Τα άλυτα προβλήματα στη διδασκαλία των μαθηματικών

ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΠΑΚΙΔΗΣ

georgetsapakidis@yahoo.gr

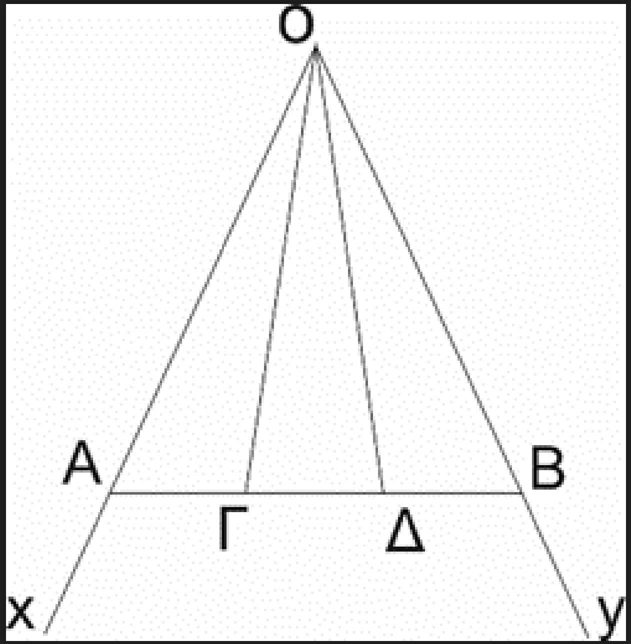
ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ ΘΕΟΔΩΡΟΠΟΥΛΟΣ

theodorotasos@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

- Η πρόταση της εργασίας αυτής είναι η εμβόλιμη παρουσίαση άλυτων , μέχρι τώρα , προβλημάτων στη διδασκαλία των Μαθηματικών, με σκοπό την πρόκληση του ενδιαφέροντος των μαθητών.
- Είναι πιθανό για κάποιους από αυτούς να γίνει η αιτία να μελετήσουν σε βάθος και πλάτος τα Μαθηματικά στην προσπάθειά τους να λύσουν κάποιο από τα άλυτα προβλήματα.

Πρόβλημα κατασκευής τριχοτόμου γωνίας με κανόνα και διαβήτη



Πάνω στις πλευρές Ox και Oy της δεδομένης γωνίας $x\hat{O}y$ παίρνουμε τα σημεία A και B αντίστοιχα έτσι ώστε OA = OB.

Με τα σημεία Γ,Δ χωρίζουμε το τμήμα AB σε τρία ίσα μέρη.

Έτσι, $x\hat{O}\Gamma$ = $\Gamma\hat{O}\Delta$=$\Delta\hat{O}y$!!!

Ιστορικά Στοιχεία

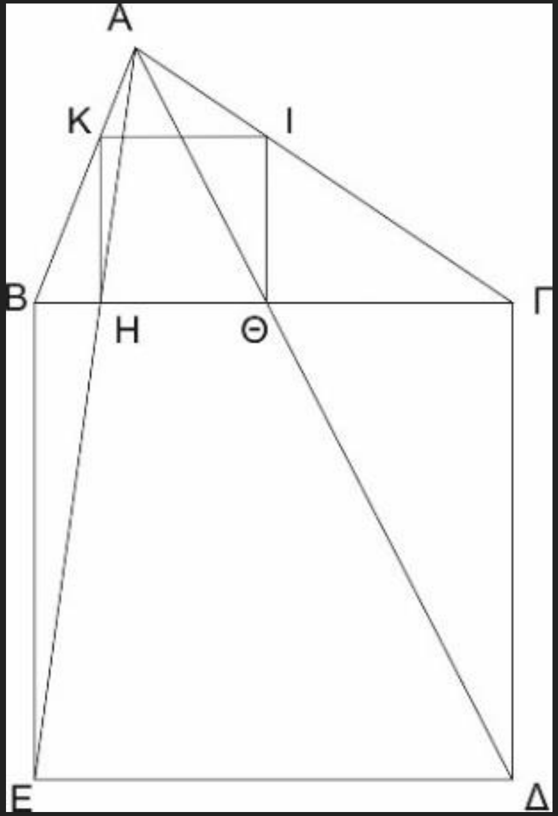
- Το πρόβλημα της τριχοτόμου προσπαθούσε να λύσει και ο μεγάλος μας μαθηματικός Δημήτρης Χριστοδούλου σε ηλικία 14 ετών, κάτι που τον παρακίνησε να μελετάει ανελλιπώς Μαθηματικά, ώστε να αποκτήσει τις γνώσεις, που ενδεχομένως θα απαιτούνταν για τη λύση του προβλήματος αυτού.
- Ακόμα, αρκεί να θυμηθούμε την επίδραση που είχαν τα 23 άλυτα , μέχρι τότε, προβλήματα που παρουσίασε ο Hilbert στο παγκόσμιο Μαθηματικό συνέδριο του 1900 στο Παρίσι.
- Επίσης, είναι γνωστό ότι ο Άντριου Ουάιλς σε ηλικία 10 ετών ήρθε σε επαφή με το **τελευταίο θεώρημα του Fermat**, του οποίου η απόδειξη έγινε στόχος της ζωής του , ώσπου το 1983 το απέδειξε.

Αρχικά Συμπεράσματα

- Από τα προηγούμενα γεγονότα φαίνεται ότι τα άλυτα προβλήματα των Μαθηματικών εκτός από το ότι είναι η κινητήρια δύναμή τους, ασκούν και μια αναπάντεχη γοητεία στους μαθητές εξάπτοντας τη φαντασία τους και προκαλώντας το ενδιαφέρον τους.

