



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Αναφορά Εργασίας MATLAB στο μάθημα: Σήματα και Συστήματα

Στοιχεία Φοιτητή: Ονοματεπώνυμο: Αναστάσιος Παπαζαφειρόπουλος

Αριθμός Μητρώου: 03118079

Ακαδημαϊκό έτος: 2019-2020

1. Σχεδίαση Φίλτρων

1.1 Σχεδίαση Βαθυπερατών Φίλτρων (Κινούμενου Μέσου)

α)

Όπως αναγράφεται στην εκφώνηση της άσκησης, ένα αιτιατό φίλτρο διακριτού χρόνου ορίζεται μέσω της εξίσωσης διαφορών: $y[n] + \sum_{i=1}^M a_i y[n-i] = \sum_{i=1}^N b_i x[n-i]$ (1),

ενώ, για την αποθρομβοποίηση και την ομαλοποίηση σημάτων, χρησιμοποιούνται φίλτρα κινούμενου μέσου που ορίζονται μέσω της αιτιατής εξίσωσης διαφορών:

$$y[n] = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N x[n-i] \quad (2)$$

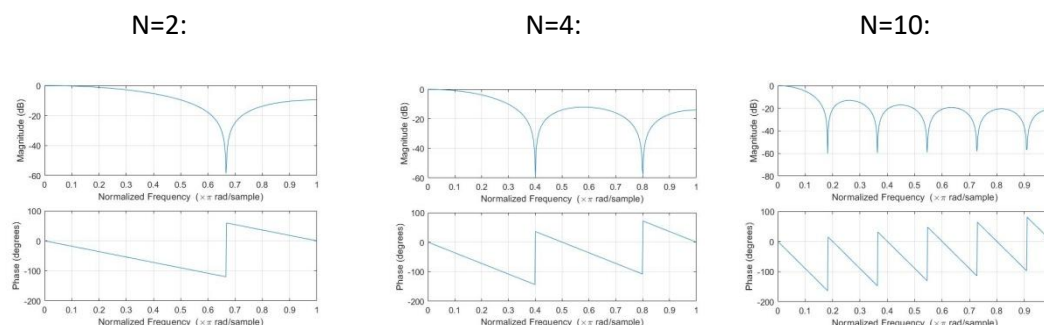
Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (2) είναι ειδική περίπτωση της (1) εάν σε αυτή θέσουμε:

$$a_i = 0, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, N \text{ με } a_0 = 1 \text{ και } b_i = \frac{1}{N+1}, \text{ για κάθε } i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Να σημειωθεί εδώ ότι επειδή η συνάρτηση `tf2zp()` που θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω δε δεχόταν ως ορίσματα τα διανύσματα `a`, `b` στην περίπτωση που το διάνυσμα `a` είχε μικρότερο πλήθος στοιχείων από το `b`. Γι' αυτό το λόγο, σε κάθε περίπτωση επιλέχθηκε το διάνυσμα `a` να έχει μέγεθος ίσο με το αντίστοιχο μέγεθος του `b` (συμπληρώνοντας με μηδενικά που δεν επηρεάζουν τα αποτελέσματά μας).

β)

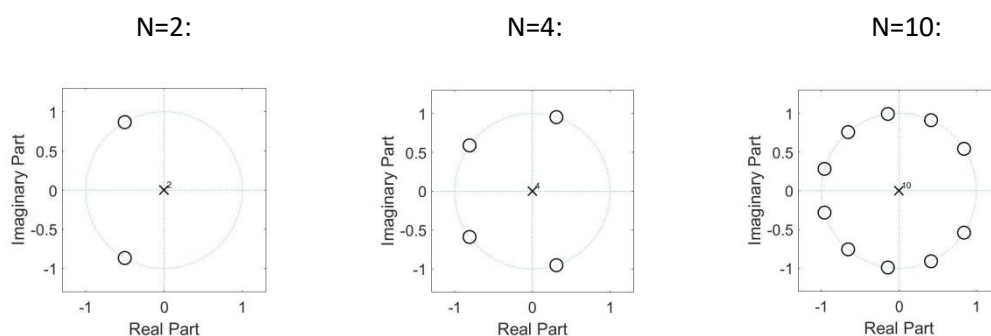
Σχεδιάστηκε η απόκριση πλάτους και φάσης των φίλτρων αυτών, με χρήση της εντολής `freqz()`, η οποία δέχεται ως ορίσματα τα διανύσματα `b`, `a` που ορίζουν την εξίσωση διαφορών του φίλτρου σε κάθε περίπτωση. Προέκυψαν οι ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:



Παρατηρείται σε κάθε διάγραμμα ότι η καμπύλη της απόκρισης πλάτους είναι περιοδική, με φθίνουσα περίοδο και φθίνον πλάτος ενώ έχει (ολικό) μέγιστο το 0dB και (ολικό) ελάχιστο το -60dB. Επίσης, η καμπύλη της απόκρισης φάσης είναι περιοδική, αλλά με σταθερή περίοδο. Όσο αυξάνεται το N , περισσότερες περιόδους απεικονίζονται στις γραφικές παραστάσεις. Τέλος, παρατηρείται ότι στα σημεία που συμβαίνει <<πτώση>> πλάτους, συμβαίνει και απότομη αύξηση στη τιμή της φάσης.

