Analysis I - Vorlesungs-Script

Prof. Dr. Camillo De Lellis

Basisjahr 10 Semester II

Mitschrift:
Simon Hafner

Inhaltsverzeichnis

1 Die reellen Zahlen

Beispiel 1. $\mathbb{R}$ ist nicht genug

Satz 1. *Es gibt kein $q \in \mathbb{Q}$ so dass $q^2 = 2$*

Beweis 1. *Falls $q^2 = 2$, dann $(-q)^2 = 2$ OBdA $q \geq 0$ Deswegen $q > 0$. Sei $q > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ so dass $q^2 = 2$. $q = \frac{m}{n}$ mit $m > 0$, > 0. $GGT(m, n) = 1$ (d.h. falls $r \in \mathbb{N}$ m und n dividiert, dann $r = 1$!).*

$$
\begin{aligned}
m^2 = 2n^2 &\implies m \text{ ist gerade} && \implies m = 2k \text{ für } k \in \mathbb{N} \\
\{0\} \\
4k^2 = 2n^2 &\implies n \text{ ist gerade} && \implies 2 | n (2 \text{ dividiert } n)
\end{aligned}
$$

$\implies$ *Widerspruch! Weil 2 dividiert m und n! (d.h. es gibt <u>keine</u> Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$*

Beispiel 2.

$$\sqrt{2} = 1,414 \cdots$$

Intuitiv:

$$
\begin{array}{rrr c rrr}
1,4^2 < & 2 < & 1,5^2 & & 1,4 < & \sqrt{2} < & 1,5 \\
1,41^2 < & 2 < & 1,42^2 & \implies & 1,41 < & \sqrt{2} < & 1,42 \\
1,414^2 < & 2 < & 1,415^2 & & 1,414 < & \sqrt{2} < & 1,415
\end{array}
$$

Intuitiv

- $\mathbb{Q}$ hat "Lücke"
- $\mathbb{R} = \{$ die reellen Zahlen $\}$ haben "kein Loch".

Konstruktion Die reellen Zahlen kann man "konstruieren". (Dedekindsche Schritte, Cantor "Vervollständigung"). Google knows more. Wir werden "operativ" sein, d.h. wir beschreiben einfach die wichtigsten Eigenschaften von $\mathbb{R}$

1.1 Körperstrukturen

K1 Kommutativgesetz

$$
\begin{aligned}
a + b &= b + a \\
a \cdot b &= b \cdot a
\end{aligned}
$$

K2 Assoziativgesetz

$$
\begin{aligned}
(a + b) + c &= a + (b + c) \\
(a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c)
\end{aligned}
$$

K3 Distributivgesetz

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

K4

$$
\begin{aligned}
a + x &= b \\
a \cdot x &= b \text{falls } a \neq 0
\end{aligned}
$$

1.2 Die Anordnung von $\mathbb{R}$

A1 $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Relationen:

- $a < 0$
- $a = 0$
- $a > 0$

A2 Falls $a > 0$, $b > 0$, dann $a + b > 0$, $a \cdot b > 0$

A3 Archimedisches Axiom: $\forall a \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$

Übung 1. Beweisen Sie dass $a \cdot b > 0$ falls $a < 0$, $b < 0$

Satz 2. $\forall x > -1$, $x \neq 0$ *und* $\forall n \in \mathbb{N}$
$\{0, 1\}$ *gilt* $(1 + x)^n > (1 + nx)$

Beweis 2.

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + \underbrace{x^2}_{>0} > 1 + 2x$$

weil $x \neq 0$.
Nehmen wir an dass

$$\begin{aligned} (1+x)^n &> & 1 + nx(x > -1, x \neq 0) \\ \underbrace{(1+x)}_{a}\underbrace{(1+x)^n}_{c} &> & \underbrace{(1+nx)}_{d}(1+x)(\textit{weil}(1+x) > 0) \end{aligned}$$

$$c > d \iff c - d > 0 \overset{A2}{\implies} a(c-d) > 0 \overset{K4}{\implies} ac - ad > 0 \overset{A2}{\implies} ac > ad$$

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 &= \\ 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{>0} &> 1 + (n+1)x \\ \implies (1+x)^{n+1} &> 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

Vollständige Induktion.

Definition 1. Für $a \in \mathbb{R}$ setzt man

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls} a \geq 0 \\ -a & \text{falls} a < 0 \end{cases}$$

Satz 3. *Es gilt (Dreiecksungleichung):*

$$\begin{aligned} |ab| &= & |a||b| \\ |a+b| &\leq & |a| + |b| \\ ||a| - |b|| &\leq & |a - b| \end{aligned}$$

Beweis 3.

