

Analysis II - Vorlesungs-Script

Prof. Dr. Camillo De Lellis

Basisjahr 11 Semester I

Mitschrift:

Simon Hafner

Inhaltsverzeichnis

1	Metrik und Topologie des euklidischen Raumes	1
1.1	Konvergenz	3
1.2	Ein bisschen mehr Topologie	5
1.3	Stetigkeit	6
1.4	lineare Abbildungen	7
1.5	Mehr über stetige Funktionen	10
1.6	Kompakte Menge	12
1.7	Differenzierbare Funktionen	15
1.7.1	Das Differenzial	17
1.7.2	Richtungsableitung	17
1.7.3	Partielle Ableitung	18
1.8	Rechenregeln	19
1.9	Mittelwertsatz und Schrankensatz	22
1.10	Höhere (partielle) Ableitungen	23

1 Metrik und Topologie des euklidischen Raumes

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n), x \in \mathbb{R}\}$ In \mathbb{R}^n :

- Norm (Euklidische)
- Abstand (Euklidische)
- Topologie

“Abstrakte Theorie”

- Normierte Vektorräume
- Metrische Räume
- Topologische Räume

Definition 1.1. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$)

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Intuitiv: $\|x\|$ = ”der Abstand zwischen x und 0“

Lemma 1.2. $\|\cdot\|$ erfüllt die Regeln

1. $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Beweis. 1. ≥ 0 trivial

$$x = 0 \implies \sum x_i^2 = 0 \implies \|x\| = 0$$

$$x = 0 \iff x_i = 0 \forall i \iff \sum x_i^2 = 0 \iff \|x\| = 0$$

2.

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda x_i)^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |\lambda| \|x\|$$

$$|\lambda| = \frac{\|x\| |\lambda|}{\|x\|}$$

3.

$$\iff \underbrace{\|x + y\|^2}_{=} \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\|$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \overbrace{2 \sum_{i=1}^n x_i y_i}^{\text{Skalarprodukt}} \\ &\iff \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

□

Satz 1.3. Cauchy-Schwartzsche Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Beweis. OBdA $y \neq 0$ ($y = 0$ trivial)

$$\begin{aligned} t \rightarrow g(t) &= \sum_{i=1}^n (x_i + ty_i)^2 \\ &= \left(\sum x_i^2 \right) + 2t \sum x_i y_i + t^2 \sum y_i^2 \\ &= \|x\|^2 + 2t \langle x, y \rangle + \|y\|^2 t^2 \end{aligned}$$

Sei $t_0 = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$, dann $g(t_0) \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 &\leq g(t_0) \\ &= \|x\|^2 - 2 \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} + \|y\|^2 \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^4} \\ &= \|x\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \\ &\implies \langle x, y \rangle \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \\ &\implies |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

□

Definition 1.4. Ein normierter Vektorraum ist ein reeller Vektorraum V mit einer Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ so dass:

1. $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Nullvektor)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$

Beispiel 1.5. $V = \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad p \geq 1$$

$p = 2$ euklidische Norm

Definition 1.6. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Die euklidische Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$

Lemma 1.7. 1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$

$$2. \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$3. \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \|x - z\| &\leq \underbrace{\|x - y\|}_v + \underbrace{\|y - z\|}_w \quad v + w = x - z \\ \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\| \end{aligned}$$

□

Definition 1.8. Ein metrischer Raum ist eine Menge X mit einer Abbildung

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R}$$

so dass

1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

Lemma 1.9. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann sind V und $d(x, y) = \|x - y\|$ ein metrischer Raum.

Definition 1.10. Die offene Kugel mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$K_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) < r\}$$

Definition 1.11. Eine Menge heisst "Umgebung" von x , wenn V eine offene Kugel mit Mittelpunkt x enthält.

Definition 1.12. Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heisst offen falls $\forall x \in U$ ist U eine Umgebung von x

$$\forall x \in U \exists \text{ eine Kugel } K_r(x) \subset U$$

Bemerkung 1.13. Eine offene Kugel ist offen.

Satz 1.14. 1. \emptyset und \mathbb{R}^n sind offen

2. Der Schnitt endlich vieler offener Mengen ist auch offen.

3. Die Vereinigung einer beliebigen Familie offener Mengen ist auch offen.

Beweis. 1. \mathbb{R}^n trivialerweise offen, auch \emptyset

2. Sei $x \in U \cap \dots \cap U_N$

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad K_r(x) \subset U_i$$

$$\text{Sei } r = \min \{r_1, \dots, r_N\}$$

$$\implies K_r(x) \subset U_i \forall i \implies K_r(x) \subset U_1 \cap \dots \cap U_N$$

3. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Sei $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

$$x \in U \implies x \in U_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \Lambda$$

$$\implies \exists K_r(x) \subset U_\lambda \subset U$$

□

Definition 1.15. Ein topologischer Raum ist eine Menge X und eine Menge \mathcal{O} von Teilmengen von X so dass:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

2. $U_1 \cap \dots \cap U_N \in \mathcal{O}$ falls $U_i \in \mathcal{O}$

3. $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ falls $U_i \in \mathcal{O}$

Satz 1.16. Sei (X, d) ein metrischer Raum

$$K_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Umgebungen und offene Mengen sind wie im euklidischen Fall. $\mathcal{O} = \{\text{offene Menge}\}$ definiert eine Topologie.

1.1 Konvergenz

Sei $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \quad x_k \in \mathbb{R} \quad x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$

Definition 1.17. Die Folge $\{x_k\}$ konvergiert gegen $x_\infty \in \mathbb{R}^n$ falls

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x_\infty) = 0$$

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k, x_\infty\| = 0 \right)$$

Dann schreiben wir

$$x_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$$

Satz 1.18.

$$x_k \rightarrow x_\infty \iff x_{ki} \rightarrow x_{\infty_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \|x_k - x_\infty\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{ki} - x_{\infty_i})^2} \geq |x_{ki} - x_{\infty_i}| \geq 0 \\ \implies 0 &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} |x_{ki} - x_{\infty_i}| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x_\infty\| = 0 \\ \|x_k - x_\infty\| &= \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^n \underbrace{(x_{ki} - x_{\infty_i})^2}_{\rightarrow 0}}_{\rightarrow 0}} \leq \sum_{i=1}^n |x_{ki} - x_{\infty_i}| \\ \implies \|x_k - x_\infty\| &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Eine alternative Formulierung: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k1}, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{kn} \right)$ □

Bemerkung 1.19.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \|x_k - x_\infty\| < \varepsilon \text{ falls } k \geq N$$

Für jede Umgebung U von x_∞ fast alle $x_k \in U$.

Definition 1.20. Eine Folge $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heisst Cauchy falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : m, k \geq N \implies \|x_k - x_m\| < \varepsilon$$

Lemma 1.21. $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn $\{x_k\}$ Cauchy ist.

$$\text{Beweis. } \{x_k\} \text{ ist Cauchy} \implies \left\{ x_k \underbrace{i}_{\{\text{fixiert}\}} \right\} \text{ Cauchy!}$$

$$|x_{ki} - x_{mi}| \leq \|x_k - x_m\|$$

$\implies \{x_k\}$ ist eine Cauchyfolge $\xrightarrow{\text{Erstes Semester}} x_{ki}$ konvergiert $\xrightarrow{\text{Lemma 2}} x_k$ konvergiert. x_k konvergiert \implies Cauchyfolge

$$x_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N : \|x_k - x_\infty\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N$$

$$\begin{aligned} k, m \geq N \quad \|x_k - x_m\| &\leq \|x_k - x_\infty\| + \|x_\infty - x_m\| \leq d(x_k, x_\infty) + (x_\infty, x_m) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.22. In einem metrischen Raum, Cauchy \Leftarrow Konvergenz. Aber allgemein: Cauchy $\not\implies$ Konvergenz. Falls Cauchy \implies Konvergenz, dann ist der metrische Raum vollständig.

Definition 1.23. Eine Folge $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heisst beschränkt falls $\|x_k\|$ beschränkt ist.

