

# Analysis II - Vorlesungs-Script

Prof. Dr. Camillo De Lellis

Basisjahr 11 Semester I

**Mitschrift:**

Simon Hafner

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Metrik und Topologie des euklidischen Raumes</b>	<b>1</b>
1.1	Konvergenz . . . . .	3
1.2	Ein bisschen mehr Topologie . . . . .	5
1.3	Stetigkeit . . . . .	6
1.4	lineare Abbildungen . . . . .	7
1.5	Mehr über stetige Funktionen . . . . .	10
1.6	Kompakte Menge . . . . .	12
1.7	Differenzierbare Funktionen . . . . .	15
1.7.1	Das Differenzial . . . . .	17
1.7.2	Richtungsableitung . . . . .	17
1.7.3	Partielle Ableitung . . . . .	18
1.8	Rechenregeln . . . . .	19
1.9	Mittelwertsatz und Schrankensatz . . . . .	22
1.10	Höhere (partielle) Ableitungen . . . . .	23
1.11	Das Taylorpolynom zweiter Ordnung . . . . .	27
1.12	Konvexität . . . . .	30
1.13	Differentiation parameterabhängiger Integrale . . . . .	30

# 1 Metrik und Topologie des euklidischen Raumes

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n), x \in \mathbb{R}\}$  In  $\mathbb{R}^n$ :

- Norm (Euklidische)
- Abstand (Euklidische)
- Topologie

“Abstrakte Theorie”

- Normierte Vektorräume
- Metrische Räume
- Topologische Räume

**Definition 1.1.** Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  ( $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$ )

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Intuitiv:  $\|x\|$  = ”der Abstand zwischen  $x$  und 0“

**Lemma 1.2.**  $\|\cdot\|$  erfüllt die Regeln

1.  $\|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

*Beweis.* 1.  $\geq 0$  trivial

$$x = 0 \implies \sum x_i^2 = 0 \implies \|x\| = 0$$

$$x = 0 \iff x_i = 0 \forall i \iff \sum x_i^2 = 0 \iff \|x\| = 0$$

2.

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda x_i)^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |\lambda| \|x\|$$

$$|\lambda| = \frac{\|x\| |\lambda|}{\|x\|}$$

3.

$$\iff \underbrace{\|x + y\|^2}_{=} \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\|$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \overbrace{2 \sum_{i=1}^n x_i y_i}^{\text{Skalarprodukt}} \\ &\iff \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

□

**Satz 1.3.** Cauchy-Schwartzsche Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

*Beweis.* OBdA  $y \neq 0$  ( $y = 0$  trivial)

$$\begin{aligned} t \rightarrow g(t) &= \sum_{i=1}^n (x_i + ty_i)^2 \\ &= \left( \sum x_i^2 \right) + 2t \sum x_i y_i + t^2 \sum y_i^2 \\ &= \|x\|^2 + 2t \langle x, y \rangle + \|y\|^2 t^2 \end{aligned}$$

Sei  $t_0 = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$ , dann  $g(t_0) \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 &\leq g(t_0) \\ &= \|x\|^2 - 2 \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} + \|y\|^2 \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^4} \\ &= \|x\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \\ \implies \langle x, y \rangle &\leq \|x\|^2 \|y\|^2 \\ \implies |\langle x, y \rangle| &\leq \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

□

**Definition 1.4.** Ein normierter Vektorraum ist ein reeller Vektorraum  $V$  mit einer Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  so dass:

1.  $\|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0 \iff x = 0$  (Nullvektor)
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$

**Beispiel 1.5.**  $V = \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \left( \sum |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad p \geq 1$$

$p = 2$  euklidische Norm

**Definition 1.6.** Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Die euklidische Metrik  $d(x, y) = \|x - y\|$

**Lemma 1.7.** 1.  $d(x, y) \geq 0$  und  $d(x, y) = 0 \iff x = y$

$$2. \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$3. \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \|x - z\| &\leq \underbrace{\|x - y\|}_v + \underbrace{\|y - z\|}_w \quad v + w = x - z \\ \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\| \end{aligned}$$

□

**Definition 1.8.** Ein metrischer Raum ist eine Menge  $X$  mit einer Abbildung

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R}$$

so dass

1.  $d(x, y) \geq 0$  und  $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X$
2.  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

**Lemma 1.9.** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum. Dann sind  $V$  und  $d(x, y) = \|x - y\|$  ein metrischer Raum.

**Definition 1.10.** Die offene Kugel mit Radius  $r > 0$  und Mittelpunkt  $x \in \mathbb{R}^n$  ist die Menge

$$K_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) < r\}$$

**Definition 1.11.** Eine Menge heisst "Umgebung" von  $x$ , wenn  $V$  eine offene Kugel mit Mittelpunkt  $x$  enthält.

**Definition 1.12.** Eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heisst offen falls  $\forall x \in U$  ist  $U$  eine Umgebung von  $x$

$$\forall x \in U \exists \text{ eine Kugel } K_r(x) \subset U$$

*Bemerkung 1.13.* Eine offene Kugel ist offen.

**Satz 1.14.** 1.  $\emptyset$  und  $\mathbb{R}^n$  sind offen

2. Der Schnitt endlich vieler offener Mengen ist auch offen.

3. Die Vereinigung einer beliebigen Familie offener Mengen ist auch offen.

*Beweis.* 1.  $\mathbb{R}^n$  trivialerweise offen, auch  $\emptyset$

2. Sei  $x \in U \cap \dots \cap U_N$

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad K_r(x) \subset U_i$$

$$\text{Sei } r = \min \{r_1, \dots, r_N\}$$

$$\implies K_r(x) \subset U_i \forall i \implies K_r(x) \subset U_1 \cap \dots \cap U_N$$

3.  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ . Sei  $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

$$x \in U \implies x \in U_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \Lambda$$

$$\implies \exists K_r(x) \subset U_\lambda \subset U$$

□

**Definition 1.15.** Ein topologischer Raum ist eine Menge  $X$  und eine Menge  $\mathcal{O}$  von Teilmengen von  $X$  so dass:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

2.  $U_1 \cap \dots \cap U_N \in \mathcal{O}$  falls  $U_i \in \mathcal{O}$

3.  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$  falls  $U_i \in \mathcal{O}$

**Satz 1.16.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum

$$K_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Umgebungen und offene Mengen sind wie im euklidischen Fall.  $\mathcal{O} = \{\text{offene Menge}\}$  definiert eine Topologie.

## 1.1 Konvergenz

Sei  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \quad x_k \in \mathbb{R} \quad x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$

**Definition 1.17.** Die Folge  $\{x_k\}$  konvergiert gegen  $x_\infty \in \mathbb{R}^n$  falls

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x_\infty) = 0$$

$$\left( \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k, x_\infty\| = 0 \right)$$

Dann schreiben wir

$$x_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$$

**Satz 1.18.**

$$x_k \rightarrow x_\infty \iff x_{ki} \rightarrow x_{\infty_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \|x_k - x_\infty\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{ki} - x_{\infty_i})^2} \geq |x_{ki} - x_{\infty_i}| \geq 0 \\ \implies 0 &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} |x_{ki} - x_{\infty_i}| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x_\infty\| = 0 \\ \|x_k - x_\infty\| &= \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^n \underbrace{(x_{ki} - x_{\infty_i})^2}_{\rightarrow 0}}_{\rightarrow 0}} \leq \sum_{i=1}^n |x_{ki} - x_{\infty_i}| \\ \implies \|x_k - x_\infty\| &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Eine alternative Formulierung:  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \left( \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k1}, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{kn} \right)$  □

*Bemerkung 1.19.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \|x_k - x_\infty\| < \varepsilon \text{ falls } k \geq N$$

Für jede Umgebung  $U$  von  $x_\infty$  fast alle  $x_k \in U$ .

**Definition 1.20.** Eine Folge  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$  heisst Cauchy falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : m, k \geq N \implies \|x_k - x_m\| < \varepsilon$$

**Lemma 1.21.**  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$  konvergiert genau dann, wenn  $\{x_k\}$  Cauchy ist.

$$\text{Beweis. } \{x_k\} \text{ ist Cauchy} \implies \left\{ x_k \underbrace{i}_{\{\text{fixiert}\}} \right\} \text{ Cauchy!}$$

$$|x_{ki} - x_{mi}| \leq \|x_k - x_m\|$$

$\implies \{x_k\}$  ist eine Cauchyfolge  $\xrightarrow{\text{Erstes Semester}} x_{ki}$  konvergiert  $\xrightarrow{\text{Lemma 2}} x_k$  konvergiert.  $x_k$  konvergiert  $\implies$  Cauchyfolge

$$x_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N : \|x_k - x_\infty\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N$$

$$\begin{aligned} k, m \geq N \quad \|x_k - x_m\| &\leq \|x_k - x_\infty\| + \|x_\infty - x_m\| \leq d(x_k, x_\infty) + (x_\infty, x_m) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

*Bemerkung 1.22.* In einem metrischen Raum, Cauchy  $\Leftarrow$  Konvergenz. Aber allgemein: Cauchy  $\not\implies$  Konvergenz. Falls Cauchy  $\implies$  Konvergenz, dann ist der metrische Raum vollständig.

**Definition 1.23.** Eine Folge  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$  heisst beschränkt falls  $\|x_k\|$  beschränkt ist.

**Satz 1.24.** 1. Eine konvergente Folge ist beschränkt

2. (Bolzano-Weierstrass)  $\{x_k\}$  beschränkt  $\implies \exists \{x_{k_j}\}$  die konvergiert.

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \{x_k\} \text{ beschränkt} &\implies \{x_{k1}\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt} \\ &\implies \exists x_{k_j} : x_{k_j1} \rightarrow x_1 \end{aligned}$$

Ich definiere  $y_j = x_{k_j}$   $y_{j1} \rightarrow x_1$

$$y_j \text{ beschränkt} \implies \exists j_l : y_{j_l2} \rightarrow x_2$$

$$z_l := y_{j_l} \text{ und } z_{l1} \rightarrow x_1, \quad z_{l2} \rightarrow x_2$$

... (n - 2) Schritte.  $w_r$  Teilfolge von  $x_k$  mit  $w_{ri} \rightarrow x_i$

$$w_r \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$$

□

## 1.2 Ein bisschen mehr Topologie

**Definition 1.25.** Eine Menge  $G \subset \mathbb{R}^n$  heisst geschlossen falls  $G^c := \mathbb{R}^n \setminus G$  eine offene Menge ist.