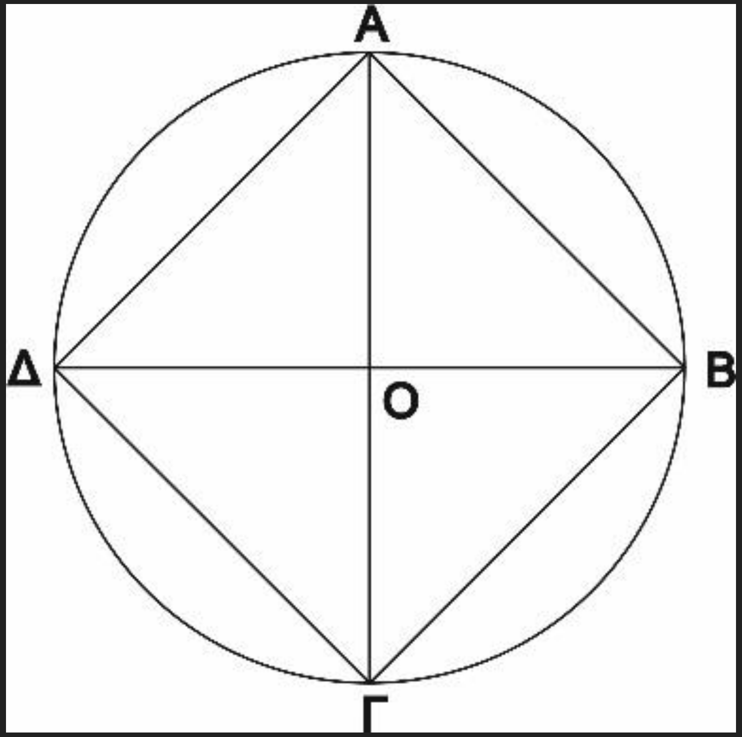
- Ως εκ τούτου θα ήταν σκόπιμο να παρουσιάζονται εμβόλιμα στη διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Την παρουσίαση ενός άλυτου, μέχρι τώρα , προβλήματος θα διαπραγματευτούμε στη συνέχεια.

Σημεία στην περίμετρο τριγώνου



- Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΒΓΔΕ και ονομάζουμε Η,Θ τα σημεία τομής των ΑΕ και ΑΔ με τη ΒΓ.
- Φέρνουμε κάθετες στη ΒΓ στα Η και Θ που τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα Κ και Ι αντίστοιχα.
- Με τη βοήθεια των ομοίων τριγώνων, να δείξουμε ότι το ΗΘΙΚ είναι τετράγωνο.
- Επομένως, **στην περίμετρο κάθε τριγώνου υπάρχουν τέσσερα σημεία τα οποία είναι κορυφές τετραγώνου**.

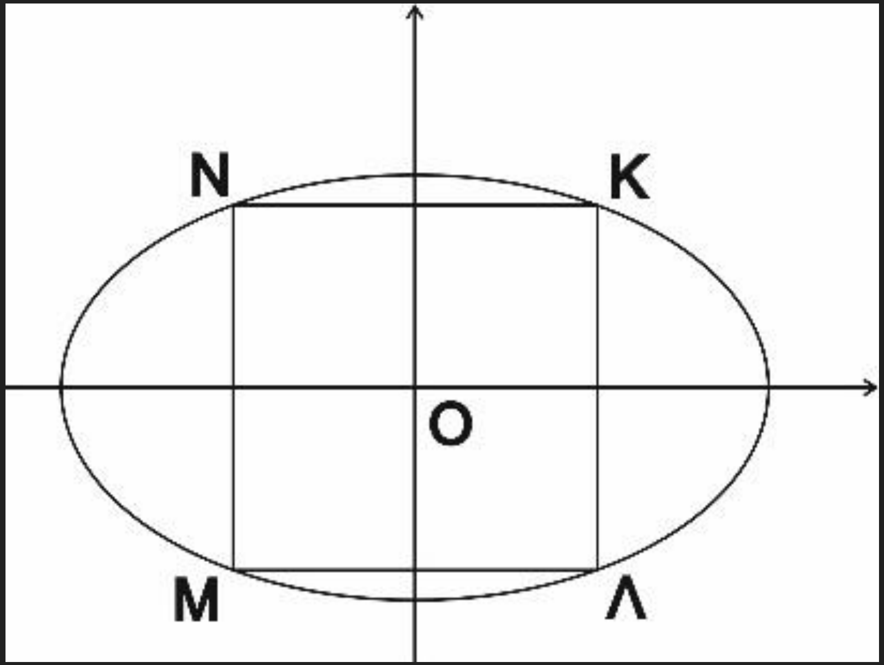
Σημεία στην περιφέρεια κύκλου



- Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι τα άκρα δύο καθέτων διαμέτρων ενός κύκλου είναι κορυφές τετραγώνου

- Άρα, **υπάρχουν τέσσερα σημεία σε κάθε κύκλο που είναι κορυφές τετραγώνου.**

Σημεία στην περιφέρεια έλλειψης



- Αποδεικνύεται απλά πώς τα σημεία $K(\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}})$, $\Lambda(\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}})$, $M(-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}})$ και $N(-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}})$, της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι κορυφές τετραγώνου.
- Άρα, **υπάρχουν τέσσερα σημεία σε κάθε έλλειψη που είναι κορυφές τετραγώνου.**

Καμπύλες Jordan

- Τι κοινό έχουν η περίμετρος ενός τριγώνου, ο κύκλος και η έλλειψη, έτσι ώστε να ικανοποιούν τη συνθήκη:

Υπάρχουν πάνω τους τέσσερα σημεία που είναι κορυφές τετραγώνου;

1. Είναι κλειστές γραμμές του επιπέδου.
2. Χωρίζουν το επίπεδο ακριβώς σε δύο μέρη με μόνα κοινά σημεία τις γραμμές αυτές (με άλλα λόγια οι γραμμές αυτές δεν αυτοτέμνονται).

