Analysis II - Vorlesungs-Script

Prof. Dr. Camillo De Lellis

Basisjahr 11 Semester I

Mitschrift:
Simon Hafner

Inhaltsverzeichnis

1 Metrik und Topologie des euklidischen Raumes

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n), x \in \mathbb{R}\}$ In $\mathbb{R}^n$:

- Norm (Euklidische)
- Abstand (Euklidische)
- Topologie

"Abstrakte Theorie"

- Normierte Vektorräume
- Metrische Räume
- Topologische Räume

Definition 1.1. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ $(x = (x_1, \cdots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R})$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Intuitiv: $\|x\|$ ="der Abstand zwischen x und 0"

Lemma 1.2. $\|.\|$ *erfüllt die Regeln*

1. $\|x\| \geq 0$ *und* $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Beweis. 1. ≥ 0 trivial

$$x = 0 \implies \sum x_i^2 = 0 \implies \|x\| = 0$$

$$x = 0 \Leftarrow x_i = 0 \forall i \Leftarrow \sum x_i^2 = 0 \Leftarrow \|x\| = 0$$

2.

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i)^2} \sqrt{\lambda^2 (\sum x^2)} = |\lambda| \sqrt{\sum x^2} = |\lambda| \|x\|$$

$$|\lambda| = \frac{\|x\| |\lambda|}{\|x\|}$$

3.

$$\iff \underbrace{\|x + y\|^2}_{=} \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\|$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i\right) = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \overbrace{2 \sum x_i y_i}^{Skalarprodukt}$$

$$\iff \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$$

□

Satz 1.3. *Cauchy-Schwartzsche Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Beweis. OBdA $y \neq 0$ ($y = 0$ trivial)

$$t \to g(t) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + ty_i)^2$$

$$= \left(\sum x_i^2\right) + 2t \sum x_i y_i + t^2 \sum y_i^2$$

$$= \|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + \|y\|^2 t^2$$

Sei $t_0 = \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$, dann $g(t_0) \geq 0$

$$0 \leq g(t_0)$$

$$= \|x\|^2 - 2\frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^2} + \|y\|^2 \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^4}$$

$$= \|x\|^2 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^2}$$

$$\implies \langle x, y\rangle \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

$$\implies |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

□

Definition 1.4. Ein normierter Vektorraum ist ein reeller Vektorraum V mit einer Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ so dass:

1. $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Nullvektor)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \; \forall x, y \in V$

Beispiel 1.5. $V = \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad p \geq 1$$

$p = 2$ euklidische Norm

Definition 1.6. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Die euklidische Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$

Lemma 1.7. *1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$*

2. $d(x, y) = d(y, x)$

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Beweis.

$$\|x - z\| \leq \underbrace{\|x - y\|}_{v} + \underbrace{\|y - z\|}_{w} \quad v + w = x - z$$

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

□

Definition 1.8. Ein metrischer Raum ist eine Menge X mit einer Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \;\; (x, y) \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R}$$

so dass

1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y \; \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = d(y, x) \; \forall x, y \in X$
3. $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z) \; \forall x, y, z \in X$

Lemma 1.9. *Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann sind V und $d(x,y) = \|x-y\|$ ein metrischer Raum.*

Definition 1.10. Die offene Kugel mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$K_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n, d(x,y) < r\}$$

Definition 1.11. Eine Menge heisst "Umgebung“ von x, wenn V eine offene Kugel mit Mittelpunkt x enthält.

Definition 1.12. Eine Menge $U \in \mathbb{R}^n$ heisst offen falls $\forall x \in U$ ist U eine Umgebung von x

$$\forall x \in U \ \ \exists \text{ eine Kugel } \ K_r(x) \in U$$

Bemerkung 1.13. Eine offene Kugel ist offen.

Satz 1.14. *1. $\varnothing$ und $\mathbb{R}^n$ sind offen*

2. Der Schnitt <u>endlich vieler</u> offener Mengen ist auch offen.

3. Die Vereinigung einer <u>beliebigen</u> Familie offener Mengen ist auch offen.

Beweis. 1. $\mathbb{R}^n$ trivialerweise offen, auch $\varnothing$

2. Sei $x \in U \cap \cdots \cap U_N$

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\} \quad K_r(x) \subset U_i$$

Sei $r = \min\{r_i, \ldots, r_N\}$

$$\implies K_r(x) \subset U_i \forall i \implies K_r(x) \subset U_1 \cap \cdots \cap U_N$$

3. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Sei $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

$$x \in U \implies x \in U_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \Lambda$$

$$\implies \exists K_r(x) \subset U_\lambda \subset U$$

□

Definition 1.15. Ein topologischer Raum ist eine Menge X und eine Menge O von Teilmengen von X so dass:

1. $\varnothing, X \in O$
2. $U_1 \cap \cdots \cap_N \in O$ falls $U_i \in O$
3. $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in O$ falls $U_i \in O$

Satz 1.16. *Sei (X,d) ein metrischer Raum*

$$K_r(x) = \{y = X : d(x,y) < r\}$$

Umgebungen und offene Mengen sind wie im euklidischen Fall. $O = \{$offene Menge$\}$ definiert eine Topologie.

1.1 Konvergenz

Sei $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ $x_k \in \mathbb{R}$ $x_k = (x_{k1}, \cdots, x_{kn})$

Definition 1.17. Die Folge $\{x_k\}$ konvergiert gegen $x_\infty \in \mathbb{R}^n$ falls

$$\lim_{k \to \infty} d(x_k, x_\infty) = 0$$

$$\left(\lim_{k \to \infty} \|x_k, x_\infty\| = 0\right)$$

Dann schreiben wir

$$x_\infty = \lim_{k \to \infty} x_k$$

Satz 1.18.
$$x_k \to x_\infty \iff x_{ki} \to x_{\infty_i} \ \ \forall i \in \{1, \cdots, n\}$$

Beweis.
$$\|x_k - x_\infty\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - x_{\infty_i})^2} \geq |x_{ki} - x_{kinfty}| \geq 0$$
$$\implies 0 \leq \lim_{k\to\infty} |x_{ki} - x_{kinfty}| \leq \lim \|x_k - x_\infty\| = 0$$
$$\|x_k - x_\infty\| = \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_{ki} - x_{\infty_i})^2}_{\to 0}}}_{\to 0} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_{ki} - x_{\infty_i}|$$
$$\implies \|x_k - x_\infty\| \to 0$$

Eine alternative Formulierung: $\lim_{k\to\infty} x_k = \left(\lim_{k\to\infty} x_{k1}, \cdots, \lim_{k\to\infty} x_{kn}\right)$ □

Bemerkung 1.19.
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \|x_k - x_\infty\| < \varepsilon \ \text{ falls } \ k \geq N$$

Für jede Umgebung U von x_∞ fast alle $x_k \in U$.

Definition 1.20. Eine Folge $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heisst Cauchy falls:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : m, k \geq N \implies \|x_k - x_m\| < \varepsilon$$

Lemma 1.21. *$\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn $\{x_k\}$ Cauchy ist.*

Beweis. $\{x_k\}$ ist Cauchy $\implies \left\{ x_k \underbrace{i}_{\{\text{fixiert}\}} \right\}$ Cauchy!
$$|x_{ki} - x_{m_i}| \leq \|x_k - x_m\|$$

$\implies \{x_k\}$ ist eine Cauchyfolge $\overset{\text{Erstes Semester}}{\implies} x_{ki}$ konvergiert $\overset{\text{Lemma 2}}{\implies} x_k$ konvergiert. x_k konvergiert $\implies$ Cauchyfolge
$$x_\infty = \lim_{k\to\infty} x_k \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \|x_k - x_\infty\| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall k \geq N$$
$$k, m \geq N \quad \|x_k - x_m\| \leq \|x_k - x_\infty\| + \|x_\infty - x_m\| \leq d(x_k, x_\infty) + (x_\infty, x_m)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Bemerkung 1.22. In einem metrischen Raum, Cauchy $\Leftarrow$ Konvergenz. Aber allgemein: Cauchy $\not\Longrightarrow$ Konvergenz. Falls Cauchy $\implies$ Konvergenz, dann ist der metrische Raum vollständig.

Definition 1.23. Eine Folge $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heisst beschränkt falls $\|x_k\|$ beschränkt ist.

Satz 1.24. 1. *Eine konvergente Folge ist beschränkt*

2. *(Bolzano-Weierstrass) $\{x_k\}$ beschränkt $\implies \exists \left\{x_{k_j}\right\}$ die konvergiert.*

Beweis.
$$\{x_k\} \ \text{ beschränkt } \implies \{x_{k1}\}_{k\in\mathbb{N}} \ \text{ beschränkt}$$
$$\implies \exists x_{k_j} : x_{k_j 1} \to x_1$$

Ich definiere $y_j = x_{k_j}$ $y_{j1} \to x_1$
$$y_j \ \text{ beschränkt } \implies \exists j_l : y_{j_l 2} \to x_2$$
$$z_l := y_{j_l} \ \text{ und } \ z_{l1} \to x_1, \ \ x_{l2} \to x_2$$

$\ldots (n-2)$ Schritte. w_r Teilfolge von x_k mit $w_{ri} \to x_i$
$$w_r \to (x_1, \cdots, x_n)$$

□

1.2 Ein bisschen mehr Topologie

Definition 1.25. Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heisst geschlossen falls $G^c (:= \mathbb{R}^n \setminus G)$ eine offene Menge ist.