γ)

Σχεδιάστηκαν τα διαγράμματα πόλων και μηδενικών των φίλτρων, με χρήση της συνάρτησης `zpd.m` (που δίνεται από την εκφώνηση). Για να μεταφερθούν τα φίλτρα σε μορφή πόλων μηδενικών, χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση `tf2zp()`. Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα πόλων μηδενικών και το αντίστοιχο N .



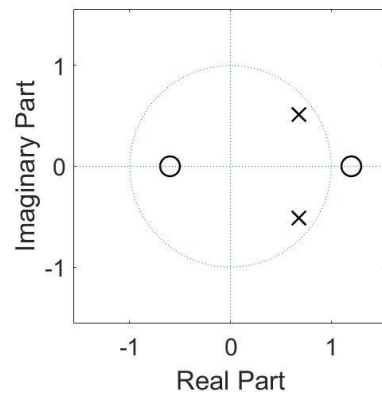
Παρατηρείται ότι στα διαγράμματα πόλων μηδενικών απεικονίζονται τόσοι πόλοι και τόσα μηδενικά όσο είναι το N . Οι πόλοι βρίσκονται στην αρχή των αξόνων φανταστικών και πραγματικών αριθμών (σημείο (0,0)), ενώ τα μηδενικά βρίσκονται στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου και υπάρχει ανά δύο συμμετρία ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών. Αυτό σημαίνει πως τα μηδενικά είναι ζευγάρια συζυγών μιγαδικών αριθμών με μέτρο ίσο με 1.

1.2 Σχεδίαση Ζωνοπερατών Φίλτρων

α)

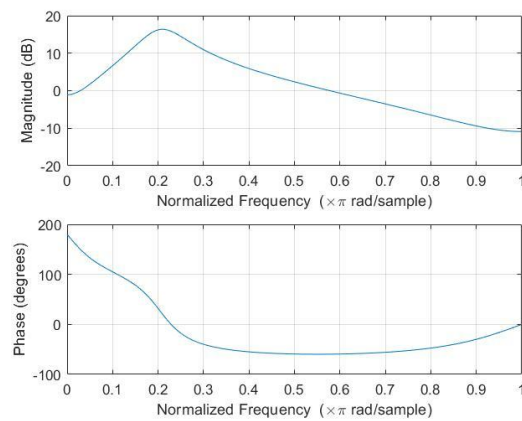
Ακολουθήθηκε η εκφώνηση της άσκησης. Να σημειωθεί ότι κάθε φορά στον κώδικα η κλήση της συνάρτησης `zp2tf` γινόταν με τρίτο όρισμα $k=1$, διαφορετικά η χρήση της ήταν αδύνατη στο προγραμματιστικό περιβάλλον του MATLAB. Για το φίλτρο με πόλους στις θέσεις $\{0.68 \pm 0.51i\}$ και μηδενικά στις θέσεις $\{1.2, -0.6\}$ κατασκευάστηκαν το ακόλουθα διαγράμματα:

Πόλων – Μηδενικών:



β)

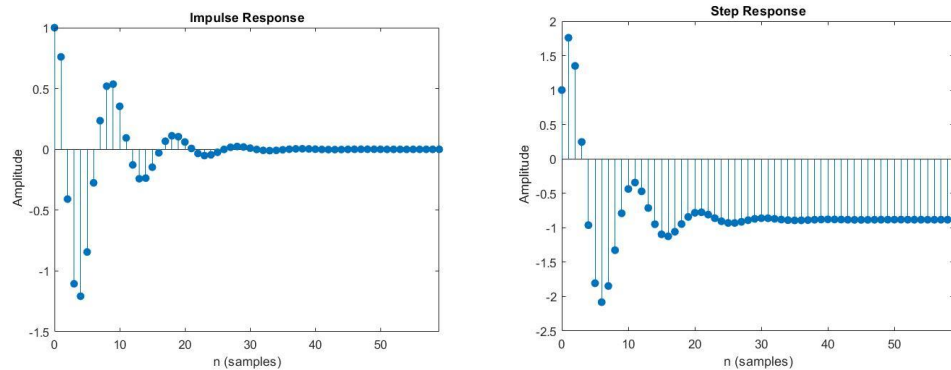
Απόκρισης πλάτους – φάσης:



Ουσιαστικά δημιουργήθηκε ζωνοπερατό φίλτρο με κέντρο της ζώνης διέλευσης τη συχνότητα: 0.2π .

γ)

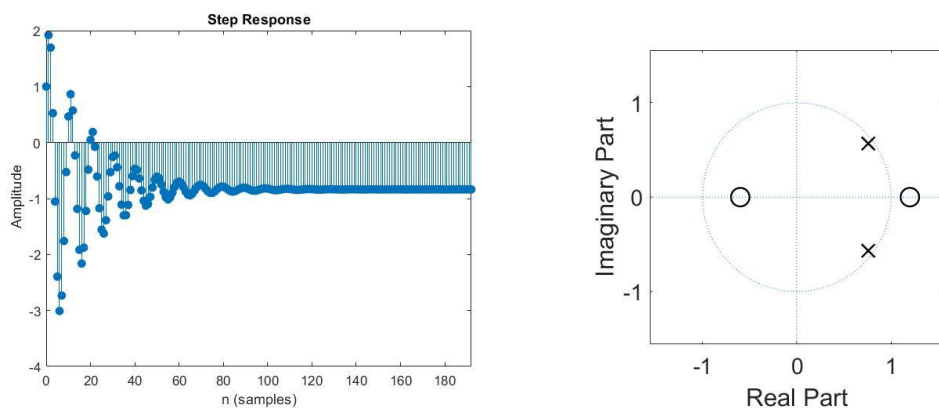
Σχεδιάστηκαν η κρουστική και η βηματική απόκριση του συστήματος και παρατίθενται κάτωθεν:



