Αναστάσιος Παπαζαφειρόπουλος 03118079

1η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1:

1) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$, ισχύει: $\|\Pi_S(y) - x\| \leq \|y - x\|$ (1), όπου:

$\Pi_S(y) = \arg\min_{x \in S} \|y - x\|$: η Ευκλείδια προβολή του y στο S. Θεωρώντας ότι: $g_t = \nabla f_t(x_t)$, από την (1) σε συνδυασμό με την κυρτότητα της f προκύπτει:

$$\|x_{t+1} - x\|^2 - \|x_t - x\|^2 \leq \|x_t - \eta_t g_t - x\|^2 - \|x_t - x\|^2 =$$

$$= -2\eta_t \langle g_t, x_t - x\rangle + \eta_t^2 \|g_t\|^2 \leq -2\eta_t (f_t(x_t) - f_t(x)) + \eta_t^2 \|g_t\|^2 \quad (2)$$

* $\langle a, b\rangle$: συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο του a με το b.

Επειδή f κυρτή για κάθε $x \in S$, έχουμε: $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle$, $y \in \mathbb{R}^d$

Άρα, $(2) \Rightarrow f_t(x_t) - f_t(x) \leq \frac{1}{2\eta_t}\|x_t - x\|^2 - \frac{1}{2\cdot\eta_t}\|x_{t+1} - x\|^2 + \frac{\eta_t \|g_t\|^2}{2}$ (3).

$$(3) \Rightarrow \sum_{t=1}^{T} (f_t(x_t) - f_t(x)) \leq \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{2\eta_t}\|x_t - x\|^2 - \frac{1}{2\cdot\eta_t}\|x_{t+1} - x\|^2\right) + \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\eta_t \|g_t\|^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\eta_1}\|x_1 - x\|^2 - \frac{1}{2\eta_T}\|x_{T+1} - x\|^2 + \sum_{t=1}^{T-1}\left(\frac{1}{2\eta_{t+1}} - \frac{1}{2\eta_t}\right)\cdot\|x_{t+1} - x\|^2 + \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\eta_t \|g_t\|^2}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2\cdot\eta_1}B^2 + B^2 \sum_{t=1}^{T-1}\left(\frac{1}{2\cdot\eta_{t+1}} - \frac{1}{2\cdot\eta_t}\right) + \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\eta_t \cdot \|g_t\|^2}{2}\right) = \frac{B^2}{2\eta_1} + B^2\left(\frac{1}{2\eta_T} - \frac{1}{2\eta_1}\right) + \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\eta_T \|g_T\|^2}{2}\right)$$

$$= \frac{B^2}{2\eta_T} + \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\eta_T \|g_T\|^2}{2}\right) \leq \frac{B^2}{2\eta_T} + G^2 \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\eta_t}{2}\right)$$

Οπότε, για $\eta_t = \eta = \frac{B}{G\sqrt{T}}$, προκύπτει:

$$\sum_{t=1}^{T}\left(f_t(x_t) - f_t(x)\right) \leq \frac{BG\sqrt{T}}{2} + \frac{BG\sqrt{T}}{2} = BG\sqrt{T}.$$

2) Είναι: $\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{t}} \leq 1 + \int_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = 2\sqrt{T} - 1 \quad (4)$

Επιλέγουμε $\eta_t = \frac{B}{G\sqrt{t}}$, οπότε προκύπτει:

$$\sum_{t=1}^{T}\left(f_t(x_t) - f_t(x)\right) \leq \frac{B}{2\cdot\eta_T} + G^2 \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\eta_t}{2}\right) =$$

$$= \frac{BG}{2}\sqrt{T} + \frac{GB}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{BG\sqrt{T}}{2} + \frac{GB}{2}\left(2\sqrt{T}-1\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{t=1}^{T}\left(f_t(x_t) - f_t(x)\right) \leq \frac{BG\sqrt{T}}{2} + \frac{GB}{2}\left(2\sqrt{T}-1\right) = O(GB\sqrt{T})$$

3) Αν η f είναι a-ισχυρά κυρτή στο κυρτό σύνολο S, τότε για τη συνάρτηση αυτή ισχύει: $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \frac{a}{2}\|x-y\|^2$.

