

Analysis I - Vorlesungs-Script

Prof. Dr. Camillo De Lellis

Basisjahr 10 Semester II

Mitschrift:

Simon Hafner

1	Die reellen Zahlen	1
1.1	Körperstrukturen	1
1.2	Die Anordnung von \mathbb{R}	1
1.3	Die Vollständigkeit der reellen Zahlen	3

Beispiel 1. \mathbb{R} ist nicht genug

Satz 1. Es gibt kein $q \in \mathbb{Q}$ so dass $q^2 = 2$

Beweis 1. Falls $q^2 = 2$, dann $(-q)^2 = 2$ OBdA $q \geq 0$ Deswegen $q > 0$. Sei $q > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ so dass $q^2 = 2$. $q = \frac{m}{n}$ mit $m > 0, n > 0$. $\text{GGT}(m, n) = 1$ (d.h. falls $r \in \mathbb{N}$ m und n dividiert, dann $r = 1$!).

$$\begin{aligned} m^2 = 2n^2 &\implies m \text{ ist gerade} && \implies m = 2k \text{ für } k \in \mathbb{N} \\ &\{0\} \\ 4k^2 = 2n^2 &\implies n \text{ ist gerade} && \implies 2|n (2 \text{ dividiert } n) \end{aligned}$$

\implies Widerspruch! Weil 2 dividiert m und n ! (d.h. es gibt keine Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$)

Beispiel 2.

$$\sqrt{2} = 1,414\dots$$

Intuitiv:

$$\begin{array}{cccccc} 1,4^2 < & 2 < & 1,5^2 & & 1,4 < & \sqrt{2} < & 1,5 \\ 1,41^2 < & 2 < & 1,42^2 & \implies & 1,41 < & \sqrt{2} < & 1,42 \\ 1,414^2 < & 2 < & 1,415^2 & & 1,414 < & \sqrt{2} < & 1,415 \end{array}$$

Intuitiv

- \mathbb{Q} hat "Lücke"
- $\mathbb{R} = \{ \text{die reellen Zahlen} \}$ haben "kein Loch".

Konstruktion Die reellen Zahlen kann man "konstruieren". (Dedekindsche Schritte, Cantor "Vervollständigung"). Google knows more. Wir werden "operativ" sein, d.h. wir beschreiben einfach die wichtigsten Eigenschaften von \mathbb{R}

1.1 Körperstrukturen

K1 Kommutativgesetz

$$\begin{array}{ll} a + b = & b + a \\ a \cdot b = & b \cdot a \end{array}$$

K2

$$\begin{array}{ll} (a + b) + c = & a + (b + c) \\ (a \cdot b) \cdot c = & a \cdot (b \cdot c) \end{array}$$

K3

$$\begin{array}{ll} a + x = & b \\ a \cdot x = & \text{falls } a \neq 0 \end{array}$$

K4

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

1.2 Die Anordnung von \mathbb{R}

A1 $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Relationen:

- $a < 0$
- $a = 0$
- $a > 0$

A2 Falls $a > 0, b > 0$, dann $a + b > 0, a \cdot b > 0$

A3 Archimedisches Axiom: $\forall a \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$

Übung 1. Beweisen Sie dass $a \cdot b > 0$ falls $a < 0, b < 0$

$\{0,1\}$ gilt $(1+x)^n > (1+nx)$

Beweis 2.

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + \underbrace{x^2}_{>0} > 1 + 2x$$

weil $x \neq 0$.

Nehmen wir an dass

$$\underbrace{(1+x)}_a \underbrace{(1+x)^n}_c > \underbrace{(1+nx)(1+x)}_d \quad \begin{matrix} 1+nx (x > -1, x \neq 0) \\ (weil (1+x) > 0) \end{matrix}$$

$$c > d \iff c - d > 0 \xrightarrow{A2} a(c-d) > 0 \xrightarrow{K4} ac - ad > 0 \xrightarrow{A2} ac > ad$$

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &> (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 = \\ &1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{>0} > 1 + (n+1)x \\ \implies (1+x)^{n+1} &> 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

Vollständige Induktion.