Satz 1.24. 1. Eine konvergente Folge ist beschränkt

2. (Bolzano-Weierstrass) $\{x_k\}$ beschränkt $\implies \exists \{x_{k_j}\}$ die konvergiert.

Beweis.

$$\begin{aligned} \{x_k\} \text{ beschränkt} &\implies \{x_{k1}\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt} \\ &\implies \exists x_{k_1} : x_{k_1} \rightarrow x_1 \end{aligned}$$

Ich definiere $y_j = x_{k_j} \quad y_{j1} \rightarrow x_1$

$$y_j \text{ beschränkt} \implies \exists j_l : y_{j_l 2} \rightarrow x_2$$

$$z_l := y_{j_l} \text{ und } z_{l1} \rightarrow x_1, \quad z_{l2} \rightarrow x_2$$

... (n - 2) Schritte. w_r Teilfolge von x_k mit $w_{ri} \rightarrow x_i$

$$w_r \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$$

□

1.2 Ein bisschen mehr Topologie

Definition 1.25. Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heisst geschlossen falls $G^c (= \mathbb{R}^n \setminus G)$ eine offene Menge ist.

Bemerkung 1.26.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Satz 1.27. 1. \emptyset, \mathbb{R}^n sind abgeschlossen

2. G_1, \dots, G_N abgeschlossen $\implies G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_N$ abgeschlossen

3. $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ abgeschlossen $\implies \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ abgeschlossen.

Satz 1.28. $G \subset \mathbb{R}^n$ G ist abgeschlossen $\iff \forall$ jede konvergente $\{x_k\} \subset G$ gehört der Grenzwert zu G (gilt auch für metrische Räume).

Beweis. \Leftarrow Die rechte Eigenschaft gilt. Ziel: G^c ist offen. Sei $x \in G^c$: das Ziel ist eine Kugel $K_r(x) \in G^c$ zu finden. Widerspruchsbeweis: $K_{\frac{1}{j}}(x) \not\subset G^c$, $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\implies \exists x_j \in K_{\frac{1}{j}}(x) \cap G \implies \{x_j\} \subset G \text{ und } x_j \rightarrow x$$

$$\{x_j\} \subset G \quad x_j \rightarrow x \quad x \notin G$$

\implies d.h. G^c offen \implies falls $\{x_k\} \subset G$ und $x_k \rightarrow x$ dann $x \in G$
Widerspruch: G^c offen, aber $\exists \{x_k\} \subset G$ mit Grenzwert $x \notin G$, d.h. $x \in G^c$. Offenheit von G^c .

$$\implies \exists K_r(x) \subset G^c \implies K_r(x) \cap G = \emptyset$$

d.h. $\exists N$ mit

$$\|x_N - x\| < r \implies x_N \in K_r(x) \cap G$$

□

Beispiel 1.29. Eine offene Kugel ist nicht geschlossen.

$$K_r(x) = \{y : \|y - x\| < r\}$$

Sei $\{y_k\} \in K_r(x)$, (d.h. $\|y_k - x\| < r$) mit $y_k \rightarrow y$ und $\|y - x\| = r$.

Definition 1.30. Sei $\overline{K_r(x)} := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$.

Übung 1.31. $\overline{K_r(x)}$ ist abgeschlossen

Definition 1.32. $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein Randpunkt von M falls

$$\forall K_r(x) \quad \exists y \in K_r(x) \cap M \quad \text{und} \quad \exists z \in K_r(x) \cap M^c$$

Definition 1.33. Sei M eine Menge in \mathbb{R}^n , dann ist der Rand von M

$$\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n, \text{ Randpunkt von } M\}$$

Satz 1.34. $\partial M^c = \partial M$

1. $M \setminus \partial M$ ist die grösste offene Menge die in M enthalten ist.

2. $M \cup \partial M$ ist die kleinste geschlossene Menge die M enthält.

Beweis. $M \setminus \partial M$ ist offen.

$$\begin{aligned} x \in M \setminus \partial M &\implies x \in M \text{ und } \exists K_r(x) \text{ mit } K_r(x) \cap M^c = \emptyset \\ &\implies K_r(x) \subset M \end{aligned}$$

Sei $y \in K_r(x)$

$$\begin{aligned} &\implies |y - x| = \rho < r \\ &\implies K_{r-\rho}(y) \subset K_r(x) \subset M \implies y \in M, y \notin \partial M \\ &\quad K_r(x) \subset M \setminus \partial M \end{aligned}$$

x ist beliebig $\implies M \setminus \partial M$ ist offen.

Sei $A \subset M$ eine offene Menge. Das Ziel ist $A \subset M \setminus \partial M$. Sei $x \in A$. Ziel: $(x \in M \setminus \partial M) \implies x \notin \partial M$.

$$A \text{ offen} \implies \exists K_r(x) \subset A \subset M \implies x \notin \partial M \implies A \subset M \setminus \partial M$$

□

1.3 Stetigkeit

Definition 1.35. Sei $f : \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}^k$. f ist stetig an der Stelle $x \in \Omega$ falls $\forall \{x_k\} \subset \Omega$ mit $x_k \rightarrow x$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x)$$

Lemma 1.36. Eine äquivalente Definition:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(K_\delta(x) \cap \Omega) \subset K_\varepsilon(f(x))$$

Beweis. ε - $\delta \implies$ Folgenddefinition. Sei $x_k \rightarrow x$. Ziel: $f(x_k) \rightarrow f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ mit } \underbrace{\|f(x_k) - f(x)\|}_{d(f(x_k), f(x))} < \varepsilon \quad \forall k \geq N$$

$$\exists \delta > 0 \quad \underbrace{f(K_\delta(x)) \subset K_\varepsilon(f(x))}$$

$$\exists \|x_k - x\| < \delta \quad k \geq N$$

$$x_k \in K_\delta(x) \implies f(x_k) \in K_\varepsilon(f(x))$$

Folgenddefinition \implies $(\varepsilon$ - $\delta)$ -Defintion. Widerspruchsannahme:

$$\exists \varepsilon > 0 : f(K_\delta(x) \cap \Omega) \not\subset K_\varepsilon(f(x)) \quad \forall \delta > 0$$

$$\implies \forall \delta > 0 \exists y_\delta \in K_\delta(x) \text{ und } \|f(y_\delta) - f(x)\| \geq \varepsilon$$

Nehmen wir $\delta = \frac{1}{j}$ und $x_j = \frac{y_1}{j}$

$$\|x_j - x\| < \frac{1}{j} \quad (\text{weil } x_j \in K_{\frac{1}{j}}(x))$$

$$\|f(x_j) - f(x)\| = \|f(y_{\frac{1}{j}}) - f(x)\| \geq \varepsilon$$

$x_j \rightarrow x$ aber $f(x_j) \not\rightarrow f(x)$

□

Definition 1.37. Die allgemeine Defintion der Stetigkeit für metrische Räume: Seien (X, d) und (Y, \bar{d}) zwei metrische Räume. Sei $f : X \rightarrow Y$. f ist stetig an der Stelle x falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } d(y, x) < \delta \implies \bar{d}(f(y), f(x)) < \varepsilon$$

$$\iff f(K_\delta(x)) \subset K_\varepsilon(f(x))$$

Definition 1.38. Eine $f : X \rightarrow Y$ heisst stetig falls f stetig an jeder Stelle $x \in X$ ist.

Satz 1.39. Sei $f : X \rightarrow Y$ $((X, d), (Y, \bar{d}))$ metrische Räume) Dann:

1. Die Stetigkeit in $x \iff \forall$ Umgebung U von $f(x)$ ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x .
2. Stetigkeit von $f \iff f^{-1}(U)$ ist offen $\forall U$ offen.

Beweis. 1. • Stetigkeit \implies Umgebung. U Umgebung von $f(x) \implies \exists \delta > 0$ mit $K_\delta(f(x)) \subset U$

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : f(K_\varepsilon(x)) \subset K_\delta(f(x))$$

$$\implies f^{-1}(U) \supset f^{-1}(K_\delta(f(x))) \supset K_\varepsilon(x) \implies f^{-1}(U) \text{ Umgebung von } x$$

- Umgebung \implies Stetigkeit. Sei $\delta > 0$ $U = K_\delta(f(x))$. U Umgebung von $f(x)$. $f^{-1}(U)$ ist eine Umgebung von x .

