Analysis I - Vorlesungs-Script

Prof. Dr. Camillo De Lellis

Basisjahr 10 Semester II

Mitschrift:
Simon Hafner

Inhaltsverzeichnis

1 Die reellen Zahlen

Beispiel 1. $\mathbb{R}$ ist nicht genug

Satz 1. *Es gibt kein $q \in \mathbb{Q}$ so dass $q^2 = 2$*

Beweis 1. *Falls $q^2 = 2$, dann $(-q)^2 = 2$ OBdA $q \geq 0$ Deswegen $q > 0$. Sei $q > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ so dass $q^2 = 2$. $q = \frac{m}{n}$ mit $m > 0, > 0$. $GGT(m, n) = 1$ (d.h. falls $r \in \mathbb{N}$ m und n dividiert, dann $r = 1$!).*

$$\begin{aligned} m^2 = 2n^2 &\implies m \text{ ist gerade} && \implies m = 2k \text{ für } k \in \mathbb{N} \\ \{0\} \\ 4k^2 = 2n^2 &\implies n \text{ ist gerade} && \implies 2|n (2 \text{ dividiert } n) \end{aligned}$$

$\implies$ *Widerspruch! Weil 2 dividiert m und n! (d.h. es gibt <u>keine</u> Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$*

Beispiel 2.

$$\sqrt{2} = 1,414 \cdots$$

Intuitiv:

$$\begin{array}{rrrcrrr} 1,4^2 < & 2 < & 1,5^2 & & 1,4 < & \sqrt{2} < & 1,5 \\ 1,41^2 < & 2 < & 1,42^2 & \implies & 1,41 < & \sqrt{2} < & 1,42 \\ 1,414^2 < & 2 < & 1,415^2 & & 1,414 < & \sqrt{2} < & 1,415 \end{array}$$

Intuitiv

- $\mathbb{Q}$ hat "Lücke"
- $\mathbb{R} = \{$ die reellen Zahlen $\}$ haben "kein Loch".

Konstruktion Die reellen Zahlen kann man "konstruieren". (Dedekindsche Schritte, Cantor "Vervollständigung"). Google knows more. Wir werden "operativ" sein, d.h. wir beschreiben einfach die wichtigsten Eigenschaften von $\mathbb{R}$

1.1 Körperstrukturen

K1 Kommutativgesetz

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned}$$

K2 Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= a + (b + c) \\ (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \end{aligned}$$

K3 Distributivgesetz

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

K4

$$\begin{aligned} a + x &= b \\ a \cdot x &= b \text{falls } a \neq 0 \end{aligned}$$

1.2 Die Anordnung von $\mathbb{R}$

A1 $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Relationen:

- $a < 0$
- $a = 0$
- $a > 0$

A2 Falls $a > 0$, $b > 0$, dann $a + b > 0$, $a \cdot b > 0$

A3 Archimedisches Axiom: $\forall a \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$

Übung 1. Beweisen Sie dass $a \cdot b > 0$ falls $a < 0$, $b < 0$

Satz 2. $\forall x > -1$, $x \neq 0$ *und* $\forall n \in \mathbb{N}$
$\{0, 1\}$ *gilt* $(1 + x)^n > (1 + nx)$

Beweis 2.

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + \underbrace{x^2}_{>0} > 1 + 2x$$

weil $x \neq 0$.
Nehmen wir an dass

$$\begin{aligned} (1+x)^n &> & 1 + nx(x > -1, x \neq 0) \\ \underbrace{(1+x)}_{a}\underbrace{(1+x)^n}_{c} &> & \underbrace{(1+nx)}_{d}(1+x)(\mathit{weil}(1+x) > 0) \end{aligned}$$

$$c > d \iff c - d > 0 \overset{A2}{\Longrightarrow} a(c - d) > 0 \overset{K4}{\Longrightarrow} ac - ad > 0 \overset{A2}{\Longrightarrow} ac > ad$$

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 = \\ 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{>0} > 1 + (n+1)x \\ \Longrightarrow (1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

Vollständige Induktion.

Definition 1. Für $a \in \mathbb{R}$ setzt man

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls} a \geq 0 \\ -a & \text{falls} a < 0 \end{cases}$$

Satz 3. *Es gilt (Dreiecksungleichung):*

$$\begin{aligned} |ab| = & & |a||b| \\ |a + b| \leq & & |a| + |b| \\ ||a| - |b|| \leq & & |a - b| \end{aligned}$$

Beweis 3.

