Analysis I - Vorlesungs-Script

Prof. Dr. Camillo De Lellis

Basisjahr 10 Semester II

Mitschrift:
Simon Hafner

Inhaltsverzeichnis

1 Die reellen Zahlen

$\mathbb{Q}$ ist nicht genug!

Satz 1.1. *Es gibt kein $q \in \mathbb{Q}$ so dass $q^2 = 2$*

Beweis. Falls $q^2 = 2$, dann $(-q)^2 = 2$ OBdA $q \geq 0$ Deswegen $q > 0$. Sei $q > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ so dass $q^2 = 2$. $q = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\mathrm{GGT}(m, n) = 1$ (d.h. falls $r \in \mathbb{N}$ m und n dividiert, dann $r = 1$!).

$$m^2 = 2n^2 \implies m \text{ ist gerade} \qquad \implies m = 2k \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

$$4k^2 = 2n^2 \implies n \text{ ist gerade} \qquad \implies 2|n (2 \text{ dividiert } n)$$

$\implies$ Widerspruch! Weil 2 dividiert m und n! (d.h. es gibt <u>keine</u> Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$). □

Beispiel 1.2.

$$\sqrt{2} = 1,414\cdots$$

Intuitiv:

$$\begin{array}{rrrcrrr} 1,4^2 < & 2 < & 1,5^2 & & 1,4 < & \sqrt{2} < & 1,5 \\ 1,41^2 < & 2 < & 1,42^2 & \implies & 1,41 < & \sqrt{2} < & 1,42 \\ 1,414^2 < & 2 < & 1,415^2 & & 1,414 < & \sqrt{2} < & 1,415 \end{array}$$

Intuitiv

- $\mathbb{Q}$ hat "Lücke"
- $\mathbb{R} = \{$ die reellen Zahlen $\}$ haben "kein Loch".

Konstruktion Die reellen Zahlen kann man "konstruieren". (Dedekindsche Schnitte, siehe Kapitel I.10 in H. Amann, J. Escher *Analysis I*, oder Kapitel 1.8 in W. Rudin *Principle of Mathematical Analysis*; Cantorsche "Vervollständigung", siehe I. Stewart *Introduction to metic and topological spaces*). Wir werden "operativ" sein, d.h. wir beschreiben einfach die wichtigsten Eigenschaften von $\mathbb{R}$ durch:

- die Köperaxiomen (K1) – (K4);
- die Anordnugsaxiomen (A1)– (A3);
- das Vollständigkeitsaxiom (V).

1.1 Körperstrukturen

K1 Kommutativgesetz

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

K2 Assoziativgesetz

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

K3 Distributivgesetz

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$$

K4 Die Lösungen x folgender Gleichungen existieren:

$$\begin{aligned} a + x &= b && \forall a, b \in \mathbb{R} \\ a \cdot x &= b && \forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \end{aligned}$$

NB: 0 ist das "Annallierungselement", d.h. das einzige Element 0 so dass $a0 = 0$ für jede $a \in \mathbb{R}$.

1.2 Die Anordnung von $\mathbb{R}$

A1 $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Relationen:

- $a < 0$
- $a = 0$
- $a > 0$

A2 Falls $a > 0$, $b > 0$, dann $a + b > 0$, $a \cdot b > 0$

A3 Archimedisches Axiom: $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$

Übung 1.3. Beweisen Sie dass $a \cdot b > 0$ falls $a < 0$, $b < 0$

Satz 1.4 (Bernoullische Ungleichung)**.** *$\forall x > -1$, $x \neq 0$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ $\{0,1\}$ gilt $(1+x)^n > (1+nx)$*

Beweis. Vollständige Induktion.
Schritt 1

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + \underbrace{x^2}_{>0} > 1 + 2x$$

weil $x \neq 0$.
Nehmen wir an dass

$$(1+x)^n > \qquad 1 + nx \qquad (x > -1, x \neq 0)$$

Dann

$$\underbrace{(1+x)}_{a}\underbrace{(1+x)^n}_{c} > \underbrace{(1+nx)}_{d}(1+x) \qquad (\text{weil} \quad (1+x) > 0)$$

(In der Tat,

$$c > d \iff c - d > 0 \overset{\text{A2}}{\Longrightarrow} a(c-d) > 0 \overset{\text{K4}}{\Longrightarrow} ac - ad > 0 \overset{\text{A2}}{\Longrightarrow} ac > ad)$$

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 = \\ 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{>0} > 1 + (n+1)x \\ \Longrightarrow (1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

□

Definition 1.5. Für $a \in \mathbb{R}$ setzt man

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{falls} \quad a < 0 \end{cases}$$

Bemerkung 1.6.

$$|x| = max\{-x, x\}$$

Satz 1.7. *Es gilt :*

$$\begin{aligned} |ab| &= |a||b| && (1) \\ |a+b| &\leq |a| + |b| \qquad \textit{(Dreiecksungleichung)} && (2) \\ ||a| - |b|| &\leq |a - b| && (3) \end{aligned}$$

Beweis.

- (1) ist trivial.
- Zu (2):

$$a + b \leq |a| + |b|$$

(weil $x \leq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$ und die Gleichung gilt genau, dann wenn $x \geq 0$).

$$-(a+b) = -a - b \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$$

Aber

$$|a+b| = max\{a+b, -(a+b)\} \leq |a| + |b|$$

- Zu (3).

$$\begin{aligned} & |a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b| \\ \Longrightarrow \quad & |a| - |b| \leq |a - b| && (4) \\ & |b| = |a + (b-a)| \leq |a| + |b - a| \\ \Longrightarrow \quad & |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b| && (5) \end{aligned}$$

$$||a| - |b|| = max\{|a| - |b|, -(|a| - |b|)\} \overset{(4),(5)}{\leq} |a - b|$$

□

1.3 Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Für $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, heisst:

- abgeschlossenes Intervall: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- offenes Intervall: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- (nach rechts) halboffenes Intervall: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- (nach links) halboffenes Intervall: $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Sei $I = [a, b]$ (bzw. $]a, b[$ ...). Dann a, b sind die Randpunkte von I. Die Zahl $|I| = b - a$ ist die Länge von I. $(b - a > 0)$

Definition 1.8. Eine Intervallschachtelung ist eine Folge $I_1, I_2, \cdots$ geschlossener Intervalle (kurz $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder (I_n)) mit diesen Eigenschaften:

I1 $I_{n+1} \subset I_n$

I2 Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n so dass $|I_n| < \epsilon$

Beispiel 1.9. $\sqrt{2}$

$$\begin{array}{rcrcrl} 1,4^2 < & 2 < & 1,5^2 & & I_1 = [1,4/1,5] & |I_1| = 0.1 \\ 1,41^2 < & 2 < & 1,42^2 & \Longrightarrow & I_2 = [1,41/1,42] & |I_2| = 0.01 \\ 1,414^2 < & 2 < & 1,415^2 & & I_3 = [1,414, 1,415] & |I_2| = 0.001 \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & I_n = \dots & \end{array}$$

I1 und I2 sind beide erfüllt.

Axiom 1.10. *Zu jeder Intervallschachtelung $\exists x \in \mathbb{R}$ die allen ihren Intervallen angehört.*

Satz 1.11. *Die Zahl ist eindeutig.*

Beweis. Sei (I_n) eine Intervallschachtelung. Nehmen wir an dass $\exists \alpha < \beta$ so dass $\alpha, \beta \in I_n$ für alle n. Dann $|I_n| \geq |\beta - \alpha| > a$. Widerspruch! $\square$

Satz 1.12. *$\forall a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ und $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\exists! x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und $x^k = a$ ($\exists! x$ bedeutet "es gibt genau ein x"). Wir nennen $x = \sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$.*

Sei $a > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Dann $a^{m+n} = a^m a^n$. Wir definieren $a^{-m} := \frac{1}{a^m}$ für $m \in \mathbb{N}$. (so dass die Gleichung $a^{m-m} = a^0 = 1$ stimmt). Wir haben dann die Eigenschaft: $a^{j+k} = a^j \cdot a^k$ $\forall j, k \in \mathbb{Z}$. Wir haben aber auch, für $m, n \in \mathbb{N}$,

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ Mal}} = a^{\overbrace{m + \cdots + m}^{n \text{ Mal}}} = a^{nm}$$

(Und mit $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ stimmt die Regel $(a^m)^n = a^{mn}$ auch $\forall m, n \in \mathbb{Z}$!). Diese Gleichung motiviert die Notation $a^{\frac{1}{k}}$ für $\sqrt[k]{a}$.

Definition 1.13. $\forall q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $\forall a > 0$, wir setzen $a^q := (\sqrt[n]{a})^m$

Es ist leicht zu sehen dass die Gleichungen

$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r \qquad \text{und} \qquad a^{qr} = (a^q)^r$$

für alle $q, r \in \mathbb{Q}$ gelten.

Beweis vom Satz 1.12. OBdA $x > 1$ (sonst würden wir $\frac{1}{x}$ betrachten). wir konstruieren eine Intervallschachtelung (I_n), $I_n = [a_n, b_n]$ so dass $a_n^k \geq x \geq b_n^k$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Wie setzten

$$I_1 := [1, x]$$

$$I_{n+1} = \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] & \text{falls } x \leq \left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^k \\ \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] & \text{falls } x > \left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^k \end{cases}$$

$|I_n| = \frac{1}{2^{n-1}}|I_1|$ und $I_{n+1} \subset I_n$. Intervallschachtelungsprinzip $\implies \exists y \in \mathbb{R}$ s.d. $y \in I_n \forall n \in \mathbb{N}$

Wir behaupten dass $y^k = x$.

Man definiert $J_n = [a_n^k, b_n^k]$. Wir wollen zeigen, dass J_n eine Intervallschachtelung ist.

- $J_{n+1} \subset J_n$ weil $I_{n+1} \subset I_n$
- $$|J_n| = b_n^k - a_n^k = \underbrace{(b_n - a_n)}_{|I_n|} \underbrace{(b_n^{k-1} + b_n^{k-2} a_n + \cdots + a_n^{k-1})}_{\leq k b_1^{k-1}}$$

$\implies |J_n| \leq |I_n| k b_1^{k-1}$.

Sei ε gegeben. Man wähle N gross genug, so dass

$$|I_n| \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{k b_1^{k-1}} \implies |J_n| \leq \varepsilon' k b_1^{k-1} = \varepsilon$$

Einerseits

$$y \in [a_n, b_n] \quad \implies \quad y^k \in [a_n^k, b_n^k] = J_n$$

Andererseits

$$x \in J_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Satz 1.11 $\implies x = y^k$ $\square$

1.4 Supremumseigenschaft, Vollständigkeit

Definition 1.14. $s \in \mathbb{R}$ heisst obere (untere) Schranke der Menge $M \subset \mathbb{R}$ falls $s \geq x$ $(s \leq x)$ $\forall x \in M$.

Definition 1.15. $s \in \mathbb{R}$ ist das Supremum der Menge $M \subset \mathbb{R}$ $(s = \sup M)$ falls es die kleinste obere Schranke ist. D.h.

- s ist die obere Schranke
- falls $s' < s$, dann ist s' keine obere Schranke.

Beispiel 1.16. $M =]0,1[$. In diesem Fall $\sup M = 1 \notin M$

Beispiel 1.17. $M = [0,1]$. $\sup M = 1 \in M$

Definition 1.18. $s \in \mathbb{R}$ heisst Infimum einer Menge M $(s = \inf M)$ falls s die grösste obere Schranke ist.

Definition 1.19. Falls $s = \sup M \in M$, nennt man s das Maximum von M. Kurz: $s = \max M$. Analog Minimum.

Satz 1.20. *Falls $M \subset \mathbb{R}$ nach oben (unten) beschränkt ist, dann existiert* $\sup M$ *(*$\inf M$*).*

Beweis. Wir konstruieren eine Intervallschachtelung I_n, so dass b_n eine obere Schranke ist, und a_n keine obere Schranke ist.

- $I_1 = [a_1, b_1]$, wobei b_1 eine obere Schranke
- a_1 ist keine obere Schranke

Sei I_n gegeben.

$$I_{n+1} = \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] & \text{falls } \frac{a_n+b_n}{2} \text{ eine obere Schranke ist;} \\ \\ \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] & \text{sonst }. \end{cases}$$

Also, $\exists s$ s.d. $s \in I_n \quad \forall n$.

Wir behaupten dass s das Supremum von M ist.

- Warum ist s eine obere Schranke?
  Angenommen $\exists x \in M$ so dass $x > s$. Man wähle $|I_n| < x - s$. Daraus folgt
  $$x - s > b_n - a_n \geq b_n - s \implies x > b_n$$
  Widerspruch.
- Warum ist s die kleinste obere Schranke?
  Angenommen $\exists s' < s$. Dann wähle n' so dass $I_{n'} < s - s'$.
  $$s - s' > b_{n'} - a_{n'} \geq s - a_{n'} \implies a_{n'} > s'$$
  Widerspruch.

$\square$

Lemma 1.21. *Jede nach oben (unten) beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{Z}$ mit $M \neq \emptyset$ besitzt das grösste (kleinste) Element.*

Beweis. OBdA betrachte nur nach unten beschränkte Mengen $M \subset N$. Angenommen M hat kein kleinstes Element. Mit der Vollständigen Induktion beweisen wir dass $M = \emptyset$.

- $0 \notin M$, sonst ist 0 das kleinste Element;

- Angenommen dass $\{0, 1, \ldots, k\} \cap M = \emptyset$, wir schliessen auch $\{0, 1, \ldots, k + 1\} \cap M = \emptyset$, sonst ist $k + 1$ das kleinste Element von M.

Vollständige Induktion $\implies$ $\{0, \ldots, n\} \cap M = \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N}$. D.h. $M \cap \mathbb{N} = \emptyset$. □

Satz 1.22. *$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, bzw. für beliebige zwei $x, y \in \mathbb{R}$, $y > x$, gibt es eine rationelle Zahl $q \in \mathbb{Q}$, so dass $x < q < y$.*

Beweis. Man wähle $n \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{n} < y - x$. Betrachte die Menge $A \subseteq \mathbb{Z}$, so dass $M \in A \implies M > nx$. Lemma 1.21 $\implies$ $\exists m = \min A$.

$$x < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < x + y - x = y$$

Also setze $q = \frac{m}{n}$ □

1.5 Abzählbarkeit

Definition 1.23. Die Mengen A & B sind gleichmächtig, wenn es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt. D.h. es gibt eine Vorschrift f s.d.

- f zuordnet ein Element $b \in B$ jedem $a \in A$; dieses Element wird mit $f(a)$ bezichnet;
- $f(a) \neq f(b)$ falls $a \neq b$;
- $\forall b \in B \ \exists a \in A$ mit $b = f(a)$.