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(U)$$

$$\implies f(K_\varepsilon(x)) \subset U = K_\delta(f(x))$$

2. • Stetigkeit \implies offen. Sei U offen $\iff \forall y \in U$ ist U eine Umgebung von y

$$f^{-1}U \ni x \implies f(x) \in U \stackrel{\text{Stetigkeit in } x}{\implies} f^{-1}(U) \text{ ist eine Umgebung von } x$$

$$\implies f^{-1}(U) \text{ ist offen}$$

- offen \implies Stetigkeit an jedem $x \in X$. Sei $x \in X$, $\delta > 0$, $K_\delta(f(x))$ ist offen

$$f^{-1}(K_\delta(f(x))) \text{ ist offen} \implies x \in f^{-1}(K_\delta(f(x)))$$

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(K_\delta(f(x)))$$

$$f(K_\varepsilon(x)) \subset K_\delta(f(x))$$

□

1.4 lineare Abbildungen

Definition 1.40. Eine Abbildung $L : V \rightarrow W$ (V, W Vektoren) heisst linear, falls

$$L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \iff \exists \text{ eine Matrix } L_{ij} :$$

$$L(x) = \left(\sum_{j=1}^n L_{1j} x_j, \sum_{j=1}^n L_{2j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n L_{kj} x_j \right)$$

Definition 1.41. Sei L_{ij} eine Matrix die die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ darstellt. Die Hilbert-Schmidt Norm von L ist

$$\|L\|_{\text{HS}} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n L_{ij}^2}$$

Bemerkung 1.42. $\{L : (L_{ij} n \times k \text{ Matrixen}) \sim \mathbb{R}^{nk} \|\cdot\|_{\text{HS}} \text{ ist die euklidische Norm.}$

Bemerkung 1.43. Sei $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann $\|L(x)\| \leq \|x\| \|L\|_{\text{HS}}$.

Korollar 1.44. Sei L wie oben, dann ist L stetig.

Beweis. Sei $x_k \rightarrow x$. Ziel $L(x_k) \rightarrow L(x)$

$$\begin{aligned}\|L(x_k) - L(x)\| &= \|L(x_k - x)\| \leq \|x_k - x\| \|L\|_{\text{HS}} \rightarrow 0 \\ \implies \|L(x_k) - L(x)\| &\rightarrow 0 \\ \implies \text{Stetigkeit}\end{aligned}$$

□

Beweis. Beweis von 1.36: $L(x) = y$

$$\begin{aligned}\|L(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^k y_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^n L_{ij} x_j \right)^2 \stackrel{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \|x\|^2 = \|x\|^2 \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \right) \\ \|x\|^2 \|L\|_{\text{HS}}^2 &\implies \|L(x)\| \leq \|x\| \|L\|_{\text{HS}}\end{aligned}$$

□

Definition 1.45. Sei $L : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung wobei $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ zwei endlich-dimensionalisierte Vektorräume sind. Die Operatornorm von L ist:

$$\|L\|_{L(V,W)} := \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W$$

Satz 1.46. $\|\cdot\|_{L(V,W)}$ ist eine Norm und

$$\|L(v)\|_W \leq \|L\|_{L(V,W)} \|v\|_V$$

Deswegen: jede lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ ist stetig.

Beweis. Der Kern ist die folgende Eigenschaft:

$$\|L\|_{L(V,W)} < +\infty$$

Wenn das gilt dann:

1.

$$\underbrace{\|L\|_{L(V,W)}}_{\text{Kern}} \text{ und } \|L\|_{L(V,W)} = 0 \iff L = 0$$

\Leftarrow einfach. Sei $\|L\|_{L(V,W)} = 0$. Dann sei $v \in V$.

$$v = 0 \implies L(v) = 0$$

$$v \neq 0 \implies z \frac{v}{\|v\|_V} \implies \|z\|_V = 1$$

$$\|L(z)\|_W \leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(y)\|_W = 0$$

$$\implies L(z) = 0 \implies L(v) = L(\|v\|_V z) = \|v\|_V L(z) = 0$$

2.

$$\begin{aligned}
\|\lambda L\|_{L(V,W)} &= |\lambda| \|L\|_{L(V,W)} \\
\|\lambda L\|_{L(V,W)} &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|\lambda L(y)\|_W \\
&= \sup_{\|y\|_V \leq 1} |\lambda| \|L(y)\|_W \\
&= |\lambda| \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(y)\|_W \\
&= |\lambda| \|L\|_{L(V,W)}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
&\|L + L'\|_{L(V,W)} \\
&= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|(L + L')(y)\|_{L(V,W)} \\
&= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(y) + L'(y)\|_{L(V,W)} \\
&\leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} (\|L(y)\|_W + \|L'(y)\|_W) \\
&\leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(y)\|_W + \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L'(y)\|_W \\
&= \|L\|_{L(V,W)} + \|L'\|_{L(V,W)}
\end{aligned}$$

Wenn v_1, \dots, v_n Basis für V , w_1, \dots, w_k Basis für W . Die lineare Abbildung $E_{ij}(v_i) = w_j$, $E_{ij}(v_l) = 0$ falls $l \neq i$ ist eine Basis für $L(V, W) \implies L = \sum_{i,j} \lambda_{ij} E_{ij}$

□

$$(V, \|\cdot\|) \quad (W, \|\cdot\|) \quad L : V \rightarrow W \quad \|L\|_{L(V,W)} := \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W \quad (1)$$

Satz 1.47. Falls $\dim(V), \dim(W) < +\infty$, $\|L\|_{L(V,W)} < +\infty$ Wahr ohne Beweis in V und deswegen $L(V, W), \|\cdot\|_{L(V,W)} \forall v \in V, \forall L \in L(V, W)$

$$\|L(v)\|_W \leq \|L\|_{L(V,W)} \|v\|_V \quad (2)$$

Aus 2 folgt dass L stetig ist wenn $\|L\|_{L(V,W)} < +\infty$.

Bemerkung 1.48. $\|L\|_{L(V,W)}$ ist die optimale Konstante in 2.

Beweis. Falls $\|v\|_V = 1$

$$\iff \|L(v)\|_W \leq \|L\|_{L(V,W)} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W$$

Die Ungleichung ist eine direkte Folgerung von 1

$$\|v\|_V = 0 \implies L(v) = 0 \implies \|L(v)\|_W = 0 \implies 2$$

$\|v\|_V > 0$

$$\begin{aligned}
\tilde{v} &:= \frac{v}{\|v\|_V} \implies \|\tilde{v}\|_V = \frac{\|v\|_V}{\|v\|_V} = 1 \\
\|L(\tilde{v})\|_W &\leq \|L\|_{L(V,W)} \\
\left\| \frac{1}{\|v\|_V} L(v) \right\|_W &= \frac{1}{\|v\|_V} \|L(v)\|_W \\
\implies \frac{\|L(v)\|_W}{\|v\|_V} &\leq \|L\|_{L(V,W)}
\end{aligned}$$

□

Beweis. $\varepsilon - \delta$ Stetigkeit. $v, \varepsilon > 0$. Suche $\delta > 0$ mit

$$\|v' - v\|_V < \delta \implies \|L(v') - L(v)\|_W < \varepsilon$$

Linearität von L

$$\implies \|L(v') - L(v)\|_W = \|L(v' - v)\|_W$$

und aus 2

$$\begin{aligned} \|L(v' - v)\| &\leq \underbrace{\|L\|_{L(V,W)}}_{< \varepsilon} \overbrace{\|v' - v\|_V}^{< \delta} \\ \implies \delta &= \frac{\varepsilon}{\|L\|_{L(V,W)}} \end{aligned}$$

\implies Ungleichung erfüllt. □

Bemerkung 1.49. $V = \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_V$ euklidische Norm. $W = \mathbb{R}^k$ mit euklidischer Norm.

$$\|L\|_{L(V,W)} \leq \|L\|_{\text{HS}}$$

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ linear}$$

$$\|L\|_{\text{HS}} = \sqrt{\sum_{i,j} L_{ij}^2}$$

$$\|L\|_{L(V,W)} := \sup_{\sum_{i=1}^n v_i^2 \leq 1} \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n L_{ji} v_i \right)^2}$$

1.5 Mehr über stetige Funktionen

Regeln für stetige Funktionen

Regel 1 Seien $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Y$. X : topologischer Raum, metrischer Raum, normierter Vektorraum, \mathbb{R}^n V ist ein normierter Vektorraum (\mathbb{R}^k). Falls f, g stetig sind, ist auch $f + g$ stetig.

