ακαδημαϊκό έτος: 2019-2020

Θέμα 1:

1. Είναι πρόβλημα συνδυασμών χωρίς επανάληψη, αφού κάθε φοιτητής μπορεί να πάρει μόνο ένα βιβλίο, οπότε υπάρχουν: C(1000, 200) τρόποι.
2. Ουσιαστικά μοιράζονται στους φοιτητές ομάδες από ίδια βιβλία ή κανένα βιβλίο, άρα υπάρχουν: $\frac{1000!}{200! \cdot 250! \cdot 100! \cdot 50! \cdot 400!}$ τρόποι.
3. Εφόσον έχουμε 1000 αντίτυπα από το βιβλίο του κάθε συγγραφέα, σε κάθε περίπτωση τα βιβλία επαρκούν για τους φοιτητές (ακόμα και όλοι να επιλέξουν το ίδιο), οπότε όλοι οι φοιτητές έχουν 4 επιλογές βιβλίου. Συνεπώς, υπάρχουν: 4^{1000} τρόποι.
4. Ουσιαστικά οι 4 από τους 1000 φοιτητές θα επιλέξουν με 4! τρόπους, ώστε να ικανοποιηθεί ο περιορισμός και οι υπόλοιποι 996 θα επιλέξουν ελεύθερα, δηλαδή με 4^{996} τρόπους. Οπότε συνολικά υπάρχουν: $4! \cdot 4^{996}$ τρόποι.
5. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού για να ικανοποιηθούν οι περιορισμοί. Οι τρόποι χωρίς περιορισμό είναι: C(1003, 1000). Όταν μία υποδοχή παραβιάζει τον περιορισμό, δηλαδή ένα σημείο διανομής έχει 351 αντίτυπα έχουμε: 4 · C(652, 649) τρόπους. Αντίστοιχα, δύο υποδοχές παραβιάζουν τον περιορισμό με: C(4, 2) · C(301, 298) τρόπους. Βάσει των αριθμητικών δεδομένων του προβλήματος δε γίνεται τρεις υποδοχές να παραβιάζουν τον περιορισμό. Συνεπώς, συνολικά υπάρχουν

από την αρχή του εγκλεισμού – αποκλεισμού: $C(1003, 1000) - 4 \cdot C(652, 649) + C(4, 2) \cdot C(301, 298)$ τρόποι.

6. Ουσιαστικά εδώ έχουμε ένα πρόβλημα διατάξεων με επανάληψη (1000 αντίτυπα) που παίζει ρόλο η σειρά στις υποδοχές (ουρές αναμονής), οπότε οι 1000 φοιτητές μπορούν να σταθούν στις 4 ουρές αναμονής με: $\frac{1003!}{3!}$ τρόπους.
7. Το υποερώτημα (5) ήταν ένα πρόβλημα συνδυασμών με επανάληψη, καθώς 1000 αντίτυπα ενός βιβλίου κατανέμονταν σε 4 σημεία διανομής με τον περιορισμό: κάθε σημείο διανομής να μοιράσει 350 αντίτυπα το πολύ. Εδώ, θεωρώντας τους φοιτητές μη διακεκριμένους και παραλληλίζοντάς τους με τα 1000 αντίτυπα βιβλίου έχουμε το ίδιο πρόβλημα. Οπότε, τώρα που οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι και μας ενδιαφέρει η σειρά στις υποδοχές η λύση δίνεται από τη λύση του υποερωτήματος (5) πολλαπλασιασμένη με 1000! (που είναι το πλήθος των φοιτητών). Επομένως, οι 1000 φοιτητές μπορούν να σταθούν στις 4 ουρές αναμονής με:
$(C(1003, 1000) - 4 \cdot C(652, 649) + C(4, 2) \cdot C(301, 298)) \cdot 1000!$ τρόπους.