(f ist eine *bijektive Abbildung*; siehe Kapitel 3). A hat grössere Mächtigkeit als B, falls B gleichmächtig wie eine Teilmenge von A ist, aber A zu keiner Teilmenge von B gleichmächtig ist.

Beispiel 1.24.
- $\{1, 2\}$ & $\{3, 4\}$ sind gleichmächtig.
- $\{1, 2, \cdots, n\}$ hat kleinere Mächtigkeit als $\{1, 2, \cdots, m\}$, wenn $n < m$ ist.

Definition 1.25. Eine Menge A ist abzählbar, wenn es eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und A gibt D.h. $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$.

Lemma 1.26. *$\mathbb{Z}$ ist abzählbar*

Beweis.

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	...
$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	...

Formal, definiere

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$$f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ \frac{1-n}{2} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

□

Satz 1.27. *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar*

Satz 1.28. *$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.*

(Für die Beweise siehe Kapitel 2.4 von K. Königsberger *Analysis I*).

2 Komplexe Zahlen

Bemerkung 2.1. $\forall a \in \mathbb{R}$, $a^2 > 0$. Deswegen ist $x^2 = -1$ unlösbar. Die Erfindung der imaginäre Einheit i (die imaginäre Zahl mit $i^2 = -1$) hat sehr interessante Konsequenzen auch für die üblichen reellen Zahlen.

2.1 Definition

[Erste Definition der Komplexen Zahlen]

Definition 2.2. Sei $a, b \in \mathbb{R}$, dann $a + bi \in \mathbb{C}$. Wir definieren die Summe:

$$(a + bi) + (\alpha + \beta i) = (a + \alpha) + (b + \beta)i$$

und das Produkt

$$(a + bi)(\alpha + \beta i) = (a\alpha - b\beta) + \underbrace{(a\beta + b\alpha)}_{A} i$$

Definition 2.3. Seien A und B zwei Mengen. Dann ist $A \times B$ die Menge der Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Definition 2.4 (Zweite Definition der Komplezen Zahlen)**.** $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $+$ und $\cdot$, die wir so definieren:

$$\begin{aligned} (a, b) + (\alpha, \beta) &= (a + \alpha, b + \beta) \\ (a, b)(\alpha, \beta) &= (a\alpha - b\beta, \underbrace{a\beta + b\alpha}_{A}) \end{aligned}$$

Bemerkung 2.5.

$$\mathbb{R} \simeq \{(a, 0), a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$$

In der Sprache der abstrakte Algebra $\mathbb{R}$ ist isomorph zu $\mathbb{R}' := \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$: d.h. die Summe und das Produkt in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}'$ sind "gleich":

$$\begin{aligned} (a, 0) + (\alpha, 0) &= (a + \alpha, 0) \\ (a, 0)(\alpha, 0) &= (a\alpha, 0) \end{aligned}$$

Deswegen wir schreiben a statt $(a, 0)$.

Bemerkung 2.6.

$$(0, a)(0, b) = (-ab, 0)$$

Deswegen:

$$\underbrace{(0, 1)}_{\text{Wurzel von -1}} \quad (0, 1) = (-1, 0) \qquad \underbrace{(0, -1)}_{\text{auch eine Wurzel von -1}} \quad (0, -1) = (-1, 0)$$

Bemerkung 2.7. $i = (0, 1)$ und wir schreiben (a, b) für $a + bi$. D.h. die zwei Definitionen der komplezen Zahlen sind equivalent!

Bemerkung 2.8. $0 = (0, 0) = 0 + 0i$. $\xi \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 0\xi &= 0 \\ 0 + \xi &= \xi \end{aligned}$$

Satz 2.9. *Alle Körperaxiome (K1-K4) gelten.*

Beweis. K1 Kommultativität: *trivial*

K2 Assoziativität: *trivial*

K3 Distributivität: *trivial.*

K4 Seien $\xi, \zeta \in \mathbb{C}$.

$$\exists \omega \in \mathbb{C} : \qquad \xi + \omega = \zeta \tag{6}$$

$$\xi \neq 0 \exists \omega : \qquad \xi\omega = \zeta \tag{7}$$

Zu (6). Wir setzen

$$\begin{aligned} \xi &= a + bi \\ \zeta &= c + di \\ \omega &= x + yi \end{aligned}$$

$$\xi + \omega = (a+x) + (b+y)i = \xi = c + di$$

Sei $x := c - a$, $y := d - b$. Dann $\xi + \omega = \zeta$.

Zu (7) 1 ($= 1 + 0i$)) das neutrale Element.

$$(a+bi)(1+0i) = \underbrace{(a1 - b0)}_{a} + \underbrace{(b1 + a0)}_{b} = (a+bi)$$

Sei $\xi \neq 0$ und suchen wir α so dass $\xi\alpha = 1$. Dann ist $\omega = \alpha\zeta$ eine Lösung von (7) (eigentlich DIE Lösung). Falls $\xi = a + bi$, dann

$$\alpha = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\,.$$

In der Tat:

$$\xi\alpha = \overbrace{\left(\frac{aa}{a^2+b^2} - \frac{b(-b)}{a^2+b^2}\right)}^{1} + \overbrace{\left(\frac{a(-b)}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2}\right)}^{0} i = 1\,.$$

□

Definition 2.10. Sei $\xi = (x + yi) \in \mathbb{C}$. Dann:

- x ist der reelle Teil von ξ ($\operatorname{Re}\xi = x$)
- y ist der imaginäre Teil von ξ ($\operatorname{Im}\xi = y$)
- $x - yi$ ist die konjugierte Zahl $\left(\overline{\xi} = x - yi\right)$

Bemerkung 2.11.

$$\sqrt{\overline{\xi}\xi} = \sqrt{(\operatorname{Re}\xi)^2 + (\operatorname{Im}\xi)^2} =: |\xi|$$

Definition 2.12. $|\xi|$ ist der Betrag von ξ.

Satz 2.13. *Es gilt:* $(\forall a, b \in \mathbb{C})$*:*

- –
$$\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$$
  –
$$\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$$
- –
$$\operatorname{Re} a = \frac{a + \overline{a}}{2}$$
  –
$$(\operatorname{Im} a)i = \frac{a - \overline{a}}{2}$$
- $a = \overline{a}$ *genau dann wenn* $a \in \mathbb{R}$*.*
-
$$a\overline{a} = |a|^2 = \sqrt{(\operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2} \geq 0$$
  (die Gleicheit gilt genau dann wenn $a = 0$*)*

Bemerkung 2.14. Sei ω so dass $\xi\omega = 1$ ($\xi \neq 0$). Man schreibt $\omega\frac{1}{\xi}$. Der Beweis vom Satz 2.9 impliziert $\omega = \frac{\overline{\xi}}{|\xi|^2}$

Satz 2.15. $\forall a, b \in \mathbb{C}$

- $|a| > 0$ *für* $a \neq 0$ *(trivial)*
- $|\overline{a}| = |a|$ *(trivial)*
- $|\operatorname{Re} a| \leq |a|$, $|\operatorname{Im} a| \leq |a|$ *(trivial)*

- $|ab| = |a||b|$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$

Beweis.

$$|ab|^2 = (ab)\overline{(ab)} = ab\overline{a}\overline{b} = a\overline{a}\overline{b} = |a|^2|b|^2 \implies |ab| = |a||b|$$

$$\begin{aligned}\underbrace{|a+b|^2}\in\mathbb{R} \quad &= \quad (a+b)\overline{(a+b)} = (a+b)(\overline{a}+\overline{b}) = a\overline{a} + b\overline{b} + a\overline{b} + b\overline{a} \\ &= \quad \underbrace{|a|^2 + |b|^2}_{\in\mathbb{R}} + \left(a\overline{b} + b\overline{a}\right) \ . \end{aligned} \tag{8}$$

Bemerkung: die Identität implizert dass $a\overline{b} + b\overline{a}$. In der Tat $a\overline{b} + b\overline{a} = a\overline{b} + \overline{a\overline{b}} = 2\,\mathrm{Re}(a)\overline{b}$. Deswegen

$$\begin{aligned}|a+b|^2 \quad &= \quad |a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}(a)\overline{b} \ \leq \ |a|^2 + |b|^2 + 2|a\overline{b}| \\ &= \quad |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| = (|a| + |b|)^2 \ . \end{aligned} \tag{9}$$

□

3 Funktionen

3.1 Definition

Definition 3.1. Seien A und B zwei Mengen. Eine Funktion $f : A \to B$ ist eine Vorschrift die jedem Element $a \in A$ ein eindeutiges Element $f(a) \in B$ zuordnet.

Beispiel 3.2. $A \subset \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$$f(x) = x^2$$

Definition 3.3. A ist der <u>Definitionsbereich</u>.

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

ist der Wertbereich

Bemerkung 3.4. Wertbereich von x^2:

$$\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$$

Definition 3.5. Der Graph einer Funktion $f : A \to B$ ist

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\}$$

Beispiel 3.6. Verboten: zwei Werte für die Stelle x.

Beispiel 3.7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = |x|$

3.2 Algebraische Operationen

Wenn $B = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Seien f, g zwei Funktionen mit gleichem Definitionsbereich.

- $f + g$ ist die Funktion h so dass $h : A \to B$

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

- Die Funktion fg ist $k : A \to B$

$$k(x) = f(x)g(x)$$

- $\frac{f}{g}$ ist wohldefiniert falls der Wertebereich von g in $B \setminus \{0\}$ enthalten ist:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Falls $B = \mathbb{C}$, kann man auch $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $\overline{f}$.

Definition 3.8. Sei $f : A \to B$, $g : B \to C$. Die Komposition $g \circ f : A \to C$.

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Bemerkung 3.9. Sei $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$. Wir definieren $\Xi : A \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\Xi(a) = (f(a), g(a))$$

und $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\Phi(x, y) = xy$$

Dann

$$\Phi \circ \Xi(a) = \Phi(\Xi(a)) = \Phi\left(\left(f(a)\right), g(a)\right) = f(a)g(a)$$

Also: die “algebraischen Operationen” sind “Kompositionen”.

Definition 3.10.

- Wenn $f : A \to B$ und $f(A) = B$ dann ist f <u>surjektiv</u>.
- Wenn $f : A \to B$ und die folgende Eigenschaft hat:

$$f(x) \neq f(y) \forall x \neq y \in A$$

dann ist f <u>injektiv</u>.

- Falls f surjektiv und injektiv ist, dann sagen wir, dass f bijektiv ist.

Bemerkung 3.11. Die bijektiven Funktionen sind umkehrbar. Sei $f : A \to B$ bijektiv. $\forall b\ \exists a : f(a) = b$ (surjektiv), a ist eindeutig (injektiv) (die Notation für die Eindeutigkeit ist $\exists! a : f(a) = b$). Dann $g(b) = a$ ist eine “wohldefinierte Funktion”, $g : B \to A$.

Definition 3.12. g wird Umkehrfunktion genannt. $f : A \to B$, $g : B \to A$, $f \circ g : B \to B$, $g \circ f : A \to A$ und

$$f \circ g(b) = b \quad \forall b \in B \qquad g \circ f(a) = a \quad \forall a \in A\,. \tag{10}$$

Definition 3.13. Die “dumme Funktion” $h : A \to A$ mit $h(a) = a\ \forall a \in A$ heisst Identitätsfunktion (Id). Deswegen, (10) $\iff$ $f \circ g = \mathrm{Id}$ und $g \circ f = \mathrm{Id}$.

3.3 Zoo

3.3.1 Exponentialfunktion

$a \in \mathbb{R}, a > 0$. Defintionsbereich $\mathbb{Q}$ (momentan!):

$$\operatorname{Exp}_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Exp}_a(n) = a^n \qquad (= 1 \text{ falls } n = 0)$$

$$\operatorname{Exp}_a(-n) = \frac{1}{a^n}$$

$$\operatorname{Exp}_a\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Exp_a ist die <u>einzige</u> Funktion $\Phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $\Phi(1) = a$
- $\Phi(q + r) = \Phi(q)\Phi(r)\ \forall q, r \in \mathbb{Q}$

Bemerkung 3.14. Später werden wir Exp_a auf <u>$\mathbb{R}$ fortsetzen</u>.

3.3.2 Polynome

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$f : \mathbb{R}(\mathbb{C}) \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Produkt von Polynomen $x \mapsto f(x)g(x)$:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_n x^n + \cdots + a_0)(b_m x^m + \cdots + b_0) \\ &= b_m a_n x^{n+m} + b_n a_{n-1} x^{n-1+m} + \cdots \\ &= b_m a_n x^{n+m} + (b_m a_{n-1} + b_{m-1} a_n) x^{n+m-1} + \cdots + a_0 b_0 \\ &= c_{m+n} x^{m+n} + \cdots + c_0 , \end{aligned}$$

wobei

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Definition 3.15. Der Grad von $a_n x^n + \cdots + a_0$ ist n wenn $a_n \neq 0$

Satz 3.16. *Sei $g \neq 0$ ein Polynom. Dann gibt es zu jedem Polynom f zwei Polynome q und r so dass*

$$g = qf + r$$

$$\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} f$$

Beweis. `http://de.wikipedia.org/wiki/Polynomdivision` □

Bemerkung 3.17. Sei $g = x - x_0$. Sei f mit Grad ≥ 1, Satz 3.16 $\implies$ $f = gq + r = gq + c_0$ und Grad von $r < 1$. r ist eine Konstante $r = c_0$. Deswegen

$$f(x) = q(x)(x - x_0) + c_0$$

$$f(x_0) = q(x_0)0 + c_0 = c_0$$

Korollar 3.18. *Falls f ein Polynom ist und $f(x_0) = 0$, dann $\exists q$ Polynom so dass $f = q(x - x_0)$*

Das Polynom $a_n x^n + \ldots + a_0$ mit $a_n = \ldots = 0$ ist das *Trivialpolynom.*

Korollar 3.19. *Ein Polynom P hat höchstens* $\operatorname{grad} f$ *Nullstellen falls P ist nicht das Trivialpolynom.*

Korollar 3.20. *Falls $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, dann ist f das Trivialpolynom.*

Korollar 3.21. *Falls f, g Polynome sind und $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ dann sind die Koeffizienten von f und g gleich.*

Beweis. $f - g$ ist ein Polynom mit $(f - g)(x) = 0$ $\forall x$. □

Definition 3.22. Seien f, g Polynome. Dann ist $\frac{f}{g}$ eine rationale Funktion.

4 Folgen

Definition 4.1. Eine Folge komplexer (reeller) Zahlen ist eine Abbildung: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$(bzw. $\mathbb{R}$). Das heisst:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) \in \mathbb{C} \;\; (\text{bzw. } \mathbb{R})\,.$$

Wir schreiben a_n für $f(n)$

N.B.: $\mathbb{N}$ ist auch eine Folge: $a_n = f(n) = n$.