$V = \mathbb{R}$ $fg, \frac{f}{g}$ ($g \neq 0$) stetig

$$V = \mathbb{R} \quad fg(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)g_i(x)$$

Beweis. Im Fall X Teilmenge von \mathbb{R}^n

$$\underbrace{\{x^k\}}_{\subset X} x^k \rightarrow x \in X$$

Stetigkeit von f und g : $g(x^k) \rightarrow g(x)$, $f(x^k) \rightarrow f(x)$.

$$g(x^k) = (g_1(x^k), \dots, g_m(x^k))$$

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$$

$$f(x^k) = (f_1(x^k), \dots, f_m(x^k))$$

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

$$(g + f)(x^k) = (g_1(x^k) + f_1(x^k), \dots, g_m(x^k) + f_m(x^k))$$

$$\rightarrow g_1(x) + f_1(x), \dots, g_m(x) + f_m(x) = (g + f)(x)$$

$$x^k \rightarrow x \in X \implies (f + g)(x^k) \rightarrow (f + g)(x).$$

□

Regel 2 Seien X, Y, Z topologische Räume. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetig

$$g \circ f : \underbrace{X \rightarrow Z}_{x \mapsto g(f(x))}$$

Beweis. Sei U eine offene Menge in Z .

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(U)}_{\text{offen}})$$

□

Definition 1.50. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

$f : X \rightarrow V$, $V, \|\cdot\|_V$ normierter Vektorraum

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_V$$

Bemerkung 1.51. X Menge, $V, \|\cdot\|$ ein normierter Vektorraum.

$$F := \{f : X \rightarrow V\} \quad \text{mit} \quad \|f\|$$

Dann ist $F, \|\cdot\|$ ist ein normierter Vektorraum.

Definition 1.52. Eine Folge von Funktionen

$$f^k : X \rightarrow V$$

konvergiert gleichmässig gegen f falls

$$\|f^k - f\| \rightarrow 0$$

Bemerkung 1.53. $x \in X$

$$\|f^k(x) - f(x)\|_V \leq \|f^k - f\|$$

Folgerung f^k konvergiert gleichmässig

$$\implies f^k(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x$$

Satz 1.54. Sei X ein metrischer Raum und $f^k : X \rightarrow V$ eine Folge die gleichmässig gegen f konvergiert. Dann ist f stetig.

Beweis. Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$.

Ziel $\exists \delta > 0$ so dass

$$d(x, y) < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

$\exists N$ so dass

$$\|f - f^k\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{falls} \quad k \geq N$$

f^N ist stetig: $\exists \delta > 0$:

$$d(x, y) < \delta \implies \|f^N(x) - f^N(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$d(x, y) < \delta$$

$$\|f(x) - f(y)\| = \|(f(x) - f^N(x)) + (f^N(x) - f^N(y)) + (f^N(y) - f(y))\|_V$$

$$\leq \|f(x) - f^N(x)\|_V + \|f^N(x) - f^N(y)\|_V + \|f^N(y) - f(y)\|_V$$

$$< \|f^N - f\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f^N - f\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

1.6 Kompakte Menge

Definition 1.55. Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heisst kompakt falls K abgeschlossen und beschränkt ($\iff \exists B_R(0) : K \subset B_R(0)$) ist.

Satz 1.56. Sei $k \subset \mathbb{R}^n$.

$$K \text{ kompakt} \iff \forall \{x^j\} \subset K \exists x^{j_l}$$

x^{j_l} ist eine Teilfolge, die gegen $x \in K$ konvergiert.

$K \implies$ Sei $\{x^j\}$ eine Folge

$$x^j \in K \subset B_R(0) \implies \|x^j\| < R$$

$\exists x^{j_l} \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$, die Abgeschlossenheit von $K \implies x \in K$. Folgenkriterium \implies Abgeschlossenheit und Beschränktheit.

$$\text{nicht abgeschlossen} \implies \exists x^j \subset K \text{ mit } x^j \rightarrow \notin K$$

$$\text{Folgenkompaktheit} \implies \exists x^{j_l} \rightarrow y \in K$$

Widerspruch (weil x und y sind in derselben Menge)

Sei K nicht beschränkt.

$$\forall j \in \mathbb{N} \ B_j(0) \not\supset K$$

$$\exists x^j \in K \setminus B_j(0) \implies \|x^j\| \geq j$$

Wenn $x^{j_l} \rightarrow x$

$$\|x^{j_l}\| \leq \|x\| + \|x^{j_l} - x\|$$

$$\|x\| \leq \|x^{j_l}\| + \|x - x^{j_l}\|$$

$$\| \|x\| - \|x^{j_l}\| \| \leq \|x - x^{j_l}\|$$

$$\implies \|x^{j_l}\| \rightarrow \|x\|$$

$$\|x^{j_l}\| = j_l \rightarrow +\infty$$

\implies Widerspruch

Satz 1.57. $E \subset \mathbb{R}^n$

$$E \text{ kompakt} \iff E \text{ folgenkompakt}$$

d.h.

$$\forall \{x_k\} \subset E \exists \text{ Teilfolge } \{x_{k_l}\} \text{ die gegen } x \in E \text{ konvergiert}$$

Definition 1.58. (Überdeckungseigenschaft) Eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ besitzt die Überdeckungseigenschaft falls:

- \forall Überdeckung $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von E mit offenen Mengen \exists endliche Teilüberdeckung.

$$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \text{ Überdeckung} \iff \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \supset E$$

Teilüberdeckung ist eine Teilfamilie von $\{U_\lambda\}$ die noch eine Überdeckung von E ist.

Beispiel 1.59. Eine offene Kugel hat diese Eigenschaft nicht.

$$\forall x \in K_r(0) \text{ sei } K_{\frac{r-\|x\|}{2}}(x) = U_x$$

1. $\{U_x\}_{x \in K_r(0)}$ ist eine Überdeckung von $K_r(0)$.

Einfach weil $x \in U_x$! Sei U_{x_1}, \dots, U_{x_N} eine beliebige endliche Teilfamilie. Sei

$$p := \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \|x_i\| < r$$

\implies falls $\|y\| \geq \frac{\|x_i\|+r}{2}$ dann $y \notin U_{x_i}$. So, wenn $\|y\| \geq \frac{p+r}{2}$ dann

$$y \notin U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_N} \quad \frac{p+r}{2} < r$$

falls $\|y\| = \frac{p+r}{2}$, dann $y \in K_r(0)$. Mit einer geschlossenen Kugel ist das anders.

Satz 1.60. Sei $E \subset \mathbb{R}^n$

$$E \text{ kompakt} \iff E \text{ hat die Überdeckungseigenschaft}$$

Beispiel 1.61. $E = \mathbb{R}^n$, $U_n = K_{n+1}(0)$.

$$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

Aber $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}^n = E \not\subset \bigcup_{n=0} U_n$$

Beweis. $\exists \{x_i\} \subset E$ ohne konvergente Teilfolge in $E \implies E$ ist nicht kompakt
 \implies Überdeckungseigenschaft gilt nicht. Zwei Möglichkeiten:

1. \exists eine Teilfolge $\{y_i\} \subset E$ $y_i \rightarrow y$ $y \notin E$
2. \exists eine Teilfolge $\{y_i\} \subset E$ $y_i \rightarrow +\infty$

Beim ersten ist die Menge offen.

$$U_0 := \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{(\{y_1\} \cup \{y\})}_{E \text{ ist abgeschlossen}}$$

Beim zweiten gilt:

$$U_0 = \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{\{x_i\}}_F \text{ ist offen}$$

$$U_n = U_0 \cup \{y_1, \dots, y_{n-1}\} \quad n \geq 0$$

U_n ist auch offen.