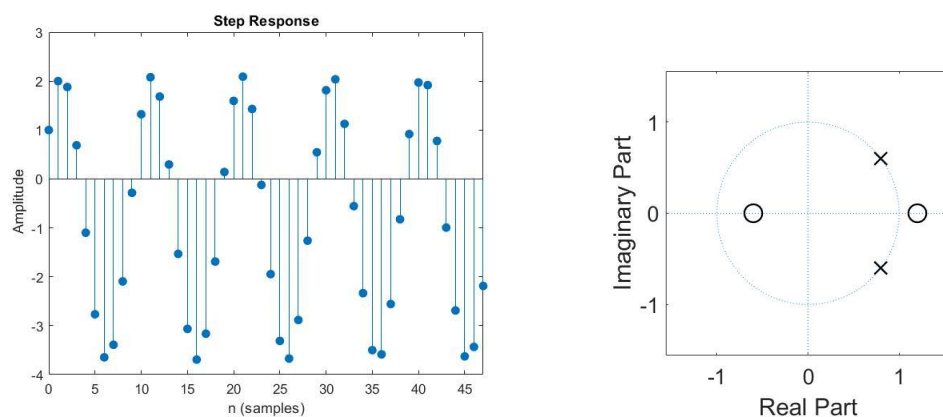
δ)

Μετά τη μετακίνηση των πόλων του συστήματος στις θέσεις $\{0.76 \pm 0.57i\}$, $\{0.8 \pm 0.6i\}$, $\{0.84 \pm 0.63i\}$ και διατηρώντας τα μηδενικά στις θέσεις $\{1.2, -0.6\}$, προέκυψαν οι ακόλουθες γραφικές παραστάσεις (αριστερά παρατίθεται το διάγραμμα βηματικής απόκρισης του συστήματος και δίπλα του το αντίστοιχο διάγραμμα πόλων μηδενικών για κάθε περίπτωση):

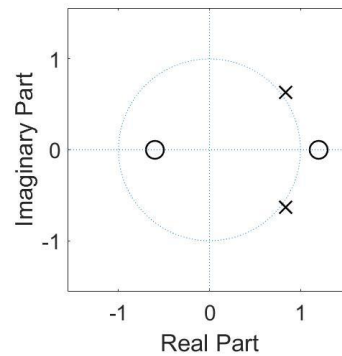
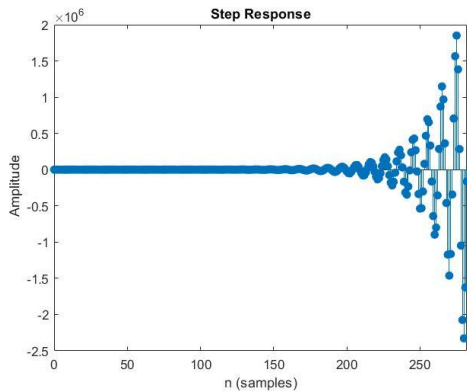
Πόλοι: $0.76 \pm 0.57i$



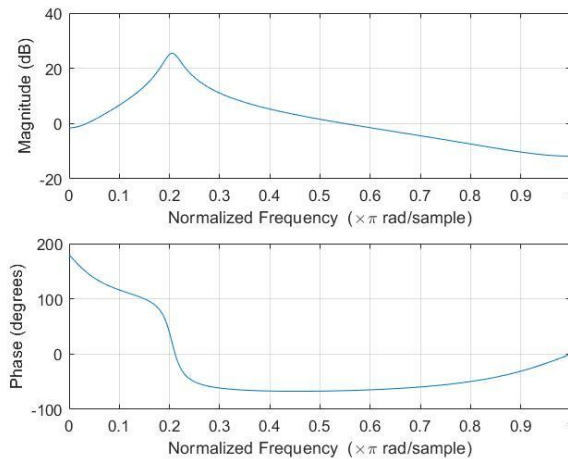
Πόλοι: $0.8 \pm 0.6i$



Πόλοι: $0.84 \pm 0.63i$



Και η απόκριση πλάτους του συστήματος όταν οι πόλοι είναι στις θέσεις: $0.76 \pm 0.57i$



Οι παρατηρήσεις σχετίζονται με την ευστάθεια του κάθε συστήματος. Το κριτήριο που αποφαινεται για την ευστάθεια ενός συστήματος βάσει του αντίστοιχου διαγράμματος πόλων μηδενικών συνδέεται άμεσα με την σχετική θέση πόλων και μοναδιαίου κύκλου. Πιο συγκεκριμένα:

