Αναστάσιος Παπαζαφειρόπουλος 03118079

2η Γραπτή Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1:

Θα a) αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα σαν balls and bins. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να φτιάξουμε το $a \cdot y$ τοποθετώντας $k(\varepsilon)$ ίδια balls σε n διακριτά bins. Θεωρούμε ότι κάθε bin αντιστοιχεί σε ένα a_i, $i=1, \dots, n$, και X_i τυχαία μεταβλητή που υποδεικνύει σε ποιο bin τοποθετείται το i-οστό ball. Οπότε ισχύει: $Pr[X_i = a_i] = x_i$. Για να καταλήξουμε σε k-ομοιόμορφο διάνυσμα πιθανοτήτων θεωρούμε ότι οι y_i αντιστοιχούν στο πλήθος των balls τοποθετήθηκαν στο i-οστό bin, διαιρεμένο με $k(\varepsilon)$. Οπότε, προκύπτει:

$$a \cdot y = \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \frac{X_i}{k(\varepsilon)} \quad (1)$$

επομένως: $E[a \cdot y] = E\left[\sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \frac{X_i}{k(\varepsilon)}\right] =$

$$= \frac{1}{k(\varepsilon)} \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} E[X_i] = \frac{1}{k(\varepsilon)} \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \frac{1}{k(\varepsilon)} \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} ax = ax. \rightarrow$$

$$E[ay] = ax \quad (2).$$

Άρα, από το Hoeffding Bound με $X = a \cdot y$, προκύπτει:

$$Pr[|X - E[X]| > \varepsilon] \leq 2e^{-2n\varepsilon^2} \Rightarrow Pr[|X - E[X]| \leq \varepsilon] \geq 1 - 2e^{-2n\varepsilon^2}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} Pr[|ay - ax| \leq \varepsilon) \geq 1 - 2e^{-2\varepsilon^2\left(\frac{\ln 2}{2\varepsilon^2} + 1\right)} = 1 - \frac{1}{e^{2\varepsilon^2}} > 0,$$

άρα θα υπάρχει y με τις συγκεκριμένες ιδιότητες.

β) Θεωρούμε $x' = [a_1 x, a_2 x, \ldots, a_m x]$, $y' = [a_1 y, a_2 y, \ldots, a_m y]$

όπου: a_i, $i=1,\ldots,m$ τα διανύσματα γραμμών του A.

Είναι: $\|Ax - Ay\|_\infty = \|x' - y'\|_\infty = \| a_1(x-y), a_2(x-y), \ldots, a_m(x-y)\|_\infty$

$\leq |a_1 x - a_1 y| + \ldots + |a_m x - a_m y|$.

Ακολουθώντας τη λογική του προηγούμενου ερωτήματος με $k(m,\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln(2m)}{2\varepsilon^2} \right\rceil + 1$ προκύπτει ότι υπάρχει $k(m,\varepsilon)$ ομοιόμορφο διάνυσμα y ώστε να ισχύει: $|a_i x - a_i y| \leq \frac{\varepsilon}{m}$.

Πιο συγκεκριμένα ~~από~~ στο ίδιο Hoeffding Bound όπου ε θέτουμε το $\frac{\varepsilon}{m}$ και προκύπτει:

$$Pr\left[|a_i x - a_i y| \leq \frac{\varepsilon}{m}\right] \geq 1 - 2e^{-\frac{2\varepsilon^2}{m^2}\left(\frac{\ln 2m}{\frac{2\varepsilon^2}{m^2}} + 1\right)} = 1 - \frac{1}{me^{2\frac{\varepsilon^2}{m^2}}}$$

Είναι: $\frac{2\varepsilon^2}{m^2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{e^{2\frac{\varepsilon^2}{m^2}}} < 1 \xrightarrow{m<1} \frac{1}{me^{2\frac{\varepsilon^2}{m^2}}} < 1$, άρα

$1 - \frac{1}{me^{\frac{2\varepsilon^2}{m^2}}} > 0 \Rightarrow Pr\left[|a_i x - a_i y| \leq \frac{\varepsilon}{m}\right] > 0$.