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} U_n = \begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \{y\} & \text{im Fall 1} \\ \mathbb{R}^n \setminus \{x_i\} & \text{im Fall 2} \end{cases}$$

Aber jede endliche Familie

$$U_1 \cup \dots \cup U_n \not\supset E$$

in beiden Fällen lassen wir unendlich viele Punkte weg. E kompakt \implies Überdeckungseigenschaft. E ist beschränkt und abgeschlossen und sei $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von offenen Mengen mit $E \subset \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Wir decken die Menge U mit Würfeln:

$$[k_1, k_1 + 1] \times [k_2, k_2 + 1] \times \dots \times [k_n, k_n + 1] \\ W_1 \cup \dots \cup W_M$$

Falls jedes $E \cap W_i$ mit einer endlichen Familie von $\{U_\lambda\}$ überdeckt wird, dann finde ich eine endliche Überdeckung von E wenn N gross genug ist. So, angenommen dass die Überdeckungseigenschaft nicht gilt.

$$\exists E_i := E \cap W_i :$$

1. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Überdeckung von E_1
2. keine endliche Teilfamilie deckt E_1

Teilen wir W_i in 2^n Würfel mit Seite $\frac{1}{2}$

$$\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_2$$

$\exists E_2 := E \cap \tilde{W}_i$: so dass die beiden Eigenschaften noch gelten

Induktiv

$$E \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$$

jede $E_i \subset W^i$ Würfel mit Seite 2^{-i+1} und die beiden Eigenschaften gelten mit E_j statt E_i .

$\{x_k\} \subset E$. $\{x_k\}$ ist eine Cauchy-Folge. $j, k > i$, $x_k, x_j \in W$ mit Seite 2^{-i+1}
 $\|x_j - x_k\| \leq \sqrt{n} 2^{-i+1}$

$$\implies x_j \rightarrow x \in E \rightarrow x \in U \in \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \implies K_r(x) \supset U$$

$$x \in E, x \in E^i \quad \forall i \implies x \in W^i$$

$$\implies W^i \subset B_r(x) \subset U$$

für i gross genug

$$\implies E_i \subset U$$

\implies wir haben eine endliche Teilüberdeckung $\{U\} \subset \{U_\lambda\}$ gefunden \implies Widerspruch mit den beiden Eigenschaften. \square

Bemerkung 1.62. f stetig $\implies f^{-1}(U)$ offen falls U offen.

Beweis. Sei $\{U_\lambda\}$ eine Überdeckung (mit offenen Mengen) von $f(E)$, dann ist $\{f^{-1}(U_\lambda)\}$ eine Überdeckung von E .

$$\exists f^{-1}(U_{\lambda_1}), \dots, f^{-1}(U_{\lambda_N}) \text{ Teilüberdeckung von } E$$

$U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_N}$ ist eine Überdeckung von $f(E) \implies f(E)$ ist kompakt \square

Korollar 1.63. Wenn $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist und $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist, besitzt f ein Maximum und ein Minimum.

Beweis. $f(E) \subset \mathbb{R}$ ist kompakt.

$$s = \sup f(E) < +\infty$$

$$\exists \{x_k\} \subset f(E) \text{ mit } x_k \rightarrow s \xrightarrow{\text{abgeschlossen}} s \in s \in f(E)$$

$$\left(s - \frac{1}{k} \implies \exists x_k \in f(E) \text{ mit } x_k > s - \frac{1}{k}, x_k \leq s \right)$$

$\implies s$ ist ein Maximum. \square

Definition 1.64. Das Intervallschachtelungsprinzip in \mathbb{R} . Sei I_j eine Intervallschachtelung:

1.

$$I_j = [a_j, b_j]$$

2.

$$I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_j \supset I_{j+1}$$

3.

$$b_j - a_j \rightarrow 0$$

$$\implies \bigcap_{j=0}^{\infty} I_j \neq \emptyset$$

Satz 1.65. Sei E_j eine Folge von kompakten Mengen mit $E_j \supset E_{j+1} \forall j$ ($E_0 \subset \mathbb{R}^n$)

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \neq \emptyset \text{ falls } E_j \neq \emptyset \forall j$$

Beweis. Sei E_j wie im Satz mit $E_j \neq \emptyset$, aber $\bigcap_{j=0}^{\infty} E_j = \emptyset$. Sei $U_j := \mathbb{R}^n \setminus E_j \implies U_j$ ist offen. $\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j = \mathbb{R}^n \setminus \{E_j\}$ ist eine Überdeckung von E_0 . Aber $U_1 \cup \dots \cup U_N = U_N$ (weil $U_{j+1} \supset U_j$)

$$U_N \not\supset E_N \neq \emptyset \quad E_N \subset E_0$$

Keine endliche Teilfamilie von $\{U_j\}$ ist eine Überdeckung von E_0 . Widerspruch wegen Kompaktheit von E_0 . \square

1.7 Differenzierbare Funktionen

Erinnerung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst differenzierbar in $a \in \mathbb{R}$ falls

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert. Was geschieht mit Funktionen von mehreren Variablen? Die “Tangentensteigung” hängt auch von der Richtung ab. D.h. Es gibt eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Definition 1.66. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, heisst differenzierbar in $a \in U$, falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Lh}{\|h\|} = 0 \quad (3)$$

wobei $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung ist.

Bemerkung 1.67. $n = 1$: Es gilt $Lh = f'(a)h$

Bemerkung 1.68. Die lineare Abbildung L in 3 ist eindeutig definiert. Annahme $L' \neq L$ erfüllt die Bedingung. Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$. Es gilt:

$$(L - L')(v) \stackrel{\text{linear und } \|v\|=1}{=} \lim_{t \downarrow 0} \frac{(L - L')(tv)}{\|tv\|} \stackrel{3}{=} \lim_{h=tv}{\frac{f(a+h) - f(a) - Lh}{\|h\|}} \stackrel{3}{=} 0 \implies L = L'$$

Bemerkung 1.69. Wir können 3 auch anders beschreiben:

$$f(a+h) - f(a) = Lh + \underbrace{R(h)}_{\text{Restglied}}$$

Dann gilt

$$3 \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0 \quad (4)$$

Definition 1.70. L heisst Differential von f in a . Man schreibt $df(a)$. Sei nun $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis \mathbb{R}^n , $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\implies df(a)h = df(a) \left(\sum_{i=1}^n h_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n h_i df(a)e_i$$

Definition 1.71.

$$f'(a) = (df(a)e_1, \dots, df(a)e_n)$$

heisst Ableitung

Definition 1.72.

$$Tf(x, a) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (\text{Ebene (tangential)})$$

lineare Approximation

Satz 1.73. f differenzierbar in $a \implies f$ ist stetig in a

Beweis.

$$|f(a+b) - f(a)| = |df(a)h + R(h)| \leq |df(a)| + \underbrace{|R(h)|}_{\rightarrow 0}$$

□

Beispiel 1.74. $f(x) = Ax + b$, $A \in M_a(1, n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}$

Behauptung 1.75. $Lh := ah$ ist linear

$$df(a)h = Ah, \quad f'(a) = A$$

Beweis.

$$f(a+h) - f(a) - Lh = R(h) = 0$$

□

Beispiel 1.76. $f(x) := x^T Ax$, $A = (a_{ij}) \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$

$$f(a+h) - f(a) = \underbrace{2a^T Ah}_{df(a)h} + \underbrace{h^T Ah}_{R(h)}$$

$Lh := 2a^T Ah$ ist linear (in h), $R(h) = h^T Ah (= \sum h_i a_{ik} h_k)$ z.z.: $|Rh| \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \|h\|_\infty^2$, d.h. $\frac{R(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ (falls $\|h\| \rightarrow 0$)

Ziel Wir wollen $df(a)h$ berechnen. sei $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(a+th) &= f(a) + df(a)th + R(th) \\ \implies df(a)h &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \end{aligned} \quad (5)$$

Definition 1.77. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$. Die Richtungsableitung von f in Richtung $h \in \mathbb{R}^n$ ist der Grenzwert (falls er existiert)

$$\partial_n f(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

Die Ableitungen in Richtung e_1, \dots, e_n heissen partielle Ableitungen in a . Wir schreiben

$$\partial_{ei} f(a) = \partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_{xi}(a)$$

Bemerkung 1.78. Wir haben nicht vorausgesetzt, dass f differenzierbar ist in a !