*Bemerkung 1.26.*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

**Satz 1.27.** 1.  $\emptyset, \mathbb{R}^n$  sind abgeschlossen

2.  $G_1, \dots, G_N$  abgeschlossen  $\implies G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_N$  abgeschlossen

3.  $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  abgeschlossen  $\implies \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$  abgeschlossen.

**Satz 1.28.**  $G \subset \mathbb{R}^n$   $G$  ist abgeschlossen  $\iff \forall$  jede konvergente  $\{x_k\} \subset G$  gehört der Grenzwert zu  $G$  (gilt auch für metrische Räume).

*Beweis.*  $\Leftarrow$  Die rechte Eigenschaft gilt. Ziel:  $G^c$  ist offen. Sei  $x \in G^c$ : das Ziel ist eine Kugel  $K_r(x) \in G^c$  zu finden. Widerspruchsbeweis:  $K_{\frac{1}{j}}(x) \not\subset G^c$ ,  $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\implies \exists x_j \in K_{\frac{1}{j}}(x) \cap G \implies \{x_j\} \subset G \text{ und } x_j \rightarrow x$$

$$\{x_j\} \subset G \quad x_j \rightarrow x \quad x \notin G$$

$\implies$  d.h.  $G^c$  offen  $\implies$  falls  $\{x_k\} \subset G$  und  $x_k \rightarrow x$  dann  $x \in G$   
Widerspruch:  $G^c$  offen, aber  $\exists \{x_k\} \subset G$  mit Grenzwert  $x \notin G$ , d.h.  $x \in G^c$ . Offenheit von  $G^c$ .

$$\implies \exists K_r(x) \subset G^c \implies K_r(x) \cap G = \emptyset$$

d.h.  $\exists N$  mit

$$\|x_N - x\| < r \implies x_N \in K_r(x) \cap G$$

□

**Beispiel 1.29.** Eine offene Kugel ist nicht geschlossen.

$$K_r(x) = \{y : \|y - x\| < r\}$$

Sei  $\{y_k\} \in K_r(x)$ , (d.h.  $\|y_k - x\| < r$ ) mit  $y_k \rightarrow y$  und  $\|y - x\| = r$ .

**Definition 1.30.** Sei  $\overline{K_r(x)} := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$ .

**Übung 1.31.**  $\overline{K_r(x)}$  ist abgeschlossen

**Definition 1.32.**  $x \in \mathbb{R}^n$  ist ein Randpunkt von  $M$  falls

$$\forall K_r(x) \quad \exists y \in K_r(x) \cap M \quad \text{und} \quad \exists z \in K_r(x) \cap M^c$$

**Definition 1.33.** Sei  $M$  eine Menge in  $\mathbb{R}^n$ , dann ist der Rand von  $M$

$$\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n, \text{ Randpunkt von } M\}$$

**Satz 1.34.**  $\partial M^c = \partial M$

1.  $M \setminus \partial M$  ist die grösste offene Menge die in  $M$  enthalten ist.

2.  $M \cup \partial M$  ist die kleinste geschlossene Menge die  $M$  enthält.

*Beweis.*  $M \setminus \partial M$  ist offen.

$$\begin{aligned} x \in M \setminus \partial M &\implies x \in M \text{ und } \exists K_r(x) \text{ mit } K_r(x) \cap M^c = \emptyset \\ &\implies K_r(x) \subset M \end{aligned}$$

Sei  $y \in K_r(x)$

$$\begin{aligned} &\implies |y - x| = \rho < r \\ &\implies K_{r-\rho}(y) \subset K_r(x) \subset M \implies y \in M, y \notin \partial M \\ &\quad K_r(x) \subset M \setminus \partial M \end{aligned}$$

$x$  ist beliebig  $\implies M \setminus \partial M$  ist offen.

Sei  $A \subset M$  eine offene Menge. Das Ziel ist  $A \subset M \setminus \partial M$ . Sei  $x \in A$ . Ziel:  $(x \in M \setminus \partial M) \implies x \notin \partial M$ .

$$A \text{ offen} \implies \exists K_r(x) \subset A \subset M \implies x \notin \partial M \implies A \subset M \setminus \partial M$$

□

### 1.3 Stetigkeit

**Definition 1.35.** Sei  $f : \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}^k$ .  $f$  ist stetig an der Stelle  $x \in \Omega$  falls  $\forall \{x_k\} \subset \Omega$  mit  $x_k \rightarrow x$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x)$$

**Lemma 1.36.** Eine äquivalente Definition:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(K_\delta(x) \cap \Omega) \subset K_\varepsilon(f(x))$$

*Beweis.*  $\varepsilon$ - $\delta \implies$  Folgenddefinition. Sei  $x_k \rightarrow x$ . Ziel:  $f(x_k) \rightarrow f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ mit } \underbrace{\|f(x_k) - f(x)\|}_{d(f(x_k), f(x))} < \varepsilon \quad \forall k \geq N$$

$$\exists \delta > 0 \quad \underbrace{f(K_\delta(x)) \subset K_\varepsilon(f(x))}$$

$$\exists \|x_k - x\| < \delta \quad k \geq N$$

$$x_k \in K_\delta(x) \implies f(x_k) \in K_\varepsilon(f(x))$$

Folgenddefinition  $\implies$   $(\varepsilon$ - $\delta)$ -Defintion. Widerspruchsannahme:

$$\exists \varepsilon > 0 : f(K_\delta(x) \cap \Omega) \not\subset K_\varepsilon(f(x)) \quad \forall \delta > 0$$

$$\implies \forall \delta > 0 \exists y_\delta \in K_\delta(x) \text{ und } \|f(y_\delta) - f(x)\| \geq \varepsilon$$

Nehmen wir  $\delta = \frac{1}{j}$  und  $x_j = \frac{y_1}{j}$

$$\|x_j - x\| < \frac{1}{j} \quad (\text{weil } x_j \in K_{\frac{1}{j}}(x))$$

$$\|f(x_j) - f(x)\| = \|f(y_{\frac{1}{j}}) - f(x)\| \geq \varepsilon$$

$x_j \rightarrow x$  aber  $f(x_j) \not\rightarrow f(x)$

□

**Definition 1.37.** Die allgemeine Defintion der Stetigkeit für metrische Räume: Seien  $(X, d)$  und  $(Y, \bar{d})$  zwei metrische Räume. Sei  $f : X \rightarrow Y$ .  $f$  ist stetig an der Stelle  $x$  falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } d(y, x) < \delta \implies \bar{d}(f(y), f(x)) < \varepsilon$$

$$\iff f(K_\delta(x)) \subset K_\varepsilon(f(x))$$



**Definition 1.38.** Eine  $f : X \rightarrow Y$  heisst stetig falls  $f$  stetig an jeder Stelle  $x \in X$  ist.

**Satz 1.39.** Sei  $f : X \rightarrow Y$   $((X, d), (Y, \bar{d}))$  metrische Räume) Dann:

1. Die Stetigkeit in  $x \iff \forall$  Umgebung  $U$  von  $f(x)$  ist  $f^{-1}(U)$  eine Umgebung von  $x$ .
2. Stetigkeit von  $f \iff f^{-1}(U)$  ist offen  $\forall U$  offen.

*Beweis.* 1. • Stetigkeit  $\implies$  Umgebung.  $U$  Umgebung von  $f(x) \implies \exists \delta > 0$  mit  $K_\delta(f(x)) \subset U$

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : f(K_\varepsilon(x)) \subset K_\delta(f(x))$$

$$\implies f^{-1}(U) \supset f^{-1}(K_\delta(f(x))) \supset K_\varepsilon(x) \implies f^{-1}(U) \text{ Umgebung von } x$$

- Umgebung  $\implies$  Stetigkeit. Sei  $\delta > 0$   $U = K_\delta(f(x))$ .  $U$  Umgebung von  $f(x)$ .  $f^{-1}(U)$  ist eine Umgebung von  $x$ .

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(U)$$

$$\implies f(K_\varepsilon(x)) \subset U = K_\delta(f(x))$$

2. • Stetigkeit  $\implies$  offen. Sei  $U$  offen  $\iff \forall y \in U$  ist  $U$  eine Umgebung von  $y$

$$f^{-1}U \ni x \implies f(x) \in U \stackrel{\text{Stetigkeit in } x}{\implies} f^{-1}(U) \text{ ist eine Umgebung von } x$$

$$\implies f^{-1}(U) \text{ ist offen}$$

- offen  $\implies$  Stetigkeit an jedem  $x \in X$ . Sei  $x \in X$ ,  $\delta > 0$ ,  $K_\delta(f(x))$  ist offen

$$f^{-1}(K_\delta(f(x))) \text{ ist offen} \implies x \in f^{-1}(K_\delta(f(x)))$$

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(K_\delta(f(x)))$$

$$f(K_\varepsilon(x)) \subset K_\delta(f(x))$$

□

## 1.4 lineare Abbildungen

**Definition 1.40.** Eine Abbildung  $L : V \rightarrow W$  ( $V, W$  Vektoren) heisst linear, falls

$$L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \iff \exists \text{ eine Matrix } L_{ij} :$$

$$L(x) = \left( \sum_{j=1}^n L_{1j} x_j, \sum_{j=1}^n L_{2j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n L_{kj} x_j \right)$$

**Definition 1.41.** Sei  $L_{ij}$  eine Matrix die die lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  darstellt. Die Hilbert-Schmidt Norm von  $L$  ist

$$\|L\|_{\text{HS}} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n L_{ij}^2}$$

*Bemerkung 1.42.*  $\{L : (L_{ij} n \times k \text{ Matrixen}) \sim \mathbb{R}^{nk} \|\cdot\|_{\text{HS}}$  ist die euklidische Norm.