Definition 4.2. Eine Folge (a_n) heisst konvergent, falls $\exists a \in \mathbb{C}$ so dass:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n \geq N\,. \tag{11}$$

Beispiel 4.3. $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine konvergente Folge. Sei $a = 0$. Wählen wir $\varepsilon > 0$. Sei dann $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$ (diese Zahl existiert wegen des Axioms von Archimedes!). Für $n \geq N$:

$$|a_n| = \left(\frac{1}{n} - 0\right) = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Bemerkung 4.4. Die Zahl a im Konvergenzkriterium ist eindeutig. Sie heisst der Limes der Folge (a_n).

Beweis. Seien $a \neq a'$ zwei relle Zahlen, die das Konvergenzkriterium (11) erfüllen. Sei $\varepsilon := \frac{|a-a'|}{2}$

$$\exists N : |a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n \geq N$$

$$\exists N' : |a_n - a'| < \varepsilon \;\; \forall n \geq N'$$

Für $n \geq \max\{N, N'\}$

$$|a' - a| \leq |a' - a_n| + |a - a_n| < 2\varepsilon = |a' - a|$$

$$\implies |a' - a| < |a' - a| \quad \text{Widerspruch!}$$

□

Wenn eine Folge kovergiert und die Zahl a (11) erfüllt, wir schreiben

$$a = \lim_{n \to +\infty} (a_n)$$

oder

$$a_n \to a\,.$$

Bemerkung 4.5. Sei $\alpha = A + 0, b_0 b_1 b_2 \ldots$ eine reelle Zahl, wobei $A \in \mathbb{N}$ und b_i die Ziffern der Dezimaldarstellung von $\alpha - A$ sind. Für jede $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := A + 0, b_0 \ldots b_n \qquad \in \mathbb{Q}\,.$$

Die Folge (a_n) konvergiert gegen α. In der Tat, sei ε eine beliebige positive reelle Zahl. Sei N s.d. $10^N > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n \geq N$ gilt $|a_n - \alpha| \leq 10^{-N} < \varepsilon$.

Definition 4.6. Sei (a_n) eine Folge und $A(n)$ eine "Folge von Aussagen über a_n". Wir sagen dass $A(n)$ wahr für "fast alle" a_n ist, wenn $\exists N$ so dass $A(n)$ stimmt $\forall n \geq N$. Eine alternative Formulierung von (11) ist also:

$$|a_n - a| < \varepsilon \;\; \text{für fast alle} \;\; a_n$$

Beispiel 4.7. Sei $s \in \mathbb{Q}$ $s > 0$. Sei $a_n = \frac{1}{n^s}$. Dann

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^s}\right) = 0$$

Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \varepsilon^{\frac{1}{s}}$ (Axiom von Archimedes!). Dann

$$|0 - a_n| = \frac{1}{n^s} < \varepsilon \qquad \text{falls } n \geq N$$

(NB: $\frac{1}{s}$ ist wohldefiniert weil $s \neq 0$. Ausserdem

$$\frac{1}{n^s} < \varepsilon \iff n^s > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{s}}} \qquad \text{weil } s > 0.)$$

Beispiel 4.8. $a > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Fall $a > 1$. Zu beweisen:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : \quad \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \;\; \forall n \geq N \in \mathbb{N}$$

Sei $x_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$ und $n \geq 1$

$$a = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \binom{n}{2} x_n^2 + \binom{n}{3} x_n^3 + \cdots + x_n^n .$$

Deswegen

$$a \geq 1 + nx_n \text{ für } x_n \leq \frac{a-1}{n}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \geq \frac{a-1}{\varepsilon}$

$$\implies \sqrt[n]{a} - 1 = x_n \leq \frac{a-1}{n} \leq \frac{a-1}{N} < \frac{a-1}{\frac{a-1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

Fall $0 < a < 1$ Wir haben $\frac{1}{a} > 1$ und nutzen die Rechenregeln (siehe Satz 4.13(iii), unten!):

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to \frac{1}{1} = 1}$$

Fall $a = 1$ Trivial! Die Folge ist "konstant": $a_n = 1 \forall n$.

Beispiel 4.9. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. Wie oben

$$x_n = \sqrt[n]{n} - 1$$

$$n = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \binom{n}{2} x_n^2 + \cdots + x_n^n$$

Hier wir nuzte die stärkere Ungleichung: $(n \geq 2)$

$$n \geq 1 + \binom{n}{2} x_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

$$x_n^2 \leq \frac{2}{n} \implies x_n \leq \sqrt[2]{\frac{2}{n}}$$

Sei $\varepsilon > 0$, wähle N so dass

$$\sqrt{\frac{N}{2}} > \varepsilon^{-1} \qquad (\iff N > 2\varepsilon^{-2})$$

Dann, für $n \geq N$,

$$0 \geq \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n}} \leq \sqrt{\frac{2}{N}} < \sqrt{\frac{2}{\frac{2}{\varepsilon^2}}} = \varepsilon$$

$$\implies |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$$

Übung 4.10. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann $\lim_n \sqrt[n]{n^k} = 1$.

Beispiel 4.11. Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann,

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

In der Tat

$$|q^n - 0| = |q^n| - |0| \leq |q|^n$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $\sqrt[n]{\varepsilon} \to 1$ und $|q| < 1$, $\exists N$ s.d.

$$|\sqrt[n]{\varepsilon} - 1| < 1 - |q| \qquad \forall n \geq N$$

Deswegen, für $n \geq N$,

$$\sqrt[n]{\varepsilon} > 1 - (1 - |q|) = |q| \qquad \implies \qquad \varepsilon > |q|^n .$$

Übung 4.12. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann

$$\lim_{n\to\infty} n^k q^n \;=\; 0 .$$

4.1 Rechenregeln

Satz 4.13. *Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen, mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$, dann:*

(ii) $a_n + b_n \to a + b$

(i) $a_n b_n \to ab$

(iii) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ *falls* $b \neq 0$

Beweis vom Satz 4.13(i).

$$|(a_n + b_n) - (a - b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \tag{12}$$

Sei $\varepsilon > 0$:

$$\exists N : \qquad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N \tag{13}$$

$$\exists N' : \qquad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N' \tag{14}$$

Für $n \geq \max\{N, N'\}$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \overset{(12),(13)\&(14)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

□

Definition 4.14. Eine Folge heisst beschränkt, falls

$$\exists M > 0 : \qquad |a_n| \leq M \quad \forall N\,. \tag{15}$$

Lemma 4.15. *Eine konvergente Folge ist immer beschränkt.*

Beweis. Sei $a_n \to a$. Dann $\exists N$ s.d. $|a_n - a| < 1\ \forall n \geq N$. Deswegen, $|a_n| < |a| + 1$ $\forall n \geq N$. Wählen wir

$$M := \max\{|a_0|, \ldots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}\,.$$

Dann $|a_n| \leq M\ \forall n$. □

Beweis vom Satz 4.13(ii)&(iii). **(ii)** Wegen des Lemmas 4.15 $\exists M > 0$ die (15) erfüllt

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \leq M|b_n - b| + |b||a_n - a| \end{aligned} \tag{16}$$

Wähle

$$\begin{aligned} N \in \mathbb{N} : \qquad & |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad \forall n \geq N \\ N \in \mathbb{N}' : \qquad & |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2|b|} \quad \forall n \geq N' \end{aligned}$$

Für $n \geq \max\{N, N'\}$ gilt

$$|a_n b_n - ab| \overset{(16),(17)\&(17)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(iii) Folgt aus (ii) und

$$\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b} \qquad \text{falls } b_n \to b \neq 0 \tag{17}$$

Um (17) zu beweisen:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{1}{|b|}\frac{|b - b_n|}{|b_n|} \tag{18}$$

Da $|b| > 0$ und $b_n \to b$,

$$\exists N: \qquad |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq N$$

Deswegen, für $n \geq N$,

$$|b_n| \geq |b| - |b - b_n| \geq \frac{|b|}{2} > 0 \tag{19}$$

und

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{2}{|b|^2}|b_n - b|\,.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und wähle N' s.d. $|b_n - b| < \varepsilon |b|^2/2$ forall $n \geq N$. Für $n \geq \max\{N, N'\}$ schliessen wir

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon\,.$$

□

Bemerkung 4.16. Falls $a_n \to a$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, folgt aus dem Satz 4.13(ii) dass $\lambda a_n \to \lambda a$: wir setzen eifach $b_n := \lambda\ \forall n$!

Satz 4.17. *Sei $a_n \to a$ ($a_n \in \mathbb{C}$), dann:*

- $|a_n| \to |a|$
- $\bar{a_n} \to \bar{a}$
- $\operatorname{Re} a_n \to \operatorname{Re} a$
- $\operatorname{Im} a_n \to \operatorname{Im} a$

Beweis. Die Behauptungen sind triviale Konsequenzen des Konvergenzkriteriums (11) und der folgenden Ungleichungen:

- $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$
- $|\bar{a_n} - \bar{a}| = |a_n - a|$
- $|\operatorname{Im} a_n - \operatorname{Im} a| \leq |a_n - a|$
- $|\operatorname{Re} a_n - \operatorname{Re} a| \leq |a_n - a|$

□

Satz 4.18. *Seien $a_n \to a$, $b_n \to b$ mit $a_n \leq b_n$. Dann $a \geq b$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\begin{aligned} &\exists N \in \mathbb{N}: \qquad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \\ &\exists N' \in \mathbb{N}: \qquad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N' \end{aligned}$$

Für $n = \max\{N, N'\}$:

$$b - a \geq b_n - |b_n - b| - a_n - |a - a_n| \geq (b_n - a_n) + 2\varepsilon \geq 2\varepsilon\,.$$

Da ε eine beliebige positive Zahl ist, gilt $b - a \geq 0$. □

Satz 4.19. *Seien $a_n \to a$, $b_n \to a$. Sei (c_n) mit $a_n \geq c_n \geq b_n$. Dann ist (c_n) eine konvergente Folge mit $c_n \to a$*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle

$$\begin{aligned} &N \in \mathbb{N}: \qquad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \\ &N' \in \mathbb{N}: \qquad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N' \end{aligned}$$

Für $n \geq \max\{N, N'\}$:

$$a - \varepsilon < a - |a - a_n| \leq a_n = a_n \leq c_n \leq b_n \leq a + |b_n - a| < a + \varepsilon\,.$$

$$\Longrightarrow |c_n - a| < \varepsilon\,.$$

□

Beispiel 4.20. Sei $s \geq 0$ und wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq s \leq k+1$. Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann

$$\begin{gathered}\sqrt[n]{n^k} \leq \sqrt[n]{n^s} \leq \sqrt[n]{n^{k+1}} \\ 0 \leq n^s|q|^n \leq n^k|q|^n\,.\end{gathered}$$

Deswegen $\sqrt[n]{n^s} \to 1$ und $n^k q^n \to 0$.

4.2 Monotone Folgen

Definition 4.21. Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heisst fallend (bzw. wachsend) falls $a_n \leq a_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (bzw. $a_n \geq a_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$). Monoton bedeuted fallend oder wachsend.

Satz 4.22. *Eine monotone beschränkte Folge konvergiert.*

Beweis. OBdA können wir (a_n) wachsend annehmen. (Sei a_n fallend, dann $-a_n$ ist wachsend. Falls $-a_n \to L$, dann

$$a_n = (-1)(-a_n) \to \lim(-1)\lim(-a_n) = -L)\,.$$

Sei

$$s = \sup \underbrace{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}_{=:M}$$

Behauptung:

$$s = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Da $a_n \geq a$, wir sollen beweisen dass:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \qquad a_n > s - \varepsilon \quad \forall n \geq N\,. \tag{20}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\exists a_j \in M : \qquad a_j > s - \varepsilon$$

(sonst wäre $s - \varepsilon$ eine obere Schranke kleinere als s). Die Folge wächst $\Longrightarrow$ $a_n \geq a_j > s - \varepsilon$ $\forall n \geq j$. ☐

Beispiel 4.23. Die Beschräkheit impliziert nicht die Konvergenz:

$$a_n = (-1)^n$$

4.3 Der Satz von Bolzano-Weierstrass

Definition 4.24. Sei (a_n) eine Folge. Eine Teilfolge von (a_n) ist eine neue Folge $b_k := a_{n_k}$, wobei $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_k > n_{k-1}$ (zum Beispiel:

$$\underbrace{a_0}_{b_0} \quad a_1 \quad \underbrace{a_2}_{b_1} \quad a_3 \ \ a_4 \ \ a_5 \quad \underbrace{a_6}_{b_2} \quad \ldots)\,.$$

Satz 4.25 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Jede berschränkte Folge* (a_n) $(\subset \mathbb{R}, \mathbb{C})$ *besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. **Schritt 1**: Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Sei I und $M \in \mathbb{R}$ so dass $I \leq a_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. OBdA $I < M$, sonst ist (a_n) eine konstante Folge. Wir definieren $J_0 = [I, M]$ und teilen es in zwei Intervallen:

$$J_0 = [I, A_0] \cup [A_0, M] \quad A_0 = \frac{M-I}{2} + I = \frac{M+I}{2}$$

mindestens ein Intervall enthält unendlich viele a_n. Nennen wir dieses Intervall J_1.

Rekursiv definieren wir eine Folge von Intervallen J_k s.d.

- $J_{k+1} \subset J_k$;

- Die Länge ℓ_k von J_k ist $(M-I)2^{-k}$;
- jedes Intervall entält unendlich viele gliedern der Folge (a_n).

Diese Folge ist eine Intervallschachtelung und deswegen $\exists! L$ mit $L \in J_i\ \forall i$.

Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $a_{n_0} \in J_0$. Da J_1 entält unendlich viele a_n, $\exists n_1 > n_0$ mit $a_{n_1} \in J_1$. Rekursiv definieren wir eine Folge natürlicher Zahlen (n_k) mit $n_{k+1} > n_k$ und $a_{n_k} \in J_k$. Die Folge $b_k := a_{n_k}$ ist eine Teilfoge von (a_n). Ausserdem

$$|b_k - L| \leq \ell_k = 2^{-k}(M-I)\,,$$

weil $b_k, s \in J_k$. Deswegen $b_k \to L$.

$$\exists a \in J_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\exists n_0 : a_{n_0} \in J_0$$

J_1 enthält unendlich viele $a_n \implies \exists n_1 > n_0$ mit $a_{n_1} \in J$.