Άρα, ισχύει: $Pr\left[|a_i x - a_i y| > \frac{\varepsilon}{m}\right] \leq \frac{1}{me^{2\cdot\frac{\varepsilon^2}{m^2}}}$, άρα η πιθανότητα $Pr\left[|a_i x - a_i y| > \frac{\varepsilon}{m}\right]$ για ένα τουλάχιστον i είναι άνω φραγμένη από το άθροισμα των m αυτών πιθανοτήτων (Union Bound), άρα:

$Pr\left[|a_i x - a_i y| > \frac{\varepsilon}{m}\right] \leq \frac{m}{me^{2\frac{\varepsilon^2}{m^2}}} = \frac{1}{e^{2\frac{\varepsilon^2}{m^2}}}$. Συνεπώς,

$Pr\left[|a_i x - a_i y| \leq \frac{\varepsilon}{m}\right] \geq 1 - \frac{1}{e^{\frac{2\varepsilon^2}{m^2}}} > 0$, $\forall i$.

Άρα, $\forall i$ έχουμε θετική πιθανότητα να ισχύει: $|a_i x - a_i y| \leq \frac{\varepsilon}{m}$,

ώστε και: $\|Ax - Ay\|_\infty \leq |a_1 x - a_1 y| + \ldots + |a_m x - a_m y| \leq m \cdot \frac{\varepsilon}{m}$

$\Rightarrow \|Ax - Ay\|_\infty \leq \varepsilon$, αποδείχτηκε το ζητούμενο.

Άσκηση 2:

α) Για κάθε σημείο $i \in C$ θεωρούμε $y_i \in \{0,1\}$, με $y_i = 1$, αν το i είναι κέντρο και $y_i = 0$ διαφορετικά. Ενώ, θεωρούμε $x_{ij} \in \{0,1\}$ με $x_{ij} = 1$, αν αναθέτουμε το j στο σημείο-κέντρο i, και $x_{ij} = 0$ διαφορετικά. Κάθε σημείο ανατίθεται μόνο σε ένα κέντρο i. Κάθε σημείο i ανατίθεται στο κέντρο y για το οποίο ισχύει: $\arg\min_{y \in S} d(i,y)$, όπου: S είναι το σύνολο των κέντρων, ενώ για την ακτίνα ισχύει: $r(y) = \max_{x:center(x)=y} d(x,y)$.

Με βάση αυτούς τους περιορισμούς που θέτει η εκφώνηση, το IP είναι:

$$\min \sum_i y_i r_i$$

s.t.

$$\sum_i y_i = k$$

$$\sum_i x_{ij} d_{ij} \le y_i d_{ij} \, , \forall i,j$$

$$d_{ij} x_{ij} \le r_i \quad \forall i,j$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \, , \forall j$$

$$x_{ij} \le y_i$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0,1\}$$

β) Θεωρούμε $x_i \in \{0,1\}$, με $x_j = 1$ αν ~~ανοίξει~~ ανοίξει κατάστημα στη ~~θέση~~ θέση j και $x_j = 0$ αν δεν ανοίξει, ενώ θεωρούμε ακόμη $y_{ij} \in \{0,1\}$ με $y_{ij} = 1$ αν ο πελάτης i ανατίθεται στο κατάστημα στη θέση j (που είναι το κοντινότερο σε αυτόν κατάστημα) και $y_{ij} = 0$ διαφορετικά. Ο αριθμός πελατών είναι n και οι πιθανές θέσεις καταστημάτων m. Οπότε με βάση αυτούς τους περιορισμούς το IP, είναι:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_{ij} y_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i x_i$$

s.t.

$$\sum_{j} y_{ij} d_{ij} \leq d_{ik} x_k \ , \ \forall i, k$$, όπου: d_{ik} απόσταση πελάτη i από μαγαζί k

$$\sum_{j=1}^{m} y_{ij} = 1 \ , \ \forall i = 1, \dots, n.$$

$y_{ij} \leq x_j \ \ \forall i, j$, όπου: $i = 1, \dots, n$ και $j = 1, \dots, m$.

$x_i, y_{ij} \in \{0,1\}$

Άσκηση 3:

α) Ορίζουμε μια μεταβλητή $x_u \in \{0,1\}$ για κάθε κορυφή $u \in V$, για την οποία ισχύει: $x_u = 0$ αν η κορυφή u δεν επιλεχθεί στο κάλυμμα και $x_u = 1$ αν επιλεχθεί. Αντίστοιχα, ορίζουμε μια μεταβλητή $z_e \in \{0,1\}$ για κάθε ακμή $e \in E$ για την οποία ισχύει: $z_e = 0$ αν η ακμή καλύπτεται ή $z_e = 1$ αν όχι. Οπότε, προκύπτει το παρακάτω ακέραιο πρόγραμμα:

$$\min \sum_{u \in V} \beta \cdot x_u + \sum_{e \in E} z_e$$

s. t.

$$z_e + x_u + x_v \geq 1, \ \forall e = \{u,v\} \in E$$

$$z_e = \{0,1\}, \ \forall e = \{u,v\} \in E$$

$$x_u = \{0,1\}, \forall u \in V.$$

Ουσιαστικά, έχουμε ένα διάνυσμα n μεταβλητών x_u που ακολουθείται από ένα διάνυσμα m μεταβλητών z_e. Οπότε, ο πίνακας c, για τον οποίο ισχύει min $c^T x$ (αντικειμενική συνάρτηση) θα έχει n φορές το β και m φορές το 1.