οπότε: $f_t(x) \geq f_t(x_t) + \langle g_t, x - x_t \rangle + \frac{a}{2}\|x_t - x\|^2 \Rightarrow$

$$f_t(x_t) - f_t(x) \leq \langle g_t, x_t - x \rangle - \frac{a}{2}\|x_t - x\|^2$$

Επιλέγοντας $\eta_t = \frac{1}{at}$ είναι: $\left\{\frac{1}{2\eta_1} - \frac{a}{2} = 0 \text{ και } \frac{1}{2\eta_t} - \frac{a}{2} = \frac{1}{2\eta_{t-1}},\ t=2,\dots,T\right\}$

Άρα, από (3) προκύπτει:

$$f_t(x_t) - f_t(x) \leq \frac{1}{2\eta_t}\|x_t - x\|^2 - \frac{1}{2\eta_t}\|x_{t+1} - x\|^2 + \frac{\eta_t\|g_t\|^2}{2} - \frac{a}{2}\|x_t - x\|^2$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{T}\left(f_t(x_t) - f_t(x)\right) \leq \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{2\eta_t}\|x_t - x\|^2 - \frac{1}{2\eta_t}\|x_{t+1} - x\|^2 - \frac{a}{2}\|x_t - x\|^2\right) + \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\eta_t\|g_t\|^2}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\eta_1}\|x_2 - x\|^2 + \sum_{t=2}^{T}\left(\frac{1}{2\eta_{t-1}}\|x_t - x\|^2 - \frac{1}{2\cdot\eta_t}\|x_{t+1} - x\|^2\right) + \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\eta_t\|g_t\|^2}{2}\right) =$$

$$= \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\eta_t\|g_t\|^2}{2}\right) = \frac{G^2}{2a}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{t}\right) \le \frac{G^2}{2a}\left(1 + \ln T\right) = O\left(\frac{G^2 \ln T}{a}\right).$$

Άσκηση 2:

Στα πινακάκια που ακολουθούν έχουμε:

- πρώτη στήλη: μεταβλητές που είναι στη βάση
- τελευταία γραμμή: αντικειμενική συνάρτηση
- τελευταία στήλη: pivot ratio

a. 1)

μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{2}$	-5	18	2	0	0	0	$-$
x_6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	2	-8	-1	1	0	0	0
x_7	1	0	5	-18	-2	0	1	1	$\frac{1}{[illegible]}$
αντ. συν:	-10	57	-41	204	20	0	0	0	0

μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_1	1	-11	-5	18	2	0	0	0	$-$
x_6	0	4	2	-8	-1	1	0	0	0
x_7	0	11	5	-18	-2	0	1	1	$\frac{1}{11}$
αντ. συν.	0	-53	-41	204	20	0	0	0	0

μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	-4	$-\frac{3}{4}$	$11/4$	0	0	0
x_2	0	1	$1/2$	-2	$-1/4$	$1/4$	0	0	0
x_7	0	0	$-\frac{1}{2}$	4	$3/4$	$-11/4$	1	1	$-$
αντ. συν.	0	0	$-\frac{29}{2}$	98	$\frac{27}{4}$	$\frac{53}{4}$	0	0	0

μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_3	2	0	1	-8	-3/2	$\frac{11}{2}$	0	0	–
x_2	-1	1	0	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1	–
αντ. συν.	29	0	0	-18	-15	93	0	0	0

μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_3	-2	4	1	0	1/2	-9/2	0	0	0
x_4	-1/2	$\frac{1}{2}$	0	1	1/4	-5/4	0	0	0
x_7	-1	0	0	0	0	0	1	1	–
αντ. συν.	20	9	0	0	$-\frac{21}{2}$	$\frac{141}{2}$	0	0	0

μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_5	-4	8	2	0	1	-9	0	0	–
x_4	1/2	-3/2	-1/2	1	0	1	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1	–
αντ. συν.	-22	93	21	0	0	-24	0	0	0

μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_5	1/2	-11/2	-5/2	9	1	0	0	0	0
x_6	1/2	-3/2	-1/2	1	0	1	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1	1
αντ. συν.	-10	57	9	24	0	0	0	0	0

Όπως βλέπουμε, ξαναγυρνάμε στην αρχική μορφή (cycling), οπότε και ο αλγόριθμος δε βρίσκει τη βέλτιστη λύση.