*Bemerkung 1.43.* Sei  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine lineare Abbildung und  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dann  $\|L(x)\| \leq \|x\| \|L\|_{\text{HS}}$ .

**Korollar 1.44.** Sei  $L$  wie oben, dann ist  $L$  stetig.

*Beweis.* Sei  $x_k \rightarrow x$ . Ziel  $L(x_k) \rightarrow L(x)$

$$\begin{aligned}\|L(x_k) - L(x)\| &= \|L(x_k - x)\| \leq \|x_k - x\| \|L\|_{\text{HS}} \rightarrow 0 \\ \implies \|L(x_k) - L(x)\| &\rightarrow 0 \\ \implies \text{Stetigkeit}\end{aligned}$$

□

*Beweis.* Beweis von 1.36:  $L(x) = y$

$$\begin{aligned}\|L(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^k y_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^n L_{ij} x_j \right)^2 \stackrel{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \|x\|^2 = \|x\|^2 \left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \right) \\ \|x\|^2 \|L\|_{\text{HS}}^2 &\implies \|L(x)\| \leq \|x\| \|L\|_{\text{HS}}\end{aligned}$$

□

**Definition 1.45.** Sei  $L : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung wobei  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  zwei endlich-dimensionalisierte Vektorräume sind. Die Operatornorm von  $L$  ist:

$$\|L\|_{L(V,W)} := \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W$$

**Satz 1.46.**  $\|\cdot\|_{L(V,W)}$  ist eine Norm und

$$\|L(v)\|_W \leq \|L\|_{L(V,W)} \|v\|_V$$

Deswegen: jede lineare Abbildung  $L : V \rightarrow W$  ist stetig.

*Beweis.* Der Kern ist die folgende Eigenschaft:

$$\|L\|_{L(V,W)} < +\infty$$

Wenn das gilt dann:

1.

$$\underbrace{\|L\|_{L(V,W)}}_{\text{Kern}} \text{ und } \|L\|_{L(V,W)} = 0 \iff L = 0$$

$\Leftarrow$  einfach. Sei  $\|L\|_{L(V,W)} = 0$ . Dann sei  $v \in V$ .

$$v = 0 \implies L(v) = 0$$

$$v \neq 0 \implies z \frac{v}{\|v\|_V} \implies \|z\|_V = 1$$

$$\|L(z)\|_W \leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(y)\|_W = 0$$

$$\implies L(z) = 0 \implies L(v) = L(\|v\|_V z) = \|v\|_V L(z) = 0$$

2.

$$\begin{aligned}
\|\lambda L\|_{L(V,W)} &= |\lambda| \|L\|_{L(V,W)} \\
\|\lambda L\|_{L(V,W)} &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|\lambda L(y)\|_W \\
&= \sup_{\|y\|_V \leq 1} |\lambda| \|L(y)\|_W \\
&= |\lambda| \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(y)\|_W \\
&= |\lambda| \|L\|_{L(V,W)}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
&\|L + L'\|_{L(V,W)} \\
&= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|(L + L')(y)\|_{L(V,W)} \\
&= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(y) + L'(y)\|_{L(V,W)} \\
&\leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} (\|L(y)\|_W + \|L'(y)\|_W) \\
&\leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(y)\|_W + \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L'(y)\|_W \\
&= \|L\|_{L(V,W)} + \|L'\|_{L(V,W)}
\end{aligned}$$

Wenn  $v_1, \dots, v_n$  Basis für  $V$ ,  $w_1, \dots, w_k$  Basis für  $W$ . Die lineare Abbildung  $E_{ij}(v_i) = w_j$ ,  $E_{ij}(v_l) = 0$  falls  $l \neq i$  ist eine Basis für  $L(V, W) \implies L = \sum_{i,j} \lambda_{ij} E_{ij}$

□

$$(V, \|\cdot\|) \quad (W, \|\cdot\|) \quad L : V \rightarrow W \quad \|L\|_{L(V,W)} := \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W \quad (1)$$

**Satz 1.47.** Falls  $\dim(V), \dim(W) < +\infty$ ,  $\|L\|_{L(V,W)} < +\infty$  Wahr ohne Beweis in  $V$  und deswegen  $L(V, W), \|\cdot\|_{L(V,W)} \forall v \in V, \forall L \in L(V, W)$

$$\|L(v)\|_W \leq \|L\|_{L(V,W)} \|v\|_V \quad (2)$$

Aus 2 folgt dass  $L$  stetig ist wenn  $\|L\|_{L(V,W)} < +\infty$ .

*Bemerkung 1.48.*  $\|L\|_{L(V,W)}$  ist die optimale Konstante in 2.

*Beweis.* Falls  $\|v\|_V = 1$

$$\iff \|L(v)\|_W \leq \|L\|_{L(V,W)} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W$$

Die Ungleichung ist eine direkte Folgerung von 1

$$\|v\|_V = 0 \implies L(v) = 0 \implies \|L(v)\|_W = 0 \implies 2$$

$\|v\|_V > 0$

$$\begin{aligned}
\tilde{v} &:= \frac{v}{\|v\|_V} \implies \|\tilde{v}\|_V = 1 \\
\|L(\tilde{v})\|_W &\leq \|L\|_{L(V,W)} \\
\left\| \frac{1}{\|v\|_V} L(v) \right\|_W &= \frac{1}{\|v\|_V} \|L(v)\|_W \\
\implies \frac{\|L(v)\|_W}{\|v\|_V} &\leq \|L\|_{L(V,W)}
\end{aligned}$$

□

*Beweis.*  $\varepsilon - \delta$  Stetigkeit.  $v, \varepsilon > 0$ . Suche  $\delta > 0$  mit

$$\|v' - v\|_V < \delta \implies \|L(v') - L(v)\|_W < \varepsilon$$

Linearität von  $L$

$$\implies \|L(v') - L(v)\|_W = \|L(v' - v)\|_W$$

und aus 2

$$\begin{aligned} \|L(v' - v)\| &\leq \underbrace{\|L\|_{L(V,W)}}_{< \varepsilon} \overbrace{\|v' - v\|_V}^{< \delta} \\ \implies \delta &= \frac{\varepsilon}{\|L\|_{L(V,W)}} \end{aligned}$$

$\implies$  Ungleichung erfüllt.  $\square$

*Bemerkung 1.49.*  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $\|\cdot\|_V$  euklidische Norm.  $W = \mathbb{R}^k$  mit euklidischer Norm.

$$\|L\|_{L(V,W)} \leq \|L\|_{\text{HS}}$$

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ linear}$$

$$\|L\|_{\text{HS}} = \sqrt{\sum_{i,j} L_{ij}^2}$$

$$\|L\|_{L(V,W)} := \sup_{\sum_{i=1}^n v_i^2 \leq 1} \sqrt{\sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^n L_{ji} v_i \right)^2}$$

## 1.5 Mehr über stetige Funktionen

**Regeln** für stetige Funktionen

**Regel 1** Seien  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : X \rightarrow Y$ .  $X$ : topologischer Raum, metrischer Raum, normierter Vektorraum,  $\mathbb{R}^n$ .  $V$  ist ein normierter Vektorraum ( $\mathbb{R}^k$ ). Falls  $f, g$  stetig sind, ist auch  $f + g$  stetig.

$V = \mathbb{R}$   $fg, \frac{f}{g}$  ( $g \neq 0$ ) stetig

$$V = \mathbb{R} \quad fg(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)g_i(x)$$

*Beweis.* Im Fall  $X$  Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$

$$\underbrace{\{x^k\}}_{\subset X} \rightarrow x \in X$$

Stetigkeit von  $f$  und  $g$ :  $g(x^k) \rightarrow g(x)$ ,  $f(x^k) \rightarrow f(x)$ .

$$g(x^k) = (g_1(x^k), \dots, g_m(x^k))$$

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$$

$$f(x^k) = (f_1(x^k), \dots, f_m(x^k))$$

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

$$(g + f)(x^k) = (g_1(x^k) + f_1(x^k), \dots, g_m(x^k) + f_m(x^k))$$

$$\rightarrow g_1(x) + f_1(x), \dots, g_m(x) + f_m(x) = (g + f)(x)$$

$$x^k \rightarrow x \in X \implies (f + g)(x^k) \rightarrow (f + g)(x).$$

$\square$

**Regel 2** Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume. Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  stetig

$$g \circ f : \underbrace{X \rightarrow Z}_{x \mapsto g(f(x))}$$

*Beweis.* Sei  $U$  eine offene Menge in  $Z$ .

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(U)}_{\text{offen}})$$

□

**Definition 1.50.** Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

$f : X \rightarrow V$ ,  $V, \|\cdot\|_V$  normierter Vektorraum

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_V$$

*Bemerkung 1.51.*  $X$  Menge,  $V, \|\cdot\|$  ein normierter Vektorraum.

$$F := \{f : X \rightarrow V\} \quad \text{mit} \quad \|f\|$$

Dann ist  $F, \|\cdot\|$  ist ein normierter Vektorraum.

**Definition 1.52.** Eine Folge von Funktionen

$$f^k : X \rightarrow V$$

konvergiert gleichmässig gegen  $f$  falls

$$\|f^k - f\| \rightarrow 0$$

*Bemerkung 1.53.*  $x \in X$

$$\|f^k(x) - f(x)\|_V \leq \|f^k - f\|$$

Folgerung  $f^k$  konvergiert gleichmässig

$$\implies f^k(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x$$

**Satz 1.54.** Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $f^k : X \rightarrow V$  eine Folge die gleichmässig gegen  $f$  konvergiert. Dann ist  $f$  stetig.

*Beweis.* Seien  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$ .