Bemerkung 1.26.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Satz 1.27. *1. $\varnothing, \mathbb{R}^n$ sind abgeschlossen*

2. $G_1, \cdots, G_N$ abgeschlossen $\Longrightarrow$ $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_N$ abgeschlossen

3. $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ abgeschlossen $\Longrightarrow$ $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ abgeschlossen.

Satz 1.28. *$G \subset \mathbb{R}^n$ G ist abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ $\forall$ jede konvergente $\{x_k\} \subset G$ gehört der Grenzwert zu G (gilt auch für metrische Räume).*

Beweis. $\Leftarrow$ Die rechte Eigenschaft gilt. Ziel: G^c ist offen. Sei $x \in G^c$: das Ziel ist eine Kugel $K_r(x) \in G^c$ zu finden. Widerspruchsbeweis: $K_{\frac{1}{j}}(x) \not\subset G^c$, $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\Longrightarrow \exists x_j \in K_{\frac{1}{j}}(x) \cap G \Longrightarrow \{x_j\} \subset G \text{ und } x_j \to x$$

$$\{x_j\} \subset G \;\; x_j \to x \;\; x \notin G$$

$\Longrightarrow$ d.h. G^c offen $\Longrightarrow$ falls $\{x_k\} \subset G$ und $x_k \to x$ dann $x \in G$ Widerspruch: G^c offen, aber $\exists \{x_k\} \subset G$ mit Grenzwert $x \notin G$, d.h. $x \in G^c$. Offenheit von G^c.

$$\Longrightarrow \exists K_r(x) \subset G^c \Longrightarrow K_r(x) \cap = \varnothing$$

d.h. $\exists N$ mit

$$\|x_N - x\| < r \Longrightarrow x_N \in K_r(x) \cap G$$

□

Beispiel 1.29. Eine offene Kugel ist nicht geschlossen.

$$K_r(x) = \{y : \|y - x\| < r\}$$

Sei $\{y_k\} \in K_r(x)$, (d.h. $\|y_k - x\| < r$) mit $y_k \to y$ und $\|y - x\| = r$.

Definition 1.30. Sei $\overline{K_r(x)} := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$.

Übung 1.31. $\overline{K_r(x)}$ ist abgeschlossen

Definition 1.32. $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein Randpunkt von M falls

$$\forall K_r(x) \;\; \exists y \in K_r(x) \cap M \text{ und } \exists z \in K_r(x) \cap M^c$$

Definition 1.33. Sei M eine Menge in $\mathbb{R}^n$, dann ist der Rand von M

$$\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n, \text{ Randpunkt von } M\}$$

Satz 1.34. $\partial M^c = \partial M$

1. $M \setminus \partial M$ ist die grösste offene Menge die in M enthalten ist.

2. $M \cup \partial\partial M$ ist die kleinste geschlossene Menge die M enthält.

Beweis. $M \setminus \partial M$ ist offen.

$$x \in M \setminus \partial M \implies x \in M \text{ und } \exists K_r(x) \text{ mit } K_r(x) \cap M^c = \varnothing$$
$$\implies K_r(x) \subset M$$

Sei $y \in K_r(x)$

$$\implies |y - x| = \rho < r$$
$$\implies K_{r-\rho}(y) \subset K_r(x) \subset M \implies y \in M, y \notin \partial M$$
$$K_r(x) \subset M \setminus \partial M$$

x ist beliebig $\implies M \setminus \partial M$ ist offen.
Sei $A \subset M$ eine offene Menge. Das Ziel ist $A \subset M \setminus \partial M$. Sei $x \in A$. Ziel:($x \in M \setminus \partial M$) $x \notin \partial M$.

$$A \text{ offen} \implies \exists K_r(x) \subset A \subset M \implies x \notin \partial M \implies A \subset M \setminus \partial M$$

□

1.3 Stetigkeit

Definition 1.35. Sei $f : \Omega_{\subset \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^k$. f ist stetig an der Stelle $x \in \Omega$ falls $\forall \{x_k\} \subset \Omega$ mit $x_k \to x$.