α.2) Τα πρώτα 5 πινακάκια θα είναι ίδια, το επόμενο είναι το εξής:

μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_5	-4	8	2	0	1	-9	0	0	–
x_4	$1/2$	$-\frac{3}{2}$	$-1/2$	1	0	1	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1	1
αντ. συν.	-22	93	21	0	0	-24	0	0	0

μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_5	0	-20	-2	8	1	-1	0	0	–
x_1	1	-3	-1	2	0	2	0	0	–
x_7	0	3	1	-2	0	-2	1	1	1
αντ. συν.	0	27	-1	44	0	20	0	0	0

μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
x_5	0	-14	0	4	1	-5	2	2	–
x_1	1	0	0	0	0	0	1	1	–
x_3	0	3	1	-2	0	-2	1	1	–
αντ. συν.	0	30	0	42	0	18	1	1	1

Όπως βλέπουμε, στην τελευταία γραμμή έχουμε μόνο θετικές τιμές, άρα ο αλγόριθμος Simplex τερματίζει και βρίσκει τη λύση $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (1, 0, 1, 0, 2, 0, 0)$ με κόστος -1 που είναι η βέλτιστη.

β) Το ΔΠ είναι:

$$\max \ y_3$$
$$\text{s.t.} \ 0,5y_1 + 0,5y_2 + y_3 \leq -10$$
$$-5,5y_1 - 1,5y_2 \leq 57$$
$$-2,5y_1 - 0,5y_2 \leq 9$$
$$9y_1 + y_2 \leq 24$$
$$y_1 \leq 0$$
$$y_2 \leq 0$$
$$y_3 \leq 0$$

Οι complementary slackness συνθήκες με βάση τη λύση του Π, είναι:

$$0,5y_1 + 0,5y_2 + y_3 = -10$$
$$-2,5y_1 - 0,5y_2 = 9$$
$$y_1 = 0$$

Από το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων προκύπτει:

$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = -18 \\ y_3 = -1 \end{cases}$, δηλαδή η λύση ~~του~~ του ΔΠ είναι: $(y_1, y_2, y_3) = (0, -18, -1)$

Άσκηση 3:

α) Έστω L μια βοηθητική μεταβλητή, τότε το P διατυπώνεται ως εξής:

$$\min_{x \in \Delta^n} L$$
$$\text{s.t.} \ (Ax)_j \leq L, \ \forall j \in [1, \dots, m]$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

β) Το D διατυπώνεται ως εξής:

$$\max_{y \in \Delta^m} L$$
$$(A^T y)_i \geq Z, \ \forall i \in [1, n]$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

γ) Το πρόβλημα γράφεται ως εξής:

$$\min L$$
$$L - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 0, \ i \in [1, m]$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

Οπότε το δυϊκό του είναι:

$$\max y_n$$
$$y_n - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq 0, \ j \in [0, n]$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_i \leq 1$$

που ισοδυναμεί με το:

$$\max y_n$$
$$y_n - (A^{(T)} y)_j \leq 0, \ j \in [1, n]$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_i \leq 1$$
$$y_i \geq 0, \ i \in [0, m].$$

η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του οποίου συμπίπτει με του D.

δ) Έστω $e_j = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\max_{j \in [m]} (Ax)_j = \max_j e_j^{(T)} (Ax) \leq \max_{y \in \Delta^{m}} (y^{(T)} Ax)$$
$$y^{(T)}(Ax) = \sum_{i=1}^{m} y_i (Ax)_i \leq \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot \max_{j \in [m]} (Ax)_j = \max_{j \in [m]} (Ax)_j,$$

άρα: $\min_{x \in \Delta^n} \max_{j \in [n]} (Ax)_j = \min_{x \in \Delta^m} \max_{y \in \Delta^n} (y^{(T)} Ax)$, και αντίστοιχα:

$$\min_{i \in [n]} (A^T y)_i = \min_i e_i^{(T)} (A^T y) \geq \min_{x \in \Delta^m} (x^T A^T y)$$
$$x^T (A^T y) = \sum_{i=1}^{n} x_i (A^T y)_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i \min_{i \in [n]} (A^T y)_i = \min_{i \in [n]} (A^T y), \text{ και άρα:}$$
$$\max_{y \in \Delta^n} \min_{i \in [n]} (A^T y)_i = \max_{y \in \Delta^m} \min_{x \in \Delta^n} (x^T A^T y), \text{ συνεπώς τελικά:}$$
$$\min_{x \in \Delta^n} \max_{y \in \Delta^m} (y^T Ax) = \max_{y \in \Delta^m} \min_{x \in \Delta^n} (x^T A^T y)$$