**Ziel**  $\exists \delta > 0$  so dass

$$d(x, y) < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

$\exists N$  so dass

$$\|f - f^k\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{falls} \quad k \geq N$$

$f^N$  ist stetig:  $\exists \delta > 0$ :

$$d(x, y) < \delta \implies \|f^N(x) - f^N(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$d(x, y) < \delta$$

$$\|f(x) - f(y)\| = \|(f(x) - f^N(x)) + (f^N(x) - f^N(y)) + (f^N(y) - f(y))\|_V$$

$$\leq \|f(x) - f^N(x)\|_V + \|f^N(x) - f^N(y)\|_V + \|f^N(y) - f(y)\|_V$$

$$< \|f^N - f\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f^N - f\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

## 1.6 Kompakte Menge

**Definition 1.55.** Eine Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  heisst kompakt falls  $K$  abgeschlossen und beschränkt ( $\iff \exists B_R(0) : K \subset B_R(0)$ ) ist.

**Satz 1.56.** Sei  $k \subset \mathbb{R}^n$ .

$$K \text{ kompakt} \iff \forall \{x^j\} \subset K \exists x^{j_l}$$

$x^{j_l}$  ist eine Teilfolge, die gegen  $x \in K$  konvergiert.

$K \implies$  Sei  $\{x^j\}$  eine Folge

$$x^j \in K \subset B_R(0) \implies \|x^j\| < R$$

$\exists x^{j_l} \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$ , die Abgeschlossenheit von  $K \implies x \in K$ . Folgenkriterium  $\implies$  Abgeschlossenheit und Beschränktheit.

$$\text{nicht abgeschlossen} \implies \exists x^j \subset K \text{ mit } x^j \rightarrow \notin K$$

$$\text{Folgenkompaktheit} \implies \exists x^{j_l} \rightarrow y \in K$$

Widerspruch (weil  $x$  und  $y$  sind in derselben Menge)

Sei  $K$  nicht beschränkt.

$$\forall j \in \mathbb{N} \ B_j(0) \not\supset K$$

$$\exists x^j \in K \setminus B_j(0) \implies \|x^j\| \geq j$$

Wenn  $x^{j_l} \rightarrow x$

$$\|x^{j_l}\| \leq \|x\| + \|x^{j_l} - x\|$$

$$\|x\| \leq \|x^{j_l}\| + \|x - x^{j_l}\|$$

$$\| \|x\| - \|x^{j_l}\| \| \leq \|x - x^{j_l}\|$$

$$\implies \|x^{j_l}\| \rightarrow \|x\|$$

$$\|x^{j_l}\| = j_l \rightarrow +\infty$$

$\implies$  Widerspruch

**Satz 1.57.**  $E \subset \mathbb{R}^n$

$$E \text{ kompakt} \iff E \text{ folgenkompakt}$$

d.h.

$$\forall \{x_k\} \subset E \exists \text{ Teilfolge } \{x_{k_l}\} \text{ die gegen } x \in E \text{ konvergiert}$$

**Definition 1.58.** (Überdeckungseigenschaft) Eine Teilmenge  $E \subset \mathbb{R}^n$  besitzt die Überdeckungseigenschaft falls:

- $\forall$  Überdeckung  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  von  $E$  mit offenen Mengen  $\exists$  endliche Teilüberdeckung.

$$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \text{ Überdeckung} \iff \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \supset E$$

Teilüberdeckung ist eine Teilfamilie von  $\{U_\lambda\}$  die noch eine Überdeckung von  $E$  ist.

**Beispiel 1.59.** Eine offene Kugel hat diese Eigenschaft nicht.

$$\forall x \in K_r(0) \text{ sei } K_{\frac{r-\|x\|}{2}}(x) = U_x$$

1.  $\{U_x\}_{x \in K_r(0)}$  ist eine Überdeckung von  $K_r(0)$ .

Einfach weil  $x \in U_x$ ! Sei  $U_{x_1}, \dots, U_{x_N}$  eine beliebige endliche Teilfamilie. Sei

$$p := \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \|x_i\| < r$$

$\implies$  falls  $\|y\| \geq \frac{\|x_i\|+r}{2}$  dann  $y \notin U_{x_i}$ . So, wenn  $\|y\| \geq \frac{p+r}{2}$  dann

$$y \notin U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_N} \quad \frac{p+r}{2} < r$$

falls  $\|y\| = \frac{p+r}{2}$ , dann  $y \in K_r(0)$ . Mit einer geschlossenen Kugel ist das anders.

**Satz 1.60.** Sei  $E \subset \mathbb{R}^n$

$$E \text{ kompakt} \iff E \text{ hat die Überdeckungseigenschaft}$$

**Beispiel 1.61.**  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $U_n = K_{n+1}(0)$ .

$$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

Aber  $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}^n = E \not\subset \bigcup_{n=0} U_n$$

*Beweis.*  $\exists \{x_i\} \subset E$  ohne konvergente Teilfolge in  $E \implies E$  ist nicht kompakt  
 $\implies$  Überdeckungseigenschaft gilt nicht. Zwei Möglichkeiten:

1.  $\exists$  eine Teilfolge  $\{y_i\} \subset E$   $y_i \rightarrow y$   $y \notin E$
2.  $\exists$  eine Teilfolge  $\{y_i\} \subset E$   $y_i \rightarrow +\infty$

Beim ersten ist die Menge offen.

$$U_0 := \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{(\{y_1\} \cup \{y\})}_{E \text{ ist abgeschlossen}}$$

Beim zweiten gilt:

$$U_0 = \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{\{x_i\}}_F \text{ ist offen}$$

$$U_n = U_0 \cup \{y_1, \dots, y_{n-1}\} \quad n \geq 0$$

$U_n$  ist auch offen.

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} U_n = \begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \{y\} & \text{im Fall 1} \\ \mathbb{R}^n \setminus \{x_i\} & \text{im Fall 2} \end{cases}$$

Aber jede endliche Familie

$$U_1 \cup \dots \cup U_n \not\supset E$$

in beiden Fällen lassen wir unendlich viele Punkte weg.  $E$  kompakt  $\implies$  Überdeckungseigenschaft.  $E$  ist beschränkt und abgeschlossen und sei  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  eine Familie von offenen Mengen mit  $E \subset \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ . Wir decken die Menge  $U$  mit Würfeln:

$$[k_1, k_1 + 1] \times [k_2, k_2 + 1] \times \dots \times [k_n, k_n + 1] \\ W_1 \cup \dots \cup W_M$$

Falls jedes  $E \cap W_i$  mit einer endlichen Familie von  $\{U_\lambda\}$  überdeckt wird, dann finde ich eine endliche Überdeckung von  $E$  wenn  $N$  gross genug ist. So, angenommen dass die Überdeckungseigenschaft nicht gilt.

$$\exists E_i := E \cap W_i :$$

1.  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  eine Überdeckung von  $E_1$
2. keine endliche Teilfamilie deckt  $E_1$

Teilen wir  $W_i$  in  $2^n$  Würfel mit Seite  $\frac{1}{2}$

$$\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_2$$

$\exists E_2 := E \cap \tilde{W}_i$  : so dass die beiden Eigenschaften noch gelten

Induktiv

$$E \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$$

jede  $E_i \subset W^i$  Würfel mit Seite  $2^{-i+1}$  und die beiden Eigenschaften gelten mit  $E_j$  statt  $E_i$ .

$\{x_k\} \subset E$ .  $\{x_k\}$  ist eine Cauchy-Folge.  $j, k > i$ ,  $x_k, x_j \in W$  mit Seite  $2^{-i+1}$   
 $\|x_j - x_k\| \leq \sqrt{n} 2^{-i+1}$

$$\implies x_j \rightarrow x \in E \rightarrow x \in U \in \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \implies K_r(x) \supset U$$

$$x \in E, x \in E^i \quad \forall i \implies x \in W^i$$

$$\implies W^i \subset B_r(x) \subset U$$

für  $i$  gross genug

$$\implies E_i \subset U$$

$\implies$  wir haben eine endliche Teilüberdeckung  $\{U\} \subset \{U_\lambda\}$  gefunden  $\implies$  Widerspruch mit den beiden Eigenschaften.  $\square$

*Bemerkung 1.62.*  $f$  stetig  $\implies f^{-1}(U)$  offen falls  $U$  offen.

*Beweis.* Sei  $\{U_\lambda\}$  eine Überdeckung (mit offenen Mengen) von  $f(E)$ , dann ist  $\{f^{-1}(U_\lambda)\}$  eine Überdeckung von  $E$ .

$$\exists f^{-1}(U_{\lambda_1}), \dots, f^{-1}(U_{\lambda_N}) \text{ Teilüberdeckung von } E$$

$U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_N}$  ist eine Überdeckung von  $f(E) \implies f(E)$  ist kompakt  $\square$

**Korollar 1.63.** Wenn  $F : E \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist und  $E \subset \mathbb{R}^n$  kompakt ist, besitzt  $f$  ein Maximum und ein Minimum.

*Beweis.*  $f(E) \subset \mathbb{R}$  ist kompakt.

$$s = \sup f(E) < +\infty$$

$$\exists \{x_k\} \subset f(E) \text{ mit } x_k \rightarrow s \xrightarrow{\text{abgeschlossen}} s \in s \in f(E)$$

$$\left( s - \frac{1}{k} \implies \exists x_k \in f(E) \text{ mit } x_k > s - \frac{1}{k}, x_k \leq s \right)$$

$\implies s$  ist ein Maximum.  $\square$

**Definition 1.64.** Das Intervallschachtelungsprinzip in  $\mathbb{R}$ . Sei  $I_j$  eine Intervallschachtelung:

1.

$$I_j = [a_j, b_j]$$

2.

$$I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_j \supset I_{j+1}$$

3.

$$b_j - a_j \rightarrow 0$$

$$\implies \bigcap_{j=0}^{\infty} I_j \neq \emptyset$$



**Satz 1.65.** Sei  $E_j$  eine Folge von kompakten Mengen mit  $E_j \supset E_{j+1} \forall j$  ( $E_0 \subset \mathbb{R}^n$ )

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \neq \emptyset \text{ falls } E_j \neq \emptyset \forall j$$

*Beweis.* Sei  $E_j$  wie im Satz mit  $E_j \neq \emptyset$ , aber  $\bigcap_{j=0}^{\infty} E_j = \emptyset$ . Sei  $U_j := \mathbb{R}^n \setminus E_j \implies U_j$  ist offen.  $\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j = \mathbb{R}^n \setminus \{E_j\}$  ist eine Überdeckung von  $E_0$ . Aber  $U_1 \cup \dots \cup U_N = U_N$  (weil  $U_{j+1} \supset U_j$ )

$$U_N \not\supset E_N \neq \emptyset \quad E_N \subset E_0$$

Keine endliche Teilfamilie von  $\{U_j\}$  ist eine Überdeckung von  $E_0$ . Widerspruch wegen Kompaktheit von  $E_0$ .  $\square$

## 1.7 Differenzierbare Funktionen

**Erinnerung**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heisst differenzierbar in  $a \in \mathbb{R}$  falls

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert. Was geschieht mit Funktionen von mehreren Variablen? Die “Tangentensteigung” hängt auch von der Richtung ab. D.h. Es gibt eine lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

**Definition 1.66.**  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, heisst differenzierbar in  $a \in U$ , falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Lh}{\|h\|} = 0 \quad (3)$$

wobei  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine lineare Abbildung ist.