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(x)$$

Lemma 1.36. *Eine equivalente Definition:*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : f\left(K_\delta(x) \cap \Omega\right) \subset K_\varepsilon(f(x))$$

Beweis. ε-$\delta \implies$ Folgendefinition. Sei $x_k \to x$. Ziel: $f(x_k) \to f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \text{ mit } \underbrace{\underbrace{\|f(x_k) - f(x)\|}_{d(f(x_k), f(x))}}_{f(x_k) \in K_\varepsilon(f(x))} < \varepsilon \;\; \forall k \geq N$$

$$\exists \delta > 0 \;\; \underbrace{f(K_\delta(x)) \subset K_\varepsilon(f(x))}$$

$$\exists \;\; \|x_k - x\| < \delta \;\; k \geq N$$

$$x_k \in K_\delta(x) \implies f(x_k) \in K_\varepsilon(f(x))$$

Folgendefinition $\implies$ (ε-δ)-Defintion. Widerspruchsannahme:

$$\exists \varepsilon > 0 : f(K_\delta(x) \cap \Omega) \not\subset K_\varepsilon(f(x)) \;\; \forall \delta > 0$$

$$\implies \forall \delta > 0 \;\; \exists y_\delta \in K_\delta(x) \text{ und } \|f(y_\delta) - f(x)\| \geq \varepsilon$$

Nehmen wir $\delta = \frac{1}{j}$ und $x_j = \frac{y_1}{j}$

$$\|x_j - x\| < \frac{1}{j} \;\; (\text{weil } x_j \in K_{\frac{1}{j}}(x))$$

$$\|f(x_j) - f(x)\| = \left\| f(y_{\frac{1}{j}} - f(x)) \right\| \geq \varepsilon$$

$x_j \to x$ aber $f(x_j) \not\to f(x)$ □

Definition 1.37. Die allgemeine Defintion der Stetigkeit für metrische Räume: Seien (X, d) und $(Y, \overline{d})$ zwei metrische Räume. Sei $f : X \to Y$. f ist stetig an der Stelle x falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \text{ mit } d(y, x) < \delta \implies d(f(y), f(x)) < \varepsilon$$

$$\iff f(K\delta(x)) \subset K_\varepsilon(f(x))$$

Definition 1.38. Eine $f : X \to Y$ heisst stetig falls f stetig an jeder Stelle $x \in X$ ist.

Satz 1.39. *Sei $f : X \to Y$ $((X,d),(Y\overline{d})$ metrische Räume) Dann:*

1. *Die Stetigkeit in $x \iff \forall$ Umgebung U von $f(x)$ ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x.*
2. *Stetigkeit von $f \iff f^{-1}(U)$ ist offen $\forall U$ offen.*

Beweis. 1. • Stetigkeit $\implies$ Umgebung. U Umgebung von $f(x)$ $\implies$ $\exists \delta > 0$ mit $K_\delta(f(x)) \subset U$

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : f(K_\varepsilon(x)) \subset K_\delta(f(x))$$

$$\implies f^{-1}(U) \supset f^{-1}(K_\delta(f(x))) \supset K_\varepsilon(x) \implies f^{-1}(U) \text{ Umgebung von } U$$

• Umgebung $\implies$ Stetigkeit. Sei $\delta > 0$ $U = K_\delta(f(x))$. U Umgebung von $f(x)$. $f^{-1}(U)$ ist eine Umgebung von x.

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(X) \subset f^{-1}(U)$$

$$\implies f(K_\varepsilon(x)) \subset U = K_\delta(f(x))$$

2. • Stetigkeit $\implies$ offen. Sei U offen $\iff$ $\forall y \in U$ ist U eine Umgebung von y

$$f^{-1}U \ni x \implies f(x) \in U \overset{\text{Stetigkeit in } x}{\implies} f^{-1}(U) \text{ ist eine Umgebung von } x$$

$$\implies f^{-1}(U) \text{ ist offen}$$

• offen $\implies$ Stetigkeit an jedem $x \in X$. Sei $x \in X$, $\delta > 0$, $K_\delta(f(x))$ ist offen

$$f^{-1}(K_\delta(f(x))) \text{ ist offen} \implies x \in f^{-1}(K_\delta(f(x)))$$