Satz 1.79. Sei f in a differenzierbar. Dann existieren die Richtungsableitungen in jede Richtung. Insbesondere existieren die partiellen Ableitungen. Es gelten:

$$df(a)h = f'(a)h = \partial_n f(a) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) h_i \quad (6)$$

und

$$f'(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a))$$

Beweis. Existenz der Richtungsableitung oke (Herleitung von 5)

□

Frage Wie berechnet man die partielle Ableitung effizient? Es gilt:

$$\begin{aligned} \partial_i f(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t e_i) - f(a)}{t}, \quad a = (a_1, \dots, a_n) \\ g_i(x) &:= f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ \partial_i f(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(a_i + t) - g(a_i)}{t} = g'(a_i) \end{aligned}$$

Beispiel 1.80.

$$\begin{aligned} f(x, y) &:= \sin(2x) e^{3y} \\ \partial_x f &= 2e^{3y} \cos(2x) \\ \partial_y f &= \sin(2x) e^{3y} 3 \end{aligned}$$

Frage Wann folgt aus der Existenz der partiellen Ableitung (Richtungsableitung) die Differenzierbarkeit?

Beispiel 1.81.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Es gilt: $f(tx, ty) = tf(x, y)$, d.h. der Graph von f besteht aus Geraden durch 0, für $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\implies \partial_h f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th_1, th_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} f(h_1, h_2) = f(h_1, h_2)$$

$$\implies \partial f(0, 0) = f(h_1, h_2)$$

$$\partial_{e_1} f(0, 0) = f(1, 0) = 0$$

$$\partial_{e_2} f(0, 0) = f(0, 1) = 0$$

Annahme f ist in $(0, 0)$ differenzierbar

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{aus 6}} \underbrace{\partial_n f(0, 0)}_{=d f(a)h=0} &= \underbrace{\partial_1 f(a)}_0(h_1) + \underbrace{\partial_2 f(a)}_0(h_2) = 0 \\ \implies d f(a) &= 0 \end{aligned}$$

Test $L = 0$

$$\frac{f(h_1, h_1) - \overbrace{f(a_0) - L(h_1, h_1)}}{\|(h_1, h_1)\|_\infty} = \frac{h_1^3}{2h_1^2|h_1|} \rightarrow \pm \frac{1}{2}$$

$\implies f$ ist in $(0, 0)$ nicht differenzierbar.

1.7.1 Das Differenzial

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Umgebung von x .

f diff in $x \iff \exists L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ linear s.d.

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0 \quad (7)$$

$$\lim_{h \downarrow 0} G(h) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \|h\| < \delta \implies |G(h)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall h_k = 0 \quad G(h_k) \rightarrow 0$$

Wenn f differenzierbar ist und 7 erfüllt, heisst L das Differential von f .

$$L = d f$$

$d f_x$ das Differential an der Stelle x

1.7.2 Richtungsableitung

$x \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^m$, $g(t) = f(x + th)$ (wohldefiniert für $|t|$ klein)

$$\partial_n f(x) = g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

1.7.3 Partielle Ableitung

(x_1, \dots, x_n) Kond. in \mathbb{R}^n $y \in \Omega$ so dass Ω eine Umgebung von y ist

$$\frac{f}{x_i}(y) (= \partial_{x_i} f(y)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y_1, \dots, y_i + t, \dots, y_n - f(y)}{t}$$

Falls $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0)$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(y + te_i) - f(y)}{t} = \partial_{e_i} f(y)$$

Satz 1.82. (Hauptkriterium der Differenzierbarkeit) Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und U eine Umgebung von y . Falls $\frac{f}{x_1}, \dots, \frac{f}{x_n}$ in U existieren und stetig in y sind, dann ist f in y differenzierbar.

Beweis. $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$L(h) = \sum_{i=1}^n \frac{f}{x_i}(y) h_i$$

Ziel L ist das Differential von f

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0$$

$$f(x+h) - f(x) = f(x + (h_1, \dots, h_n)) - f(y + (h_1, \dots, h_{n-1}, 0)) + f(y + (h_1, \dots, h_{n-1}, 0)) - \dots$$

$$+ \dots \quad (\text{ite Zeile})$$

$$+ f(y + (k, 0, \dots, 0)) - f(y) \quad (8)$$

$$i \in \{1, \dots, n\}$$

$$g(t) = f(y + (h_1, \dots, h_{i-1}, th_i, 0, \dots, 0))$$

$$\text{ite Zeile} = g_i(1) - g_i(0) = g'_i(\xi_i) \quad \xi \in [0, 1]$$

$$g'_i(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g_i(t + \varepsilon) - g_i(t)}{\varepsilon}$$

$$= h_i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(y_1 + h_1, \dots, y_{i-1}, y_i + (t + \varepsilon)h_i, y_{i+1}, \dots, y_n) - f(y_1 + h_1, \dots, y_i + th_i, \dots, y_n)}{\varepsilon h_i}$$

$$= h_i \frac{f}{x_i}(y_1 + h_1, \dots, y_i + th_1, y_{i+1}, \dots, y_n)$$

$$\text{ite Zeile} = h_i \frac{f}{x_i}(y_1 + h_1, \dots, y_{i-1}h_{i-1}, y_i + \xi_i h_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$$

$$\zeta_i = (h_1, \dots, h_{i-1}, \xi_i h_i, 0, \dots, 0)$$

$$= h_i \frac{f}{x_i}(y + \zeta_i) \quad (9)$$

9 in 8:

$$f(y+h) - f(y) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{f}{x_i}(y + \zeta_i) \quad (10)$$

$$f(x+h) - f(x) - L(h)$$

$$= \sum_{i=1}^n h_i \left(\frac{f}{x_i}(y + \zeta_i) - \frac{f}{x_i}(y) \right) \quad (11)$$

$$\frac{|f(x+h) - f(x) - L(h)|}{\|h\|}$$

$$\stackrel{11}{\leq} \sum_{i=1}^n \frac{|h_i| \left| \frac{f}{x_i}(y + \zeta_i) - \frac{f}{x_i}(y) \right|}{\|h\|} \quad (12)$$

Wenn $\|h\| \rightarrow 0$, $\|\zeta\| \rightarrow 0$. Die Stetigkeit von $\frac{f}{x_i}$ in y impliziert

$$\frac{f}{x_i}(y + \zeta_i) \rightarrow \frac{f}{x_i}$$

Die rechte Seite von 12 $\rightarrow 0$ wenn $h \rightarrow 0 \implies ??$. □

Definition 1.83. Der Gradient an der Stelle x_0 ist der Vektor

$$\left(\frac{f}{x_1}(x_0), \dots, \frac{f}{x_i}(x_0) \right) = \nabla f(x_0)$$

Bemerkung 1.84.

$$\begin{aligned} df|_{x_0}(h) (\partial_n f(x_0)) &= \sum_{i=1}^n h_i \frac{f}{x_i}(x_0) \\ (\langle \nabla f(x_0), h \rangle) &= \nabla f(x_0) h \\ |\partial_n f(x_0)| &\stackrel{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \|\nabla f(x_0)\| \|h\| \end{aligned}$$

Falls $\|h\| = 1$, dann

$$|\partial_n f(x_0)| \leq \|\nabla f(x_0)\|$$

Fall $\|\nabla f(x_0)\| \neq 0$, wenn wir

$$K = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

bekommen wir $\|K\| = 1$ und

$$\partial_K f(x_0) = \|\nabla f(x_0)\|$$

Deswegen:

$$K = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

ist die Richtung der maximalen Steigung und

$$\|\nabla f(x_0)\|$$

ist die maximale Steigung.