<u>Θέμα 2:</u>

i. Κάθε προτασιακή μεταβλητή παίρνει 2 πιθανές τιμές T(True) ή F(False), επομένως συνολικά οι n προτασιακές μεταβλητές έχουν 2^n δυνατές αποτιμήσεις. Όμως, κάθε προτασιακός τύπος μπορεί να πάρει επίσης 2 τιμές T ή F, ανάλογα με τις τιμές των μεταβλητών του. Επομένως, οι συνολικές δυνατές αποτιμήσεις των n προτασιακών τύπων είναι 2^{2^n}. Τόσες είναι και οι n διαφορετικές κλάσεις που σχηματίζονται. Άρα, η απάντηση είναι 2^{2^n}.

ii. Η συνεπαγωγή είναι αληθής ανεξαρτήτως της αποτίμησης του ψ, αν το αριστερό μέλος είναι ψευδές. Οπότε, σε αυτή την περίπτωση ο ψ έχει ελεύθερη αποτίμηση. Το αριστερό μέλος είναι αληθές στις αποτιμήσεις: (T, T, T, T, T), (T, T, F, T, T), (T, F, F, T, T), (F, T, F, T, T), (F, T, T, T, T), (T, F, T, T, T), (F, F, F, T, T), σύνολο: 7 αποτιμήσεις των 5 προτασιακών μεταβλητών. Άρα υπάρχουν $7 \cdot 2^{n-5}$ αποτιμήσεις μεταβλητών που ο ψ πρέπει να είναι αναγκαστικά αληθής (δεσμευμένη τιμή). Οπότε, οι ελεύθερες αποτιμήσεις των μεταβλητών του ψ είναι: $2^n - 7 \cdot 2^{n-5}$. Όμως, αυτές οι αποτιμήσεις μπορούν να δώσουν στον ψ δύο τιμές (T ή F), άρα το πλήθος των κλάσεων που ικανοποιούν τη συνεπαγωγή είναι: $2^{2^n - 7 \cdot 2^{n-5}}$.

<u>Θέμα 3:</u>

1. Ουσιαστικά μας ενδιαφέρει με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν τα θέματα τύπου B, καθώς, αφού μοιραστούν αυτά, οι ανάγκες των αμφιθεάτρων θα καλυφθούν αναγκαστικά με θέματα τύπου A. Θεωρούμε τα θέματα ως μπαλάκια και τα αμφιθέατρα ως υποδοχές, ενώ παρατηρούμε πως κάθε αμφιθέατρο έχει ανάγκη για 35 ή περισσότερα θέματα, οπότε είναι εφικτό να μπουν όλα τα μπαλάκια σε μία υποδοχή. Συνεπώς έχουμε πρόβλημα συνδυασμών με επανάληψη, χωρίς περιορισμούς, άρα το αποτέλεσμα είναι: C(38, 35) τρόποι.

2. Κάθε φοιτητής θα πάρει ένα είδος θεμάτων. Αρκεί ξανά να βρούμε πόσοι φοιτητές θα πάρουν θέματα τύπου Β. Οπότε, έχουμε πρόβλημα συνδυασμών χωρίς επανάληψη και συνεπώς το αποτέλεσμα είναι: C(190, 35) τρόποι.
3. Ουσιαστικά θέλουμε είτε στο αμφιθέατρο 2, είτε στο αμφιθέατρο 3 να μην υπάρχουν θέματα τύπου Β. Οπότε μοιράζουμε τα θέματα αυτά σε 3 αμφιθέατρα (όχι στο 2) και πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με το 2. Όμως έτσι έχουμε «διπλομετρήσει» την περίπτωση να μην έχει θέματα τύπου Β ούτε το αμφιθέατρο 2, ούτε το 3. Οπότε, την αφαιρούμε και από την αρχή του εγκλεισμού – αποκλεισμού προκύπτει ότι υπάρχουν $2 \cdot \mathrm{C}(37,35) - \mathrm{C}(36,35)$ τρόποι. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα p, είναι: $\mathrm{p} = \frac{2\cdot \mathrm{C}(37,35) - \mathrm{C}(36,35)}{\mathrm{C}(38,35)}$.
4. Ουσιαστικά αρκεί να μετρήσουμε τους τρόπους να μοιραστούν τα θέματα τύπου Α στους φοιτητές που βρίσκονται σε κάθε αμφιθέατρο, τηρώντας τους αντίστοιχους περιορισμούς, καθώς οι υπόλοιποι θα πάρουν αναγκαστικά τύπου Β. Επομένως, αρκεί να διατυπώσουμε τη Γεννήτρια Συνάρτηση για τα θέματα τύπου Α που μοιράζονται στα αμφιθέατρα και θέτοντας ως συντελεστές τους διαφορετικούς τρόπους που μπορούν να μοιραστούν τα θέματα αυτά στους φοιτητές. Δηλαδή, είναι:
   $A(x) = (\mathrm{C}(35,10) \cdot x^{10} + \mathrm{C}(35,12) \cdot x^{12} + \cdots + 35 \cdot x^{34})^2 \cdot (\mathrm{C}(40,10) \cdot x^{10} + \mathrm{C}(40,12) \cdot x^{12} + \cdots + x^{40}) \cdot (\mathrm{C}(80,15) \cdot x^{15} + \mathrm{C}(80,16) \cdot x^{16} + \cdots + x^{80})$
   Ο συντελεστής του όρου x^{155} δίνει το ζητούμενο.