- Οι γραμμές με τις δύο παραπάνω ιδιότητες, ονομάζονται **καμπύλες Jordan.**

Εικασία Otto Toeplitz

- Μήπως **σε όλες τις καμπύλες Jordan υπάρχουν τέσσερα σημεία που είναι κορυφές τετραγώνου**;

- Στην ερώτηση αυτή απάντησε καταφατικά ο Otto Toeplitz το 1911, χωρίς να μπορεί να το αποδείξει, αλλά και κανένας άλλος μέχρι σήμερα δεν την απέδειξε, επομένως παραμένει μια **εικασία**.

Αναζήτηση ειδικών περιπτώσεων

- Όταν η κατά μέτωπον αντιμετώπιση ενός προβλήματος δεν είναι δυνατή, οι ερευνητές το πλαγιοκοπούν με δύο τρόπους:

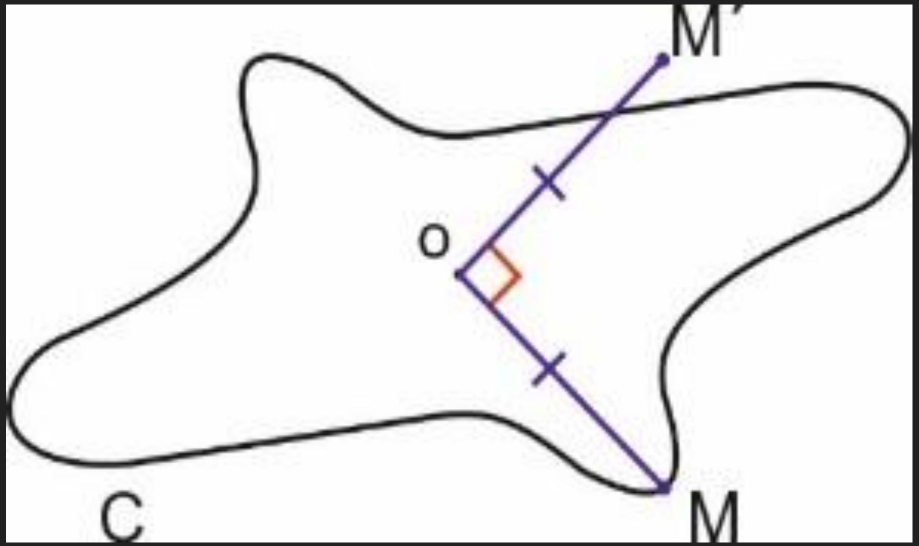
1. αυξάνουν τις υποθέσεις
2. μειώνουν τις απαιτήσεις του συμπεράσματος

- Με άλλα λόγια ακολουθούν έναν από τους κανόνες του Polya : **Αν δεν μπορείς να λύσεις ένα πρόβλημα, λύσε ειδικές του περιπτώσεις.**

Αναζήτηση ειδικών περιπτώσεων

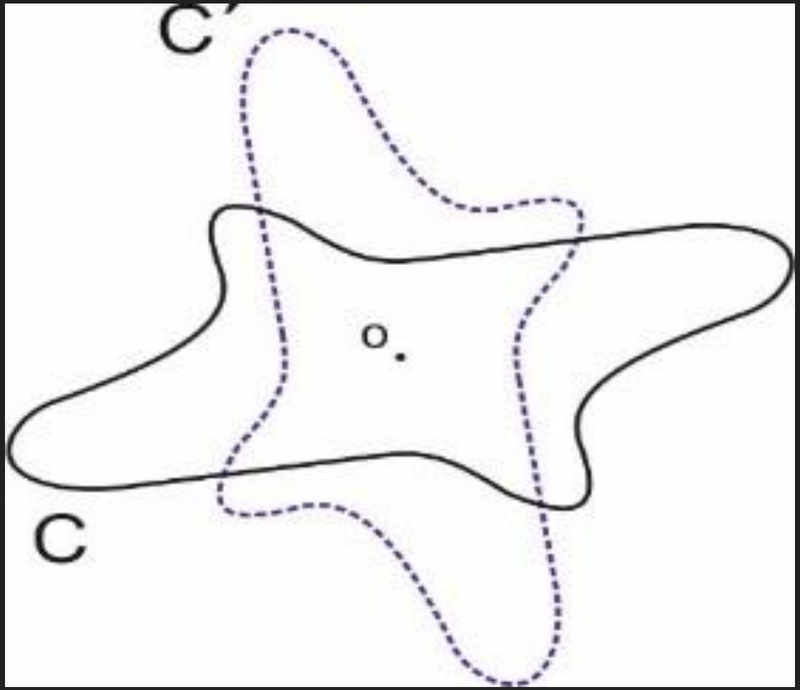
- Έτσι θα ερευνήσουμε και άλλες περιπτώσεις καμπυλών Jordan με την προηγούμενη ιδιότητα και πάντως πιο γενικές από την περίμετρο τριγώνου, τον κύκλο και την έλλειψη.
- Παρατηρούμε ότι ο κύκλος και η έλλειψη είναι καμπύλες με κέντρο συμμετρίας, επομένως μια γενίκευση των β και γ αλλά ειδική περίπτωση της δ είναι να εξετάσουμε αν αληθεύει η πρόταση :
- **Σε κάθε καμπύλη Jordan με κέντρο συμμετρίας εγγράφεται τετράγωνο(;).**

Σε κάθε καμπύλη Jordan με κέντρο συμμετρίας εγγράφεται τετράγωνο(;).