*Bemerkung 1.67.*  $n = 1$ : Es gilt  $Lh = f'(a)h$

*Bemerkung 1.68.* Die lineare Abbildung  $L$  in 3 ist eindeutig definiert. Annahme  $L' \neq L$  erfüllt die Bedingung. Sei  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\| = 1$ . Es gilt:

$$(L - L')(v) \stackrel{\text{linear und } \|v\|=1}{=} \lim_{t \downarrow 0} \frac{(L - L')(tv)}{\|tv\|} \stackrel{3}{=} \lim_{h=tv}{\frac{f(a+h) - f(a) - Lh}{\|h\|}} \stackrel{3}{=} 0 \implies L = L'$$

*Bemerkung 1.69.* Wir können 3 auch anders beschreiben:

$$f(a+h) - f(a) = Lh + \underbrace{R(h)}_{\text{Restglied}}$$

Dann gilt

$$3 \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0 \quad (4)$$

**Definition 1.70.**  $L$  heisst Differential von  $f$  in  $a$ . Man schreibt  $df(a)$ . Sei nun  $\{e_1, \dots, e_n\}$  die Standardbasis  $\mathbb{R}^n$ ,  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\implies df(a)h = df(a) \left( \sum_{i=1}^n h_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n h_i df(a)e_i$$

**Definition 1.71.**

$$f'(a) = (df(a)e_1, \dots, df(a)e_n)$$

heisst Ableitung

**Definition 1.72.**

$$Tf(x, a) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (\text{Ebene (tangential)})$$

lineare Approximation

**Satz 1.73.**  $f$  differenzierbar in  $a \implies f$  ist stetig in  $a$

*Beweis.*

$$|f(a+b) - f(a)| = |df(a)h + R(h)| \leq |df(a)| + \underbrace{|R(h)|}_{\rightarrow 0}$$

□

**Beispiel 1.74.**  $f(x) = Ax + b$ ,  $A \in M_a(1, n, \mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}$

**Behauptung 1.75.**  $Lh := ah$  ist linear

$$df(a)h = Ah, \quad f'(a) = A$$

*Beweis.*

$$f(a+h) - f(a) - Lh = R(h) = 0$$

□

**Beispiel 1.76.**  $f(x) := x^T Ax$ ,  $A = (a_{ij}) \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$

$$f(a+h) - f(a) - \underbrace{2a^T Ah}_{df(a)h} - \underbrace{h^T Ah}_{R(h)}$$

$Lh := 2a^T Ah$  ist linear (in  $h$ ),  $R(h) = h^T Ah (= \sum h_i a_{ik} h_k)$  z.z.:  $|Rh| \leq \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}| \|h\|_\infty^2$ , d.h.  $\frac{R(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$  (falls  $\|h\| \rightarrow 0$ )

**Ziel** Wir wollen  $df(a)h$  berechnen. sei  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(a+th) &= f(a) + df(a)th + R(th) \\ \implies df(a)h &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \end{aligned} \quad (5)$$

**Definition 1.77.**  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in U$ . Die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $h \in \mathbb{R}^n$  ist der Grenzwert (falls er existiert)

$$\partial_n f(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

Die Ableitungen in Richtung  $e_1, \dots, e_n$  heissen partielle Ableitungen in  $a$ . Wir schreiben

$$\partial_{ei} f(a) = \partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_{xi}(a)$$

*Bemerkung 1.78.* Wir haben nicht vorausgesetzt, dass  $f$  differenzierbar ist in  $a$ !

**Satz 1.79.** Sei  $f$  in  $a$  differenzierbar. Dann existieren die Richtungsableitungen in jede Richtung. Insbesondere existieren die aprtiellen Ableitungen. Es gelten:

$$df(a)h = f'(a)h = \partial_n f(a) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) h_i \quad (6)$$

und

$$f'(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a))$$

*Beweis.* Existenz der Richtungsableitung oke (Herleitung von 5)

□

**Frage** Wie berechnet man die partielle Ableitung effizient? Es gilt:

$$\begin{aligned} \partial_i f(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t e_i) - f(a)}{t}, \quad a = (a_1, \dots, a_n) \\ g_i(x) &:= f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ \partial_i f(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(a_i + t) - g(a_i)}{t} = g'(a_i) \end{aligned}$$

**Beispiel 1.80.**

$$\begin{aligned} f(x, y) &:= \sin(2x) e^{3y} \\ \partial_x f &= 2e^{3y} \cos(2x) \\ \partial_y f &= \sin(2x) e^{3y} 3 \end{aligned}$$

**Frage** Wann folgt aus der Existenz der partiellen Ableitung (Richtungsableitung) die Differenzierbarkeit?

**Beispiel 1.81.**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Es gilt:  $f(tx, ty) = tf(x, y)$ , d.h. der Graph von  $f$  besteht aus Geraden durch 0, für  $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\implies \partial_h f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th_1, th_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} f(h_1, h_2) = f(h_1, h_2)$$

$$\implies \partial f(0, 0) = f(h_1, h_2)$$

$$\partial_{e_1} f(0, 0) = f(1, 0) = 0$$

$$\partial_{e_2} f(0, 0) = f(0, 1) = 0$$

**Annahme**  $f$  ist in  $(0, 0)$  differenzierbar

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{aus 6}} \underbrace{\partial_n f(0, 0)}_{=d f(a)h=0} &= \underbrace{\partial_1 f(a)}_0(h_1) + \underbrace{\partial_2 f(a)}_0(h_2) = 0 \\ \implies d f(a) &= 0 \end{aligned}$$

**Test**  $L = 0$

$$\frac{f(h_1, h_1) - \overbrace{f(a_0) - L(h_1, h_1)}}{\|(h_1, h_1)\|_\infty} = \frac{h_1^3}{2h_1^2|h_1|} \rightarrow \pm \frac{1}{2}$$

$\implies f$  ist in  $(0, 0)$  nicht differenzierbar.

### 1.7.1 Das Differenzial

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , Umgebung von  $x$ .

$f$  diff in  $x \iff \exists L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  linear s.d.

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0 \quad (7)$$

$$\lim_{h \downarrow 0} G(h) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \|h\| < \delta \implies |G(h)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall h_k = 0 \quad G(h_k) \rightarrow 0$$

Wenn  $f$  differenzierbar ist und 7 erfüllt, heisst  $L$  das Differential von  $f$ .

$$L = d f$$

$d f_x$  das Differential an der Stelle  $x$

### 1.7.2 Richtungsableitung

$x \in \Omega$ ,  $h \in \mathbb{R}^m$ ,  $g(t) = f(x + th)$  (wohldefiniert für  $|t|$  klein)

$$\partial_n f(x) = g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

### 1.7.3 Partielle Ableitung

$(x_1, \dots, x_n)$  Kond. in  $\mathbb{R}^n$   $y \in \Omega$  so dass  $\Omega$  eine Umgebung von  $y$  ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) (= \partial_{x_i} f(y)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y_1, \dots, y_i + t, \dots, y_n - f(y)}{t}$$

Falls  $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0)$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(y + te_i) - f(y)}{t} = \partial_{e_i} f(y)$$

**Satz 1.82.** (Hauptkriterium der Differenzierbarkeit) Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $U$  eine Umgebung von  $y$ . Falls  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  in  $U$  existieren und stetig in  $y$  sind, dann ist  $f$  in  $y$  differenzierbar.

*Beweis.*  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$L(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) h_i$$

**Ziel**  $L$  ist das Differential von  $f$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0$$

$$f(x+h) - f(x) = f(x + (h_1, \dots, h_n)) - f(y + (h_1, \dots, h_{n-1}, 0)) + f(y + (h_1, \dots, h_{n-1}, 0)) - \dots$$

+ ... (ite Zeile)

$$+ f(y + (k, 0, \dots, 0)) - f(y) \quad (8)$$

$i \in \{1, \dots, n\}$

$$g(t) = f(y + (h_1, \dots, h_{i-1}, th_i, 0, \dots, 0))$$

$$\text{ite Zeile} = g_i(1) - g_i(0) = g'_i(\xi_i) \quad \xi \in [0, 1]$$

$$g'_i(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g_i(t + \varepsilon) - g_i(t)}{\varepsilon}$$

$$= h_i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(y_1 + h_1, \dots, y_{i-1}, y_i + (t + \varepsilon)h_i, y_{i+1}, \dots, y_n) - f(y_1 + h_1, \dots, y_i + th_i, \dots, y_n)}{\varepsilon h_i}$$

$$= h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(y_1 + h_1, \dots, y_i + th_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$$

$$\text{ite Zeile} = h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(y_1 + h_1, \dots, y_{i-1}, h_{i-1}, y_i + \xi_i h_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$$

$$\zeta_i = (h_1, \dots, h_{i-1}, \xi_i h_i, 0, \dots, 0)$$

$$= h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(y + \zeta_i) \quad (9)$$

9 in 8:

$$f(y+h) - f(y) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(y + \zeta_i) \quad (10)$$

$$f(x+h) - f(x) - L(h)$$

$$= \sum_{i=1}^n h_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(y + \zeta_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \right) \quad (11)$$

$$\frac{|f(x+h) - f(x) - L(h)|}{\|h\|}$$

$$\stackrel{11}{\leq} \sum_{i=1}^n \frac{|h_i| \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y + \zeta_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \right|}{\|h\|} \quad (12)$$