Άσκηση 4:

1) Έστω $x_{ij} \in \{0,1\}$ οι μεταβλητές που δείχνουν αν η εργασία i έχει ανατεθεί στην μηχανή j ($x_{ij}=1$) ή όχι ($x_{ij}=0$), N το σύνολο των εργασιών και M των μηχανών, τότε:

$$\min L$$
$$\text{s.t.} \sum_{j \in M} x_{ij} = 1, \ \forall i \in N$$
$$\sum_{i \in N} x_{ij} P_{ij} \le L, \ \forall j \in M$$
$$x_{ij} \in \{0,1\}.$$

Για το Γραμμικό Πρόγραμμα, απλά θα έχαμε $x_{ij} \ge 0$. Η λύση, όμως, του γραμμικού προγράμματος ενδέχεται να διαφέρει σημαντικά από το ακέραιο. Για παράδειγμα, αν έχουμε μόνο 1 εργασία η οποία επιφέρει φορτίο m σε κάθε μία από τις m μηχανές, τότε το ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα θα δρομολογήσει την εργασία αυτή σε κάποια από τις m μηχανές και θα δώσει λύση κόστους m, ενώ το χαλαρωμένο θα «μοιράσει» την εργασία σε m κομμάτια των $\frac{1}{m}$ και θα δώσει λύση κόστους 1, δηλαδή m φορές μικρότερη.

2) Θα είναι: $x_{ij} = 0$, για $P_{ij} > L^*$, οπότε αν $N = \{(i,j) \mid P_{ij} \le L^*\}$, τότε αρκεί να έχει λύση το παρακάτω σύστημα εξισώσεων για τα i,j που ανήκουν στο N:

$$\sum_{j \in M} x_{ij} = 1, \ \forall i \in N$$
$$\sum_{i \in N} x_{ij} P_{ij} \le L^*, \ \forall j \in M$$
$$x_{ij} \ge 0.$$

i) Εάν το σύστημα έχει εφικτή λύση μπορούμε με δυαδική αναζήτηση να προσδιορίσουμε το L^*. Δηλαδή, αν υπάρχει εφικτή λύση θα μικρύνουμε το L^* και θα επαναλάβουμε στα αριστερά του διαστήματος τη διαδικασία. Διαφορετικά, θα αυξήσουμε το L^* και θα επαναλάβουμε τη διαδικασία στα δεξιά του διαστήματος.

ii) Για το παραπάνω σύστημα έχουμε $n \cdot m$ αγνώστους και $n+m$ περιορισμούς. Μια εφικτή λύση θέτει x γραμμικούς περιορισμούς σε ισότητα και από αυτούς θα πρέπει τουλάχιστον οι $x-(n+m)$ να επιλεχθούν από τους περιορισμούς $x_{ij} \geq 0$. Αυτές οι μεταβλητές τίθενται στο 0. Οπότε, λύνοντας με τη λογική του αλγορίθμου Simplex θα έχουμε το πολύ $n+m$ μεταβλητές με θετική τιμή και τετραγωνικό σύστημα προς επίλυση που μπορεί να επιλυθεί με κλασικές μεθόδους γραμμικής άλγεβρας.

Άσκηση 5:

1) Είναι: $\delta = \min\{t(u), t(v)\}$ για κάθε ακάλυπτη ακμή που υπάρχει. Στη συνέχεια, ανανεώνοντας τα $t(u) = t(u) - \delta$ και $t(v) = t(v) - \delta$, τουλάχιστον μία από τις δύο ποσότητες θα μηδενιστεί. Άρα, στο C θα μπει η u, ή η v, ή και οι δύο. Οπότε, σίγουρα κάθε ακμή θα καλύπτεται εφόσον για κάθε ακμή θα υπάρχει στο κάλυμμα τουλάχιστον ένα από τα άκρα της.