Αν αλλάξουμε τους δύο τελευταίους περιορισμούς σε $x_u \geq 0$ και $z_e \geq 0$, προκύπτει το αντίστοιχο LP relaxation που ζητείται. Ενώ, για το δυϊκό θεωρούμε n+m περιορισμούς (μεταβλητές στο πρωτεύον) και $p_k = \{0,1\}$ μεταβλητές για κάθε ακμή, οπότε έχουμε:

$$\max \sum_{k \in E} p_k$$

$$p_k \leq 1, \ \forall k = \{u,v\} \in E$$

$$\sum_{e \in \delta(u)} p_k \leq \beta, \ \forall u \in V,$$ όπου $\delta(u)$ οι ακμές που προσπίπτουν στην u.

$$p_k = \{0,1\}, \ \forall k = \{u,v\} \in E$$

Το πρόγραμμα βελτιστοποίησης που περιγράφεται από το δυϊκό σε φυσική γλώσσα είναι: Το μέγιστο σύνολο ακμών, έστω E_s, έτσι ώστε κάθε κορυφή να καλύπτει το πολύ β ακμές.

Β) Αν θεωρήσουμε OPT τη λύση του ακέραιου προγράμματος και OPT' του relaxed OPT', τότε όπως γνωρίζουμε ισχύει:

$OPT' \leq OPT$ (1). Τώρα, για να ικανοποιείται ο περιορισμός $z_e + x_u + x_v \geq 1, \forall e \in \{u,v\} \in E$ θα πρέπει στη λύση του relaxed LP να ισχύει: $z_e \geq \frac{1}{3}$ ή $x_u \geq \frac{1}{3}$ ή $x_v \geq \frac{1}{3}$. Πραγματοποιούμε το rounding βασιζόμενοι στην εξής ιδέα, όποια μεταβλητή έχει τιμή τουλάχιστον $\frac{1}{3}$ και πάνω τη θέτουμε στο 1, αλλιώς τη θέτουμε στο 0. Άρα, στη χειρότερη περίπτωση έχουμε: $SOL \leq 3OPT' \overset{(1)}{\leq} 3\,OPT$, οπότε έχουμε 3-approximation.

Άσκηση 4:

5.3)

Ουσιαστικά θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το συνολικό βάρος των ακμών που πάνε από το U στο W για το $G(V, A)$ με $w_{ij} \geq 0$ για κάθε ακμή (i,j). Εφόσον χωρίζουμε το G στα σύνολα U και W μπορούμε να βάζουμε τυχαία κάθε κόμβο του G είτε στο U, είτε στο W με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Οπότε η πιθανότητα η ακμή (i,j) να πηγαίνει από το U στο W είναι: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, καθώς το $i \in U$ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, το $j \in W$ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και τα ενδεχόμενα αυτά είναι ανεξάρτητα. Οπότε, ισχύει:

$$SOL = \sum_{(i,j) \in A} w_{ij} Pr((i,j) \in cut) = \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in A} w_{ij} \geq \frac{1}{4} OPT,$$

αφού προφανώς ισχύει: $OPT \leq \sum_{(i,j) \in A} w_{ij}$ γιατί $w_{ij} \geq 0$.

συνεπώς, ο αλγόριθμος είναι $\frac{1}{4}$-προσεγγιστικός.