Wenn  $\|h\| \rightarrow 0$ ,  $\|\zeta\| \rightarrow 0$ . Die Stetigkeit von  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  in  $y$  impliziert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(y + \zeta_i) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Die rechte Seite von 12  $\rightarrow 0$  wenn  $h \rightarrow 0 \implies ??$ . □

**Definition 1.83.** Der Gradient an der Stelle  $x_0$  ist der Vektor

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right) = \nabla f(x_0)$$

*Bemerkung 1.84.*

$$\begin{aligned} df|_{x_0}(h) (\partial_n f(x_0)) &= \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \\ (\langle \nabla f(x_0), h \rangle) &= \nabla f(x_0) h \\ |\partial_n f(x_0)| &\stackrel{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \|\nabla f(x_0)\| \|h\| \end{aligned}$$

Falls  $\|h\| = 1$ , dann

$$|\partial_n f(x_0)| \leq \|\nabla f(x_0)\|$$

Fall  $\|\nabla f(x_0)\| \neq 0$ , wenn wir

$$K = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

bekommen wir  $\|K\| = 1$  und

$$\partial_K f(x_0) = \|\nabla f(x_0)\|$$

Deswegen:

$$K = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

ist die Richtung der maximalen Steigung und

$$\|\nabla f(x_0)\|$$

ist die maximale Steigung.

## 1.8 Rechenregeln

**Satz 1.85.** Sei  $U$  eine Umgebung von  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x$  differenzierbar. Dann sind  $f + g$  und  $fg$  auch differenzierbar in  $x$  und

$$d(f + g)|_x = df|_x + dg|_x$$

$$d(fg) = f(x) dg|_x + g(x) df|_x$$

Falls  $f(x) \neq 0$  ist auch  $\frac{1}{f}$  in  $x$  differenzierbar

$$d\left(\frac{1}{f}\right)|_x = -\frac{1}{(f(x))^2} df|_x$$

**Korollar 1.86.**  $g(x) \neq 0$ , dann

$$\begin{aligned} d\left(\frac{f}{g}\right)|_x &= \frac{1}{g(x)} df|_x - \frac{f(x)}{g(x)^2} dg|_x \\ &= \frac{g(x) df|_x - f(x) dg|_x}{g(x)^2} \end{aligned}$$

*Beweis.* Das Ziel ist eine lineare Abbildung  $L$  zu finden so dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x+h) - \frac{1}{f(x)} - L(h)}}{\|h\|}$$

$$L = -\frac{1}{f(x)^2} \mathrm{d}f|_x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\frac{1}{f(x+h) - \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)^2}(h) \mathrm{d}f|_x(h)}}^A}{\|h\|} = \frac{B+C}{\|h\|}$$

$$\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)} = \frac{f(x) - f(x+h)}{f(x)f(x+h)}$$

$f(x+h) \neq 0$  falls  $\|h\|$  klein genug

$$\frac{f(x+h) - f(x) - \mathrm{d}f|_x(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$$

$$A = \left[ \frac{-(-f(x) + f(x+h))}{f(x)f(x+h)} \frac{\mathrm{d}f|_x(h)}{f(x)f(x+h)} \right] = C$$

$$+ \frac{-\mathrm{d}f|_x(h)}{f(x)f(x+h)} + \frac{\mathrm{d}f|_x(h)}{f(x)^2} = B$$

$$\frac{B}{\|h\|} = -\frac{1}{f(x)f(x+h)} \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x) - \mathrm{d}f|_x(h)}{\|h\|}}_{\rightarrow 0}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x) \neq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{B}{\|h\|} = 0$$

Diff von  $f$  für  $\|h\| \rightarrow 0$

$$\frac{C}{\|h\|} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}f|_x(h)}{\|h\|}}_{\text{ist beschränkt}} \frac{1}{f(x)} \underbrace{\left( \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x+h)} \right)}_{\rightarrow 0}$$

Sei  $L = \mathrm{d}f|_x$  und  $\|L\|_O$  ihre Operatornorm

$$|\mathrm{d}f|_x(h)| = |L(h)| \leq \|L\|_O \|h\|$$

$$\Rightarrow \frac{|\mathrm{d}f|_x(h)|}{\|h\|} \leq \|L\|$$

□

**Definition 1.87.** Eine Kurve ist eine Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  (d.h.  $\forall t \ \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ )

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

deswegen  $t \rightarrow \gamma_i(t) \in \mathbb{R}$ . Die Kurve  $\gamma$  heisst differenzierbar wenn jede  $\gamma_i$  differenzierbar ist.

$$\gamma' = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

**Satz 1.88.** (Kettenregel 1. Version) Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $U$  Umgebung von  $x$  und  $f$  differenzierbar in  $x$ . Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  eine differenzierbare Kurve mit  $\gamma(t_0) = x$ . Sei  $g = f \circ \gamma$

$$g(t) = f(\gamma(t))$$

Sei  $g$  in  $t_0$  differenzierbar. Dann

$$g'(t_0) = \mathrm{d}|_{\gamma(t_0)}(\dot{\gamma}(t_0)) = \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \dot{\gamma}(t_0) \rangle$$

*Beweis.* Das Ziel:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t_0 + h) - g(t_0) - h [\mathrm{d} f|_{\gamma(t_0)}(\dot{\gamma}(t_0))]}{h} = 0$$

$$R(h) = g(t_0 + h) - g(t_0) - h [\mathrm{d} f|_{\gamma(t_0)}(\dot{\gamma}(t_0))] \quad (13)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{h} = 0 \quad (14)$$

Neue Notation

$$14 \iff R(h) = o(h)$$

$$x_0 = \gamma(t_0)$$

Annahmen: Differenzierbarkeit von  $f$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + k) - f(x_0) - \mathrm{d} f|_{x_0}(k)}{\|k\|} \left( = \frac{r(k)}{\|k\|} \right) = 0$$

$$(r(k) = o(\|k\|))$$

Differenzierbarkeit von  $\gamma$ :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\gamma(x_0 + k) - \gamma(x_0) - \mathrm{d} h \gamma'|_{x_0}(k)}{h} \left( = \frac{p(k)}{\|k\|} \right) = 0$$

$$p(h) = o(h)$$

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + k \left( = \gamma(t_0 + h) - \underbrace{\gamma(t_0)}_{x_0} \right)$$

$$g(t_0 + h) - g(t_0) = f(\gamma(t_0 + h)) - g(\underbrace{\gamma(t_0)}_{x_0})$$

$$= f(\gamma(t_0) + k) - f(\gamma(t_0)) = \mathrm{d} f|_{\gamma(t_0)}(k) + r(k)$$

$$= \mathrm{d} f|_{\gamma(t_0)}(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)) + r(k)$$

$$= \mathrm{d} f|_{\gamma(t_0)}(h \dot{\gamma}(t_0) + p(h)) + r(k)$$

$$\stackrel{\text{Linearität von } \mathrm{d} f}{=} h \mathrm{d} f|_{\gamma(t_0)}(\dot{\gamma}(t_0)) + \mathrm{d} f|_{\gamma(t_0)}(p(h)) + r(k)$$

$$g(t_0 + h) - g(t_0) - h \mathrm{d} f|_{\gamma(t_0)}(\dot{\gamma}(t_0))$$

$$= f|_{\gamma(t_0)}(p(h)) + r(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)) = R(h)$$

$$|R(h)| \leq \frac{\overbrace{|f|_{\gamma(t_0)}(p(h))| + r(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0))}^L}{\|h\|}$$

$$\leq \|L\| \frac{p(h)}{\|h\|} + \frac{r(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0))}{\|h\|}$$

Ziel

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0))}{|h|}$$

Falls

$$r(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)) = 0$$

dann  $r(0) = 0$ . Wenn

$$r(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)) \neq 0$$

$$= \frac{r(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0))}{\|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\|} \frac{\|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\|}{|h|}$$

$$\frac{r(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0))}{\|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\|} = \frac{r(k)}{\|k\|} \rightarrow 0$$

... wenn  $\|k\| \rightarrow 0$  und  $h \rightarrow 0$ . Es fehlt die Beschränktheit von

$$\begin{aligned} & \frac{\|t_0 + h - \gamma(t_0)\|}{|h|} \\ & \frac{t_0 + h - \gamma(t_0)}{h} - \frac{h\dot{\gamma}(t_0)}{h} = \frac{p(h)}{h} \\ & \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} = \underbrace{\dot{\gamma}(t_0)}_{\text{konstant}} + \underbrace{\frac{p(h)}{h}}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Deswegen

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\|}{|h|} &= \|\dot{\gamma}(t_0)\| \\ \implies \frac{|R(h)|}{\|h\|} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\implies$  Differenzierbarkeit und Kettenregel!  $\square$

*Bemerkung 1.89.* Der Gradient ist orthogonal zur Niveaumenge (Höhenlinien).

**Definition 1.90.** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  eine differenzierbare Kurve,  $U$  offen. Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Wenn  $f(\gamma(t)) = c_0$  ( $c_0$  hängt nicht von  $t$  ab). Dann

$$\nabla f(\gamma(t)) \perp \dot{\gamma}(t)$$

d.h.