<u>Θέμα 4:</u>

1. Ουσιαστικά ψάχνουμε τις λύσεις της εξίσωσης:
   $\mathrm{z}_1 + 2 \cdot \mathrm{z}_2 + 3 \cdot \mathrm{z}_3 + \cdots + 100 \cdot \mathrm{z}_{100} = 100$, καθώς μας ενδιαφέρουν μόνο οι διαφορετικές κατανομές των φοιτητών. Η παραπάνω εξίσωση πήρε αυτή τη μορφή με τους αντίστοιχους συντελεστές με σκοπό οι υποδοχές τώρα να είναι διακεκριμένες. Οπότε η ζητούμενη γεννήτρια συνάρτηση, είναι:
   $\mathrm{A}(\mathrm{x}) = (1 + \mathrm{x} + \cdots + \mathrm{x}^{100}) \cdot (1 + \mathrm{x}^2 + \cdots + \mathrm{x}^{100}) \cdot (1 + \mathrm{x}^3 + \cdots + \mathrm{x}^{99}) \cdot \ldots \cdot (1 + \mathrm{x}^{100})$
   Ο συντελεστής του x^{100} δίνει το ζητούμενο.

2. Αφού οι μη κενές εικονικές αίθουσες πρέπει να έχουν διαφορετικό αριθμό φοιτητών, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μια εικονική αίθουσα θα έχει είτε μηδενικό αριθμό φοιτητών, είτε μοναδικό μη μηδενικό αριθμό φοιτητών. Δηλαδή, έχουμε την παρακάτω γεννήτρια συνάρτηση, στην οποία κάθε όρος του γινομένου κωδικοποιεί μια εικονική αίθουσα: $\mathrm{A}(\mathrm{x}) = (1 + \mathrm{x}) \cdot (1 + \mathrm{x}^2) \cdot (1 + \mathrm{x}^3) \cdot \ldots \cdot (1 + \mathrm{x}^{100})$
   Ο συντελεστής του x^{100} δίνει το ζητούμενο.

Θέμα 5:

α. 1) Ουσιαστικά θέλουμε να μοιράσουμε 500 διακεκριμένα αντικείμενα (βιβλία) σε 8 διακεκριμένες υποδοχές (βιβλιοθήκες πανεπιστημίων), άρα έχουμε πρόβλημα διατάξεων με επανάληψη και δεν έχει σημασία η σειρά στις υποδοχές. Για αυτό θα χρησιμοποιήσουμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση, η οποία είναι: $A(x) = \left(\frac{x^{20}}{20!} + \frac{x^{21}}{21!} + \cdots + \frac{x^{100}}{100!}\right)^8$.

Ο συντελεστής του $\frac{x^{500}}{500!}$ δίνει το ζητούμενο.

α. 2) Εδώ, έχουμε το ίδιο πρόβλημα διατάξεων με παραπάνω, όμως τώρα έχει σημασία η σειρά στις υποδοχές. Για αυτό θα χρησιμοποιήσουμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση, η οποία είναι: $A(x) = \left(20! \cdot \frac{x^{20}}{20!} + 21! \cdot \frac{x^{21}}{21!} + \cdots + 100! \cdot \frac{x^{100}}{100!}\right)^8$.

Ο συντελεστής του $\frac{x^{500}}{500!}$ δίνει το ζητούμενο

β) Εδώ ουσιαστικά υποδοχές δηλώνουν τα ψηφία 0, 1, …, 9 και τα μπαλάκια δηλώνουν πόσες φορές εμφανίστηκε το αντίστοιχο ψηφίο. Οπότε, έχουμε πρόβλημα διατάξεων με επανάληψη και δεν έχει σημασία η σειρά στις υποδοχές. Για αυτό θα χρησιμοποιήσουμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση. Οι όροι της γεννήτριας συνάρτησης προκύπτουν ως εξής:

Υποδοχές 0, 1: $\left(x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^2 = (e^x - 1)^2$