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(K_\delta(f(x)))$$

$$f(K_\varepsilon(x)) \subset K_\delta(f(x))$$

□

1.4 lineare Abbildungen

Definition 1.40. Eine Abbildung $L : V \to W$ (V, W Vektoren) heisst linear, falls

$$L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2) \ \ \forall v_1, v_2 \in V, \ \ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \iff \exists \text{ eine Matrix } L_{ij} :$$

$$L(x) = \left(\sum_{j=1}^n L_{1j} x_j, \sum_{j=1}^n L_{2j} x_j, \cdots, \sum_{j=1}^n L_{kj} x_j \right)$$

Definition 1.41. Sei L_{ij} eine Matrix die die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ darstellt. Die Hilbert-Schmidt Norm von L ist

$$\|L\|_{\text{HS}} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n L_{ij}^2}$$

Bemerkung 1.42. $\{L : (L_{ij} n \times k \text{ Matrixen}\} \sim \mathbb{R}^{nk}$ $\|.\|_{\text{HS}}$ ist die euklidische Norm.

Bemerkung 1.43. Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann $\|L(x)\| \leq \|x\| \, \|L\|_{\text{HS}}$.

Korollar 1.44. *Sei L wie oben, dann ist L stetig.*

Beweis. Sei $x_k \to x$. Ziel $L(x_k) \to L(x)$

$$\|L(x_k) - L(x)\| = \|L(x_k - x)\| \leq \|x_k - x\| \, \|L\|_{\text{HS}} \to 0$$
$$\implies \|L(x_k) - L(x)\| \to 0$$
$$\implies \text{Stetigkeit}$$

□

Beweis. Beweis von 1.36: $L(x) = y$

$$\|L(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{k} y_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} L_{ij} x_j \right)^2 \overset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} L_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1} x_j \right)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^2 \, \|x\|^2 = \|x\|^2 \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^2 \right)$$
$$\|x\|^2 \, \|L\|_{\text{HS}}^2 \implies \|L(x)\| \leq \|x\| \, \|L\|_{\text{HS}}$$

□

Definition 1.45. Sei $L : V \to W$ eine lineare Abbildung wobei $(V, \|.\|_V)$ und $(W, \|.\|_W)$ zwei endlich-dimensionierte Vektorräume sind. Die Operatornorm von L ist:

$$\|L\|_{L(V,W)} := \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W$$

Satz 1.46. $\|.\|_{L(V,W)}$ *ist eine Norm und*

$$\|L(v)\|_W \leq \|L\|_{L(V,W)} \|v\|_V$$

Deswegen: jede lineare Abbildung $L : V \to W$ ist stetig.

Beweis. Der Kern ist die folgende Eigenschaft:

$$\|L\|_{L(V,W)} < +\infty$$

Wenn das gilt dann:

1.
$$\underbrace{\|L\|_{L(V,W)}}_{\text{Kern}} \quad \text{und} \quad \|L\|_{L(V,W)} = 0 \iff L = 0$$

$\Leftarrow$ einfach. Sei $\|L\|_{L(V,W)} = 0$. Dann sei $v \in V$.

$$v = 0 \implies L(v) = 0$$
$$v \neq 0 \;\; z \frac{v}{\|v_V\|} \implies \|z\|_V = 1$$
$$\|L(z)\|_W \leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W = 0$$
$$\implies L(z) = 0 \implies L(v) = L\left(\|v\|_V \, z\right) = \|v\|_V \, L(z) = 0$$

2.
$$\|\lambda L\|_{L(V,W)} = |\lambda|\,\|L\|_{L(V,W)}$$
$$\begin{aligned}\|\lambda L\|_{L(V,W)} &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|\lambda L(v)\|_W \\ &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} |\lambda|\,\|L(v)\|_W \\ &= |\lambda| \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W \\ &= |\lambda|\,\|L\|_{L(V,W)}\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}&\|L + L'\|_{L(V,W)} \\ &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|(L + L')(v)\|_{L(V,W)} \\ &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(v) + L'(v)\|_{L(V,W)} \\ &\leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} (\|L(v)\|_W + \|L'(v)\|_W) \\ &\leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W + \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L'(v)\|_W \\ &= \|L\|_{L(V,W)} + \|L'\|_{L(V,W)}\end{aligned}$$

Wenn $v_1, \cdots, v_n$ Basis für V, $w_1, \cdots, w_k$ Basis für W. Die lineare Abbildung $E_{ij}(v_i) = w_j$, $E_{ij}(v_l) = 0$ falls $l \neq i$ ist eine Basis für $L(V,W)$ $\implies$ $L = \sum_{i,j} \lambda_{ij} E_{ij}$

$\square$