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle &= 0 \\ 0 = g'(t) = (f(\gamma(t)))' &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \end{aligned}$$

## 1.9 Mittelwertsatz und Schrankensatz

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\xi \in ]a, b[$

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Sei nun:

$f : U \mapsto \mathbb{R}$  differenzierbar auf  $U$

$x, y \in U$  so dass das Segment  $[x, y] \subset U$

Was ist ein Segment? Gerade durch  $x$  und  $y$

$$\{x + t(y - x) | t \in \mathbb{R}\}$$

$$[[x, y]] = \{x + t(y - x) | t \in [0, 1]\}$$

$$\gamma(t) := x + t(y - x)$$

$$f(y) - f(x) = (x_1 + t(y_1 - x_1), \dots, x_n + t(y_n - x_n))$$

$\gamma$  ist differenzierbar.

$$g = f \circ \gamma \quad g(t) = f(\gamma(t))$$

$$g(1) - g(0) = g'(\tau) \quad \text{für } \tau \in ]0, 1[$$

$$f(y) - f(x) = \mathrm{d}f|_{\gamma(\tau)}(\dot{\gamma}(\tau))$$

$$\dot{\gamma}(\tau) = (\gamma'_1(\tau), \dots, \gamma'_n(\tau))$$

$$= (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) = y - x$$

$$\gamma(\tau) = \xi$$

$$f(y) - f(x) = \mathrm{d}f|_{\xi}(y - x) = \partial_{y-x}f(\xi) \quad (15)$$

**Satz 1.91.** (Mittelwertsatz)  $U$  offen,  $[x, y] \subset U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann  $\exists \xi \in ]x, y[$  so dass 15 gilt.



**Definition 1.92.**  $U$  sternförmig: wenn  $0 \in U$  und  $[x, 0] \subset U \forall x \in U$ . Sternförmig mit Zentrum  $x_0$  wenn  $x_0 \in U$   $[x, x_0] \subset U \forall x \in U$

**Satz 1.93.** (Schränkensatz) Sei  $U$  eine offene Menge, die sternförmig ist und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion mit

$$\sup_{x \in U} \|df|_x\|_O = S < \infty \left( = \sup_{x \in U} \|\nabla f(x)\| \right)$$

Dann

$$|f(x) - f(0)| \leq S \|x\|$$

Wenn  $U$  konvex ist, d.h. das Segment  $[x, y] \subset U \forall x, y \in U$ , dann

$$|f(x) - f(y)| \leq S \|y - x\|$$

**Definition 1.94.**  $f : \underbrace{K}_{\in \mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$  heisst Lipschitz wenn  $\exists L[0, +\infty[$  so dass

$$|f(y) - f(x)| \leq L \|y - x\| \quad \forall x, y \in K$$

Wenn  $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz bedeutet die Existenz eines  $L$  so dass

$$|f(y) - f(x)| \leq Ld(y - x) \quad \forall x, y \in K$$

## 1.10 Höhere (partielle) Ableitungen

Sei

$$f : \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$$

Die partiellen Ableitungen von  $f$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon e_i) - f(x)}{\varepsilon}$$

$$e_i = (0, \dots, i, \dots, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (x)$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \varepsilon e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} (x)$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i}(x + \varepsilon e_j) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)}{\varepsilon}$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}$$

**Satz 1.95.** (von Schwarz) Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion die in einer Umgebung von  $p \in \Omega$  die partielle Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  besitzt. Falls  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  stetig in  $p$  ist, dann existiert  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)$  und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)$$

**Beispiel 1.96.**

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} a_{ij} x_1^i x_2^j \\
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} i a_{ij} x_1^{i-1} x_2^j \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} i j a_{ij} x_1^{i-1} x_2^{j-1} \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} j a_{ij} x_1^i x_2^{j-1} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} i j a_{ij} x_1^{i-1} x_2^{j-1}
\end{aligned}$$

**Beispiel 1.97.** Sei  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
v : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\
v(x_1, x_2) &= V(x_2) \\
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_+} &= 0
\end{aligned}$$

*Beweis.* Die Idee ist den Mittelwertsatz zu benutzen.**Schritt 1** Von Dimension  $n \rightarrow 2$ 

$$\begin{aligned}
&f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \\
&p = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_j, \dots, p_n) \\
&g : U_{\mathbb{C}\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R} \\
&g(y, z) = g(p_1, \dots, p_{i-1}, y, p_{i+1}, \dots, p_{j-1}, z, p_{j+1}, \dots, p_n) \\
&\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial g}{\partial y}(p_i, p_j) \\
&\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial g}{\partial y}(p_i, p_j) \\
&\frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}(p_i, p_j) \\
&\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_1, \dots, p_i + \varepsilon, \dots, p_j, \dots, p_n) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)}{\varepsilon} \\
&\frac{\partial g}{\partial z}(p) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_i + \varepsilon p_j) - \frac{\partial g}{\partial z}(p)}{\varepsilon} \\
&= \frac{\partial g}{\partial y \partial z}(p_i, p_j)
\end{aligned}$$

Falls

$$\frac{\partial g}{\partial y \partial z}(p_i, p_j)$$

existiert und

$$\frac{\partial g}{\partial z \partial y}(p_i, p_j)$$

gleich, dann ist das Theorem bewiesen.

**Deswegen** Nun,

$$f : \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$  existieren in einer Umgebung von  $p = (a, b)$ , dann ist  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$  stetig auf  $p$ . Zu beweisen:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p)$  existiert und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p)$$

$p = (a, b)$ ,  $h, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $Q$  = Rechteck mit Ecken  $(a, b)$ ,  $(a + h, b)$ ,  $(a, b + k)$ ,  $(a + h, b + k)$ .

$$D_Q f = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_Q f}{hk} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)}{hk} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a, b + k) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a, b)}{k} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) \\ & \lim_{h \rightarrow 0} \left( \lim_{k \rightarrow 0} \frac{D_Q f}{hk} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(a + h, b) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a, b)}{h} =? \end{aligned}$$

wenn der Limes existiert

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a, b)$$

**Ziel**  $\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{D_Q f}{hk}$  existiert und gleicht  $\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_Q f}{hk}$ .  $\implies$  Satz von Schwarz

**Zuerst** Wir behaupten ( $\forall h, k$  klein genug) die Existenz von einer Stelle  $(\xi, \zeta) \in Q$  so dass

$$\frac{D_Q f}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi, \zeta) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_Q f}{hk} &\neq \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(a + h, b + k) - f(a + h, b)}{k} - \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} \right\} \\ &= \frac{1}{h} \{g(a + h) - g(a)\} \stackrel{\text{Mittelwertsatz}}{=} g'(\xi) \end{aligned}$$

$x \in ]a, a + h[, \zeta \in ]b, b + k[$  OBdA:  $h, k > 0$

$$g(z) = \frac{f(z, b + k) - f(z, b)}{k}$$

$$g'(z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(z, b + k) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(z, b) \right) \frac{1}{k}$$

...

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi, b + k) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi, b) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (\xi, \zeta) \end{aligned}$$

Womit wir beim zweiten Teil von 16 wären.

$$\begin{aligned} \frac{D_Q f}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi, \zeta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \left( \frac{D_Q f}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi, \zeta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) \right) \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon \exists \delta$  so dass wenn  $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta$

$$\implies \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi, \zeta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) \right| < \varepsilon \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &\limsup_{h \rightarrow 0} \left| \lim_{k \rightarrow 0} \frac{D_Q f}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) \right| \\ &\leq \sup_{h \in ]0, \frac{\delta}{2}[} \left| \lim_{k \rightarrow 0} \frac{D_Q f}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) \right| \\ &\leq \sup_{h \in ]0, \frac{\delta}{2}[} \sup_{k \in ]0, \frac{\delta}{2}[} \left| \frac{D_Q f}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) \right| \stackrel{17}{\leq} \varepsilon \\ &\implies \limsup_{k \rightarrow 0} \dots = \lim_{k \rightarrow 0} \dots = 0 \\ &\implies \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{D_Q f}{hk} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) \\ &\left( = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_Q f}{hk} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{hk} \{ f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+h) + f(a, b) \} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b+k) - f(a+h, b)}{k} - \frac{f(a, b+h) + f(a, b)}{k} \right\} \\ &\quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a+h, b) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a, b) \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)(a, b) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a, b) \end{aligned} \quad (19)$$

18 = 19

□

Sei  $a \in \Omega$  und  $w \in \mathbb{R}$ . Dann

$$\begin{aligned} d^{(k)} f(a) w^k &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} w_{i_1} \dots w_{i_k} \\ T_x^k f(z) &= f(x) + d f|_x(z-x) + \dots + \frac{1}{k!} d f^{(k)}|_x(z-x)^k \\ R_x^k f(z) &= \frac{1}{(k+1)!} d f^{(k+1)}|_x(z-x)^{k+1} \end{aligned}$$

Falls  $f$  beliebig mal differenzierbar ist ( $f \in C^\infty(\Omega)$  d.h. die ganze partielle Ableitung existieren und sind stetig) können wir die Taylorreihe schreiben.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d f^{(k)}|_x(z-x)^k$$

Konvention:

$$\frac{1}{0!} d f^{(0)}|_x(z-x)^0 = f(x)$$

**Definition 1.98.** Eine Funktion  $f \in C^\infty(\Omega)$  heisst analytisch wenn  $\forall x \in \Omega$   
 $\exists B_r(x) \subset \Omega$  mit der Eigenschaft dass:

$$T_x(z) = f(z) \quad \forall z \in B_r(x)$$

$$(f \in C^\omega(\Omega))$$

### 1.11 Das Taylorpolynom zweiter Ordnung

$$f(z) = f(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(z_i - x_i)}_{\langle \nabla f(x), z-x \rangle}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)(z_i - x_i)(z_j - x_j) \quad (20)$$

$$+ \text{Fehler} = \sum \sum \sum \cdots (z_{i_1} - x_{i_1})(z_{i_2} - x_{i_2})(z_{i_3} - x_{i_3})$$

Die Hesse Matrix

$$Hf(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}$$

*Bemerkung 1.99.* Schwarz  $\implies Hf(x)$  ist symmetrisch wenn alle Ableitungen zweiter Ordnung stetig sind.

$$\underbrace{\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j}(x)(z_i - x_i), \cdots, \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_i}(x)(z_i - x_i)}_{=Hf(x)(z-x)}$$

Deswegen

$$\sum_{j=1}^n (z_j - x_j) \sum_{i_1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_{i_1}}(x)(z_j - x_j) = 20$$

$$= \langle z - x, Hf(x)(z - x) \rangle$$

$$= (z - x)^T Hf(x)(z - x)$$

$H$   $n \times n$  Matrix, die Abbildung

$$w \mapsto w^T A w (= \langle w, A w \rangle)$$

ist eine "quadratische Form".