- $|ab| = |a||b|$ *trivial*
-
  $$a + b \leq |a| + |b|$$

  ($a > 0$ und $b > 0 \implies a + b = |a| + |b|$ sonst $a + b < |a| + |b|$ weil $x \leq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$ und die Gleichung gilt).

  $$-(a+b) = -a - b \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$$

  Aber

  $$|a+b| = max\{a + b, -(a+b)\} \leq |a| + |b|$$

- $$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

  Zuerst:

$$\begin{aligned} |a| = |(a-b)+b| &\leq |a-b| + |b| \\ \implies |a| - |b| &\leq |a-b| \\ |b| = |a+(b-a)| &\leq |a| + |b-a| \\ \implies |b| - |a| &\leq |b-a| = |a-b| \\ \implies (|a| - |b|) &\leq |a-b| \end{aligned}$$

$$||a| - |b|| = max\{|a| - |b|, -(|a| - |b|)\} \leq |a - b|$$

Bemerkung 1.

$$|x| = max\{-x, x\}$$

1.3 Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Für $a < b$, $a \in \mathbb{R}$, heisst:

- abgeschlossenes Intervall: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- offenes Intervall: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- (nach rechts) halboffenes Intervall: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- (nach links) halboffenes Intervall: $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Sei $I = [a, b]$ (bzw. $]a, b[\ldots$). Dann a, b sind die Randpunkte von I. Die Zahl $|I| = b - a$ ist die Länge von I. $(b - a > 0)$

Definition 2. Eine Intervallschachtelung ist eine Folge $I_1, I_2, \cdots$ geschlossener Intervalle (kurz $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (I_n)) mit diesen Eigenschaften:

I1 $I_{n+1} \subset I_n$

I2 Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n so dass $|I_n| < \epsilon$

Beispiel 3. $\sqrt{2}$

$$\begin{array}{rrrcr} 1,4^2 < & 2 < & 1,5^2 & & I_1 = [1,4/1,5]|I_1| = 0.1 \\ 1,41^2 < & 2 < & 1,42^2 & \implies & I_2 = [1,41/1,42]|I_2| = 0.01 \\ 1,414^2 < & 2 < & 1,415^2 & & I_3 = [1,414, 1,415]|I_2| = 0.001 \end{array}$$

Beweis 4. *I1 und I2 sind beide erfüllt.*

Axiom 1. *Zu jeder Intervallschachtelung $\exists x \in \mathbb{R}$ die allen ihren Intervallen angehört.*

Satz 4. *Die Zahl ist eindeutig.*

Beweis 5. *Sei (I_n) eine Intervallschachtelung. Nehmen wir an dass $\exists \alpha < \beta$ so dass $\alpha, \beta \in I_n \forall n$. Dann $|I_n| \geq |\beta - \alpha| > a$. Widerspruch!*

Satz 5. *$\forall a \geq 0, a \in \mathbb{R}$ und $\forall x \in \mathbb{N}$*
$\{0\}$, $\exists$ eine einziges $x \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ s.d. $x^k = a$. Wir nennen $x = \sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$.
Sei $m, n \in \mathbb{N}$, $a^{m+n} = a^m a^n$ und deswegen $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ für $m \in \mathbb{N}$ (so dass die Regel $a^{m-m} = a^0 = 1$.
$n, m \in \mathbb{N}$
$\{0\}$ n Mal.

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n\ Mal} = a^{\overbrace{m + \cdots + m}^{n\ Mal}} = a^{nm}$$

Und mit $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ stimmt die Regel $(a^m)^n = a^{mn}$ auch $\forall m, n \in \mathbb{Z}$!

Bemerkung 2. $x^k = \left(a^{\frac{1}{k}}\right)^k = a \left(= a^{\frac{1}{k}k} = a^1\right)$

Definition 3. $\forall q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $\forall a > 0$ mit definiertem $a^q = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Beweis 6. *Mit dieser Definition gilt* $a^{q+q_2} = a^q a^{q_2}$ $\forall a > 0$ *und* $\forall q, q_2 \in \mathbb{Q}$.