Για να είναι το σύστημα ευσταθές θα πρέπει η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $H(z)$ να περιέχει τον μοναδιαίο κύκλο. Πόλοι είναι τα σημεία μηδενισμού του παρονομαστή της $H(z)$. Οπότε, θεωρώντας περιοχή σύγκλισης την περιοχή εκτός του κύκλου που ορίζεται από τους εκάστοτε πόλους με ακτίνα κάθε φορά ίση με το μέτρο των πόλων, προκύπτει:

1^η περίπτωση: Πόλοι εντός μοναδιαίου κύκλου \rightarrow Σύστημα ευσταθές

2^η περίπτωση: Πόλοι εκτός μοναδιαίου κύκλου \rightarrow Σύστημα ασταθές

3^η περίπτωση: Πόλοι πάνω στον μοναδιαίο κύκλο \rightarrow Σύστημα οριακά ευσταθές αν οι πόλοι είναι πολλαπλότητας 1, διαφορετικά ασταθές.

Υπάρχει πλήρης αντιστοιχία με τις περιπτώσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω. Δηλαδή:

1^η περίπτωση – πόλοι : $0.76 \pm 0.57i$. Εδώ το πλάτος της βηματικής απόκρισης τείνει σε μια σταθερά c με την πάροδο του χρόνου (εκθετική μείωση), άρα η κρουστική απόκριση τείνει στο 0 και το σύστημα αυτό είναι ευσταθές. Επιβεβαιώνεται από το ότι οι πόλοι βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

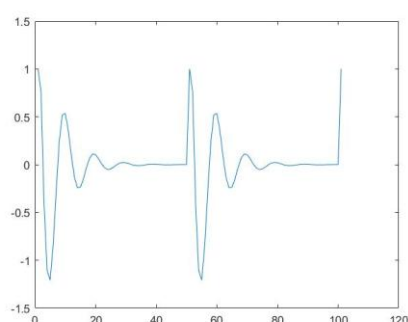
2^η περίπτωση – πόλοι: $0.8 \pm 0.6i$. Εδώ το πλάτος της βηματικής απόκρισης (σε αυτή την περίπτωση και της κρουστικής) είναι σταθερό με την πάροδο του χρόνου ανά περίοδο. Άρα το σύστημα είναι ασταθές. Επιβεβαιώνεται από το ότι οι πόλοι βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο με βαθμό πολλαπλότητας 2.

3^η περίπτωση – πόλοι: Εδώ το πλάτος της βηματικής απόκρισης αυξάνεται εκθετικά. Άρα το σύστημα είναι ασταθές. Επιβεβαιώνεται από το ότι οι πόλοι βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

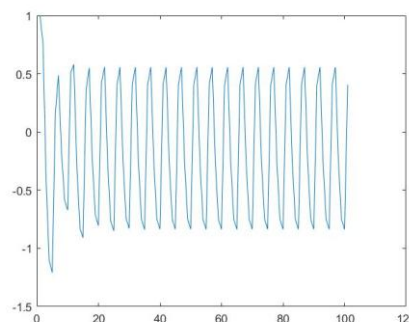
ε)

Παρουσιάζονται οι προκύπτουσες γραφικές παραστάσεις της εξόδου διεγείροντας το σύστημα, με πόλους στις θέσεις $\{0.68 \pm 0.51i\}$ και μηδενικά στις θέσεις $\{1.2, -0.6\}$, με κρουστική παλμοσειρά όπου $T=50s$ (αριστερά) και $T=5s$ (δεξιά):

Διάγραμμα 1



Διάγραμμα 2

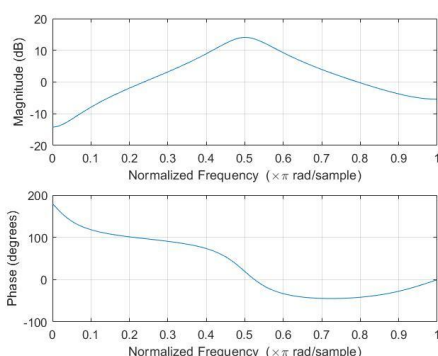


Παρατηρείται ότι υπάρχει άμεση σχέση με την περίοδο που χρησιμοποιήθηκε. Δηλαδή η περίοδος του σήματος στο διάγραμμα 2 είναι δεκαπλάσια από την περίοδο του σήματος στο διάγραμμα 1, σχέση που τηρούν και οι δύο αντίστοιχες περίοδοι που δόθηκαν ως ορίσματα στη συνάρτηση gensig().

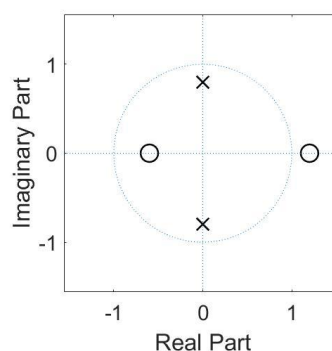
στ)

Μετά την επανάληψη των ερωτημάτων (α), (β) για συζυγείς πόλους στις θέσεις $\pm 0.8i$, και διατηρώντας τα μηδενικά ως έχουν προέκυψαν τα ακόλουθα διαγράμματα:

Απόκριση πλάτους – φάσης:



Πόλων – Μηδενικών:



Σχετικά με τη ζώνη διέλευσης του φίλτρου παρατηρείται η σχέση που τη συνδέει με τη φάση των πόλων. Η φάση των πόλων στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι: $\frac{\pi}{2}$. Ενώ, η κύρια συχνότητα της ζώνης διέλευσης του φίλτρου βρίσκεται επίσης προσεγγιστικά στο: 0.5π . Επομένως, πρωτεύοντα ρόλο στη ρύθμιση της ζώνης διέλευσης ενός φίλτρου έχουν οι πόλοι και όχι τα μηδενικά.

