

Συμπληρωματική λύση για την άσκηση 2.β:

Η συμπλήρωση αφορά το υποερώτημα με τις  $kr$  κορυφές, έστω  $G_1$ . Για την απόδειξη, ουσιαστικά θα κατασκευάσουμε ένα  $r$ -μερές γράφημα, τότε θα έχουμε  $r$  ανεξάρτητα σύνολα των  $k$  κορυφών. Θα βάλουμε τον μέγιστο επιτρεπτό αριθμό ακμών ώστε το γράφημα να παραμείνει  $r$ -μερές. Άρα κάθε κορυφή συνδέεται με:  $kr-k=k(r-1)$  κορυφές, οπότε σύνολο έχουμε το πλήθος ακμών που προβλέπονται από την εκφώνηση. Τώρα με εις άτοπο απαγωγή θα δείξουμε ότι το  $G_1$  δεν περιέχει το  $K_{r+1}$  ως υπογράφημα. Έστω ότι το περιέχει. Τότε θα υπάρχουν  $r+1$  τουλάχιστον κορυφές που συνδέονται όλες μεταξύ τους. Όμως το  $G_1$  είναι  $r$ -μερές, επομένως από την αρχή του περιστερώνα δύο από αυτές τις κορυφές θα ανήκουν στο ίδιο ανεξάρτητο σύνολο. Άτοπο, οπότε αποδείχτηκε το ζητούμενο.