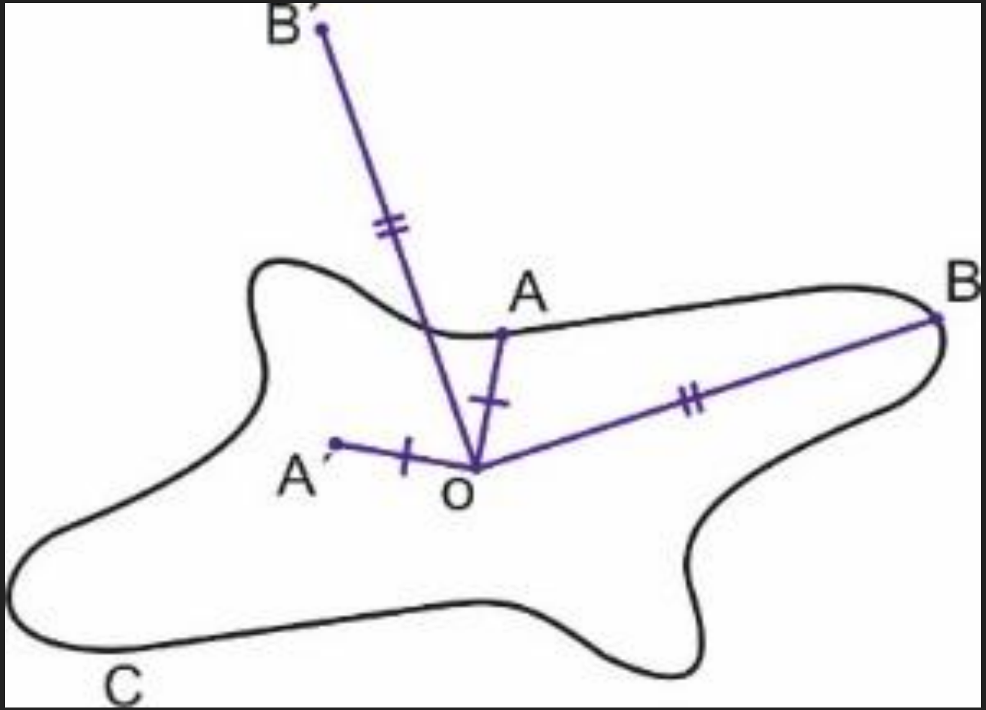
- Έστω Ο το κέντρο συμμετρίας της καμπύλης Jordan C.
- Σε κάθε σημείο Μ της C αντιστοιχούμε το σημείο Μ΄ του επιπέδου με την στροφή σ του Μ περί το Ο κατά 90° με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού, άρα σ: Μ→Μ΄ αν και μόνο αν $M\hat{O}M' = 90°$ και ΟΜ΄ = ΟΜ.

Σε κάθε καμπύλη Jordan με κέντρο συμμετρίας εγγράφεται τετράγωνο(;).



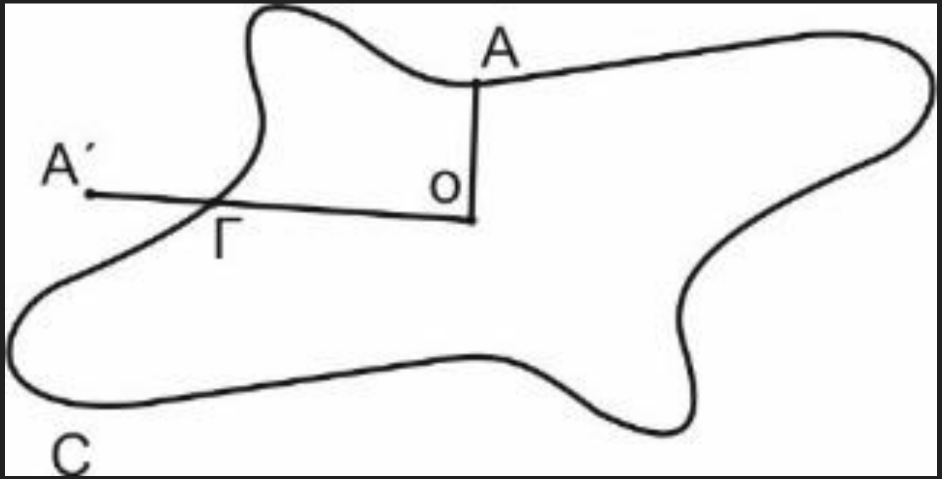
- Έτσι η C, μέσω της στροφής σ, μετασχηματίζεται στην C΄, δηλαδή αντιστρόφως αν η C΄ περιστραφεί περί το O κατά 90° με φορά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, θα συμπέσει με την C.
- Θα δείξουμε τώρα ότι οι καμπύλες C και C΄ έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

Σε κάθε καμπύλη Jordan με κέντρο συμμετρίας εγγράφεται τετράγωνο(;).