- $|ab| = |a||b|$ *trivial*
-
  $$a + b \leq |a| + |b|$$

  ($a > 0$ *und* $b > 0 \implies a + b = |a| + |b|$ *sonst* $a + b < |a| + |b|$ *weil* $x \leq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$ *und die Gleichung gilt).*

  $$-(a + b) = -a - b \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$$

  Aber

  $$|a + b| = max\,\{a + b, -(a + b)\} \leq |a| + |b|$$

- $$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

  Zuerst:

$$\begin{aligned} |a| = |(a-b)+b| &\leq |a-b| + |b| \\ \implies |a| - |b| &\leq |a-b| \\ |b| = |a + (b-a)| &\leq |a| + |b-a| \\ \implies |b| - |a| &\leq |b-a| = |a-b| \\ \implies (|a| - |b|) &\leq |a-b| \end{aligned}$$

$$||a| - |b|| = max\left\{|a| - |b|, -(|a| - |b|)\right\} \leq |a - b|$$

Bemerkung 1.

$$|x| = max\left\{-x, x\right\}$$

1.3 Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Für $a < b$, $a \in \mathbb{R}$, heisst:

- abgeschlossenes Intervall: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- offenes Intervall: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- (nach rechts) halboffenes Intervall: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- (nach links) halboffenes Intervall: $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Sei $I = [a, b]$ (bzw. $]a, b[\ldots$). Dann a, b sind die Randpunkte von I. Die Zahl $|I| = b - a$ ist die Länge von I. $(b - a > 0)$

Definition 2. Eine Intervallschachtelung ist eine Folge $I_1, I_2, \cdots$ geschlossener Intervalle (kurz $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (I_n)) mit diesen Eigenschaften:

I1 $I_{n+1} \subset I_n$

I2 Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n so dass $|I_n| < \epsilon$

Beispiel 3. $\sqrt{2}$

$$\begin{array}{rccrcr} 1,4^2 < & 2 < & 1,5^2 & & & I_1 = [1,4/1,5]|I_1| = 0.1 \\ 1,41^2 < & 2 < & 1,42^2 & \implies & & I_2 = [1,41/1,42]|I_2| = 0.01 \\ 1,414^2 < & 2 < & 1,415^2 & & & I_3 = [1,414, 1,415]|I_2| = 0.001 \end{array}$$

Beweis 4. *I1 und I2 sind beide erfüllt.*

Axiom 1. *Zu jeder Intervallschachtelung $\exists x \in \mathbb{R}$ die allen ihren Intervallen angehört.*

Satz 4. *Die Zahl ist eindeutig.*

Beweis 5. *Sei (I_n) eine Intervallschachtelung. Nehmen wir an dass $\exists \alpha < \beta$ so dass $\alpha, \beta \in I_n \forall n$. Dann $|I_n| \geq |\beta - \alpha| > a$. Widerspruch!*

Satz 5. *$\forall a \geq 0, a \in \mathbb{R}$ und $\forall x \in \mathbb{N}$*
$\{0\}$, $\exists$ eine einziges $x \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ s.d. $x^k = a$. Wir nennen $x = \sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$.
Sei $m, n \in \mathbb{N}$, $a^{m+n} = a^m a^n$ und deswegen $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ für $m \in \mathbb{N}$ (so dass die Regel $a^{m-m} = a^0 = 1$.
$n, m \in \mathbb{N}$
$\{0\}$ n Mal.

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n\ Mal} = a^{\overbrace{m + \cdots + m}^{n\ Mal}} = a^{nm}$$

Und mit $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ stimmt die Regel $(a^m)^n = a^{mn}$ auch $\forall m, n \in \mathbb{Z}$!

Bemerkung 2. $x^k = \left(a^{\frac{1}{k}}\right)^k = a \left(= a^{\frac{1}{k}k} = a^1\right)$

Definition 3. $\forall q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $\forall a > 0$ mit definiertem $a^q = (\sqrt[n]{a})^m$

Beweis 6. *Mit dieser Definition gilt* $a^{q+q_2} = a^q a^{q_2}$ $\forall a > 0$ *und* $\forall q, q_2 \in \mathbb{Q}$.