5.6)

a)

Ουσιαστικά το δοθέν IP σκοπεύει να μεγιστοποιήσει την ποσότητα: $\sum_{(i,j) \in A} w_{ij} z_{ij}$. Θεωρούμε ότι οι μεταβλητές z_{ij} θα είναι 1 αν $i \in U$ και $j \in W$ και 0 διαφορετικά, ενώ $x_i = 0$, αν $i \in W$ και $x_i = 1$, αν $i \in U$. Για να δούμε εάν το δοθέν IP μοντελοποιεί ορθώς το maximum directed cut, διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

i) $i \in W$ και $j \in W$: είναι $x_i = 0$ και $x_j = 0$, άρα: $0 \leq z_{ij} \leq 0 \Rightarrow z_{ij} = 0$, συνεπώς η συγκεκριμένη ακμή σωστά δεν υπολογίζεται στο αποτέλεσμα.

ii) $i \in U$ και $j \in U$: είναι: $x_i = 1$ και $x_j = 1$, άρα: $0 \leq z_{ij} \leq 0 \Rightarrow z_{ij} = 0$, συνεπώς η συγκεκριμένη ακμή σωστά δεν υπολογίζεται στο αποτέλεσμα

iii) $i \in W$ και $j \in U$: είναι $x_i = 0$ και $x_j = 1$ άρα: $0 \leq z_{ij} \leq 0 \Rightarrow z_{ij} = 0$, συνεπώς η συγκεκριμένη ακμή σωστά δεν υπολογίζεται στο αποτέλεσμα,

iv) $i \in U$ και $j \in W$: είναι $x_i = 1$ και $x_j = 0$, άρα $z_{ij} \leq 1$, συνεπώς η συγκεκριμένη ακμή σωστά υπολογίζεται στο αποτέλεσμα.

Οπότε, από την εξαντλητική ανάλυση προέκυψε ότι το IP μοντελοποιεί το maximum directed cut.

b)

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο της εκφώνησης, μια κορυφή i θα ανήκει στο U με $p = \frac{1}{4} + \frac{x_i}{2}$, άρα για μια ακμή (i,j) θα ισχύει:

$$\Pr[(i,j) \in cut] = \Pr[i \in U, j \in W] = \Pr(i \in U) \cdot \Pr(j \notin U) =$$
$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{x_i}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{x_j}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{x_i}{2}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1-x_j}{2}\right).$$

Από τους περιορισμούς, έχουμε:

$$\Pr[(i,j) \in cut] = \left(\frac{1}{4} + \frac{x_i}{2}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1-x_j}{2}\right) \ge \left(\frac{1}{4} + \frac{z_{ij}}{2}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{z_{ij}}{2}\right) =$$
$$\left(\frac{1}{4} + \frac{z_{ij}}{2}\right)^2 \ge \frac{z_{ij}}{2}$$ που ισχύει, αφού:

$$\left(\frac{1}{4} + k\right)^2 \ge k \Rightarrow k^2 - \frac{k}{2} + \frac{1}{16} \ge 0 \Rightarrow \left(k - \frac{1}{4}\right)^2 \ge 0$$ ισχύει για κάθε k, άρα και για $k = \frac{z_{ij}}{2}$.

Αν OPT η βέλτιστη λύση του IP και OPT' η λύση μετά το relaxation ($x \in \{0,1\} \to 0 \le x \le 1$), τότε με βάση τον αλγόριθμο της εκφώνησης προκύπτει:

$$E[W] = \sum_{(i,j) \in A} \Pr[(i,j) \in cut] \cdot w_{ij} \ge \sum_{(i,j) \in A} \frac{z_{ij}}{2} w_{ij} \ge \frac{1}{2} \cdot \max\left(\sum_{(i,j) \in A} z_{ij} w_{ij}\right) =$$
$$= \frac{OPT'}{2} \ge \frac{OPT}{2}$$, αφού η relaxed λύση είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση της ακέραιας. Συνεπώς, ο συγκεκριμένος αλγόριθμος είναι $\frac{1}{2}$-προσεγγιστικός

Άσκηση 5:

α) Η τάξη της ομάδας είναι p-1, καθώς ισούται με την πληθικότητα της. Αφού η ομάδα είναι πεπερασμένη, η τάξη της ομάδας θα πρέπει να διαιρείται από την τάξη οποιουδήποτε στοιχείου. Επομένως, τάξη οποιουδήποτε στοιχείου πρέπει να διαιρεί το $4q$, άρα οι δυνατές τάξεις είναι: $1, q, 2q, 4q, 2, 4$.

β) Γνωρίζουμε πως η τάξη της ομάδας θα ισούται με την τάξη του γεννήτορα. Οπότε, είναι: $g^{p-1} = g^{4q} = 1$. Θα υπάρχει στοιχείο a τέτοιο ώστε: $a = g^q$ και $a^4 = g^{4q} = 1$, άρα το a είναι τάξης 4.