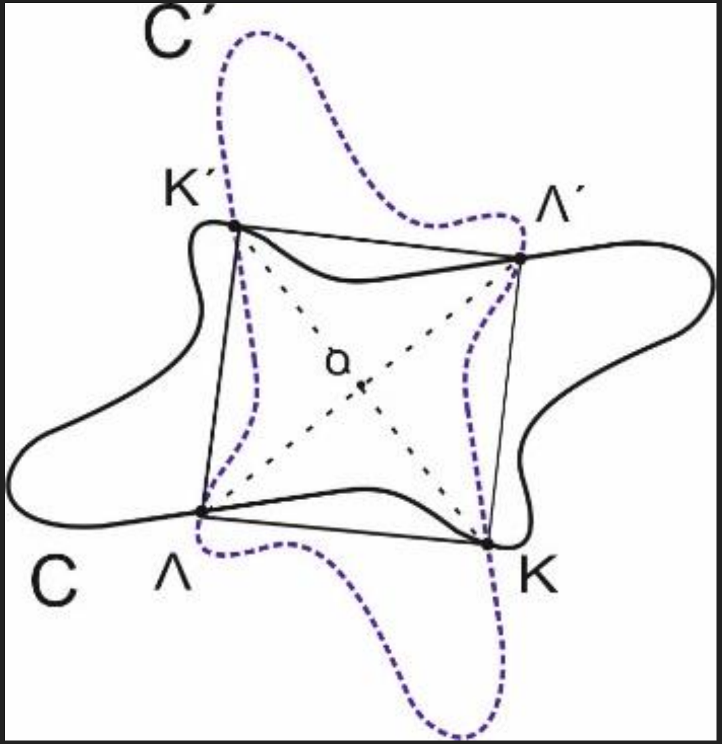
- Επειδή η C δεν έχει σημεία στο άπειρο και είναι συνεχής καμπύλη θα υπάρχουν σημεία της A και B τέτοια, ώστε το A να απέχει την ελάχιστη απόσταση από το O από ότι τα άλλα σημεία της C και το B να απέχει τη μέγιστη απόσταση από το O από τα άλλα σημεία της C.

Σε κάθε καμπύλη Jordan με κέντρο συμμετρίας εγγράφεται τετράγωνο(;).



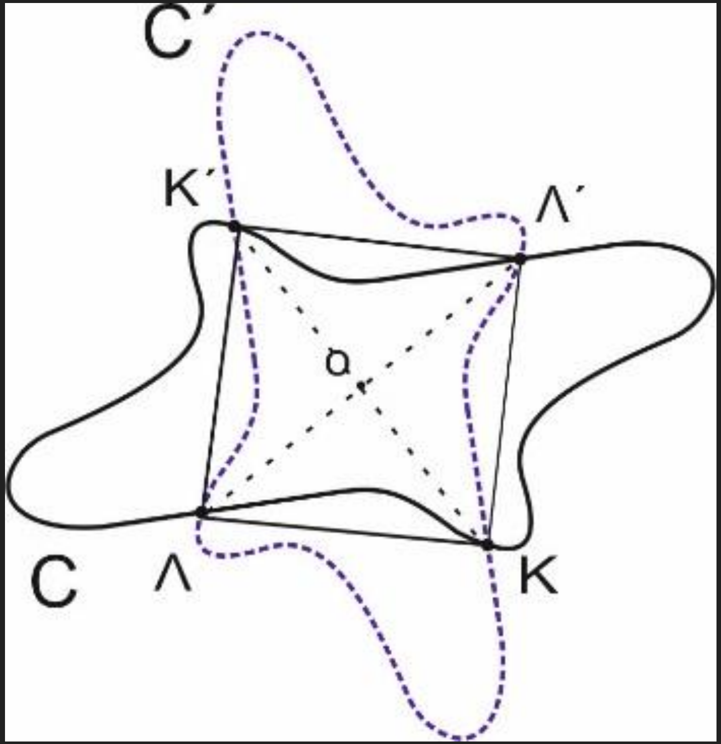
- Ονομάζουμε Α' και Β' τα αντίστοιχα σημεία των Α και Β κατά την στροφή σ, οπότε τα Α', Β' είναι σημεία της C'.
- Το σημείο Α' είναι υποχρεωτικά εσωτερικό σημείο της C, γιατί αν ήταν εξωτερικό, το τμήμα ΟΑ' θα έτεμνε τη C σε σημείο Γ και θα είχαμε ΟΑ = ΟΑ' > ΟΓ και το Α δεν θα ήταν το σημείο της C που θα είχε την ελάχιστη απόσταση από το Ο, άτοπο.
- Για τους ίδιους λόγους το Β' είναι εξωτερικό σημείο της C

Σε κάθε καμπύλη Jordan με κέντρο συμμετρίας εγγράφεται τετράγωνο(;).



- Επειδή η C είναι καμπύλη Jordan οποιαδήποτε γραμμή που περνάει από τα A', B', άρα και η C' θα τέμνει την C σε ένα τουλάχιστον σημείο, έστω το K.
- Επειδή το K είναι και σημείο της C' θα υπάρχει σημείο Λ της C τέτοιο, ώστε το K να είναι το αντίστοιχο του Λ κατά την στροφή σ.

Σε κάθε καμπύλη Jordan με κέντρο συμμετρίας εγγράφεται τετράγωνο(;).