Υποδοχές 2, 4: $\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^2 = (\frac{e^x + e^{-x}}{2})^2$

Υποδοχές 7, 9: $\left(x + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2 = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})^2$

Υποδοχές 3, 5, 6, 8: $\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^4 = e^{4x}$

Συνεπώς, ζητούμενη γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$A(x) = (e^x - 1)^2 \cdot \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \cdot e^{4x}$$
$$= \frac{1}{16}(e^{2x} - 2 \cdot e^x + 1) \cdot e^{4x} \cdot (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) \cdot (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) =$$
$$\frac{1}{16}(e^{6x} - 2 \cdot e^{5x} + e^{4x}) \cdot (e^{4x} - 2 \cdot e^{2x} + 1 + 2 \cdot e^2 - 4 + 2 \cdot e^{-2x} + 1 - 2 \cdot e^{-2x} + e^{-4x})$$
$$= \frac{1}{16}(e^{6x} - 2 \cdot e^{5x} + e^{4x}) \cdot (e^{4x} + e^{4x} - 2)$$
$$= \frac{1}{16}(e^{10x} + e^{2x} - 2 \cdot e^{6x} - 2 \cdot e^{9x} - 2 \cdot e^x + 4 \cdot e^{5x} + e^{8x} + 1 - 2 \cdot e^{4x})$$

Ο συντελεστής του $\frac{x^n}{n!}$ δίνει το ζητούμενο. Αυτός ισούται με:

$$\frac{1}{16}(10^n + 2^n - 2 \cdot 6^n - 2 \cdot 9^n - 2 + 4 \cdot 5^n + 8^n - 2 \cdot 4^n)$$
$$= \frac{1}{16}(10^n - 2 \cdot 9^n + 8^n - 2 \cdot 6^n + 4 \cdot 5^n - 2 \cdot 4^n + 2^n - 2)$$

Θέμα 6:

Έστω ότι η ακολουθία α_n εκφράζει το πλήθος των συμβολοσειρών μήκους n που ικανοποιούν τους περιορισμούς της εκφώνησης. Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

i. Οι συμβολοσειρές δεν τελειώνουν σε a ή b:
Τότε η συμβολοσειρά μήκους n προκύπτει από την προηγούμενή της (μήκους n-1) με 4 τρόπους, άρα έχουμε: $4 \cdot \alpha_{n-1}$ συμβολοσειρές.

ii. Οι συμβολοσειρές τελειώνουν σε a ή b:
Τότε η συμβολοσειρά μήκους n-1 προκύπτει από τον συνδυασμό 4 χαρακτήρων (a, b, e, f), άρα έχουμε: $2 \cdot 4^{n-1}$ συμβολοσειρές.

Επειδή τα παραπάνω δύο γεγονότα είναι αμοιβαία αποκλειόμενα, συνολικά προκύπτει:

$$\alpha_n = 4 \cdot \alpha_{n-1} + 2 \cdot 4^{n-1} \quad (1)$$

Για τις αρχικές συνθήκες παρατηρούμε ότι $\alpha_1 = 6$ και δεχόμαστε ότι $\alpha_0 = 1$, αφού η κενή συμβολοσειρά είναι μοναδική και ικανοποιεί τους περιορισμούς. Για κάθε $n \geq 1$, πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (1) με x^n και αθροίζουμε τις αντίστοιχες ισότητες. Έτσι, έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot x^n = 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n-1} \cdot x^n + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} \cdot x^n$$

Επομένως, καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση για τη γεννήτρια συνάρτηση A(x):

$$A(x) - \alpha_0 = 4 \cdot x \cdot A(x) + 2 \cdot \frac{x}{1-4\cdot x} \rightarrow A(x) = \frac{1}{1-4\cdot x} + \frac{2x}{(1-4\cdot x)^2}$$

Μετά την ανάλυση σε απλά κλάσματα προκύπτει:

$$A(x) = \frac{1}{1-4\cdot x} - \frac{1}{2\cdot(1-4\cdot x)} + \frac{1}{2\cdot(1-4\cdot x)^2} = \frac{1}{2\cdot(1-4\cdot x)} + \frac{1}{2\cdot(1-4\cdot x)^2}$$

Οπότε, επιστρέφοντας στον χώρο των ακολουθιών, έχουμε:

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \cdot \left(4^n + (n+1) \cdot \frac{4^{n+1}}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot (n+2) \cdot 4^n$$