Schritt 2. Sei nun $a_k = \xi_k + i\zeta_k$ eine beschränkte komplexe Folge. (ξ_k) ist eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Aus dem Schritt 1 $\exists (\xi_{k_j})$ Teilfolge die konvergiert. (ζ_{k_j}) ist auch eine beschränkte Folge reeller Zahlen und deswegen besitzt eine konvergente Teilfolge $(\zeta_{k_{j_n}})$. Dann

$$b_n := a_{k_{j_n}} = \xi_{k_{j_n}} + i\zeta_{k_{j_n}}$$

ist eine konvergente Teilfolge! □

Definition 4.26. Falls (a_k) eine Folge ist und a der Limes einer Teilfolge, dann heisst a Häufungswert.

Lemma 4.27. *Sei (a_k) eine Folge. a Häufungswert $\iff$ $\forall$ offenes Invervall mit $a \in I$ $\exists$ unendlich viele $a_k \in I$.*

Beweis. Trivial □

Definition 4.28. Wenn die Menge der Häufungswerte von (a_n) (relle Folge) ein Supremum (bzw. ein Infimum) besitzen, heisst dieses Supremum "Limes Superior" (bzw. "Limes Inferior") und wir nuzten die Notation

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \qquad (\text{bzw. } \liminf_{n\to\infty} a_n).$$

Wenn die Folge keine obere (bzw. untere) Schranke besitzt, wir schreiben

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty \quad (\text{bzw. } \liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty.)$$

Bemerkung 4.29. Eine konvergente Folge hat genau einen Häufungswert, d.h. der Limes der Folge!

Lemma 4.30. *Der Limes Superior (bzw. Inferior) ist das Maximum (bzw. Minimum) der Häufungswerte, falls er enldich ist. Ausserdem eine reelle Folge konvergiert genau dann, wenn der Limes superior und der Limes inferior gleich und endlich sind.*

Beweis. **Teil 1** Sei $\limsup_n a_n = S \in \mathbb{R}$. Zu beweisen ist dass S ein Häufungswert ist. Sei $I =]a, b[$ ein Intervall mit $S \in I$. Wir behaupten dass I unendlich viele Gliedern von (a_n) besitzt: es folgt dann aus Lemma 4.27 dass S ein Häufungswert ist. Da S das Supremum der Häufungswerte ist, $\exists$ ein Häufungswert $h > a$. Aber dann $h \in I$, und aus Lemma 4.27 folgt dass I unendlich viele a_n enthält.

Teil 2. Sei (a_n) eine Folge mit

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}\,.$$

Es folgt dass (a_n) eine beschränkte Folge ist. Falls a_n nicht nach L konvergiert, dann $\exists \varepsilon > 0$ und unendlich viele a_n mit $|a_n - L| > \varepsilon$, d.h. eine Teilfolge $b_k = a_{n_k}$ von (a_n) mit $|b_k - L| > \varepsilon$. Aus dem Satz von Bolzano-Weiestrass schliessen wir die Existenz einer konvergenten Teilfoge von (b_n) mit Limes $\ell \neq L$. ℓ ist ein Häufungswert von (a_n). Das ist ein Widerspruch weil, nach der Definition von Liminf und Limsup, $L \leq \ell \leq L$. □

4.4 Konvergenzkriterium von Cauchy

Satz 4.31. *Eine Folge komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn:*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : |a_n - a_m| < \varepsilon \;\; \forall n, m \geq N \,. \tag{21}$$

Beweis. **Konvergenz $\Longrightarrow$ Cauchy.** Sei (a_n) s.d. $a_n \to a$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\exists N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall n \geq N$$

Deswegen:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall n, m \geq N$$

Cauchy $\Longrightarrow$ Konvergenz. Sei (a_n) eine "Cauchy-Folge" (d.h. (21) gilt).

Bemerkung 4.32. Falls a ein Häufungswert ist, dann konvergiert die Ganze Folge nach a!

In der Tat, sei a_{n_k} eine Teilfoge die nach a konvergiert.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K : \qquad k > K \quad \Longrightarrow \quad |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{22}$$

$$\exists N : \qquad |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall m, n > N \,. \tag{23}$$

Sei nun $n \geq N$. Sicher $\exists n_k > N$ mit $k \geq K$. Deswegen, für $n > N$,

$$|a - a_n| = |a - a_{n_k} + a_{n_k} - a_n| \leq |a - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_n| \overset{(22)\&(23)}{<} \varepsilon \,.$$

Das beweist die Bemerkung 4.32.

Deswegen, um den Satz zu beweisen, es genügt die Existenz eines Häufungspunkts zu zeigen. Nach Bolzano-Weiestrass, die beschränktheit der Folge impliziert die Existenz eines Häufungspunts. Wähle nun $\varepsilon = 1$.

$$\exists \bar{N} : |a_n - a_m| < 1 \;\; \forall n, m \geq \bar{N} \,.$$

Deswegen

$$|a_n| \leq |a_n - a_{\bar{N}}| + |a_{\bar{N}}| < |a_{\bar{N}}| + 1 \qquad \forall n \geq \bar{N}$$

Sei nun

$$M := \max\left(\left\{|a_k| : k < \bar{N}\right\} \cup \left\{|a_{\bar{N}} + 1|\right\}\right)$$

Dann $|a_n| \leq M$ und die Folge ist beschränkt. □

4.5 Uneigentliche Konvergenz

Definition 4.33. Sei a_n eine Folge von reellen Zahlen. Dann sagen wir:

- $a_n \to +\infty$ (oder $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$) falls $\forall M \in \mathbb{R} \; \exists N \in \mathbb{R} : a_n \geq M$ $\forall n \geq N$ (d.h. $a_n \geq M$ für fast alle $n \in \mathbb{R}$)
- $a_n \to -\infty$ ($\lim_{n\to-\infty} a_n = -\infty$) falls $\forall M \in \mathbb{R}$, $a_n \leq M$ für fast alle n.

Übung 4.34. $\limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (bzw. $\liminf_n a_n = -\infty$) $\Longleftrightarrow$ $\exists$ Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ (bzw. $a_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\to} -\infty$).

Bemerkung 4.35. Sei a_n eine wachsende (bzw. fallende) Folge. Dann:

- entweder konvergiert a_n
- oder $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (bzw. $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$)

5 Reihen

5.1 Konvergenz der Reihen

Definition 5.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wir setzen:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$s_k := \sum_{i=0}^{k} a_i$$

Definition 5.2. Die $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist die Folge der Partialsummen. Die Reihe ist die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Falls der Limes von s_k existiert, dann $\lim_{n\to+\infty} s_n$ ist der Wert der Reihe. Und wir sagen dass (s_k) eine konvergente Reihe ist.

Notation 5.3. $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ bezeichnet die Reihe und den Wert der Reihe (wenn sie konvergiert). Wenn die Partialsumme eine Folge reeller Zahlen ist und $s_n \to +\infty$ (bzw. $-\infty$), dann wir schreiben $\sum a_n = +\infty$ (bzw. $-\infty$).

Beispiel 5.4. Sei z eine komplexe Zahl. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ die geometrische Reihe (für $z = 0$ gilt die Konvention dass $z^0 = 0$).

Für $|z| < 1$ die geometrische Reihe konvergiert.
In der Tat:

$$\begin{aligned} &(1-z)(1+z+\cdots z^n) = 1 - z^{n+1} \\ &s_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \\ &\lim_{n\to+\infty} \frac{1-z^n}{1-z} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1-z}\right) - \frac{1}{1-z}\underbrace{\left(\lim_{n\to+\infty} z^n\right)}_{=0 \text{ weil } |z|<1} = \frac{1}{1-z} \end{aligned}$$

Für $|z| \geq 1$ die geometrische Reihe divergiert. In der Tat:

- Falls $z = 1$, dann $s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1$;
- Falls $z \neq 1$ gilt die Formel

$$s_n = \frac{(1-z^{n+1})}{1-z}$$

und s_n konvergier genau dann, wenn z^n konvergiert. Aber z^n konvergiert nicht, weil:

  - Für $z > 1$ wir haben $|z|^n \to \infty$;
  - Für $|z| = 1 (z \neq 1)$ wir haben

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \implies z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \qquad \text{(siehe Übung 4 Blatt 3)}$$

mit $\theta \in]0, 2\pi[$ und es ist einfach zu sehen dass z^{n+1} nicht konvergiert.

Beispiel 5.5. Die bekannte armonische Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. In diesem Fall $s_{n+1} \geq s_n$: s_n ist eine wachsende Folge So, entweder s_n konvergiert nach eine reele Zahl oder $\lim_n s_n = +\infty$. Wir betrachten die Teilfoge s_{2^n-1}:

$$\begin{aligned} s_{2^n-1} &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{} + \underbrace{\cdots}_{2^{k-1}\leq j\leq 2^k-1} + \cdots + \underbrace{\cdots}_{2^{n-1}\leq j\leq 2^n-1} \\ &\geq 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}} + \cdots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

Deswegen $\lim_n s_{2^n-1} = +\infty$ und die ursprüngliche Folge (s_n) konvergiert nicht!

$$\implies \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty \qquad \text{d.h.} \quad \sum \frac{1}{n} = +\infty$$

5.2 Konvergenzkriterien für reelle Reihen

Bemerkung 5.6. (gilt auch für komplexe Reihen!)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{konvergiert} \implies a_n \to 0$$

Beweis. Da $a_n = s_{n+1} - s_n$ und $\lim_n s_n = \lim_n s_{n+1} = \sum a_n$, wir schliessen $a_n \to \sum a_n - \sum a_n = 0$. □

Übung 5.7. Beweise ganz schnell dass die geometrische Reihe nicht konvergiert wenn $|z| \geq 1$.

Bemerkung 5.8. $a_n \to 0$ impliziert **NIHCT** dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert! Bsp: $a_n = \frac{1}{n}$

Satz 5.9. *Sei* $\sum a_n$ *eine Reihe mit reellen Zahlen* $a_n \geq 0$. *Dann:*

- *entweder ist die Folge* (s_n) *beschränkt und die Reihe konvergiert*
- *oder* $\sum_{n=0}^{\infty} s_n = +\infty$

Beweis. Trivial: (s_n) ist eine wachsende Folge. □

Satz 5.10 (Konvergenzkriterium von Leibnitz)**.** *Sei* (a_n) *eine fallende Nullfolge. Dann konvergiert* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *(eine alternierende Reihe).*

Beweis. Betrachten wir

$$s_k - s_{k-2} = (-1)^{k-1} a_{k-1} + (-1)^k a_k = (-1)^k \overbrace{(a_k - a_{k-1})}^{\leq 0}$$

- $s_k - s_{k-2} \geq 0$ falls k ungerade ist
- $s_k - s_{k-2} \leq 0$ falls k gerade ist

Für k ungerade:

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots$$

$$\underbrace{s_k}_{\text{gerade}} = \underbrace{s_{k+1}}_{\text{ungerade}} + \underbrace{(-1)^{k+1}}_{\geq 0} \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \leq s_{k+1}$$

Für k gerade:

$$s_0 \geq s_2 \geq s_4 \leq \cdots$$

(Beweis gleich wie für ungerade)
Deswegen:

- (s_{2k+1}) ist eine wachsende Folge mit $s_{2k+1} \leq s_0$, $\implies$ (s_{2k+1}) ist eine beschränkte wachsende Folge.
- (s_{2k}) ist eine fallende Folge mit $s_{2k} \geq s_1$, $\implies$ (s_{2k}) ist eine monotone fallende Folge.

Deswegen die beid Folgen konvergieren. Seien

$$\lim_{k\to+\infty} s_{2k} = S_g \qquad \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = S_u\,.$$

Dann

$$S_u - S_g = \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to+\infty} s_{2n} = \lim_{n\to+\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$$

$$\implies S_u = S_g \implies \lim_{n\to+\infty} s_n = S_u (= S_g)$$

□

Korollar 5.11.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

konvergiert

5.3 Konvergenzkriterien für allgemeine (komplexe) Reihen

Bemerkung 5.12 (Cauchyches Kriterium). $\sum a_n$ konvergiert $\iff$ (s_n) konvergiert $\iff$ (s_n) ist eine Cauchyfolge. $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \qquad |a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{m+1}| = |s_n - s_m| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N\,. \tag{24}$$

Korollar 5.13 (Majorantenkriterium)**.** *Sei $\sum a_n$ eine Reihe komplexer Zahlen und $\sum b_n$ eine konvergente Reihe nichtnegativer reeller Zahlen. Falls $|a_n| \leq b_n$ (d.h. $\sum b_n$* **majorisiert** *$\sum a_n$), dann ist $\sum a_n$ konvergent.*

Beweis. Seien s_n die Partialsummen von $\sum_{a_n}$ und σ_n die Partialsummen von b_n. Da $\sum b_n$ konvergiert, gilt (24):

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \qquad b_n + \ldots + b_{m+1} = |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N$$

Deswegen, für $n \geq m \geq N$:

$$|s_n - s_m| \leq |a_n| + \ldots + |a_{m+1}| \leq b_n + \ldots b_{m+1} \leq \varepsilon.$$

Aus dem Cauchychen Kriterium folgt dass $\sum a_n$ konvergiert. □

5.4 Wurzel- und Quotientenkriterium

Definition 5.14. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heisst absolut konvergent, falls $\sum_{a=0}^{\infty} |a_n|$ eine konvergente Reihe ist.

Bemerkung 5.15. Majorantenkriterium $\iff$ die absolute Konvergent impliziert die Konvergent.

Satz 5.16. *(Quotientenkriterium) Sei $\sum a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für fast alle n und s.d. $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q$ existiert. Falls*

- *$q < 1$ konvergiert die Reihe absolut.*
- *$q > 1$ divergiert die Reihe.*
- *$q = 1$ unentschieden.*

Beweis.
- $q > 1$. $1 < \tilde{q} = \frac{1}{2} + \frac{q}{2} < q$.Dann $\exists N$ so dass $|a_{n+1}| \geq \tilde{q}|a_n|$ falls $n \geq N$. Deswegen:

  $$|a_n| \geq \tilde{q}|a_{n-1}| \geq \tilde{q}^2 |a_{n-2}| \cdots > \tilde{q}^{n-N} |a_N|$$

  OBdA $|a_N| \neq 0$

  $$\implies \lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty \implies \sum a_n \text{ divergiert}$$

- $q < 1$. $1 < \tilde{q} = \frac{1}{2} + \frac{q}{2} < q$. $\exists N$ so dass $|a_n| \leq \tilde{q}^{n-N}|a_N|$ (das gleiche Argument wie vorher).

  $$b_n = \tilde{q}^{n-N}|a_N| = C\tilde{q}^n \qquad \text{falls } n \geq N$$

  $$b_n = |a_n| \qquad \text{falls } n < N$$

  $\sum b_n$ majorisiert $\sum a_n$

  $$\sum b_n \text{ konv} \overset{\text{Maj.}}{\implies} \sum |a_n| \text{ konvergiert}$$

□

Satz 5.17. *(Wurzelkriterium) Sei $\sum a_n$ eine Reihe und $L := \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ("$L = +\infty$" falls $\sqrt[n]{|a_n|}$ unbeschränkt ist!) Dann:*

- *$L < 1$ konvergiert die Reihe absolut*

- $L > 1$ *divergiert die Reihe*
- $L = 1$ *unentschieden*

Beweis. • $L < 1$

$$L < \tilde{L} = \frac{L}{2} + \frac{1}{2} < 1 \implies \exists N : \sqrt[n]{|a_n|} \leq \tilde{L}\ \forall n \geq N\,.$$

Dann $||a_n|| \leq \tilde{L}^n$ für $n \geq N$ und wir haben (wie oben) die absolute Konvergenz.