2) Παρατηρούμε πως αν μια κορυφή, έστω u, μπει στο κάλυμμα τότε $t(u)=0$. Όμως, αυτό το $t(u)$ ήταν ίσο αρχικά με $w(u)$. Δηλαδή, αν σε κάποια βήματα επιλεγόταν ακμή με ένα άκρο στην u και το άλλο άκρο σε κάποια άλλη κορυφή, έστω v, αλλά και το min ήταν η v, τότε $t(u) \rightarrow t(u) - \delta$ και η ακμή (u,v) θα είχε τιμή δ, οπότε και το άθροισμά τους θα γινόταν $t(u) - \delta + \delta = t(u)$. Αν κάποια στιγμή έχουμε $t(u) = 0$, τότε βάσει του δοθέντος αλγορίθμου αντιλαμβανόμαστε πως το $w(u)$ έχει επιμεριστεί σε προσπίπτουσες στην u ακμές. Οπότε, μπορούμε αθροίζοντας τα $c(e)$ όλων των ακμών που προσπίπτουν στη u να υπολογίσουμε το αρχικό βάρος μιας κορυφής u. Προφανώς, το αρχικό $w(u)$ μπορεί να ανακατασκευαστεί από τα διάφορα δ_i που έχουν επιμεριστεί στις προσπίπτουσες ακμές στην κορυφή u. Οπότε, αν $S(u)$ το σύνολο των προσπίπτουσων στην u ακμών θα έχουμε:

$$\sum_{e \in S(u)} c(e) = w(u) \quad (1).$$

Στη χειρότερη περίπτωση, για κάθε ακμή $e=(u,v)$ θα έχουν μπει και τα δύο άκρα της στο κάλυμα. Άρα, για το βάρος της u θα μετρήσουμε το $c(e)$ και για το βάρος της v θα το ξαναμετρήσουμε σύμφωνα με την (1). Οπότε, αν C είναι το το Vertex Cover από την (1) προκύπτει:

$$2\sum_{e\in E} c(e) = \sum_{u\in C} w(u) \text{ στη χειρότερη περίπτωση,}$$

δηλαδή γενικά: $2\sum_{e\in E} c(e) \geq \sum_{u\in C} w(u)$

3) Έχουμε μια μεταβλητή x_u για κάθε κορυφή που σηματοδοτεί αν την διαλέγουμε στο cover ή όχι. Το Π είναι:

$$\min \sum_u x_u w_u$$
$$\text{s.t. } x_u + x_v \geq 1,\ \forall (u,v)\in E$$
$$x_u \geq 0,\ \forall u\in V.$$

και το ΔΠ:

$$\max \sum_{e\in E} y_e$$
$$\text{s.t. } \sum_{v:(u,v)\in E} y_{uv} \leq w_u,\ \forall u\in V$$
$$y_e \geq 0,\ \forall e\in E$$

Από ασθενή δυϊκότητα, γνωρίζουμε ότι αν x, y είναι εφικτές λύσεις για το (Π) και το (ΔΠ) αντίστοιχα, τότε:
$c^T x \geq b^T y \rightarrow w^T x \geq \sum_{e\in E} y_e$. Η λύση $y_e = c(e)$ του (ΔΠ) ικανοποιεί τους περιορισμούς, προφανώς $c(e)\geq 0$. Επιπλέον, από ερώτημα (2) έχουμε ότι αν μια κορυφή μπει στο κάλυμα, τότε αθροίζοντας τα $c(e)$ των ακμών που προσπίπτουν στην κορυφή αυτή, το άθροισμα αυτό θα είναι μικρότερο από το αρχικό βάρος της κορυφής. Συνεπώς, $\forall u\in V$ και $(u,v)\in E$, ισχύει:

$$\sum_{v:(u,v)\in E} y_{uv} = \sum_{v:(u,v)\in E} c_{uv} \leq w_u,\ \forall u\in V.$$

Επομένως, ικανοποιείται και ο δεύτερος περιορισμός και από ασθενή δυικότητα γνωρίζουμε ότι η κάθε λύση του πρωτεύοντος (Π) (άρα και η βέλτιστη), θα είναι μεγαλύτερη ή ίση από $\sum_{e \in E} y_e = \sum_{e \in E} c(e)$.