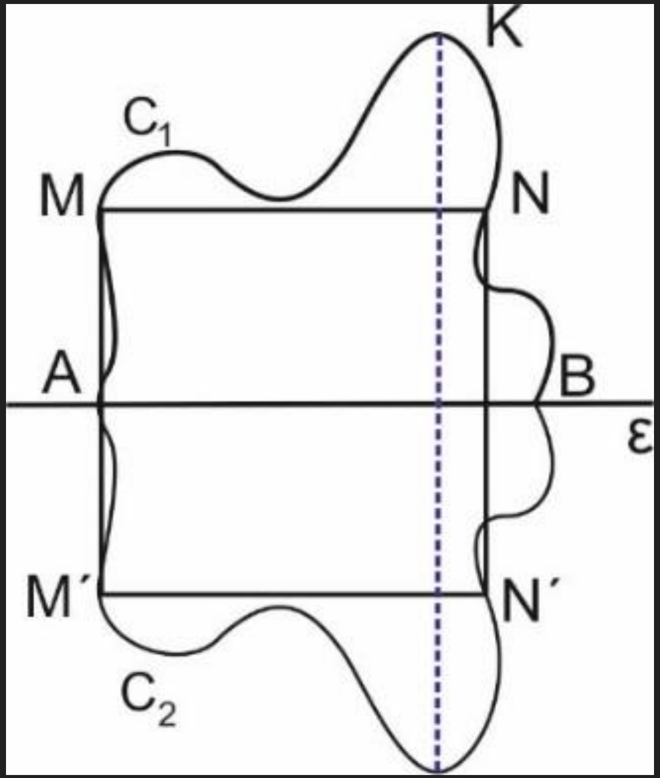


- Τα Κ,Λ είναι σημεία της C, άρα και τα συμμετρικά τους Κ',Λ' είναι σημεία της C (αφού η C έχει κέντρο συμμετρίας το O), έτσι έχουμε: OK = OΛ, $K\hat{O}\Lambda = 90°$, OK = OK' και OΛ = OΛ'
- Επομένως, το ΚΛΚ'Λ' είναι τετράγωνο.

Σχόλια

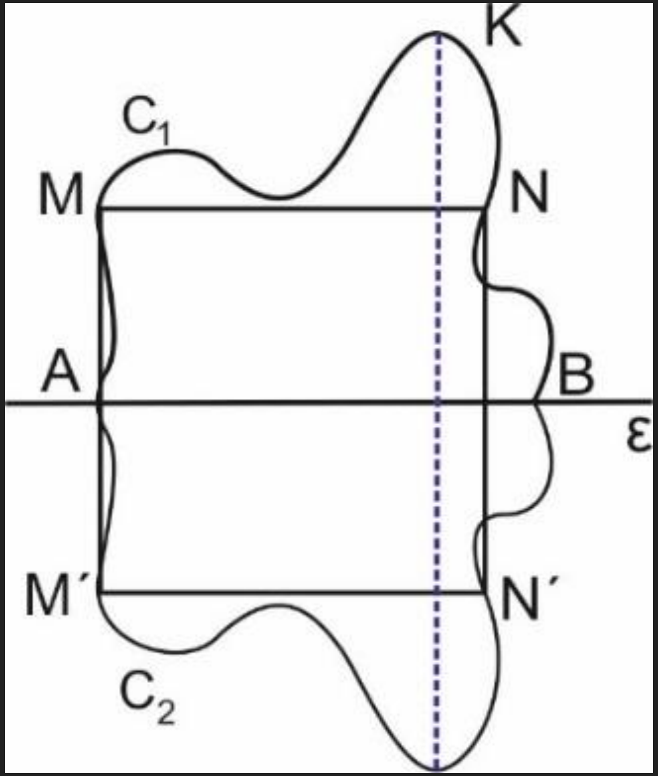
- Προφανώς τίθεται το ερώτημα αν αποδείξεις αυτού του είδους μπορούν να παρουσιαστούν στην τάξη, για παράδειγμα στο μάθημα της Γεωμετρίας της Β. Λυκείου.
- Με τα σημερινά δεδομένα ένας πραγματικός δάσκαλος όχι μόνο δεν θα άντεχε να διδάξει τέτοιες αποδείξεις, αλλά διερωτόμαστε αν αντέχει να διδάξει ακόμη και τις τετριμμένες αποδείξεις του σχολικού βιβλίου της Γεωμετρίας.
- Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις γίνεται φανερή η ανάγκη της δημιουργίας ή ξεχωριστών τμημάτων σε κάθε τάξη του Λυκείου για μαθητές με εξαιρετικές επιδόσεις στα Μαθηματικά ή η δημιουργία Φυσικομαθηματικών Λυκείων κατά τα πρότυπα άλλων χωρών.
- Οπότε η διδασκαλία αποδείξεων, όπως η παραπάνω, όχι μόνο να είναι εφικτή αλλά και επιβεβλημένη.

Σε κάθε καμπύλη Jordan, που έχει άξονα συμμετρίας, εγγράφεται τετράγωνο ;



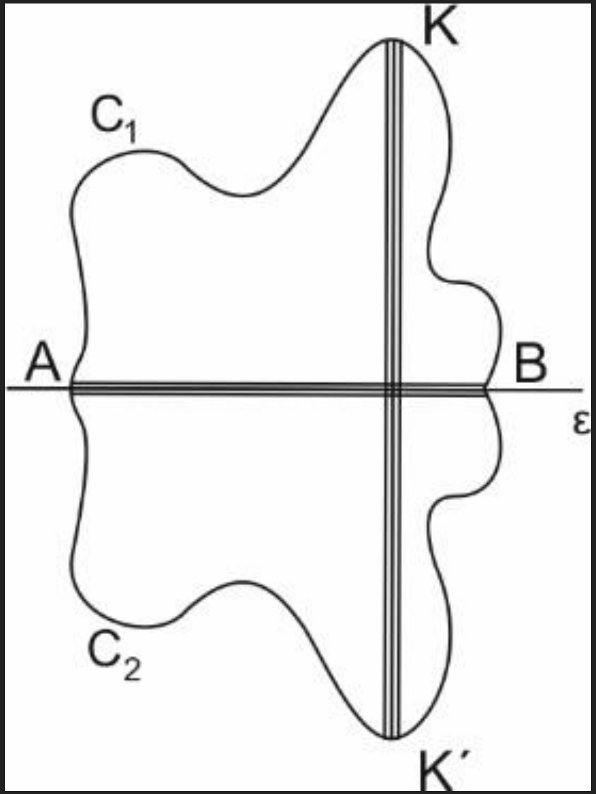
- Έστω ε ο άξονας συμμετρίας της καμπύλης C του Jordan και C_1, C_2 τα δύο μέρη από τα οποία χωρίζεται η C από την ε.
- Ονομάζουμε A, B τα σημεία τομής των ε, C και K το σημείο της C_1, που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την ε.
- Θεωρούμε σημείο M που διαγράφει το τόξο AK της C_1 και σημείο N που διαγράφει το τόξο BK. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το M βρίσκεται στο A και το N στο B.