- $L > 1$

$$\exists k_n : \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} \to L$$
$$1 < \tilde{L} = \frac{L}{2} + \frac{1}{2} < L$$
$$\exists N : k_n \geq N \implies \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} \geq \tilde{L}$$
$$\implies |a_{k_n}| \geq \tilde{L}^{k_n} \to +\infty \text{ für } n \to +\infty$$
$$\implies a_n \not\to 0 \implies \sum a_n \text{ divergiert}$$

□

Beispiel 5.18. Sei $s \geq 1$ $\sum \frac{1}{n^s}$

- $s = 1$ harmonische Reihe: divergiert.
- $s > 1$ konvergiert! (eine bekannte Erfolg von Euler ist die Formel $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

$$\sum \frac{1}{n^{2k}} \sim \underbrace{c_k}_{\in \mathbb{Q}} \pi^{2k}$$

Bermerken Sie dass ($a_n = \frac{1}{n^s}$):

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \forall s \geq 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \forall s \geq 1$$

Deswegen sind die Fälle $q = 1$, bzw. $L = 1$, für das Quotientekriterium, bzw. Wurzelrkiterum, unentschieden.

Wir habe schon gesehen dass die harmonische Reihe divergiert. Wir beweisen die Konvergenz von $\sum a_n$ im Fall $s > 1$. Betrachten wir die Reihe:

$$\sum_n b_n = \frac{1}{1^s} + \underbrace{\frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s}}_{\text{2 mal}} + \underbrace{\frac{1}{4^s} + \cdots + \frac{1}{4^s}}_{\text{4 mal}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^{ks}} + \cdots + \frac{1}{2^{ks}}}_{2^k \text{ mal.}}$$

und die entsprechenden Partialsummen s_n. $\sum b_n$ majorisiert $\sum a_n$. Da $b_n \geq 0$, es bleibt die beschränktheit von s_n zu zeigen. In der Tat

$$\begin{aligned} s_{2^k-1} &= \frac{1}{1^s} + \frac{2}{2^s} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^{(k-1)s}} \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j(s-1)}} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^j = \frac{1}{1 - 2^{-(s-1)}} < \infty\,. \end{aligned}$$

Die Konvergenz von $\sum a_n$ folgt aus dem Majorantenkriterium.

5.5 Das Cauchyprodukt

Definition 5.19. $\sum a_n$ und $\sum b_n$. Das CP ist die Reihe $\sum c_n$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = \sum_{j+k=n} a_j b_k$$

Satz 5.20. *Falls $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergieren, dann konvergiert das CP absolut. Ausserdem*

$$\sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$$

NB:

$$c_0 = a_0 b_0$$
$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$
$$c_1 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$
$$\ldots$$

Beweis.

$$s_k = \sum_{j=0}^{k} a_j, \qquad \sigma_k = \sum_{i=0}^{k} b_i$$

$$s_k \sigma_k = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} b_i a_j$$

$$c_n = \sum_{j+i=n} a_i b_j, \qquad \beta_k = \sum_{n=0}^{k} c_k$$

$$\sum_{n=0}^{k} \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i+j \leq n} a_i b_j$$

Unseres Ziel ist die Differenz

$$\beta_k - \sigma_k s_k$$

abzuschätzen.

Zuerst wir zeigen die Absolte Konvergenz: $\sum |c_k| < +\infty$. Wir setzten $B_n = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$ und zeigen dass (B_n) eine beschränkte Folge ist.

$$B_n = \sum_{k=0}^{N} |\sum_{i+j \geq k} a_i b_j| \leq \sum_{k=0}^{N} \sum_{i+j=k} |a_i||b_j|$$

$$= \sum_{i+j \leq N} |a_i||b_j| \leq \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} |a_i||b_j|$$

$$= \left(\sum_{i00}^{N} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{N} |b_j|\right) \leq \left(\sum |a_i|\right)\left(\sum |b_j|\right) = LM$$

Wobei $L = \sum |a_i|$ und $M = \sum |b_j|$. $\Longrightarrow$ (B_n) konvergiert $\Longrightarrow$ $\sum c_n$ konvergiert absolut. Non wir beweisen dass $\beta_n - \sigma_n s_n \to 0$.

$$|\beta_n - \sigma_n s_n| = \left| \sum_{i=0}^{N} a_i \sum_{j=0}^{N} b_j - \sum_{k=0}^{N} c_k \right|$$

$$= \left| \sum_{i=0,j=0}^{N} a_i b_j - \sum_{i+j \leq N} a_i b_j \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \sum_{i+j>N, i,j \le N} a_i b_j \right| \le \sum_{i+j>N, i,j\le N} |a_i||b_j| \\
&\le \sum_{i\le N, j\le N, i\ge \frac{N}{2}, j\ge \frac{N}{2}} |a_i||b_j| = \sum_{i,j\le N} |a_i||b_j| - \sum_{i,j<\frac{N}{2}} |a_i||b_j| \\
&= \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{N}|a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{N}|b_j|\right) - \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{N}{2}\rfloor}|a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N}{2}\rfloor}|b_j|\right)}_{\Gamma_N}
\end{aligned}
$$

Aber:

$$\lim_{N\to+\infty} \Gamma_N = \sum_{i=0}^{\infty}|a_i|\sum_{j=0}^{\infty}|b_j| - \sum_{i=0}^{\infty}|a_i|\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|$$

Deswegen,

$$\limsup_{n\to\infty} |\beta_n - s_n\sigma_n| \le \lim_{n\to\infty} \Gamma_n = 0$$

und

$$\sum_n c_n = \lim_n \beta_n = \lim_n s_n\sigma_n = \sum_n a_n \sum_n b_n \,.$$

□

5.6 Potenzreihen

Definition 5.21. Die Potenzreihen: $\sum a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$.

Lemma 5.22. *Falls $a_n z_0^n$ eine konvergente Reihe ist, dann $\forall z$ mit $|z| < |z_0|$ konvergiert $\sum a_n z^n$ absolut.*

Beweis. $a_n z_0^n$ ist eine Nullfolge.

$$\implies \exists C : |a_n z_0^n| \le C \qquad \forall n$$

$$|a_n z^n| \le |a_n z_0^n| \underbrace{\frac{|z|^n}{|z_0|^n}}_{\alpha} \le C\alpha^n$$

$$|z| < |z_0| \implies \alpha < 1$$

$\implies \sum C\alpha^n$ eine konvergente Majorante. □

Sei (a_n) eine Folge von Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$. Sei

$$K := \left\{ z \in \mathbb{C} : \sum a_n z^n \text{ konvergiert} \right\}$$

Die Werte der Potenzreihen geben eine wohldefinierte Funktion:

$$K \ni z \mapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Satz 5.23. *Seien*

$$f(z) = \sum a_n z^n, g(z) = \sum b_n z^n$$

mit Definitionsbreiche K and K'. Auf $K \cap K'$:

$$f(z) + g(z) = \sum (a_n + b_n) z^n$$

$$f(z)g(z) = \underbrace{\sum c_n z^n}_{\textit{falls } z \textit{ absolute Konvergenz garantiert}}$$

wobei $\sum c_n$ das Cauchy Produkt von $\sum_n a_n$ und $\sum b_n$ ist.

Beweis. Sei $\sum \gamma_n$ das CP von $\sum a_n z^n$ und $b_n z^n$.

$$\sum a_n z^n \sum b_n z^n = sum\gamma_n$$

$$= \sum \sum_{i+j=n} \left(a_i z^i\right)\left(b_j z^j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} a_i b_j z^{i+j}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{\sum_{i+j=n} a_i b_j}_{=c_n}$$

□

Als ein einfaches Korollar des Wurzelkriteriums erhalten wir:

Satz 5.24 (Cauchy-Hadamard)**.** $\sum a_n z^n$. *Sei* $L := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. *Dann*

- $|z| < \frac{1}{L} \implies \sum a_n z^n$ *konvergiert absolut*
- $|z| > \frac{1}{L} \implies \sum a_n z^n$ *divergiert*
- $|z| = 1$ *unentschieden*

6 Stetige Funktionen und Grenzwerte

6.1 Stetigkeit

In diesem Kapitel D ist immer eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder von $\mathbb{C}$. $D \subset \mathbb{R}$.

Definition 6.1. Seien $f : D \mapsto \mathbb{R}(\mathbb{C})$ und $x_0 \in D$. f heisst stetig in x_0 falls $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta, x \in D \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{25}$$

Deswegen, an einer “Unstetigkeitstelle” x_0 von f gibt es einer $\varepsilon > 0$ die die folgende Bedingung erfüllt:

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\text{ mit } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Beispiel 6.2. Die Polynome sind stetige Funktionen, weil Summe und Produkte stetiger Funktionen sind auch stetig (siehe Satz 6.10).

Bemerkung 6.3.

- Die Bedingung (25) ist trivial für die Funktion $f = const$
- Die Bedingung (25) ist trivial für die Funktion $f(x) = x$

$$|x - x_0| < \delta = \varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$$

Definition 6.4. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ heisst Lipschitz(-stetig) falls $\exists L \geq 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in D \tag{26}$$

(26) $\implies$ (25): wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$

Korollar 6.5. $g(x) := |x|$ *ist stetig.*

$$|g(x) - g(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

d.h. (26) *mit* $L = 1$

Beispiel 6.6. $\frac{f}{g}$ ist stetig falls f,g stetig und $g(x) \neq 0 \; \forall x \in D$ (siehe Satz 6.10).
$\implies$ Rationale Funktionen $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sind stetig auf $d = \mathbb{C} \setminus \{x : Q(x) = 0\}$

Beispiel 6.7. $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$ ist ein Polynom $\implies$ f ist stetig. Sei $g(x) := x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ($g(x)$ ist die einzige relle Zahl $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$ und $y^k = x$). $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \geq 0$. Wir behaupten dass f stetig in x_0 ist. In der Tat:

$$|\underbrace{\sqrt[k]{x}}_{y} - \underbrace{\sqrt[k]{x_0}}_{y_0}| \leq \sqrt[k]{|x - x_0|}$$

$$\iff |y - y_0|^k \leq |y^k - y_0^k|$$

oBdA $y \geq y_0$

$$\underbrace{(y - y_0)}_{a}{}^k \leq \underbrace{y}_{c}{}^k - \underbrace{y_0}_{b}{}^k$$

$$\iff a^k + b^k \leq c^k = (a + b)^k$$

$$a^k + b^k \leq (a + b)^k = a^k + \overbrace{\binom{k}{1} a^{k-1} b + \cdots +}^{\geq 0} b^k$$

Sei nun ε eine gegebene positive Zahl und wähle $\delta = \varepsilon^k$.

$$|x - x_0|, x \geq 0 \implies |\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0}| \leq \sqrt[k]{|x - x_0|} < \sqrt[k]{\varepsilon^k} = \varepsilon$$

Beispiel 6.8. Sei $a > 0$ und $f(x) = a^x \ \forall x \in \mathbb{Q}$ $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ist stetig! Das wird später bewiesen, wenn wir die Exponentialfunktion auf der ganzen komplexen Ebene definieren.

Satz 6.9. *Sei $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Sei $x_0 \in D$. Diese zwei Aussagen sind equivalent:*

- *f ist stetig an der Stelle x_0.*
- *$\forall (x_n) \subset D$ mit $x_n \to x_0$ haben wir $f(x_n) \to f(x_0)$*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. f stetig in x_0 $\implies$ $\exists \delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ falls $|x - x_0| < \delta$. $x_n \to x_0 \implies \exists N$:

$$|x_n - x_0| < \delta \ \ \forall n \geq N \implies |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Andere Richtung: Nehmen wir an dass f nicht stetig ist.

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 \quad \exists x : |x - x_0| < \delta \ \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wir setzen $\delta = \frac{1}{n}$ und wähle x_n mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Dann $x_n \to x_0$ und $f(x_n) \not\to f(x_0)$. □

6.2 Rechenregeln für stetige Funktionen

Satz 6.10. *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ zwei stetige Funktionen in x_0. Dann:*

- *$f + g$, fg sind stetig in x_0*
- *$\frac{f}{g}$ ist stetig in x_0 falls $f(x_0) \neq 0$.*

Beweis. Sei $x_0 \in D$, $(x_n) \subset D$ $x_n \to x_0$ (für $\frac{f}{g}$ $g(x_n) \neq 0, g(x_0) \neq 0$ weil $(x_n), x_0 \subset D \setminus \{x : g(x) = 0\}$)

$$\begin{aligned} f(x_n) + g(x_n) &\to & f(x_0) + g(x_0) \\ f(x_n) g(x_n) &\to & f(x_0) g(x_0) \\ \frac{f(x_n)}{g(x_n)} &\to & \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \end{aligned}$$

□

Satz 6.11. *$f : D \to A$, $g : A \to B$. f stetig x_0 und g stetig auf $f(x_0) = y_0$ $\implies$ $g \circ f : D \to B$ stetig auf x_0.*

Beweis. $x_0, (x_n) \subset D$ mit $x_n \to x_0 \implies \underbrace{f(x_n)}_{y_n} \to \underbrace{f(x_0)}_{y_0}$ $(y_n), y_0 \in A \implies$

- $g(y_n) \to g(y_0)$
- $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$

$\implies g \circ f(x_n) \to g \circ f(x_0) \implies$ Stetigkeit von $g \circ f$ □

Definition 6.12. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ heisst stetig falls f stetig an jeder Stelle $x_0 \in D$ ist.

Satz 6.13. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ injektiv. Sei*

$$B := f([a,b]) \, (= \{z : \exists x \in [a,b] \ \textit{mit} \ f(x) = z\})$$

Bemerkung 6.14. $f : [a,b] \to B$ ist bijektiv und deswegen umkehrbar.

Sei $f^{-1} : B \to [a,b]$ die Umkehrfunktion. Dann ist $f^{-1}B \to [a,b]$ stetig, falls f stetig ist.