1.8 Rechenregeln

Satz 1.85. Sei U eine Umgebung von $x \in \mathbb{R}^n$ und $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar. Dann sind $f + g$ und fg auch differenzierbar in x und

$$d(f + g)|_x = df|_x + dg|_x$$

$$d(fg) = f(x) dg|_x + g(x) df|_x$$

Falls $f(x) \neq 0$ ist auch $\frac{1}{f}$ in x differenzierbar

$$d\left(\frac{1}{f}\right)|_x = -\frac{1}{(f(x))^2} df|_x$$

Korollar 1.86. $g(x) \neq 0$, dann

$$\begin{aligned} d\left(\frac{f}{g}\right)|_x &= \frac{1}{g(x)} df|_x - \frac{f(x)}{g(x)^2} dg|_x \\ &= \frac{g(x) df|_x - f(x) dg|_x}{g(x)^2} \end{aligned}$$

Beweis. Das Ziel ist eine lineare Abbildung L zu finden so dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)} - L(h)}{\|h\|}$$

$$L = -\frac{1}{f(x)^2} \mathrm{d}f|_x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)^2} \mathrm{d}f|_x(h)}^A}{\|h\|} = \frac{B+C}{\|h\|}$$

$$\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)} = \frac{f(x) - f(x+h)}{f(x)f(x+h)}$$

$f(x+h) \neq 0$ falls $\|h\|$ klein genug

$$\frac{f(x+h) - f(x) - \mathrm{d}f|_x(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$$

$$A = \left[\frac{-(-f(x) + f(x+h))}{f(x)f(x+h)} \frac{\mathrm{d}f|_x(h)}{f(x)f(x+h)} \right] = C$$

$$+ \frac{-\mathrm{d}f|_x(h)}{f(x)f(x+h)} + \frac{\mathrm{d}f|_x(h)}{f(x)^2} = B$$

$$\frac{B}{\|h\|} = -\frac{1}{f(x)f(x+h)} \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x) - \mathrm{d}f|_x(h)}{\|h\|}}_{\rightarrow 0}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x) \neq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{B}{\|h\|} = 0$$

Diff von f für $\|h\| \rightarrow 0$

$$\frac{C}{\|h\|} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}f|_x(h)}{\|h\|}}_{\text{ist beschränkt}} \frac{1}{f(x)} \underbrace{\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x+h)} \right)}_{\rightarrow 0}$$

Sei $L = \mathrm{d}f|_x$ und $\|L\|_O$ ihre Operatornorm

$$|\mathrm{d}f|_x(h)| = |L(h)| \leq \|L\|_O \|h\|$$

$$\Rightarrow \frac{|\mathrm{d}f|_x(h)|}{\|h\|} \leq \|L\|$$

□

Definition 1.87. Eine Kurve ist eine Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (d.h. $\forall t \ \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$)

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

deswegen $t \rightarrow \gamma_i(t) \in \mathbb{R}$. Die Kurve γ heisst differenzierbar wenn jede γ_i differenzierbar ist.

$$\gamma' = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

Satz 1.88. (Kettenregel 1. Version) Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit U Umgebung von x und f differenzierbar in x . Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine differenzierbare Kurve mit $\gamma(t_0) = x$. Sei $g = f \circ \gamma$

$$g(t) = f(\gamma(t))$$

Sei g in t_0 differenzierbar. Dann

$$g'(t_0) = \mathrm{d}|_{\gamma(t_0)}(\dot{\gamma}(t_0)) = \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \dot{\gamma}(t_0) \rangle$$

Beweis. Das Ziel:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t_0 + h) - g(t_0) - h [\mathrm{d} f|_{\gamma(t_0)}(\dot{\gamma}(t_0))]}{h} = 0$$

$$R(h) = g(t_0 + h) - g(t_0) - h [\mathrm{d} f|_{\gamma(t_0)}(\dot{\gamma}(t_0))] \quad (13)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{h} = 0 \quad (14)$$

Neue Notation

$$14 \iff R(h) = o(h)$$

$$x_0 = \gamma(t_0)$$

Annahmen: Differenzierbarkeit von f

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + k) - f(x_0) - \mathrm{d} f|_{x_0}(k)}{\|k\|} \left(= \frac{r(k)}{\|k\|} \right) = 0$$

$$(r(k) = o(\|k\|))$$

Differenzierbarkeit von γ :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\gamma(x_0 + k) - \gamma(x_0) - \mathrm{d} h \gamma'|_{x_0}(k)}{h} \left(= \frac{p(k)}{\|k\|} \right) = 0$$

$$p(h) = o(h)$$

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + k \left(= \gamma(t_0 + h) - \underbrace{\gamma(t_0)}_{x_0} \right)$$

$$g(t_0 + h) - g(t_0) = f(\gamma(t_0 + h)) - g(\underbrace{\gamma(t_0)}_{x_0})$$

$$= f(\gamma(t_0) + k) - f(\gamma(t_0)) = \mathrm{d} f|_{\gamma(t_0)}(k) + r(k)$$

$$= \mathrm{d} f|_{\gamma(t_0)}(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)) + r(k)$$

$$= \mathrm{d} f|_{\gamma(t_0)}(h \dot{\gamma}(t_0) + p(h)) + r(k)$$

$$\stackrel{\text{Linearit\"at von } \mathrm{d} f}{=} h \mathrm{d} f|_{\gamma(t_0)}(\dot{\gamma}(t_0)) + \mathrm{d} f|_{\gamma(t_0)}(p(h)) + r(k)$$

$$g(t_0 + h) - g(t_0) - h \mathrm{d} f|_{\gamma(t_0)}(\dot{\gamma}(t_0))$$

$$= f|_{\gamma(t_0)}(p(h)) + r(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)) = R(h)$$

$$|R(h)| \leq \frac{\overbrace{|f|_{\gamma(t_0)}(p(h))| + r(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0))}^L}{\|h\|}$$

$$\leq \|L\| \frac{p(h)}{\|h\|} + \frac{r(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0))}{\|h\|}$$

Ziel

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0))}{\|h\|}$$

Falls

$$r(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)) = 0$$

dann $r(0) = 0$. Wenn

$$r(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)) \neq 0$$

$$= \frac{r(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0))}{\|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\|} \frac{\|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\|}{\|h\|}$$

$$\frac{r(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0))}{\|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\|} = \frac{r(k)}{\|k\|} \rightarrow 0$$

... wenn $\|k\| \rightarrow 0$ und $h \rightarrow 0$. Es fehlt die Beschränktheit von

$$\begin{aligned} & \frac{\|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\|}{|h|} \\ & \frac{t_0 + h - \gamma(t_0)}{h} - \frac{h\dot{\gamma}(t_0)}{h} = \frac{p(h)}{h} \\ & \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} = \underbrace{\dot{\gamma}(t_0)}_{\text{konstant}} + \underbrace{\frac{p(h)}{h}}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Deswegen

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\|}{|h|} &= \|\dot{\gamma}(t_0)\| \\ \implies \frac{|R(h)|}{\|h\|} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

\implies Differenzierbarkeit und Kettenregel! \square

Bemerkung 1.89. Der Gradient ist orthogonal zur Niveaumenge (Höhenlinien).

Definition 1.90. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine differenzierbare Kurve, U offen. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $f(\gamma(t)) = c_0$ (c_0 hängt nicht von t ab). Dann

$$\nabla f(\gamma(t)) \perp \dot{\gamma}(t)$$

d.h.

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle &= 0 \\ 0 = g'(t) = (f(\gamma(t)))' &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \end{aligned}$$

1.9 Mittelwertsatz und Schrankensatz

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi \in]a, b[$

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Sei nun:

$f : U \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar auf U

$x, y \in U$ so dass das Segment $[x, y] \subset U$

Was ist ein Segment? Gerade durch x und y

$$\{x + t(y - x) | t \in \mathbb{R}\}$$

$$[[x, y]] = \{x + t(y - x) | t \in [0, 1]\}$$

$$\gamma(t) := x + t(y - x)$$

$$f(y) - f(x) = (x_1 + t(y_1 - x_1), \dots, x_n + t(y_n - x_n))$$

γ ist differenzierbar.

$$g = f \circ \gamma \quad g(t) = f(\gamma(t))$$

$$g(1) - g(0) = g'(\tau) \quad \text{für } \tau \in]0, 1[$$

$$f(y) - f(x) = \mathrm{d}f|_{\gamma(\tau)}(\dot{\gamma}(\tau))$$

$$\dot{\gamma}(\tau) = (\gamma'_1(\tau), \dots, \gamma'_n(\tau))$$

$$= (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) = y - x$$

$$\gamma(\tau) = \xi$$

$$f(y) - f(x) = \mathrm{d}f|_{\xi}(y - x) = \partial_{y-x} f(\xi) \quad (15)$$

Satz 1.91. (Mittelwertsatz) U offen, $[x, y] \subset U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann $\exists \xi \in]x, y[$ so dass 15 gilt.