Σε κάθε καμπύλη Jordan, που έχει άξονα συμμετρίας, εγγράφεται τετράγωνο ;



- Τα M και N κινούνται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε χρονική στιγμή να απέχουν την ίδια απόσταση από την ε.
- Είναι φανερό ότι τα M, N και τα συμμετρικά τους M΄, N΄ ως προς την ε κάθε χρονική στιγμή είναι κορυφές ορθογωνίου.

Σε κάθε καμπύλη Jordan, που έχει άξονα συμμετρίας, εγγράφεται τετράγωνο ;



- Στην αρχή της κίνησης των M, N στη C, έχουμε ένα λεπτό ορθογώνιο γύρω από το τμήμα AB και στο τέλος της κίνησης ένα λεπτό ορθογώνιο γύρω από το τμήμα KK΄.
- Επειδή η κίνηση των M, N είναι συνεχής πάνω στη συνεχή καμπύλη C_1 το ορθογώνιο μεταβάλλεται συνεχώς από την πρώτη προς την τελευταία κατάσταση, επομένως σε κάποια χρονική στιγμή θα γίνει τετράγωνο.

Σχόλια

- Η προηγούμενη «απόδειξη» είναι διαισθητική και περιέχεται στο [4], πλην όμως χρησιμοποιώντας τοπολογικές μεθόδους μπορεί να μετατραπεί σε αυστηρή, όπως τουλάχιστον νοείται η μαθηματική αυστηρότητα στις μέρες μας.
- Ο σκοπός της παρουσίασής της είναι η καλλιέργεια της μαθηματικής διαίσθησης των μαθητών και ημών των ιδίων (των δασκάλων των Μαθηματικών).
- Ανάλογη «απόδειξη» μπορεί να απολαύσει κανείς για το **Θεώρημα του Blicheldt** που έδωσε ο Tom Apostol σε διάλεξή του στην ΕΜΕ στις 25/5/78

Σε κάθε καμπύλη Jordan εγγράφεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

- Η πρόταση αυτή αποδείχθηκε από τον Vaughan [3], είναι αρκετά δύσκολη και απαιτεί λεπτούς τοπολογικούς χειρισμούς. Η απόδειξη έχει επίσης αναρτηθεί στο διαδίκτυο στη διεύθυνση:

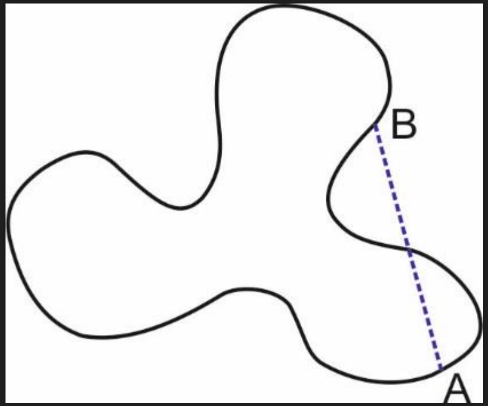
- (https://www.youtube.com/watch?v=AmgkSdhK4K8).

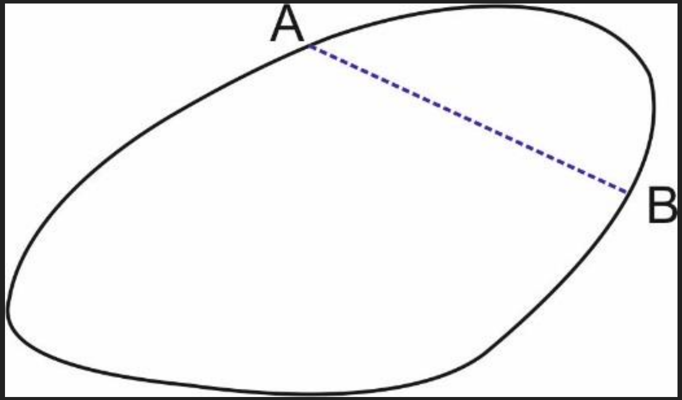
Σε κάθε καμπύλη Jordan εγγράφεται παραλληλόγραμμο (και ρόμβος) με δύο του πλευρές παράλληλες προς δοθείσα διεύθυνση.

- Η παραπάνω πρόταση αποδεικνύεται με την ίδια τεχνική με την οποία αποδείξαμε την πρόταση :

« Σε κάθε καμπύλη Jordan, που έχει άξονα συμμετρίας, εγγράφεται τετράγωνο ; »