Beweis. Sei $x_0 \in B$, (x_n) mit $(x_n) \subset B$ und $x_n \to x_0$. Die Folge

$$\underbrace{f^{-1}(x_n)}_{=y_n} \overset{?}{\to} \underbrace{f^{-1}(x_0)}_{=y_0}$$

$(y_n) \subset [a,b]$, $y_0 \in [a,b]$. Falls $y_n \not\to y_0$, dann:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists \underbrace{n}_{n_k} \geq \underbrace{N}_{k} : |y_n - y_0| \geq \varepsilon$$

$$n_k \geq n_{k-1} \implies \text{Teilfolge } (y_{n_k}) : |y_{n_k} - y_0| \geq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Bolzano-Weiterstrass} \implies \exists \text{ Teilefolge } y_{n_{k_j}} \to \bar{y} \implies \bar{y} \neq y_0$$

$$f(y_{n_{k_j}}) = x_{n_{k_j}}$$

Die Stetigkeit von f implies $f(y_{n_{k_j}}) \to f(\bar{y})$. Und da $x_{n_{k_j}} \to x_0$ sowie $x_{n_{k_j}} = f(y_{n_{k_j}}$, heisst dass das $f(\bar{y}) = x_0$. Aber $f(y_0) = x_0$ und deswegen $f(\bar{y}) = f(y_0)$, mit $\bar{y} \neq y_0$. Widerspruch mit der Injektivität von f. Deswegen $f^{-1}(x_n) = y_n \to y_0 = f^{-1}(x_0) \implies f^{-1}$ ist stetig. □

Bemerkung 6.15. Aus diesem Satz schliessen Sie die Stetigkeit von $x \mapsto x^{\frac{1}{k}}$ von der Stetigkeit $x \mapsto x^k$.

Bemerkung 6.16. Für Satz 1 genügt die Stetigkeit der beiden Funktionen ander der Stelle x_0. Für Satz 2 ähnlich. Für Satz 3 ist die Stetigkeit auf dem ganzen D wichtig.

6.3 Zwischenwertsatz

Satz 6.17. *Eine stetige Abbildung $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert γ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beweis. oBdA $f(a) \leq f(b)$ und $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$

$$I_0 = [a,b] = [a_0, b_0]$$

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \gamma \implies I_1 = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] = [a_1, b_1]$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \gamma \implies I_1 = \left[\frac{a+b}{2}, b\right] = [a_1, b_1]$$

Rekursiv $I_k = [a_k, b_k]$ mit $f(a_k) \leq \gamma \leq f(b_k)$, $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$

$$I_{k+1} = \begin{cases} \left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right] & f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) \geq \gamma \\ \left[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k\right] & \text{sonst} \end{cases}$$

$$|I_k| = 2^{-k}(b-a) \overset{k\to+\infty}{\to} 0$$

Intervallschachtelung $\implies \exists! x_0$ mit $x_0 \in I_k \ \forall k$.

$$b_k \downarrow x_0 \implies f(x_0) = \lim_{k\to+\infty} f(b_k) \geq \gamma$$

$$a_k \uparrow x_0 \implies f(x_0) = \lim_{k\to+\infty} f(a_k) \leq \gamma$$

$$\implies f(x_0) = \gamma$$

□

Korollar 6.18. *Fixpunktsatz: Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Abbildung. Dann besitzt f einen Fixpunkt, d.h.*

$$\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = x_0$$

Beweis. $g(x) := f(x) - x$

$$g(a) = f(a) - a \geq 0$$

$$g(b) = f(b) - b \leq 0$$

Mithilfe des oberen Satzes $\implies \exists x_0$ mit

$$g(x_0) = 0 \iff f(x_0) - x_0 = 0 \iff f(x_0) = x_0$$

□

6.4 Maxima und Minima

Satz 6.19. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann $\exists x_M, x_m \in [a,b]$ mit*

$$f(x_m) \geq f(x) \geq f(x_M) \ \ \forall x \in [a,b]$$

Beweis. oBdA suche ich die Maximumstelle. Sei

$$S := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

$$(= +\infty \text{ falls } \{f(x) : x \in [a,b]\} \text{ keine obere Schranke besitzt})$$

Falls $S \in \mathbb{R}$, sei $S_n = S - \frac{1}{n}$. Falls $S = +\infty$, sei $S = n$. In beiden Fälle $\implies$ $\exists x_n$ mit $f(x_n) \geq S_n$

$$(x_n) \subset [a,b] \implies \exists\, (x_{n_k}) \text{ mit } x_{n_k} \to \bar{x}$$

$$\overset{S\in\mathbb{R}}{\implies} f(\bar{x}) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = S \overset{!}{=} \max_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{[a,b]} f$$

$$\overset{S=+\infty}{\implies} f(\bar{x}) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = +\infty \implies \text{Widerspruch}$$

□

Bemerkung 6.20. Sei $E \subset \mathbb{R}$ eine Menge mit der Eigenschaft $\forall (x_n) \subset E$ $\exists$eine Teilfolge (x_{n_k}) $x \in E$ mit

$$x_{n_k} \to x$$

Ist E immer ein abgeschlossenes Intervall? Nein

$$E := [0,1] \cup [2,3]$$

Sei $(x_n) \subset [0,1] \cup [2,3]$. Dann $\exists\, (x_{n_k})$ die entweder in $[0,1]$ oder in $[2,3]$ enthalten ist $\implies$ $\exists$ eine konvergente Teilfolge.

Definition 6.21. Die Mengen $E(\subset \mathbb{R}, \subset \mathbb{C})$ mit der Eigenschaft in der Bemerkung oben heissen kompakte Mengen.

Satz 6.22. *Eine reellwertige stetige Funktion auf einem kompakten Definitionbereich besitzt mindestens eine Maximumstelle (und eine Minimumstelle).*

Beweis. Gleich wie oben! □

Definition 6.23. Stetigkeit an einer Stelle x:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\text{ mit }\; \underbrace{|x-y| < \delta \;\text{ und }\; y \in D} \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Stetigkeit auf D bedeutet Stetigkeit an jeder Stelle $x \in D$.

Definition 6.24. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ heisst gleichmässig stetig falls

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\text{ s.d.} \qquad |x-y| < \delta \;\text{ mit }\; x, y \in D \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Beispiel 6.25. f Lipschitz

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \;\; \forall x, y \in D$$

Dann ist f gleichmässig stetig $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$

$$|x-y| < \frac{\varepsilon}{L} \implies |f(x) - f(y)| \leq L|x-y| < L\delta = L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

Satz 6.26. *Falls D eine kompakte Menge ist, ist jede stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ gleichmässig stetig!*

Beweis. (Widerspruchsbeweis) f stetig aber nicht gleichmässig. Dann $\exists \varepsilon > 0 :$ $\forall \delta$ die ich wählen kann

$$\exists x, y \in D \;\text{ mit }\; |x-y| < \delta \;\text{ und }\; |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

$$\delta = \frac{1}{n} > 0 \implies \exists x_n, y_n \;\text{ mit }\; |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \;\text{ und }\; |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

$$\text{Kompaktheit} \implies \exists x_{n_k} \;\text{ Teilfolge mit }\; x_{n_k} \to x \in D$$

$$\implies y_{n_k} \to x \in D$$

$$\implies f(x_{n_k}) \to f(x) \text{ und } f(y_{n_k}) \to f(x) \implies |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$$

□

6.5 Stetige Fortsetzung, Grenzwerte

Definition 6.27. Sei $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ stetig. Sei $E > D$. Eine stetige Fortsetzung von f ist eine $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ stetig mit $f(x) = \tilde{f}(x) \;\; \forall x \in D$

Definition 6.28. $g : E \to A$, $D \subset E$,

$$g|_D \to A \;\text{ bezeichnet die Funktion mit }\; g|_D(x) = g(x) \;\; \forall x \in D\,,$$

d.h. die Einschränkung von g auf D.

Bemerkung 6.29. Sei $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ stetig. Sei $x_0 \notin D$. Die Fragen:

(a) gibt es eine stetige Fortsetzung von f auf $D \cup \{x_0\}$

(b) ist diese Fortsetzung eindeutig?

Definition 6.30. x_0 ist ein Häufungspunkt von einer Menge E wenn $\forall \varepsilon > 0 \;\exists$ unendlich viele Punkte $x \in E$ mit

$$|x - x_0| < \varepsilon$$

Bemerkung 6.31. x_0 ist ein Häufungspunkt von $E \iff \exists (x_n) \subset \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$

Bemerkung 6.32. In Bemerkung 6.29, Frage (a): Falls x_0 kein Häufungspunkt von D ist: $\exists$ stetige Fortsetzungen. Frage (b): $\exists$ immer unendlich viele!

Bemerkung 6.33. Wenn x_0 ein Häufungspunkt von D ist, die Antwort zur Frage (b) ist ja. Die Antwort zur 1. ist undefiniert, manchmal ja, manchmal nein.

Definition 6.34. Sei $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $D \subset \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Der Grenzwert von f (falls er existiert) an der Stelle x_0 ist die einzige Zahl $a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ so dass

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \setminus \{x_0\} \\ a & x = x_0 \end{cases}$$

stetig in x_0 ist.

Bemerkung 6.35. $f(x_0) = a$ und $x_0 \in D \implies f$ ist stetig an der Stelle x_0. Aber nicht unbedingt $f(x_0) = a$!

Satz 6.36. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$
- $\forall \{x_n\} \subset D \setminus \{x_0\}$ *mit* $x_n \to x_0$ *gilt* $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *so dass* $|x - x_0| < \delta$ *und* $x \in D \setminus \{x_0\} \implies |f(x) - a| < 0$

Beweis. Die sind triviale Folgerungen der Definitionen und des Folgenkriteriums für die Stetigkeit von f. □

Satz 6.37. *(Rechenregeln)* $f, g : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, x_0 *Häufungspunkt von* D

$$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) + \left(\lim_{x\to x_0} g(x_0)\right)$$

falls die Grenzwerte existieren!

$$\lim_{x\to x_0} (fg)(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) \left(\lim_{x\to x_0} g(x_0)\right)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} f(x)} \quad \textit{falls} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$$

Satz 6.38. *Seien* $f : D \to E$, $g : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *mit*

- x_0 *Häufungspunkt von* D *und* $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$
- $y_0 \in E$ *und* g *ist stetig and der Stelle* y_0

Dann:

$$\lim_{x\to x_0} g \circ f(x) = g(y_0) = g(\lim_{x\to x_0} f(x))$$

Beweis. Wenden Sie die entsprechenden Rechenregeln für Folgen. Als Beispiel: Teil 1 von Satz 3.Für f, g wir haben: $\forall \{x_n\} \subset D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) \wedge \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{x\to x_0} g(x_0)$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = \overbrace{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}^{\lim_{x\to x_0} f(x)} + \overbrace{\lim_{n\to\infty} g(x_n)}^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

$$\overset{\text{Satz 6.36}}{\implies} \lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

□

Definition 6.39. Falls $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D ist, dann:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty(-\infty)$ falls $\forall \{x_n\} \subset D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$ (bzw. $-\infty$)

Ähnlich $f : D \to \mathbb{C}$ und:

- D ist nicht nach oben beschränkt. Wir schreiben $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ genau dann, wenn $\forall \{x_n\} \subset D$ mit $x_n \to \infty$ gilt $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = a$

gleich wenn D nicht nach unten beschränkt ist. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$ Ähnlicherweise handelt man die Fälle

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$$

Definition 6.40. Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ und x_0 ein Häufungspunkt von $]-\infty, x_0[\cap D$. Dann $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = a$ falls

$$\forall \{x_n\} \subset D \cap]-\infty, x_0[\quad \text{mit } x_n \to x \quad \text{gilt} \quad \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = a$$

Man schreibt auch

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$$

Falls x_0 ein Häufingspunkt von $D \cap]x_0 + \infty[$ ist

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = a \qquad \left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) \right)$$

falls $\forall \{x_n\} \subset D \cap]x_0, +\infty[$ mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to a$. Ähnlich definiert man $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$.

Beispiel 6.41. Stetigkeit:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0) \implies f$ in x_0 nicht stetig ist
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$: die Funktion f in x_0 hat eine Asymptote.

7 Exponentialfunktion

Sei $a \in \mathbb{R}$ $a > 0$. Dann $a^q = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{m}$, für jede $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Ziel dieses Kapitel ist die Funktion a^z auf der ganzen komplexen Ebene zu definieren.

7.1 Existenz und Eindeutigkeit

Satz 7.1. $\exists! \operatorname{Exp} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(AT) Additionstheorem $\operatorname{Exp}(z + w) = \operatorname{Exp}(z) \operatorname{Exp}(w)$

(WT) Wachstum $\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{Exp}(z) - 1}{z} = 1$

Für Exp *wissen wir:*

- $\operatorname{Exp}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\forall z \in \mathbb{C}$
- $\operatorname{Exp}(z) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ $\forall z \in \mathbb{C}$
- Exp *ist stetig und falls* $e = \operatorname{Exp}(1)$ *dann* $e^q = \operatorname{Exp}(1)$ $\forall q \in \mathbb{R}$, *wobei*

$$e = \sum \frac{1}{n!} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Bemerkung 7.2. Kernidee: Wir suchen eine Funktion $\operatorname{Exp}(z) = f(z)$ mit den Eigenschaften (AT) und (WT)

$$f(z) = f\left(\frac{nz}{n}\right) = f\left(\frac{z}{n} + \frac{z}{n} + \cdots + \frac{z}{n}\right) \overset{(\mathrm{AT})}{=} f\left(\frac{z}{n}\right)^n \tag{27}$$

Wir definieren

$$f\left(\frac{z}{n}\right) = 1 + \frac{z_n}{n} \qquad \text{d.h.} \qquad z_n = n\left(f\left(\frac{z}{n}\right) - 1\right)$$

Für $n \to +\infty$ $\frac{z}{n} \to 0$ und aus (WT) schliessen wir

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z \lim_{n\to+\infty} \frac{f\left(\frac{z}{n}\right) - 1}{\frac{z}{n}} = z \tag{28}$$

Aus (27) folgt

$$f(z) = \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \implies f(z) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \tag{29}$$

Dürfen wir, wegen (28), z_n durch z in (29) ersetzen? Die Antwort ist im nächsten Lemma enthalten

Lemma 7.3. *Fundamentallemma:* $\forall \{z_n\} \subset \mathbb{C}$ *mit* $z_n \to z$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum \frac{z^n}{n!}$$

Bemerkung 7.4. $\sum \frac{z^n}{n!}$ konvergiert auf $\mathbb{C}$ (und konvergiert deswegen absolut)

Beweis. Das Kriterium von Hadamand:

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{n!}}} = +\infty$$

Das bedeutet:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$$

$$\begin{cases} n \text{ gerade} & n! \geq \underbrace{n(n-1)\cdots\left(\frac{n}{2}+1\right)}_{\frac{n}{2}} \frac{n}{2} \cdot 1 \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \\ n \text{ ungerade} & n! \geq \underbrace{n(n-1)\cdots\frac{n+1}{2}}_{\frac{n+1}{2}} \frac{n-1}{2} \cdot 1 \geq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \end{cases}$$