Satz 6. *Zu jedem* $x > 0$ $(x \in \mathbb{R})$ *und zu jedem* $k \in \mathbb{N}$ *gibt es eine reelle Zahl* $y > 0$ *so dass* $y^k = x$. *In Zeichen:*

$$y = x^{\frac{1}{k}}, y = \sqrt[k]{x}$$

Beweis 7. *oBdA* $x > 1$ *(sonst würden wir* $\frac{1}{x}$ *betrachten). wir konstruieren eine Intervallschachtelung* (I_n) *so dass* $\forall n a_n^k \geq x \geq b_n^k$

$I_1 := [1, x] I_{n+1} = \left\{ \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] \quad \text{falls } x \leq \left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^k \left[\frac{a_n+b_n}{2}, n\right] \right. |I_n| = \frac{1}{2^{n-1}} |I_1|$

Intervallschachtelungsprinzip $\implies \exists y \in \mathbb{R}$ *s.d.* $y \in I_n \forall n \in \mathbb{N}$

Satz 7. $y^k = x$

Beweis 8. *Man definiert* $J_n = [a_n^k, b_n^k$. *Wir wollen zeigen, dass* J_n *eine Intervallschachtelung ist.*

- $J_{n+1} \subset J_n$ *weil* $I_{n+1} \subset I_n$
- $$|J_n| = b_n^k - a_n^k = \underbrace{(b_n - a_n)}_{|I_n|} \underbrace{(b_n^{k-1} + b_n^{k-2} a_n + \cdots + a_n^{k-1})}_{\leq k b_1^{k-1}}$$

$\implies |J_n| \leq |I_n| k k_1^{k-1}$.
Sei ε *gegeben. Man wähle* N *gross genug, so dass*

$$|I_n| \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{k b_1^{k-1}} \implies |J_n| \leq \varepsilon k b_1^{k-1} = \varepsilon$$

Einerseits

$$y \in [a_n, b_n] \implies y^k \in \left[a_n^k, b_n^k\right] = J_n$$

Andererseits

$$x \in J_n \forall n \in \mathbb{N}$$

Intervallschachtelungsprinzip $\implies x = y^k$

1.4 Supremumseigenschaft, Vollständigkeit

Definition 4. $s \in \mathbb{R}$ heisst obere (untere) Schranke der Menge $M \subset \mathbb{R}$ falls $s \geq x$ $(s \leq x)$ $\forall x \in M$.

Definition 5. $s \in \mathbb{R}$ ist das Supremum der Menge $M \subset \mathbb{R}$ falls es die kleinste obere Schranke ist. D.h.

- s ist die obere Schranke
- falls $s' < s$, dass ist s' keine obere Schranke.

Beispiel 4. $M =]0, 1[$. In diesem Fall $s = \sup M \notin M$

Beispiel 5. $M = [0, 1]$. $\sup M = 1 \in M$

Definition 6. $s \in \mathbb{R}$ heisst Infimum einer Menge M $(s = \inf M)$ falls s die grösste obere Schranke ist.

Definition 7. Falls $s = \sup M \in M$, nennt man s das Maximum von M. Kurz: $s = \max M$. Analog Minimum.

Satz 8. *Falls $M \subset \mathbb{R}$ nach oben (unten) beschränkst ist, dann existiert* $\sup M$ *(*$\inf M$*).*

Beweis 9. *Wir konstruieren eine Intervallschachtelung I_n, so dass b_n eine obere Schranke ist, und a_n keine obere Schranke ist.*

- *$I_1 = [a_1, b_1]$, wobei b_1 eine obere Schranke*
- *a_1 ist keine obere Schranke*

Sei I_n gegeben.

$$I_{n+1} = \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] & \text{Falls } \frac{a_n+b_n}{2} \text{ eine obere Schranke ist-} \\ \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] & \text{sonst} \end{cases}$$

Also, $\exists s \in I_n \forall n$

Satz 9. *s ist das Supremum von M*

- *Warum ist s eine obere Schranke?*
  Angenommen $\exists x \in M$ so dass $x > s$. Man wähle $|I_n| < x - s$. Daraus folgt
  $$x - s > b_n - a_n \geq b_n - s \implies x > b_n$$
  Widerspruch.
- *Warum ist s die kleinste obere Schranke?*
  Angenommen $\exists s' < s$. Dann wähle n' so dass $I_{n'} < s - s'$.
  $$s - s' > b_{n'} - a_{n'} \geq s - a_{n'} \implies a_{n'} > s'$$
  Widerspruch.