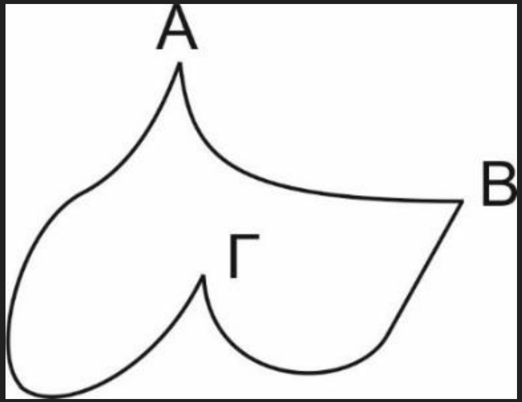
Κυρτότητα Καμπύλης Jordan

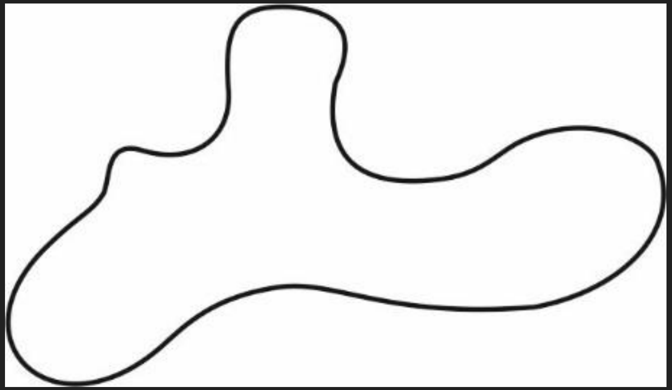




- Στην πάνω καμπύλη υπάρχουν σημεία Α,Β τέτοια, ώστε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ να μην περιέχεται εξ' ολοκλήρου στο εσωτερικό της καμπύλης.
- Αυτή ονομάζεται **μη-κυρτή καμπύλη Jordan**.
- Στη κάτω καμπύλη για όλα τα σημεία της ΑΒ είναι στο εσωτερικό ή πάνω στην καμπύλη, ονομάζεται **κυρτή καμπύλη Jordan**.

Ομαλότητα καμπύλης Jordan





- Στην πάνω υπάρχουν σημεία στα οποία η καμπύλη δεν έχει εφαπτομένη (όπως είναι το Α,Β και Γ), ενώ στην κάτω σε κάθε σημείο της μπορούμε να φέρουμε εφαπτομένη.
- Η πρώτη ονομάζεται **μη-ομαλή καμπύλη Jordan**, ενώ η δεύτερη **ομαλή καμπύλη Jordan**.

Το ερώτημα παραμένει

- Έχει αποδειχθεί [2] τόσο ότι σε κάθε κυρτή καμπύλη Jordan όσο και σε κάθε ομαλή καμπύλη Jordan υπάρχει εγγεγραμμένο τετράγωνο.
- Παρόλο τόσες και τόσες ειδικές περιπτώσεις έχουν απαντηθεί, το ερώτημα παραμένει :

Σε κάθε καμπύλη Jordan μπορεί να εγγραφεί τετράγωνο ;

Otto Toeplitz, 1911.

Επίλογος

- Η παρουσίαση, που και που, στην τάξη άλυτων προβλημάτων δεν ελκύει μόνο το ενδιαφέρον των μαθητών, αλλά τους δημιουργείται και η απορία πώς είναι δυνατό να υπάρχουν προβλήματα που δεν λύθηκαν ακόμη.
- Μίας και τόσο τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου είναι λυμένα στο τεύχος των λύσεων, όσο και τα προβλήματα που δίνονται για εργασία στο σπίτι λύνονται στον πίνακα την επόμενη μέρα.

Επίλογος

Τα άλυτα προβλήματα δημιουργούν πολλά ερωτήματα :

1. Γιατί δεν λύθηκαν ακόμη;
2. Μήπως δεν αρκούν οι θεωρίες που έχουμε μέχρι σήμερα;
3. Μήπως η υπάρχουσα ανθρώπινη ευφυία δεν έφτασε σε αρκετά υψηλό επίπεδο για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων;
4. Μήπως δεν κατανοήσαμε το πρόβλημα;

Επίλογος

5. Μήπως δεν προσπαθήσαμε αρκετά;
6. Πώς δημιουργούνται προβλήματα που δεν λύνονται;
7. Τι σημαίνει τελικά λύση ενός προβλήματος;
8. Υπάρχουν και άλλα άλυτα προβλήματα;
9. Τα άλυτα προβλήματα θα είναι άλυτα για πάντα;

Επίλογος

- Εκτός από το γεγονός ότι ένα άλυτο πρόβλημα θέτει γενικά ερωτήματα όπως τα προηγούμενα, θέτει και ένα μεγάλο πλήθος ερωτημάτων πάνω στο ίδιο το πρόβλημα, όπως για παράδειγμα ερωτήματα στο πρόβλημα που εξετάσαμε θα μπορούσαν να ήταν:
- Σε κάθε καμπύλη Jordan μπορεί να εγγραφεί ισόπλευρο τρίγωνο, κανονικό πεντάγωνο, κανονικό εξάγωνο;

Αν ναι αποδείξτε το, αν όχι να βρείτε αντιπαράδειγμα.

Επίλογος

- Είναι προφανές ότι τα άλυτα προβλήματα που θα παρουσιαστούν σε Λυκειακές τάξεις πρέπει να έχουν απλή διατύπωση, κατανοητή από τους μαθητές.
- Τέτοια προβλήματα υπάρχουν κυρίως στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και στη Θεωρία Αριθμών.
- Μπορεί να βρει κανείς μερικές δεκάδες από αυτά στα [1] και [2].
- Είναι ανάγκη να αναφερθούν προβλήματα, που την εποχή της διατύπωσής τους ήταν άλυτα, όπως για παράδειγμα τα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της Αρχαιότητας, τα οποία λύθηκαν μετά από πολλά χρόνια.

Πρέπει να μάθουμε και θα μάθουμε.
Hilbert, 1900

Ευχαριστούμε για την προσοχή σας!!!

ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΠΑΚΙΔΗΣ

georgetsapakidis@yahoo.gr

ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ ΘΕΟΔΩΡΟΠΟΥΛΟΣ

theodorotasos@gmail.com