Άσκηση 6:

Έστω σύνολο $S = \{a_k, a_{k-1}, \dots, a_1\}$ και ότι χωρίς βλάβη της γενικότητος ο greedy αλγόριθμος καλύπτει τα στοιχεία αυτά με την παραπάνω σειρά. Άρα, όταν ο αλγόριθμος πάει να καλύψει το a_i στοιχείο του S, τότε τουλάχιστον i στοιχεία του S θα είναι ακάλυπτα. Οπότε, αν ο greedy διάλεγε το σύνολο S στην συγκεκριμένη επανάληψη θα πλήρωνε το πολύ $\frac{w(s)}{i}$ κόστος ανά στοιχείο που καλύπτει. Επομένως, το συνολικό κόστος για την κάλυψη όλων των στοιχείων του S θα είναι το πολύ:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{w(s)}{i} = w(s) H_k.$$

Οπότε, δείξαμε πως $\forall$ σύνολο S ισχύει: $\sum_{e \in S} price(e) \leq H_{|S|} \, cost(s)$, και αθροίζοντας πάνω σε όλα τα σύνολα της greedy λύσης της βέλτιστης λύσης, έχουμε: $SOL \leq H_{|S_{max}|} \cdot OPT$, αφού προφανώς ισχύει: $H_{|S_{max}|} \geq H_{|S_i|}$, συνεπώς ο greedy για το Weighted Set Cover είναι $H_{|S_{max}|}$ προσεγγιστικός.

Άσκηση 7:

a) Αλγόριθμος:

Σε κάθε βήμα βρίσκουμε και διαλέγουμε ένα ακάλυπτο στοιχείο και επιλέγουμε όλα τα σύνολα (το πολύ f) στα οποία ανήκει το στοιχείο αυτό. Επαναλαμβάνουμε έως τη στιγμή που δεν έχει μείνει κάποιο στοιχείο ακάλυπτο.

Ο αλγόριθμος για κάθε στοιχείο θα επιλέξει το πολύ f σύνολα. Μέσα σε αυτά θα υπάρχει σύνολο της OPT, γιατί διαφορετικά θα υπήρχε ακάλυπτο στοιχείο στην OPT, όπου OPT η βέλτιστη λύση.
Οπότε, ο αλγόριθμος θα χρειαστεί το πολύ OPT επαναλήψεις για να τερματίσει, άρα:

$$SOL \leq \sum_{i=1}^{OPT} f = f \cdot OPT \Rightarrow \frac{SOL}{OPT} \leq f.$$

Tight Example: Θεωρούμε N στοιχεία $\{1,2,3,\dots,N\}$ και τα υποσύνολα $S = \{1,2,\dots,N\}$ και $f-1$ μονοσύνολα $\{1\}$. Ο παραπάνω αλγόριθμος θα επιστρέψει όλα τα $f-1$ μονοσύνολα και το S, ενώ ισχύει $OPT = 1$ αν επιλεγεί μόνο το S.

β) Μπορούμε να γενικεύσουμε την ιδέα του degree-weighted αλγορίθμου για το weighted vertex cover. Έστω ότι έχουμε αρχικά το σύνολο U N στοιχείων και k υποσύνολά του: $S_1, S_2, \dots, S_k$. Θεωρούμε ακόμη συνάρτηση w που αναθέτει ακέραιους αριθμούς ως βάρη στα σύνολα ώστε να ισχύει: $t(S) = c|S|$ και είναι ανάλογη του πλήθους των στοιχείων του συνόλου. Έστω τώρα V ένα optimal weighted Set Cover. Το V καλύπτει όλα τα στοιχεία του αρχικού συνόλου, οπότε έχουμε $\sum_{S \in V} |S| \geq N \Rightarrow t(V) \geq cN$.
Επιπλέον, αφού καθένα από τα N στοιχεία ανήκει σε το πολύ f υποσύνολα, ισχύει: $\sum_{i=0}^{k} |S_i| \leq f \cdot N \to t \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} |S_i|\right) \leq c \cdot f \cdot N \leq f \cdot w(V) = f \cdot OPT$.

Αλγόριθμος:

Για τα μη κενά σύνολα υπολογίζουμε το $c = \min\{w(S)/|S|\}$ και αποσυνθέτουμε τα βάρη των συνόλων μέσω της w όπως στο vertex cover:

$D = \{ S \mid S = \emptyset \}$, $W = \{ S \mid w(s) = t(s) \}$, $G' = G - (D \cup W)$.