Lemma 1. *Jede nach oben (unten) beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{Z}$ besitzt das grösste (kleinste) Element.*

Beweis 10. *oBdA betrachte nur nach unten beschränkte Mengen $M \subset N$. Angenommen M hat kein kleinstes Element.*

Satz 10.

$$\begin{aligned} \forall n M \cap \{1, \cdots, n\} = \\ n = 1 \\ M \cap \{1\} \end{aligned}$$

Angenommen

$$\begin{aligned} M \cap \{1, \cdots, n\} = \\ M \cap \{1, 2, \cdots, n+1\} = M \cap \{1, \cdots, n\} \cup M \cap \{n+1\} = \\ \implies M \cap \mathbb{N} = \end{aligned}$$

Satz 11. *$\mathbb{Q}$ ist dich in $\mathbb{R}$, bzw. für beliebige zwei $x, y \in \mathbb{R}$, $y > x$, gibt es eine rationelle Zahl $q \in \mathbb{Q}$, so dass $x < q < y$.*

Beweis 11. *Man wähle $n \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{n} < y - x$. Betrachte die Menge $A \subseteq \mathbb{Z}$, so dass $M \in A \implies M > nx$. Lemma $\implies \exists m = \min A$.*

$$x < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < x + y - x = y$$

Also setze $q = \frac{m}{n}$

1.5 Abzählbarkeit

Definition 8. Die Mengen A & B sind gleichmächtig, wenn es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt. A hat grässere Mächtigkeit als B, falls B gleichmächtig wie eine Teilmenge von A ist, aber A zu keiner Teilmenge von B gleichmächtig ist.

Beispiel 6.

- $1, 2$ & $3, 4$ sind gleichächtig.
- $1, 2, \cdots, n$ hat kleinere Mächtigkeit als $1, 2, \cdots, m$, wenn $n < m$ ist.

Definition 9. Eine Menge A ist abzählbar, wenn es eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und A gibt. D.h. $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$.

Lemma 2. *$\mathbb{Z}$ ist abzählbar*

Beweis 12.

$\mathbb{N}$	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	...
$\mathbb{Z}$	*0*	*1*	*-1*	*2*	*-2*	...

Formal:

$$f = \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \textit{wenn } n \textit{ gerade} \\ \frac{1-n}{2} & \textit{wenn } n \textit{ ungerade} \end{cases}$$

Satz 12. *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar*

Beweis 13. *Sucht euch die Graphik auf Wikipedia oder sonstwo.*

Satz 13. *$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.*

2 Komplexe Zahlen

Bemerkung 3. $\forall a \in \mathbb{R}$, $a^2 > 0$. Deswegen ist $x^2 = -1$ unlösbar. Die Erfindung von $i^2 = -1$ (die imaginäre Zahl) hat sehr interessante Konsequenzen auch für die üblichen reellen Zahlen.

2.1 Definition

Definition 10. Sei $a, b \in \mathbb{R}$, dann $a + bi \in \mathbb{C}$.

$$(a + bi) + (\alpha + \beta i) = (a + \alpha) + (b + \beta)i(a + bi)(\alpha + \beta i) = (a\alpha - b\beta) + \underbrace{(a\beta + b\alpha)}_{A}$$

Definition 11. Seien A und B zwei Mengen. Dann ist $A \times B$ die Menge der Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Definition 12. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $+$ und $\cdot$, die wir so definieren:

$$(a, b) + (\alpha, \beta) = (a + \alpha, b + \beta) \ (a, b)(\alpha, \beta) = (a\alpha - b\beta, \underbrace{a\beta + b\alpha}_{A})$$

Bemerkung 4.

$$\mathbb{R} \simeq \{(a, 0), a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}(a, 0) + (\alpha, 0) = (a + \alpha, 0) \ (a, 0)(\alpha, 0) = (a\alpha, 0)$$

Bemerkung 5.

$$(0, a)(0, b) = (-ab, 0)$$

Deswegen falls $-1 \in \mathbb{R}$ ist $(-1, 0)$.

$$\underbrace{(0, 1)}_{\text{Wurzel von -1}} \quad (0, 1) = (-1, 0) \qquad \underbrace{(0, -1)}_{\text{auch eine Wurzel von -1}} \quad (0, -1) = (-1, 0)$$

Definition 13. $i = (0, 1)$ und wir schreiben (a, b) für $a + bi$.