γ) Η πληθικότητα της ομάδας γράφεται: $p-1 = 4q = 2^2 q$ ως γινόμενο πρώτων παραγόντων. Επίσης, η ομάδα $\mathbb{Z}_p^*$ έχει ακριβώς $\varphi(p-1) = \varphi(2^2 q) = \varphi(4)\cdot\varphi(q) = 2(q-1)$ γεννήτορες και αν g γεννήτορας τότε για κάθε πρώτο παράγοντα d του g το $a^{(p-1)/d}$ αφήνει υπόλοιπο διάφορο του $1 \bmod p$. Οπότε, διαλέγοντας κάθε φορά ένα τυχαίο αριθμό a στο $\mathbb{Z}_p^*$ (εντός από 1 και p-1) και ελέγχοντας για όλους τους πρώτους παράγοντες του p-1 (2 και q) αν ισχύουν:

$a^{(p-1)/2} \neq 1 \bmod p$ και $a^{(p-1)/q} \neq 1 \bmod p$, βρίσκουμε έναν γεννήτορα σε περίπτωση που ισχύουν. Διαφορετικά διαλέγουμε άλλο a και επαναλαμβάνουμε. Η πιθανότητα να βρούμε γεννήτορα είναι:

$$P = \frac{2(q-1)}{p-3} = \frac{2(q-1)}{4q-3} \simeq \frac{2(q-1)}{4q-4} = \frac{1}{2},$$ άρα για n επαναλήψεις:

$$P_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Οι πρώτοι παράγοντες του p-1 είναι άνω φραγμένοι από το p, ενώ για κάθε a κάνουμε 2 ελέγχους και οι πολλαπλασιασμοί έχουν πολυωνυμικό κόστος, άρα συνολικά ο αλγόριθμος έχει πολυωνυμική πολυπλοκότητα.

Άσκηση 6:

Θεωρούμε m το μέγεθος του κυρίαρχου συνόλου. Μπορούμε να βρούμε με εξαντλητικό τρόπο όλα τα υποσύνολα κορυφών μεγέθους m του γράφου και να ελέγξουμε σε γραμμικό χρόνο για κάθε ένα από αυτά αν είναι το κυρίαρχο σύνολο του γράφου, βλέποντας αν κάποια κορυφή του συνόλου είναι γειτονική με κάθε κορυφή του γράφου που δεν ανήκει στο κυρίαρχο σύνολο. Τα πιθανά σύνολα μεγέθους m, είναι: $\binom{n}{m}$, δηλαδή της τάξης του $O(n^m)$. Οπότε, πρέπει να ελέγξουμε $O(n^m)$ σύνολα για το αν είναι κυρίαρχα (σε γραμμικό χρόνο του καθένα). Συνεπώς, συνολικά ο αλγόριθμος έχει πολυπλοκότητα $O(n^{m+1})$. Ο αλγόριθμος δεν ανήκει στην κλάση FPT, καθώς δεν έχει πολυπλοκότητα της μορφής $O(f(m) \cdot n^c)$ που απαιτείται για να ανήκει στη συγκεκριμένη κλάση. Τώρα, θεωρούμε ως παράμετρο τον μέγιστο βαθμό Δ του γράφου εισόδου. Σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος σε κάθε βήμα επιλέγει τη μη κυρίαρχη κορυφή ελάχιστου βαθμού και βάζει αυτή ή ένα υποσύνολο των γειτονικών της στο κυρίαρχο σύνολο. Κρατά τις κυρίαρχες κορυφές, διαγράφει την αρχική (μη κυρίαρχη) και επαναλαμβάνεται η διαδικασία μέχρι να μην υπάρχει μη κυρίαρχη κορυφή. Ο αλγόριθμος εκτελεί m το πολύ βήματα, αφού θέλουμε m κορυφές στο κυρίαρχο σύνολο και σε κάθε βήμα μπορεί να βάλει το πολύ Δ κορυφές στο κυρίαρχο σύνολο, ενώ οι κυρίαρχες κορυφές που σημειώνονται είναι κι αυτές της τάξης του $O(\Delta)$. Οπότε, έχουμε πολυπλοκότητα $O(\Delta^m)$ για m βήματα. Όμως, κάθε φορά απαιτείται $O(n)$ για να βρεθεί η μη κυρίαρχη κορυφή, άρα συνολικά ο αλγόριθμος έχει πολυπλοκότητα της τάξης $O(\Delta^m \cdot n)$ που είναι της μορφής $O(f(m) \cdot n^c)$, και συνεπώς ανήκει στην κλάση FPT.