2 Ανάλυση και Ανασύνθεση Μουσικών Σημάτων

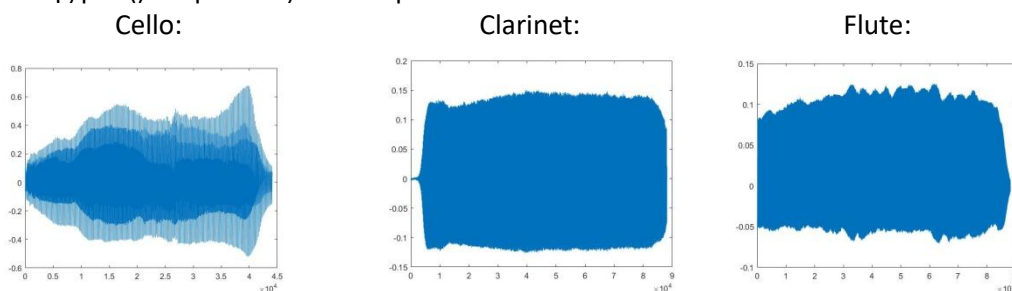
2.1 Ανάλυση Μουσικών Σημάτων

α)

Φορτώθηκαν στο Matlab τα αρχεία flute note.wav, clarinet note.wav, cello note.wav από το συμπληρωματικό υλικό της άσκησης με χρήση της εντολής `audioread()`. Η συχνότητα δειγματοληψίας τους είναι $f_s = 44.1$ kHz. Ακούστηκαν τα σήματα με χρήση της εντολής `sound()`.

β)

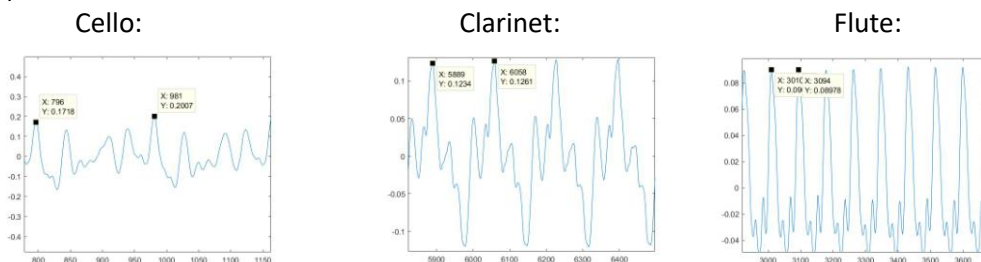
Για το κάθε σήμα, σχεδιάστηκε ένα απόσπασμά του στο πεδίο του χρόνου, με χρήση της εντολής `plot()`. Παρουσιάζονται παρακάτω:



Για να διαπιστωθεί αν τα σήματα αυτά είναι περιοδικά και να υπολογιστεί εποπτικά η περίοδός του ακολουθήθηκε η εξής διαδικασία:

Μεγέθυνση ενός τυχαίου <<αποσπάσματος>> από το κάθε διάγραμμα. Αν το σήμα είναι περιοδικό, διαλέγουμε τα άκρα x_i μιας περιόδου στον άξονα των x , έστω x_1, x_2 . Τότε: $N = x_2 - x_1$, όπου N : ο αριθμός των δειγμάτων. Οπότε, η περίοδος υπολογίζεται από την σχέση: $T = \frac{N}{f_s}$.

Παρουσιάζονται επομένως τα μεγεθυμένα τμήματα και οι αντίστοιχες περίοδοι σε δείγματα (N) και σε ms.



$$N = x_2 - x_1 = 981 - 796 = 185$$

$$T = \frac{N}{f_s} = 4,195 \text{ ms}$$

$$N = x_2 - x_1 = 6058 - 5889 = 169$$

$$T = \frac{N}{f_s} = 3,83 \text{ ms}$$

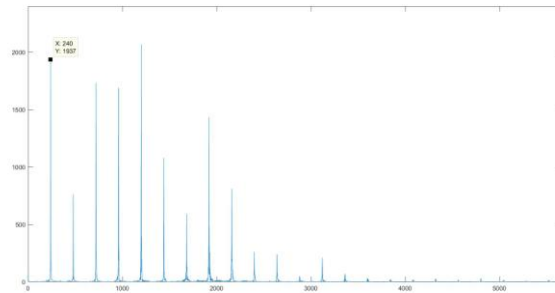
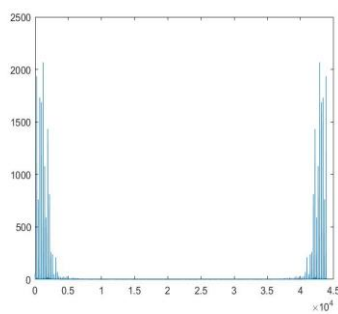
$$N = x_2 - x_1 = 3094 - 3010 = 84$$

$$T = \frac{N}{f_s} = 1,9 \text{ ms}$$

γ)