Bemerkung 6. $0 = (0,0) = 0 + 0i$. $\xi \in \mathbb{C}$

$$0\xi = 0$$
$$0 + \xi = \xi$$

Satz 14. *Alle Körperaxiome (K1-K4) gelten.*

Beweis 14. *K1 Kommultativität*

K2 Assoziativität

K3 Distributivität

K4 Seien $\xi, \zeta \in \mathbb{C}$.

$$\exists \omega \in \mathbb{C} \xi + \omega = \zeta \tag{1}$$
$$\xi \neq 0 \exists \omega \xi \omega = \zeta \tag{2}$$

Beweis 15.

$$\xi = a + bi \zeta = c + di \omega = x + yi$$
$$\xi + \omega = (a + x) + (b + y)i = \xi = c + di$$

Sei $x := c - a$, $y := d - b$. *Dann* $\xi + \omega = \zeta$.

Beweis 16. *Mit derselben Methode.* $i\,[= 1 + 0i\,[= (1,0)]]$ *ist das neutrale Element.*

$$(a + bi)(1 + 0i) = \underbrace{(a1 - b0)}_{a} + \underbrace{(b1 + a0)}_{b} = (a + bi)$$

Sei $\xi \neq 0$ *und suchen wir* α *so dass* $\xi\alpha = 1$. *Dann ist* $\omega = \alpha\xi$ *eine Lösung von (2) (eigentlich DIE Lösung). Falls* $\xi = a + bi$

$$\alpha = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \xi\alpha = \overbrace{\left(\frac{aa}{a^2 + b^2} - \frac{b(-b)}{a^2 + b^2}\right)} \left(\frac{a(-b)}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2}\right) i = 1$$

Definition 14. Sei $\xi = (x + yi) \in \mathbb{C}$. Dann:

- x ist der reelle Teil von ξ $(\operatorname{Re}\xi = x)$
- y ist der imaginäre Teil von ξ $(\operatorname{Im}\xi = y)$
- $x + yi$ ist die konjugierte Zahl $\left(\overline{\xi} = (= x - yi)\right)$

Beweis 17.

$$\sqrt{\overline{\xi}\xi} = \sqrt{(\operatorname{Re}\xi)^2 + (\operatorname{Im}\xi)^2} =: |\xi|$$

Definition 15. $|\xi|$ ist der Betrag von ξ.

Satz 15. *Es gilt:* $(\forall a, b \in \mathbb{C})$*:*

- –
  $$\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$$
  –
  $$\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$$
- –
  $$\operatorname{Re} a = \frac{a + \overline{a}}{2}$$
  –
  $$(\operatorname{Im} a)i = \frac{a - \overline{a}}{2}$$
- $a = \overline{a}$ *genau dann wenn* $a \in \mathbb{R}$.

- $$a\overline{a} = |a|^2 = \sqrt{(\operatorname{Re} a)^2 + (\mathrm{j}a)^2} \geq 0$$

  (die Gleicheit gilt genau dann wenn $a = 0$)

Bemerkung 7. Sei ω so dass $\xi\omega = 1$ ($\xi \neq 0$). Man schreibt $\omega\frac{1}{\xi}$ und $\omega = \frac{\overline{\xi}}{|\xi|^2}$

Satz 16. $\forall a, b \in \mathbb{C}$

- $|a| > 0$ *für* $a \neq 0$ *(trivial)*
- $|\overline{a}| = |a|$ *(trivial)*
- $|\operatorname{Re} a| \leq |a|$, $|\operatorname{Im} a| \leq |a|$ *(trivial)*
- $|ab| = |a||b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$

Beweis 18.

$$|ab|^2 = (ab)\overline{(ab)} = ab\overline{a}\overline{b} = a\overline{a}\overline{b} = |a|^2|b|^2 \implies |ab| = |a||b|$$

$$\iff |a+b|^2 \leq (|a| + |b|)^2 \underbrace{(a + b)\overline{(a + b)}}_{|a+b|^2 \in \mathbb{R}} = (a+b)(\overline{a}+\overline{b}) = a\overline{a}+b\overline{b}+a\overline{b}+b\overline{a} = \underbrace{|a|^2 + |b|^2}_{\in \mathbb{R}} + \left(a\overline{b} + b\overline{a}\right) \iff a\overline{b} +$$

Nebenbemerkung:

$$b = (\alpha + \beta i)\overline{b} = (\alpha - \beta i)\overline{\overline{b}} = (\alpha - (-\beta)i) = \alpha + \beta i = b$$

$$a\overline{b} + \overline{a}\overline{(\overline{b})}a\overline{b} + \overline{(a\overline{b})} = 2\operatorname{Re}(a + \overline{b}) = \operatorname{Re}(2(a\overline{b})) \leq |2a\overline{b}| = 2|a||\overline{b}| = 2|a||b|$$