O αλγόριθμος τερματίζει όταν $G' = \emptyset$. Το Set Cover θα είναι η ένωση των W_i. Έστω ότι το C που υπολογίζει ο αλγόριθμος δεν είναι Set Cover. Τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο το οποίο δεν έχει καλυφθεί και ανήκει σε κάποιο σύνολο S, και υποχρεωτικά θα βρίσκεται στο $G - C$, δηλαδή στα D_i σύνολα που υπολόγισε ο αλγόριθμος. Άτοπο, καθώς κάθε D_i σύνολο έχει μόνο κενά σύνολα. Επομένως, ο αλγόριθμος βρίσκει σωστή λύση. Αν C^* ένα optimal Set Cover, S ένα ~~κάποιο~~ σύνολο που ανήκει στη λύση (έστω C) του αλγορίθμου, τότε ισχύει:

$$W(S) = \sum_{i \le j} t_i(S) \quad , \text{αν } S \in W_i$$

ή

$$W(s) \geq \sum_{i \le j} t_i(s), \text{ αν } S \in D_i.$$

Για κάθε επίπεδο το $C^* \cap G_i$ θα είναι Set Cover για το G_i. Οπότε, όπως αποδείξαμε πριν ισχύει ότι $t_i(C \cap G_i) \le f \cdot t_i(C^* \cap G_i)$

Αθροίζοντας για όλα τα βήματα του αλγορίθμου, έστω n, προκύπτει:

$$SOL = W(C) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i(C \cap G_i) \le f \cdot \sum_{i=0}^{n-1} t_i(C^* \cap G_i) \le f \cdot W(C^*) =$$

$$= f \cdot OPT \Rightarrow \frac{SOL}{OPT} \le f.$$

Άσκηση 8:

a) πρώτος αλγόριθμος:

Βρίσκουμε ένα MST, έστω T, στο γράφο για το οποίο ισχύει: $Cost(T) \le OPT_{s,t}$, αφού κάθε μονοπάτι από τον s στον t που περνάει από όλες τις κορυφές είναι συνδετικό δέντρο και εμείς έχουμε ως κάτω φράγμα το κόστος του MST. Διπλασιάζουμε τις ακμές του T, οπότε $cost_{new}(T) = 2 \cdot cost(T) \le 2\, OPT_{s,t}$ και αφαιρούμε το ~~[illegible]~~ μονοπάτι (s,t) από το διπλασιασμένο δέντρο, άρα τελικά: $Cost(SOL1) \leq 2OPT - cost(path(s,t)) \leq 2OPT - C_{s,t}$ με $C_{s,t} = cost(min(path(s,t)))$. Επιπλέον προσθέτουμε βοηθητική ακμή $C_{s,t}$ για να είναι ο κύκλος Euler που θα βρούμε σίγουρα στα s,t. Η αφαίρεση του (s,t) μονοπατιού ήταν αναγκαία γιατί διαφορετικά τα s,t θα είχαν περιττό βαθμό. Βρίσκουμε (s,t)-Euler κύκλο και εκτελούμε short-cutting όπου χρειάζεται, ώστε να επισκεπτόμαστε κάθε κορυφή ακριβώς μια φορά (δεν αυξάνεται το κόστος, λόγω τριγωνικής ανισότητας). Τέλος, αφαιρούμε και τη βοηθητική ακμή $C_{s,t}$ για να πάρουμε το μονοπάτι (s,t). Οπότε, $SOL_1 \leq 2OPT_{s,t} - C_{s,t}$.

β) <u>Δεύτερος αλγόριθμος:</u>

Βρίσκουμε ένα MST και υπολογίζουμε ένα minimum cost perfect matching για τους κόμβους περιττού βαθμού του γραφήματος (άρτιο πλήθος). Γνωρίζουμε πως για το κόστος του minimum cost perfect matching ισχύει: $cost(M) \leq \frac{OPT_{TSP}}{2}$, επιπλέον ισχύει:

$OPT_{TSP} \leq OPT_{s\text{-}t} + c(s,t)$, διότι το βέλτιστο μονοπάτι Hamilton φράσσεται από το αντίστοιχο βέλτιστο μονοπάτι (s,t) αυξημένο κατά το κόστος του (s,t)-path στο MST. Τέλος, εκτελώντας short cutting, όπου χρειάζεται, συμπεριλαμβάνουμε στο μονοπάτι τους κόμβους άρτιου βαθμού (δεν επαναλαμβάνουμε κάποιον). Αυτή η διαδικασία δεν αυξάνει το κόστος λόγω τριγωνικής ανισότητας, οπότε:

$$SOL_2 \leq \frac{OPT}{2} + OPT_{s,t} \leq \frac{1}{2}(OPT_{s\text{-}t} + C(s,t)) + OPT_{s\text{-}t} \Rightarrow$$

$$SOL_2 \leq \frac{3OPT_{s\text{-}t} + C(s,t)}{2}.$$

Η τελική λύση είναι: $SOL = min\{SOL_1, SOL_2\}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) $\underline{SOL_1 \leq SOL_2} \Rightarrow 2OPT - C_{s,t} \leq \frac{3OPT + C_{s,t}}{2} \Rightarrow$

$OPT \leq 3C_{s,t} \Rightarrow C_{s,t} \geq \frac{OPT}{3}$.

- $SOL = SOL_1 \leq 2OPT - C_{s,t} = 2OPT - \frac{OPT}{3} = \frac{5}{3} OPT.$

2) $\underline{SOL_2 \leq SOL_1} \Rightarrow 2OPT - C_{s,t} \geq \frac{3OPT + C_{s,t}}{2} \Rightarrow$

$OPT \geq 3C_{s,t} \Rightarrow C_{s,t} \leq \frac{OPT}{3}$.

- $SOL = SOL_2 \leq \frac{3OPT + C_{s,t}}{2} \leq \frac{3OPT + \frac{OPT}{3}}{2} = \frac{5}{3} OPT.$

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση ισχύει $\frac{SOL}{OPT} = \frac{5}{3}$, οπότε ο αλγόριθμος είναι $\frac{5}{3}$- προσεγγιστικός.

Άσκηση 9:

α) Θεωρούμε στιγμιότυπο του knapsack, όπου έχουμε 2 αντικείμενα: το πρώτο έχει μέγεθος 1 και αξία 5, ενώ το δεύτερο μέγεθος B και αξία B, B>5. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος θα επιλέξει το πρώτο αντικείμενο αφού έχει λόγο 2 ενώ το δεύτερο λόγο 1. Έπειτα, θα τερματίσει αφού το δεύτερο αντικείμενο δε χωράει στο σακίδιο. Όμως, η βέλτιστη λύση (OPT) θα διάλεγε το δεύτερο και θα αξία B στο σακίδιο, ενώ η λύση χωράει αξία 5. Οπότε, ο λόγος $\frac{SOL}{OPT} = \frac{5}{B}$ γίνεται αυθαίρετα μικρός, όσο το B μεγαλώνει και άρα ο λόγος προσέγγισης του αλγορίθμου δε φράσσεται από καμμία σταθερά.

β) Έστω OPT και OPT' οι βέλτιστες λύσεις στο διακριτό και στο κλασματικό knapsack αντίστοιχα. Έστω ότι το P_k είναι το πρώτο στοιχείο που δεν χωράει στο σακίδιο στον αρχικό greedy αλγόριθμο. Τότε, στο κλασματικό knapsack θα μπορούσαμε να γεμίσουμε το σακίδιο με ένα κλάσμα του, έστω $a \cdot P_k$, με $a < 1$ και αυτή θα ήταν η βέλτιστη λύση εάν μπορούσαμε να διαλέξουμε και κλάσματα των αντικειμένων. Ωστόσο, προφανώς ισχύει:

$OPT' \geq OPT$, άρα έχουμε:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_k \geq P_1 + P_2 + \dots + a \cdot P_k \geq OPT.$$

Αφού είναι: $P_1 + P_2 + \dots + P_k \geq OPT \Rightarrow \begin{cases} P_1 + P_2 + \dots + P_{k-1} \geq \frac{OPT}{2} \\ P_k \geq \frac{OPT}{2} \end{cases}$

Οπότε, χρησιμοποιώντας το αντικείμενο μεγαλύτερης αξίας προκύπτει: $P_{max} \geq P_k \geq \frac{OPT}{2}$. Άρα, σε κάθε περίπτωση ο αλγόριθμος δίνει: $SOL \geq \frac{OPT}{2} \Rightarrow \frac{SOL}{OPT} = \frac{1}{2}$, άρα είναι $\frac{1}{2}$ - προσεγγιστικός.