Deswegen

$$\sqrt[n]{n!} \geq \left(\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{1/n} = \frac{\sqrt[2]{n}}{\sqrt[n]{2}} \to \infty$$

□

Beweis des Fundamentallemmas. Es genügt zu beweisen dass

$$\limsup_{n\to+\infty} \left|\underbrace{\left(1 - \frac{z_n}{n}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}}_{A_n}\right| = 0$$

$$|A_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right|$$

Sei $M \in \mathbb{N}$ und $M \leq n$. Dann

$$|A_n| \leq \underbrace{\left|\sum_{k=0}^{M} \left(\binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} - \frac{z^k}{k!}\right)\right|}_{B_n} + \underbrace{\sum_{k\geq M+1}^{n} \binom{n}{k} \frac{|z_n|^k}{n^k}}_{C_n} + \underbrace{\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}}_{D}$$

$$\underbrace{\binom{n}{k}\frac{a_{k,n}}{n^k}}_{z_n^k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{z_n^k}{n^k} = \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{nn\cdots n}}_{k \ \text{mal}}\frac{z_n^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{k,n} = \lim_{n\to+\infty} 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{z_n^k}{k!} = \frac{z^k}{k!} \tag{30}$$

$$\limsup_{n\to+\infty}|A_n| \leq \underbrace{\limsup_{n\to+\infty} B_n}_{=0, aus (30)} + \limsup_{n\to+\infty} C_n + D$$

Abschätzung für C_n:

$$C_n = \sum_{k=M+1}^{n}\frac{|z_n|^k}{k!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$|z_n|$ konvergiert nach $|z| \implies \exists R \geq 0$ mit $|z_n| \leq R$

$$C_n \leq \sum_{k=M+1}^{n}\frac{|z_n|^k}{k!} \leq \sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{R^k}{k!}$$

$$\limsup_{n\to+\infty}|A_n| \leq \sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{R^k}{k!} + \sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!} \leq 2\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{R^k}{k!} \tag{31}$$

$$\limsup_{n\to+\infty}\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{R^k}{k!} = 0 \tag{32}$$

$$\left(\text{weil } \limsup_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{M}\frac{R^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{R^k}{k!} \implies \lim_{M\to+\infty}\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{R^k}{k!}\right.$$

$$\left. = \lim_{M\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R^k}{k!} - \sum_{k=0}^{M}\frac{R^k}{k!}\right) = 0\right)$$

Deswegen, (31)& (32) $\implies \limsup_n |A_n| = 0$. □

Beweis vom Satz 7.1: Teil 1. Das Fundemantallemma und die Bemerkung 7.2 $\implies$ Falls eine Funktion mit der Eigenschaft (AT) und (WT) existiert, dann gilt:

$$\operatorname{Exp}(z) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

Die Eindeutigkeit und die zwei bemerkenswerte Darstellungen der Exponentialfunktion sind deswegen schon bewisen. Für die Existenz, wir definieren

$$\operatorname{Exp}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\left(= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)$$

(AT) gilt:

$$\operatorname{Exp}(z)\operatorname{Exp}(w) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{w}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{w}{n}\right)\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z+w}{n}+\frac{zw}{n^2}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\overbrace{\left(z+w+\frac{zw}{n}\right)}^{\alpha_n}}{n}\right) \overset{\text{Fundamentallemma}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z+w}{n}\right)^n$$

$$= \operatorname{Exp}(z+w) \qquad (\text{da} \quad \alpha_n \to (z+w))$$

Ausserdem, sei

$$e = \operatorname{Exp}(1) \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right)$$

$$\operatorname{Exp}(q+s) = \operatorname{Exp}(q)\operatorname{Exp}(s) \quad \forall q, s \in \mathbb{Q}$$

(Zur Erinnerung: Falls $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ erfüllt $f(1) = a > 0$ und $f(q+s) = f(q)(s)$. Dann $f(q) = a^q \ \forall q \in \mathbb{Q}$.) Setze

$$f : \operatorname{Exp} \implies \operatorname{Exp} q = e^q \quad \forall q \in \mathbb{Q}$$

□

Um den zweiten Teil vom Satz 7.1 zu beweisen brauchen wir noch:

Lemma 7.5. *Sei $\sum a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R >$ ($R = +\infty$ falls die Reihe überall konvergiert). Dann ist $f(z) = \sum a_n z^n$ eine stetige Funktion auf $\{|z| < R\}$ ($\mathbb{C}$ falls $R = +\infty$).*

Beweis vom Satz 7.1 Teil 2. Lemma $\implies$ Stetigkeit von Exp. Ausserdem:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Exp} z - 1}{z} = 1$$

$$\frac{\operatorname{Exp}(z) - 1}{z} = \frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - 1}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} = G(z)$$

Die Reihe, die G definiert hat Konvergenzradius $+\infty$. Deswegen ist G stetig.

$$\implies \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Exp}(z) - 1}{z} = \lim_{z\to 0} G(z) - G(0) = 1$$

. Wir schliessen dass (WT) gilt. □

Beweis vom Lemma 7.5. Zu beweisen: Sei z_0 mit $|z_0| < R$

$$\text{Stetigkeit in } z_0 \iff \lim z \to z_0 f(z) = f(z_0)$$

$$\iff \lim_{z\to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$$

D.h., wir hätten gern lim und $\sum$ zu vertauschen. Allgein ist das unmöglich (Übung: Finden sie $a_{k,n} \in \mathbb{R}\ \forall k \lim_{n\to\infty} a_{k,n} = a_n (k, n \in \mathbb{N})$ aber $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n} \neq \sum_{k=0}^{\infty} a_k$).

Sei $z_k \to z_0$.

$$\limsup_{k\to+\infty} \overbrace{|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_k^n - \sum_{n=0}^{\infty} z_0^n|}^{A_k}$$

$$\leq \limsup_{k\to+\infty} \left| \sum_{n=0}^{M} a_n z_k^n - \sum_{n=0}^{M} a_n z_0^n \right| + \limsup_{k\to+\infty} \sum_{n=M}^{\infty} |a_n||z_k^n| + \sum_{n=M}^{\infty} |a_n||z_0|^n$$

Sei ρ mit $|z_0| < \rho < R$. Da $z_k \to z_0$: $|z_k| < \rho$, falls k gross genug ist.

$$\limsup_{k\to+\infty} A_k \leq 0 + 2 \sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n|\rho^n$$

Aber

$$\limsup_{M\to+\infty} \sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n|\rho^n = 0$$

weil $\sum_n |a_n|\rho^n$ eine konvergente Reihe ist (siehe den Beweis vom Fundamentallemma!)

$$\implies \lim_{k\to\infty} f(z_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_k^n a_n\right) = f(z_0) \left(= \sum_{n=0}^{\infty} z_0^n a_n\right) \implies \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

□

Bemerkung 7.6. Wir haben die folgenden Abschätzungen benutzt:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n - \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n\right| \\
&= \left|\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} \xi_n - \zeta_n\right)\right| \\
&\leq \lim_{N\to\infty}\left\{\left|\sum_{n=0}^{M} (\xi_n - \zeta_n)\right| + \left|\sum_{n=M+1}^{N} (\xi_n - \zeta_n)\right|\right\} \\
&= \left|\sum_{n=0}^{M} (\xi_n - \zeta_n)\right| + \lim_{N\to\infty}\left|\sum_{n=M+1}^{N} (\xi_n - \zeta_n)\right| \\
&\leq |\sum_{n=0}^{M} (\xi_n - \zeta_n)| + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=M+1}^{N} (|\xi_n| + |\zeta_n|) \\
&= |\sum_{n=0}^{M} (\xi_n - \zeta_n)| + \sum_{n=M+1}^{\infty} |\xi_n| + \sum_{n=M+1}^{\infty} |\zeta_n|
\end{aligned}$$

7.2 Die Exponentialfunlktion auf der reellen Gerade

Satz 7.7. *Die Funtion $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ ist*

1. *positiv*
2. *monoton steigend*
3. *bijektiv (falls $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}^+$ ersetzt wird).*

Beweis. 1.

$$e^x = e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = (e^{\frac{x}{2}})^2 \geq 0$$

$e^x = 0$ ist nicht möglich, sonst wäre $e^{xq} = 0$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ und, wegen der Dichtheit der rationalen Zahlen und der Stetigkeit von f, $e^x \equiv 0$.

2.

$$\frac{e^{x+h}}{e^x} = e^h = 1 + \frac{h}{1!} + \cdots > 1$$

3. z.z.: $\forall y \in \mathbb{R}^+$

$$\exists x : e^x = y$$

Falls $y \geq 1$

$$e^0 = 1 \leq y \leq e^y \overset{\text{ZWS}}{\implies} \exists x : e^x = y$$

Falls $0 < y < 1$, dann betrachte $\frac{1}{y} > 1$

$$\exists x : e^x = \frac{1}{y} \implies e^{-x} = y$$

□

Satz 7.8 (vom Wachstum)**.**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

Beweis.

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \implies \frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!} \overset{x\to\infty}{\to} \infty$$

$$x^n e^x = \frac{x^n}{e^{-x}} = (-1)^n \frac{(-x)^n}{e^{-x}} \overset{x\to\infty}{\to} \infty$$

□

7.3 Natürlicher Logarithmus

Definition 7.9. $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist die Inverse der exponentiellen Funktion.

Satz 7.10.

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Beweis.

$$e^{\ln(xy)} = xy = e^{\ln x} e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$$

$$\implies \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

□

Satz 7.11 (vom Wachstum 2)**.**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0$$

Beweis.

$$\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = \frac{\ln e^{ny}}{\sqrt[n]{e^{ny}}} = \frac{ny}{e^y}$$

$$\exists y : x = e^{ny}$$

$$\underbrace{y \to \infty}_{\iff x\to\infty} \implies \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} \to 0$$

□

Satz 7.12.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Beweis.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln e^y}{e^y - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1$$

□

Bemerkung 7.13. $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist stetig

Bemerkung 7.14. $y = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, a > 0$

$$\sqrt[n]{a^n} = \frac{m}{n} = e^{y \ln a}$$

Warum?

$$f(1) = e^{\ln a} = a$$

$$f(q+r) = f(q)f(r)$$

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

$$\implies a^y = e^{y \ln a}$$

Definition 7.15. $a > 0$, $z \in \mathbb{C}$

$$a^z := e^{z \ln a}$$

Satz 7.16. *1.*

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad (x, y \in \mathbb{C})$$

2.

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

3.

$$(ab)^x = a^x b^x$$

Beweis. 1.

$$a^{x+y} = w^{(x+y)\ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = a^x a^y$$

2. ähnlich

3. ähnlich

□

Satz 7.17. *1.*

$$\lim_{x \to \infty} x^a = \begin{cases} \infty & a > 0 \\ 1 & a = 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$$

2.

$$\lim_{x \to 0} x^a = \begin{cases} 0 & a > 0 \\ 1 & a = 0 \\ \infty & a < 0 \end{cases}$$

3.

$$\lim_{x \to \infty} x^a = \begin{cases} +\infty & a \geq 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$$

4.

$$x^a e^x = +\infty$$

5.

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} \ln a$$

Beweis. 1.

$$\text{Bild}(x \mapsto x^a) = \mathbb{R}^+ \implies \lim_{x \to \infty} x^a = +\infty$$

$a = 0$ trivial $a > 0$

$$x^a = \frac{1}{x^{-a}} \to 0$$

(Wegen $-a > 0$ und $x^{-a} \to \infty$)

2. folgt aus 1 durch die Substitution $x \mapsto \frac{1}{x}$. 1 Falls $a > 0$, x^a monoton wachsend.

3. $a \geq 0$ offensichtlich, $a < 0$: $\exists n \in \mathbb{N}$, $a < -\frac{1}{n}$, $-a > \frac{1}{n}$

$$x^a \ln x = \frac{\ln x}{x^{-a}} < \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}} \overset{\text{Satz 7.11}}{\to} 0$$

4. $a > 0$ trivial, $a < 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ so dass $a > -n$ $(-a < n)$

$$x^a e^x = \frac{e^x}{a^{-a}} > \frac{e^x}{x^n} \overset{\text{Satz 7.8}}{\to} \infty$$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a-1}{x} = \ln a$

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{x\ln a} - 1}{x} = \overbrace{\frac{e^{x\ln a} - 1}{x \ln a}}^{\to 1} \ln a \to_{x\to 0} \ln a$$

□

7.4 Trigonometrische Funktionen

Definition 7.18. Falls ϕ die Grösse eines Winkels (in Radianten) ist, dann $\cos(\phi)$ und $\sin(\phi)$ sind die entsprenchenden Werte des Cosinus und Sinus. Wir erweitern diese Funktionen auf der ganzen reellen Gerade:

$$\cos(\phi) := \cos(\phi - 2\pi n) \qquad \text{falls } 2\pi n \leq \phi < 2\pi(n+1)$$

$$\sin(\phi) := \sin(\phi - 2\pi n) \qquad \text{falls } 2\pi n \leq \phi < 2\pi(n+1)$$

Satz 7.19. *Für ϕ klein genug gilt:*

1.

$$|\sin\phi| \leq |\phi| \leq \frac{|\sin\phi|}{\cos\phi}$$

2.

$$1 - \cos\phi \leq \phi^2$$

Proof. 1. Die Grösse des Winkelns in Radianten ist die Länge des entsprechenden Kreissektors (auf einem Kreis mit Radius 1): diese ist grösser als die Länge des (kleineren) Katheten.

2.

$$1 - \cos\phi = \frac{(1-\cos\phi)(1+\cos\phi)}{1+\cos\phi} = \frac{1-(\cos\phi)^2}{1+\cos\phi} \leq \frac{\sin^2\phi}{1} \leq \phi^2$$

□

Korollar 7.20. *1.*

$$\lim_{\phi\to 0} \frac{\sin\phi}{\phi} = 1$$

2.

$$\lim_{\phi\to 0} \frac{1-\cos\phi}{\phi} = 0$$

3. sin *und* cos *sind stetig.*

Beweis. 1.

$$\frac{1}{\cos\phi} \leq \frac{|\sin\phi|}{\phi} \leq 1$$

2.

$$0 \leq \frac{1-\cos\phi}{|\phi|} \leq |\phi|$$

3. Additionsregeln

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

□

Satz 7.21 (von Euler)**.**

$$e^{x+iy} = e^x(\cos x + \sin y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Beweis. Definiere $f(z) = e^x(\cos x + \sin y)$. f erfüllt (AT) und (WT) im Satz 7.1

(AT) folgt aus den Additionsregeln

(WT) 2 Spezialfälle:

- $z = x \in \mathbb{R}$
$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-1}{z} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
- $z = iy$
$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-1}{z} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos y + i\sin y - 1}{iy}$$
$$= \frac{1}{i}\lim_{y\to 0} \frac{\cos y - 1}{y} + \frac{1}{i}\lim_{y\to 0} \frac{i\sin y}{y} = \frac{1}{i}0 + \frac{1}{i}i = q$$

Der allgemeine Fall wird im Übungsblatt behandelt.