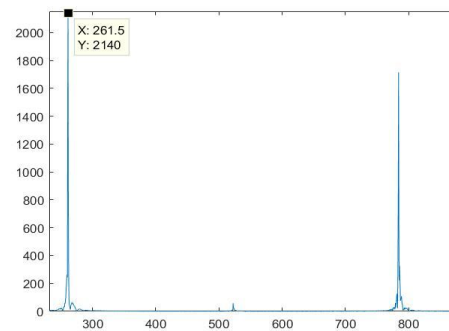
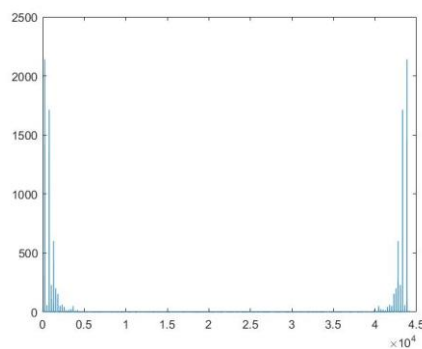
Σχεδιάστηκε το φάσμα κάθε σήματος με χρήση της εντολής `fft()`. Να σημειωθεί βέβαια εδώ πως για να τον άξονα της συχνότητας χρησιμοποιήθηκε η κατάλληλη συνάρτηση `linspace` για να δημιουργηθεί διάνυσμα που αντιπροσωπεύει τον άξονα της συχνότητας (από 0 έως f_s). Όπως είναι γνωστό η συχνότητα στην οποία αντιστοιχεί η πρώτη αρμονική κάθε σήματος αντιπροσωπεύει τη συχνότητά του. Παρακάτω παρατίθενται τα φάσματα κάθε σήματος και οι αντίστοιχες συχνότητές τους:

Cello:



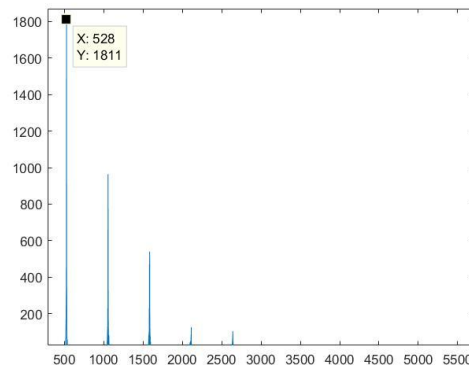
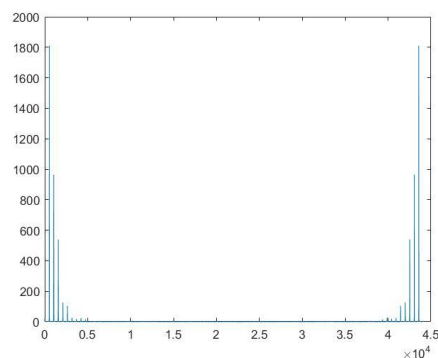
Ισχύει: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4,195\text{ms}} \cong 240\text{Hz}$

Clarinet:



Ισχύει: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3,83\text{ms}} \cong 261,5\text{Hz}$

Flute:

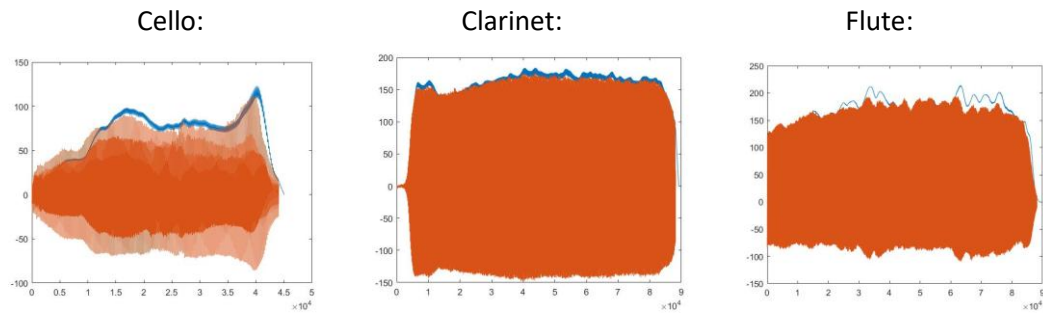


Ισχύει: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,9\text{ms}} \cong 528\text{Hz}$

Επομένως, προσεγγιστικά επιβεβαιώνεται η σχέση μεταξύ θεμελιώδους συχνότητας και περιόδου. Επίσης, το cello έχει περισσότερες αρμονικές από τα υπόλοιπα και γι' αυτό δικαιολογείται και ο πιο <<πυκνός>> ήχος.