Definition 1. Für $a \in \mathbb{R}$ setzt man

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Satz 3. Es gilt (Dreiecksungleichung):

$$\begin{aligned} |ab| &= |a||b| \\ |a+b| &\leq |a| + |b| \\ ||a| - |b|| &\leq |a - b| \end{aligned}$$

Beweis 3. • $|ab| = |a||b|$ trivial

•

$$a + b \leq |a| + |b|$$

$(a > 0 \text{ und } b > 0 \implies a + b = |a| + |b| \text{ sonst } a + b < |a| + |b| \text{ weil } x \leq |x| \forall x \in \mathbb{R} \text{ und die Gleichung gilt}).$

$$-(a+b) = -a - b \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$$

Aber

$$|a+b| = \max\{a+b, -(a+b)\} \leq |a| + |b|$$

•

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

Zuerst:

$$\begin{aligned} |a| &= |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b| \\ \implies |a| - |b| &\leq |a-b| \\ |b| &= |a + (b-a)| \leq |a| + |b-a| \\ \implies |b| - |a| &\leq |b-a| = |a-b| \\ \implies (|a| - |b|) &\leq |a-b| \end{aligned}$$

$$||a| - |b|| = \max\{|a| - |b|, -(|a| - |b|)\} \leq |a - b|$$

Bemerkung 1.

$$|x| = \max\{-x, x\}$$

Für $a < b$, $a \in \mathbb{R}$, heisst:

$[a, b] =$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall
$]a, b[=$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall
$[a, b[=$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (nach rechts) halboffenes Intervall
$]a, b] =$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (nach links) halboffenes Intervall

Sei $I = [a, b]$ (bzw. $]a, b[\dots$). Dann a, b sind die Randpunkte von I . Die Zahl $|I| = b - a$ ist die Länge von I . ($b - a > 0$)

Definition 2. Eine Intervallschachtelung ist eine Folge I_1, I_2, \dots geschlossener Intervalle (kurz $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder (I_n)) mit diesen Eigenschaften:

I1 $I_{n+1} \subset I_n$

I2 Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n so dass $|I_n| < \epsilon$

Beispiel 3. $\sqrt{2}$

$1, 4^2 <$	$2 <$	$1, 5^2$	$I_1 = [1, 4/1, 5] I_1 = 0.1$
$1, 41^2 <$	$2 <$	$1, 42^2 \implies$	$I_2 = [1, 41/1, 42] I_2 = 0.01$
$1, 414^2 <$	$2 <$	$1, 415^2$	$I_3 = [1, 414, 1, 415] I_2 = 0.001$

Beweis 4. I1 und I2 sind beide erfüllt.

Axiom 1. Zu jeder Intervallschachtelung $\exists x \in \mathbb{d} R$ die allen ihren Intervallen angehört.

Satz 4. Die Zahl ist eindeutig.

Beweis 5. Sei (I_n) eine Intervallschachtelung. Nehmen wir an dass $\exists \alpha < \beta$ so dass $\alpha, \beta \in I_n \forall n$. Dann $|I_n| \geq |\beta - \alpha| > a$. Widerspruch!

Satz 5. $\forall a \geq 0, a \in \mathbb{d} R$ und $\forall x \in \mathbb{d} N$

$\{0\}, \exists$ eine einziges $x \geq 0, x \in \mathbb{d} R$ s.d. $x^k = a$. Wir nennen $x = \sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$.

Sei $m, n \in \mathbb{d} N$, $a^{m+n} = a^m a^n$ und deswegen $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ für $m \in \mathbb{d} N$ (so dass die Regel $a^{m-m} = a^0 = 1$.

$n, m \in \mathbb{d} N$

$\{0\}$ n Mal.

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ Mal}} = a^{\overbrace{m + \cdots + m}^{n \text{ Mal}}} = a^{nm}$$

Und mit $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ stimmt die Regel $(a^m)^n = a^{mn}$ auch $\forall m, n \in \mathbb{d} Z$!

Bemerkung 2. $x^k = \left(a^{\frac{1}{k}}\right)^k = a \left(= a^{\frac{1}{k}k} = a^1\right)$

Definition 3. $\forall q = \frac{m}{n} \in \mathbb{d} Q, \forall a > 0$ mit definiertem $a^q = (\sqrt[n]{a})^m$

Beweis 6. Mit dieser Definition gilt $a^{q+q_2} = a^q a_2^q \forall a > 0$ und $\forall q, q_2 \in \mathbb{d} Q$.