Definition 1.92. U sternförmig: wenn $0 \in U$ und $[x, 0] \subset U \forall x \in U$. Sternförmig mit Zentrum x_0 wenn $x_0 \in U$ $[x, x_0] \subset U \forall x \in U$

Satz 1.93. (Schranksatz) Sei U eine offene Menge, die sternförmig ist und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$\sup_{x \in U} \|df|_x\|_O = S < \infty \left(= \sup_{x \in U} \|\nabla f(x)\| \right)$$

Dann

$$|f(x) - f(0)| \leq S \|x\|$$

Wenn U konvex ist, d.h. das Segment $[x, y] \subset U \forall x, y \in U$, dann

$$|f(x) - f(y)| \leq S \|y - x\|$$

Definition 1.94. $f : \underbrace{K}_{\in \mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst Lipschitz wenn $\exists L[0, +\infty[$ so dass

$$|f(y) - f(x)| \leq L \|y - x\| \quad \forall x, y \in K$$

Wenn $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz bedeutet die Existenz eines L so dass

$$|f(y) - f(x)| \leq Ld(y - x) \quad \forall x, y \in K$$

1.10 Höhere (partielle) Ableitungen

Sei

$$f : \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$$

Die partiellen Ableitungen von f :

$$\frac{f}{x_i}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon e_i) - f(x)}{\varepsilon}$$

$$e_i = (0, \dots, i, \dots, 0)$$

$$\frac{f}{x_i} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{x_i} \right)_{x_j}(x) \left(= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\frac{f}{x_i}(x + \varepsilon e_j) - \frac{f}{x_i}(x)}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x)$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i}(x + \varepsilon e_j) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)}{\varepsilon}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}$$

Satz 1.95. (von Schwarz) Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion die in einer Umgebung von $p \in \Omega$ die partielle Ableitungen $\frac{f}{x_i}, \frac{f}{x_j}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ besitzt. Falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ stetig in p ist, dann existiert $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)$ und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)$$

Beispiel 1.96.

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} a_{ij} x_1^i x_2^j \\
\frac{f}{x_1} &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} i a_{ij} x_1^{i-1} x_2^j \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} i j a_{ij} x_1^{i-1} x_2^{j-1} \\
\frac{f}{x_2} &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} j a_{ij} x_1^i x_2^{j-1} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} i j a_{ij} x_1^{i-1} x_2^{j-1}
\end{aligned}$$

Beispiel 1.97. Sei $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
v : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\
v(x_1, x_2) &= V(x_2) \\
\frac{f}{x_1} &= 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} &= 0
\end{aligned}$$

Beweis. Die Idee ist den Mittelwertsatz zu benutzen.**Schritt 1** Von Dimension $n \rightarrow 2$

$$\begin{aligned}
&f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \\
&p = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_j, \dots, p_n) \\
&g : U_{\mathbb{C}\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R} \\
&g(y, z) = g(p_1, \dots, p_{i-1}, y, p_{i+1}, \dots, p_{j-1}, z, p_{j+1}, \dots, p_n) \\
&\frac{f}{x_i}(p) = \frac{g}{y}(p_i, p_j) \\
&\frac{f}{x_j}(p) = \frac{g}{y}(p_i, p_j) \\
&\frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}(p_i, p_j) \\
&\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\frac{f}{x_j}(p_1, \dots, p_i + \varepsilon, \dots, p_j, \dots, p_n) - \frac{f}{x_j}(p)}{\varepsilon} \\
&\frac{g}{z}(p) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\frac{f}{x_j}(p_i + \varepsilon p_j) - \frac{g}{z}(p)}{\varepsilon} \\
&= \frac{\partial g}{\partial y \partial z}(p_i, p_j)
\end{aligned}$$

Falls

$$\frac{\partial g}{\partial y \partial z}(p_i, p_j)$$

existiert und

$$\frac{\partial g}{\partial z \partial y}(p_i, p_j)$$

gleich, dann ist das Theorem bewiesen.

Deswegen Nun,

$$f : \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\frac{f}{x_1}, \frac{f}{x_2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ existieren in einer Umgebung von $p = (a, b)$, dann ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ stetig auf p . Zu beweisen: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p)$ existiert und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p)$$

$p = (a, b)$, $h, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, Q = Rechteck mit Ecken (a, b) , $(a + h, b)$, $(a, b + k)$, $(a + h, b + k)$.

$$D_Q f = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_Q f}{hk} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b + k)}{hk} - \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{hk} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{f}{x_1}(a, b + k) - \frac{f}{x_1}(a, b)}{k} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) \\ & \lim_{h \rightarrow 0} \left(\lim_{k \rightarrow 0} \frac{D_Q f}{hk} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f}{x_2}(a + h, b) - \frac{f}{x_2}(a, b)}{h} =? \end{aligned}$$

wenn der Limes existiert

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a, b)$$

Ziel $\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{D_Q f}{hk}$ existiert und gleicht $\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_Q f}{hk}$. \implies Satz von Schwarz

Zuerst Wir behaupten ($\forall h, k$ klein genug) die Existenz von einer Stelle $(\xi, \zeta) \in Q$ so dass

$$\frac{D_Q f}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi, \zeta) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_Q f}{hk} &\neq \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(a + h, b + k) - f(a + h, b)}{k} - \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} \right\} \\ &= \frac{1}{h} \{g(a + h) - g(a)\} \stackrel{\text{Mittelwertsatz}}{=} g'(\xi) \end{aligned}$$

$x \in]a, a + h[, \zeta \in]b, b + k[$ OBdA: $h, k > 0$

$$g(z) = \frac{f(z, b + k) - f(z, b)}{k}$$

$$g'(z) = \left(\frac{f}{x_1}(z, b + k) - \frac{f}{x_1}(z, b) \right) \frac{1}{k}$$

...

$$= \frac{1}{k} \left(\frac{f}{x_1}(\xi, b + k) - \frac{f}{x_1}(\xi, b) \right)$$

$$= \frac{f}{x_2} \left(\frac{f}{x_1} \right) (\xi, \zeta)$$

Womit wir beim zweiten Teil von 16 wären.

$$\begin{aligned} \frac{D_Q f}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi, \zeta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{D_Q f}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi, \zeta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) \right) \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon \exists \delta$ so dass wenn $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta$

$$\implies \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi, \zeta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) \right| < \varepsilon \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &\limsup_{h \rightarrow 0} \left| \lim_{k \rightarrow 0} \frac{D_Q f}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) \right| \\ &\leq \sup_{h \in]0, \frac{\delta}{2}[} \left| \lim_{k \rightarrow 0} \frac{D_Q f}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) \right| \\ &\leq \sup_{h \in]0, \frac{\delta}{2}[} \sup_{k \in]0, \frac{\delta}{2}[} \left| \frac{D_Q f}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) \right| \stackrel{17}{\leq} \varepsilon \\ &\implies \limsup_{k \rightarrow 0} \dots = \lim_{k \rightarrow 0} \dots = 0 \\ &\implies \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{D_+ f}{hk} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a, b) \\ &\left(= \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_Q f}{hk} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{hk} \{ f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+h) + f(a, b) \} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+h) + f(a, b)}{k} \right\} \\ &\quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f}{x_2}(a+h, b) - \frac{f}{x_2}(a, b) \right\} \\ &= \frac{1}{x_1} \left(\frac{f}{x_2} \right)(a, b) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a, b) \end{aligned} \quad (19)$$

18 = 19

□