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung

$$T_x^2 f(z) = f(x) + \langle \nabla f(x), z - x \rangle + \frac{1}{2} (z - x)^T Hf(x)(z - x)$$

**Korollar 1.100.** Falls  $f \in C^3(\Omega)$  und  $B_r(x) \subset \Omega$

$$f(z) = T_x^2 + O(\|z - x\|^3)$$

d.h.

$$|f(z) - T_x^2 f(z)| \leq C \|z - x\|^3$$

**Korollar 1.101.** Falls  $f \in C^2(\Omega)$  und  $B_r(x) \subset \Omega$ , dann

$$f(z) = T_x^2 f(z) + o(\|z - x\|^2)$$

d.h.

$$\lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - T_x^2 f(z)}{\|z - x\|^2} = 0$$

*Beweis.* Taylorapproximation mit Ordnung 1

$$\begin{aligned}
 f(z) &= T_x^1 f(z) + \frac{1}{2}(z-x)^T Hf(\zeta)(z-x) \\
 f(z) - T_x^2 f(z) &= \frac{1}{2}(z-x)^T Hf(\zeta)(z-x) - \frac{1}{2}(z-x)^T Hf(x)(z-x) \\
 &= \frac{1}{2}(z-x)^T (Hf(\zeta) - Hf(x))(z-x) \\
 &\leq \frac{1}{2} \|z-x\| \|Hf(\zeta) - Hf(x)\| \|z-x\| \\
 &\leq \frac{1}{2} \|z-x\| \|Hf(\zeta) - Hf(x)\|_O \|z-x\| \\
 &= \frac{1}{2} \|z-x\|^2 \|Hf(\zeta) - Hf(x)\|_O \\
 \frac{|f(z) - T_x^2 f(z)|}{\|z-x\|^2} &\leq \frac{1}{2} \|Hf(\zeta) - Hf(x)\|_O \\
 \|\zeta - x\| &\leq \|z-x\|^x
 \end{aligned}$$

Stetigkeit der Ableitungen 2. Ordnung

$$\implies \lim_{\zeta \rightarrow x} \|Hf(\zeta) - Hf(x)\|_O = 0$$

□

**Definition 1.102.**  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\exists : X \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  hat in  $a \in X$  ein lokales Minimum/Maximum

$$\iff \exists a \in V \text{ (Umgebung) } . f(a) \leq f(x) \text{ (bzw. } \geq f(x)) \forall x \in V$$

Man sagt das Minimum/Maximum ist strikt (oder isoliert)

$$\iff f(a) < f(x) \text{ (bzw. } > f(x)) \forall x \in V \setminus \{a\}$$

**Satz 1.103.** (Notwendiges Kriterium für lokale Extrema). Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  haben ein lokales Extremum in  $a \in U$  und sei partiell differenzierbar. Dann gilt

$$\partial_1 f(a) = \dots = \partial_n f(a) = 0$$

D.h. wenn  $f$  differenzierbar ist, dann gilt  $df|_a = 0$

*Beweis.*  $F(t) = f(a + t e_i)$  (für  $t$  sehr klein, so dass  $a + t e_i \in U$ )  $F$  hat lokale Extrema in 0, d.h.  $F'(0) = \partial_1 f(a) = 0$  □

**Definition 1.104.**  $f$  differenzierbar, dann heisst  $a$  mit  $df|_a = 0$  kritischer Punkt. Man sagt auch  $f$  ist stationär in  $a$ .

*Bemerkung 1.105.* lokale Extremum  $\implies \nRightarrow$  kritischer Punkt.

**Satz 1.106.** (Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema)  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^2(U, \mathbb{R})$  it  $df|_a = 0$ . Dann

$$\begin{aligned}
 H_f(a) &> 0 \implies a \text{ lokales Minimum} \\
 H_f(a) &< 0 \implies a \text{ lokales Maximum} \\
 H_f(a) &\text{ indefinit} \implies a \text{ kein Extremum}
 \end{aligned}$$

Im indefiniten Fall gilt:  $\exists$  Geraden  $G_1, G_2$  durch  $a$  so dass  $f|_{G_1 \cap U}$  in  $a$  ein lokales Minimum und  $f|_{G_2 \cap U}$  in  $a$  ein lokales Maximum hat, d.h.  $a$  ist ein Sattelpunkt.

*Bemerkung 1.107.* •  $H_f(a) > 0$  bedeutet  $H_f(a)$  positiv definit, d.h.

$$v^T H_f(a) v > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- $H_f(a)$  indefinit,  $\exists v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  mit

$$v^T H_f(a) v > 0$$

$$w^T H_f(a) w < 0$$

Beh.  $H_f(a) > 0$

$$df|_a = 0 \xrightarrow{\text{Taylor}} f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + R(h)$$

mit

$$\frac{R(h)}{\|h\|^2} \rightarrow 0 \quad (\|h\| \rightarrow 0)$$

$f \in C^2$

- $\implies h \mapsto h^T H_f(a) h$  ist stetig
- $\implies \dots$  hat ein Minimum auf  $\{\|h\| = 1\}$  (kompakt),  $m > 0$  (da  $H_f(a) > 0$ ).
- $\implies h^T H_f(a) h \geq m \|h\|^2$  (da  $h = \|h\| \frac{h}{\|h\|}$ ,  $h \neq 0$ )

Wähle  $\varepsilon > 0$  so klein, dass  $B_\varepsilon(a) \subset U$

$$|R(h)| \leq \frac{m}{4} \|h\|^2 \quad \forall h \in B_\varepsilon(a)$$

$$\implies f(a+h) \geq f(a) + \frac{m}{4} \|h\|^2 > f(a) \quad \forall h \in B_\varepsilon(a)$$

d.h.  $f$  hat in  $a$  ein lokales Minimum

$H_f(a) < 0$  Betrachte  $-f$  wie oben.

$H_f(a) < 0$

$$\exists v, w : v^T H_f(a) v > 0, w^T H_f(a) w < 0$$

$$F_v(t) := f(a+tv), F_w(t) = f(a+tw)$$

$$\implies F_v''(0) > 0 \implies \text{lokales Maximum}$$

$$\implies F_w''(0) < 0 \implies \text{lokales Minimum}$$

$\implies$  Beh

□

*Bemerkung 1.108.* Mit diesem Satz lässt sich keine Aussage machen, falls  $H_f(a)$  semidefinitiv ist, d.h.  $H_f(a) \geq 0$ ,  $H_f(a) \leq 0$ .

**Beispiel 1.109.**  $f(x, y) = y^2(x-1) + x^2(x+1)$

$$df|_{(x,y)} = (y^2 + 3x^2 + 2x, 2(x-1)y)$$

$\implies df|_{(x,y)} = (0, 0) \implies$  kritische Punkte:

$$P_1 = (0, 0), P_2 = \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$$

$$\implies H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x+2 & 2y \\ 2y & 2(x-1) \end{pmatrix}$$

d.h.

$$\implies H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

indefinit, d.h. Sattelpunkt.

$$\implies H_f(P_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix} < 0$$

d.h. lokales Maximum

**Beispiel 1.110.**  $f(x, y) = x^2 + y^3$ ,  $g(x, y) = x^2 + y^4$  Beim Punkt 0 ist die Hesse-Matrix in beiden Fällen  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Daraus kann man nichts schliessen (siehe Graphen (Freiwilliger gesucht))

### 1.12 Konvexität

**Definition 1.111.**  $U \subset \mathbb{R}^n$  heisst konkav

$$\iff \forall x, y \in U : [x, y] \subset U$$

**Definition 1.112.**  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  heisst konvex

$$\iff \forall x, y \in U : f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

- Falls  $\forall x, y \in U \forall t \in (0, 1)$  „ $\cdot$ “, heisst die Funktion strikt konvex.
- $f$  heisst (streng) konkav, falls  $-f$  (streng) konvex

*Bemerkung 1.113.*  $f$  ist konvex

$$\iff \forall x \neq y \in U : F_{x,y}(t) = f(x + t(y-x)) \text{ konvex (auf } [x, y])$$

**Satz 1.114.** (Konvexitätskriterium) Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}, C^2$   $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, konvex. Es gilt:

1.  $f$  konvex  $\iff H_f(x) \geq 0 \forall x \in U$
2.  $H_f(x) > 0 \forall x \in U \implies f$  streng konvex

*Bemerkung 1.115.* Umkehrung von 1 gilt nicht, z.B.  $f(x, y) = x^4 + y^4$

*Beweis.* 1.  $f$  konvex:  $\forall x \in U$  wähle  $r > 0: B_r(x) \subset U$

$$\implies F_{x,x+h}(t) \text{ konvex } \forall h \in B_r(0)$$

$$\implies h^T H_f(x) h = F''_{x,x+h}(0) \underset{\substack{\geq \\ \text{Konvexität in 1-Dim}}}{\geq} 0 \forall h \in B_r(0)$$

$$\xrightarrow{\text{homogenität}} h^T H_f(x) h \geq 0 \forall h \in \mathbb{R}^n, \text{ d.h. } H_f(x) \text{ positiv semidefinit}$$

$$H_f(x) \geq 0 \forall x \in U:$$

$$a, b \in U \implies F''_{a,b}(t) = (b-a)^T H_f(a + t(b-a))(b-a) \geq 0$$

$$\implies F_{a,b} \text{ konvex } \forall a, b \in U \implies \text{Behauptung}$$

2. Analog wie die zweite Richtung im Ersten.

□

### 1.13 Differentiation parameterabhängiger Integrale

$f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $t \rightarrow f(x, t)$  stetig.  $\forall x \in U$ . Definiere

$$F(x) := \int_a^b f(x, t) dt \quad x \in U$$

**Satz 1.116.** Sei  $f$  wie oben und es gelte:

1.  $\forall t \in [a, b]: x \mapsto f(x, t)$  nach  $x_i$  partiell differenzierbar
2.  $(x, t) \mapsto \partial_i f(x, t)$  ist stetig auf  $U \times [a, b]$

$\implies F$  ist nach  $x_i$  stetig partiell differenzierbar, und es gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt$$