δ)

Ακολουθώντας την υπόδειξη η ενέργεια του κάθε σήματος στο MATLAB υπολογίστηκε μέσω της εντολής `convn()`. Οπότε, σχεδιάζοντας την ενέργεια του σήματος στο ίδιο διάγραμμα με το κλιμακωμένο σήμα, προέκυψαν οι ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:



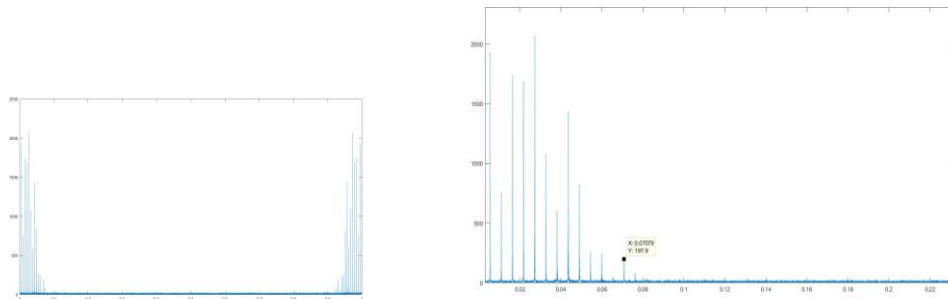
Η καμπύλη χρώματος μπλε εκφράζει την ενέργεια ενώ η καμπύλη χρώματος πορτοκαλί το σήμα. Από τον τρόπο που υπολογίστηκε η ενέργεια (μέσω της συνέλιξης) είναι επόμενο να έχει εμφανώς μεγαλύτερο πλάτος από το σήμα. Επίσης, κλιμακώνοντας το σήμα με τους κατάλληλους αριθμούς-πολλαπλασιαστές κάθε φορά(165, 1170, 1550) η ενέργεια μοιάζει να εκφράζει την περιβάλλουσα του σήματος. Οι αριθμοί-πολλαπλασιαστές προέκυψαν προσεγγιστικά με δοκιμές.

ε)

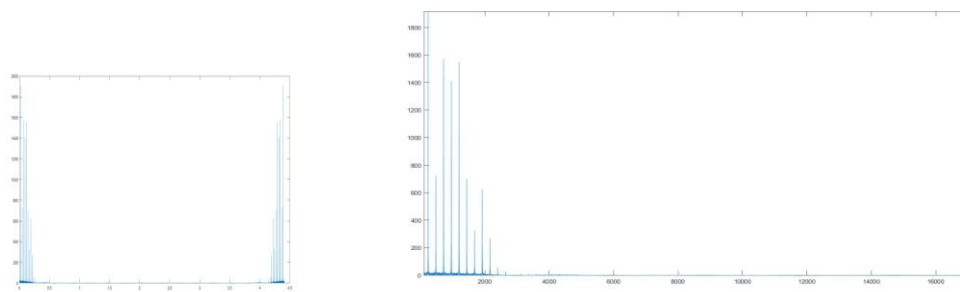
Το άκουσμα του cello_noisy <<θολώνει>> από ένα είδος θορύβου που μοιάζει με φύσημα σε σχέση με το cello.

στ)

Ουσιαστικά το κατάλληλο βαθυπερατό φίλτρο που ζητείται από την εκφώνηση εξαρτάται από την τιμή του N. Το κατάλληλο N εξαρτάται από τις αρμονικές του σήματος cello_noisy. Δηλαδή, ακολουθώντας την υπόδειξη δεν πρέπει να <<κοπεί>> κάποια σημαντική αρμονική. Παρακάτω παρατίθεται το φάσμα του cello_noisy:



Η τελευταία σημαντική αρμονική του σήματος είναι η 13^η. Οπότε, επιλέγεται N=14. Παρακάτω παρατίθεται το φάσμα του φιλτραρισμένου σήματος:

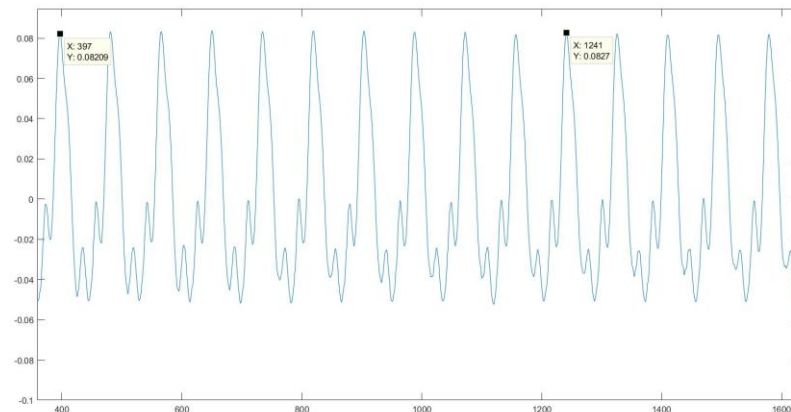


Μετά και το άκουσμα του φιλτραρισμένου σήματος γίνεται αντιληπτό πως το νέο σήμα μοιάζει με το αρχικό cello. Από το διάγραμμα φάσματος του φιλτραρισμένου σήματος γίνεται σαφές πως έχει περάσει και η 13^η αρμονική και έχει κοπεί μόνο ο θόρυβος.

2.2 Σύνθεση Μουσικών Σημάτων ως Άθροισμα Ημιτονοειδών

Αρχικά είχε γίνει προσπάθεια ανακατασκευής του ακουστικού σήματος του clarinet, αλλά επειδή δε στέφθηκε με επιτυχία πιο κάτω παρουσιάζεται η προσπάθεια ανακατασκευής του ακουστικού σήματος του flute.

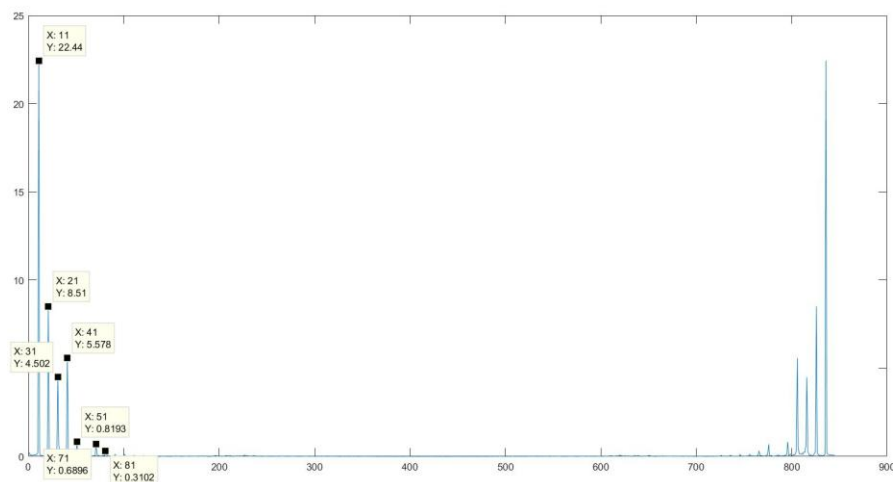
α) Έγινε απομόνωση μεταξύ των σημείων που φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα του flute:



Το τμήμα αυτό έχει μήκος ίσο με 10 φορές επί τη θεμελιώδη περίοδο.

β)

Το διάγραμμα πλάτους για το συγκεκριμένο τμήμα που επιλέχθηκε παρουσιάζεται κάτωθεν:



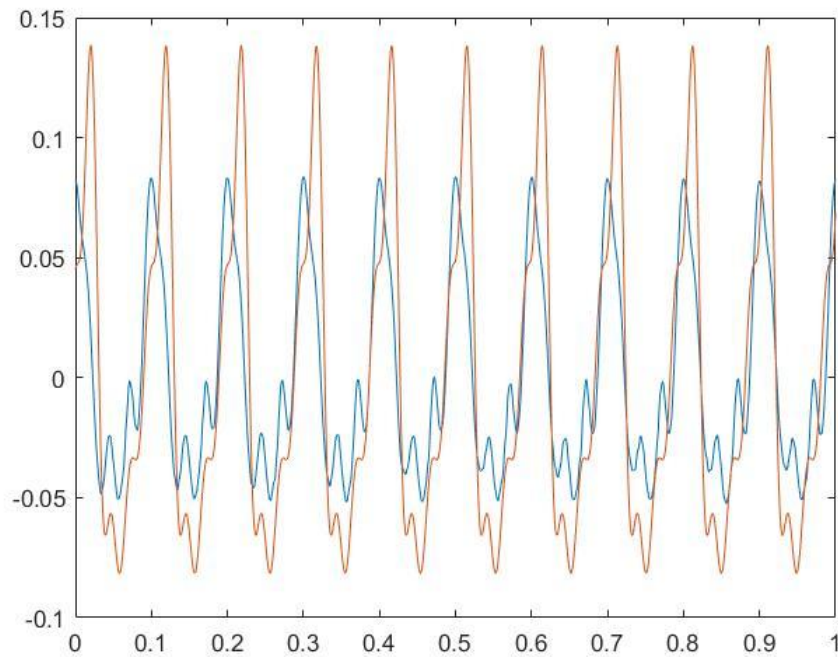
Είναι σημειωμένες και οι θέσεις της κάθε αρμονικής. Από το διάγραμμα πλάτους συχνοτήτων ξεχωρίζουν οι 5 πρώτες αρμονικές, των οποίων οι κορυφές αντιστοιχούν στο πλάτος τους. Οπότε και προκύπτει το διάνυσμα $c_n = \{1, 0,3793, 0,2007, 0,2486, 0,0365\}$ του οποίου ο υπολογισμός γίνεται ακριβέστερα στον κώδικα μέσω του τύπου c_n .

γ)

Είναι φανερό ότι κάθε αρμονική απέχει 10 δείγματα από την προηγούμενη και την επόμενη της στο διάγραμμα πλατών του μετασχηματισμού. Επομένως, με κατάλληλη εντολή 'for' μπορεί να αυτοματοποιηθεί η δημιουργία των διανυσμάτων c_n και ϕ_n για όσες αρμονικές οριστούν μέσω μιας μεταβλητής, σύμφωνα με τον κώδικα.

ε)

Το αποτέλεσμα της αντιπαράβολής παρατίθεται παρακάτω:



Προφανώς το αποτέλεσμα της ανακατασκευής δεν είναι τόσο κοντά με το αρχικό. Αρχικά, παρατηρείται μια ανεξήγητη διαφορά πλάτους. Γεγονός που ακούγεται και με τη χρήση της εντολής `sound()`. Ωστόσο, έχει διατηρηθεί η μορφή του σήματος και οι ατέλειες ίσως οφείλονται σε πιθανά προγραμματιστικά λάθη στον κώδικα.

στ)

Αποθηκεύτηκε το ανακατασκευασμένο σήμα σε ένα αρχείο τύπου `.wav`, με χρήση της ρουτίνας `audiowrite()`.