□

Bemerkung 7.22. (Was hat Euler gemacht?) Wegen der Taylor'schen Reihen:

$$\cos y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

das wussten die Mathematikern schon vor Euler seinen Satz entdeckte: man kann diese Reihen mit der Differentialrechnung bestimmen (und werden wir später lernen). Wenn man die Formel

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

für $z = iy$ anwendet:

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}}_{\cos y} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin y}$$

$$\Longrightarrow \; e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$e^{i\pi} = -1 \to$ die berühmte Formel von Euler.

7.5 Noch andere spezielle Funktionen

Wir definieren zuerst den Tangens:

$$\tan = \frac{\sin}{\cos}$$

Der Definitionsbereich dieser Funktion ist die reele Gerade ohne die Nullstellen des Cosinus,

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \underbrace{\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{N}\right\}}_{\text{Die Nullstellen des Cosinus}} \quad \to \quad \mathbb{R}$$

Geometrisch leicht zu sehen:

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [1, 1] \qquad \text{ist injektiv und surjektiv.}$$

Die Umkehrfunktion heisst arcsin:

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] .$$

Analog ist

$$\cos : [0,\pi] \to [-1,1] \qquad \text{bijektiv.}$$

Die Umkehrfunktion heisst arccos:

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

Auch der Tangens eingeschränkt auf dem geeigneten Intervall ist bijektiv:

$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$

Die Surjektivität folgt aus der Stetigkeit und

$$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \pm\infty .$$

Die Injektivität werden wir später sehen (siehe Bemerkung 8.23).

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

ist die Umkehrfunktion.

Endlich wir definieren die hyperbolischen Funktionen:

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$\tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}$$

(NB: Der Definitionsbereich von tanh ist die ganze reelle Gerade, weil $\cosh(t) > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$).

Bemerkung 7.23.

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

Nun, $\forall t \in \mathbb{R}$, $(\cos t, \sin t)$ gehört dem Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt 0. Die Punkten $(\cosh t, \sinh t)$ liegen auf einer Hyperbel.

8 Differentialrechnung

Eine affine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat die Gestalt:

$$f(t) = c_0 + m_0 x .$$

Die Konstante m_0 (die Steigung der Gerade) ist leicht zu rechnen:

$$m_0 = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} ,$$

wobei $t_1 \neq t_2$ sind zwei beliebige reelle Zahlen. f heisst linear wenn $c_0 = 0$.

8.1 Die Ableitung

Wir suchen die beste Approximation von f in der Nähe von einer Stelle x_0 mit einer affinen Funktion g, d.h. die Tangente zum Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Manchmal gibt es keine gute Approximation mit einer affinen Funktion (z.B. $f(x) = |x|$ und $x_0 = 0$). Falls ξ eine andere Stelle im Definitionsbereich von f ist, die Gerade

$$g(x) = f(x_0) + \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0}(x - x_0)$$

enthält die Punkten $(x_0, f(x_0))$ und $(\xi, f(\xi))$. Wenn $\xi - x$ sehr klein ist, diese Gerade ist "fast" die Tangente im $(x_0, f(x_0))$.

Definition 8.1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Die Ableitung an der Stelle x_0 von f ist

$$f'(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \left(= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} \right),$$

falls der Limes exisitiert. Die Funktion heisst differenzierbar an der Stelle x_0, wenn die Ableitung $f'(x_0)$ existiert.

Satz 8.2. *$f : I \to \mathbb{C}$ ist in x_0 genau dann differenzierbar, wenn $\exists L : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ linear so dass*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{h} = 0$$

Beweis.

$$L \text{ linear} \iff \exists m_0 \in \mathbb{C} : L(h) = m_0 h \ \ \forall h \in \mathbb{R}$$

Wir betrachten

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - m_0 \right) \tag{33}$$

und

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{34}$$

Der Limes in (33) existiert und verschwindet genau dann, wenn der Limes in (34) existitiert (d.h. f differenzierbar im x_0 ist) und gleicht m_0 (d.h. $m_0 = f'(x_0)$). □

Satz 8.3. *$f : I \to \mathbb{C}$ ist in $x_0 \in I$ genau dann differenzierbar, wenn es ein $\phi : I \to \mathbb{C}$ gibt so dass*

- *ϕ ist stetig in x_0*
- *$f(x) - f(x_0) = \phi(x)(x - x_0)$*

Ausserdem, $\phi(x_0) = f'(x_0)$.

Beweis. $\exists \phi \implies$ die Differenzierbarkeit von f.

$$\phi(x_0) \overset{\text{(Stetigkeit)}}{=} \lim_{x \to x_0} \phi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)\,.$$

Die Differenziberkaeit $\implies \exists \phi$. Wir setzen:

$$\phi(x) = \begin{cases} f'(x_0) & \text{falls } x = x_0 \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{falls } x \neq x_0 \end{cases}.$$

ϕ erfüllt die Bedingungen. □

Beispiel 8.4. $f(x) = x^n$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left\{\left(x_0^n + \binom{n}{1}x_0^{n-1} + \binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2 + \cdots + h^n\right) - x_0^n\right\}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\left[nx_0^{n-1} + \left\{\binom{n}{2}x_0^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right\}\right] = nx_0^{n-1}$$

Beispiel 8.5. $f(x) = e^x$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h}$$

$$= e^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}$$

Übung 8.6. $f(x) = a^x$

$$f'(x_0) = \ln(a)a^x$$

Beispiel 8.7. $f(x) = \ln x$

$$f'(x_0) = \frac{\ln(x_0+h) - \ln(x_0)}{h}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h}$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}}\right)\frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}$$

Bemerkung 8.8. Falls f in x_0 differenzierbar ist, dann ist f auch stetig in x_0.

$$f \text{ stetig im } x_0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$$

$$\Leftarrow \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)(x - x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

Bemerkung 8.9. Umgekehrt falsch. Sei $f(x) = \sqrt[n]{|x|}$. Für $n \geq 2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

$n = 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \pm 1\,.$$

f ist nicht differenzierbar im 0 (aber im $x_0 \neq 0$ ist $\sqrt[n]{|x|}$ differenzierbar).

8.2 Rechenregeln

Satz 8.10. *Seien $f, g : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar in x_0.*

- *$f + g$ ist auch differenzierbar in x_0:*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

- *fg ist auch differenzierbar in x_0:*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x)g'(x_0)$$

- *$\frac{f}{g}$ ist in der Nähe von x_0 wohldefiniert wenn $g(x_0) \neq 0$. Ausserdem ist $\frac{f}{g}$ dort differenzierbar.*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} <$$

Beweis. •

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \left\{ \overbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}^{f'(x_0)} + \overbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}^{g'(x_0)} \right\}$$

- $$\lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left\{ f(x_0+h)\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + g(x_0)\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right\}$$
$$= f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$$
(NB: Wir haben benutzt dass f und g stetig im x_0 sind).

- $$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+h)}{[g(x_0)g(x_0+h)]\, h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)} \left\{ \frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0+h)g(x_0+h)}{h} + \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h)}{h} \right\}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)} \left\{ f(x_0+h)\left[-\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\right] + g(x_0+h)\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right\}$$
$$= \frac{1}{g(x_0)^2} \{f(x_0)(-g'(x_0)) + g(x_0)f'(x_0)\}$$

□

Satz 8.11 (Kettenregel)**.** *Seien $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ (mit $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle), differenzierbar an der Stelle x_0 und $f(x_0)$. Dann ist $g \circ f$ an der Stelle x_0 differenzierbar und*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Beweis. Die Kernidee wäre:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g \circ f(x_0+h) - g \circ f(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(\overbrace{f(x_0+h)}^{y}) - g(\overbrace{f(x_0)}^{y_0}))}{\underbrace{f(x_0+h)}_{y} - \underbrace{f(x_0)}_{y_0}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$= g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Diese Gleichungen sind aber kein Beweis weil $y - y_0$ kann null werden. Lösung:

$$f(x) - f(x_0) = \phi(x)(x - x_0)$$
$$g(x) - g(x_0) = \gamma(x)(x - x_0)$$

mit:

- ϕ stetig in x_0 und $\phi(x_0) = f'(x_0)$;
- γ stetig in y_0 mit $\gamma'(y_0) = g'(y_0)$.

Deswegen:

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \gamma(f(x))(f(x) - f(x_0)) = \underbrace{\gamma(f(x))\phi(x)}_{\Phi(x)}(x - x_0)$$

Φ ist stetig an der Stelle x_0. $\implies$ $g \circ f$ ist differenzierbar in x_0. Ausserdem,

$$(g \circ f)'(x_0) = \Phi(x_0) = \gamma(f(x_0))\phi(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)\,.$$

□

Beispiel 8.12.

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$(\cos x)' = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left((e^{ix})' + (e^{ix})'\right) = \frac{i}{2}e^{ix} + \frac{i}{2}e^{-ix}$$

$$= -\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = -\sin x$$

Analog

$$(\sin x)' = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)' = \cdots = \cos x\,.$$

NB: Die Identität $(e^{ix})' = ie^{ix}$ ist nicht eine Folgerung des Satzes 8.11 sein, weil die Werte der Funktion $f : x \mapsto ix$ sind nicht in $\mathbb{R}$ enthalten (und im Satz 8.11 gibt es die Annahme $f : I \to J \subset \mathbb{R}$). Es gibt tatsächlich eine Erweiterung des Satzes 8.11 die auch den Fall $(e^{ix})'$ enthält (siehe die Theorie der holomorphen Funktionen). In unserem Fall folgt die Identität $(e^{ix})' = ie^{ix}$ aus der Wachstum Identität der Exponentialabbildung (siehe (WT) im Satz 7.1):

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{i(x+h)} - e^{ix}}{h} = e^{ix} \lim_{h\to 0} \frac{e^{ih} - 1}{h} = e^{ix} i \lim_{h\to 0} \frac{e^{ih} - 1}{ih} = e^{ix}\,.$$

Beispiel 8.13.

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin' \cos - \sin \cos'}{\cos^2} = \frac{\sin^2 + \cos^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

Satz 8.14. *[Differentiation der Umkehrfunktion] Sei g die Umkehrfunktion einer streng monotonen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. Falls f in x_0 differenzierbar ist und $f'(x_0) \neq 0$, dann ist g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f(x_0)} \left(= \frac{1}{f'(g(y_0))}\right)$$

Beweis.

$$f(x) - f(x_0) = \phi(x)(x - x_0)$$

wobei

- ϕ ist stetig in x_0
- $\phi(x_0) = f'(x_0)$

$$x = g(y)$$
$$x_0 = g(y_0)$$

$\implies$

$$y - y_0 = \phi(g(y))(g(y) - g(y_0))$$

$$g(y) - g(y_0) = \frac{1}{\phi(g(y))}(y - y_0) \quad \text{falls } \phi(g(y)) \neq 0.$$

Aber:

$$\phi(g(y_0)) = \phi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$$

ϕ ist stetig in x_0 und g ist stetig in $y_0 \implies \phi(g)$ ist stetig in y_0

$$\exists \varepsilon > 0 : |y - y_0| < \varepsilon \implies \phi(g(y)) \neq 0$$

Sei

$$\psi = \begin{cases} \frac{1}{\phi(g(y))} & |y - y_0| < \varepsilon \\ \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & |y - y_0| > \varepsilon \end{cases}$$

$$\implies g(y) - g(y_0) = \psi(y)(y - y_0)$$

und ψ ist stetig an der Stelle y_0. g ist differenzierbar in y_0 und deswegen

$$\psi(y_0) = g'(y_0)$$

$$= \frac{1}{\phi(g(y_0))} = \frac{1}{\phi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

□

Bemerkung 8.15. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig. Sei g die Umkehrfunktion von f $g : J \to I$. Angenommen dass beide Funktionen differenzierbar sind, die Kettenregel impliziert

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0) = 1\,.$$

Falls $f'(g(x_0)) \neq 0$, wir schliessen $g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))}$. Das ist aber kein Beweis vom Satz 8.14, da die Differenzierbarkeit von g angenommen und nicht bewiesen wird.

Beispiel 8.16. (Übung: arcsin', arccos')

$$\tan'(y_0) = \frac{1}{\cos^2(y_0)} \neq 0$$

$$(\arctan)'(x_0) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x_0))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x_0))}}$$

$$= \cos^2(\arctan(x_0))$$

$$\cos^2 = \frac{1}{1+\tan^2} \left(= \frac{1}{1+\frac{\sin^2}{\cos^2}} = \frac{1}{\frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2}} = \cos^2 \right)$$

$$\cos^2(\arctan(x_0)) = \frac{1}{1+(\tan(\arctan(x_0)))^2} = \frac{1}{1+x_0^2}$$

$$\implies \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

8.3 Die Sätze von Rolle und Lagrange

Satz 8.17. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine überall differenzierbare Funktion. Sei $x_0 \in I$ ein Maximum (bzw. ein Minium)*

- *x_0 im Inneren $\implies f'(x_0) = 0$*
- *x_0 ist das rechte Extremum von I $\implies$*

$$f'(x_0) \geq 0$$

bzw. bei Minima:

$$f'(x_0) \leq 0$$

- *x_0 ist das linke Extremum von I* $\implies$

$$f'(x_0) \leq 0$$

bzw. bei Minima:

$$f'(x_0) \geq 0$$

Beweis. x_0 im Innern.

$$\begin{cases} \lim_{x \downarrow x_0} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{\geq 0}} \leq 0 \\ \lim_{x \uparrow x_0} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{\leq 0}} \geq 0 \end{cases}$$

Deswegen $f'(x_0) = 0$. x_0 ist das linke Extremum und eine Maximumstelle:

$$f'(x_0) = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0\,.$$

Die anderen Fälle sind ähnlich. □

Satz 8.18 (Mittelwertsatz, Lagrange)**.** *Sei $f[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig (überall) und differenzierbar in $]a,b[$. Dann $\exists \xi \in]a,b[$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Satz 8.19 (Rolle)**.** *Sei f wie oben mit $f(b) = f(a)$. Dann $\exists \underbrace{\xi}_{\in]a,b[} : f'(\xi) = 0$.*

Der Satz von Rolle ist ein Fall des Satzes von Lagrange. Aber wir werden zuerst den Satz von Rolle beweisen und dann den von Lagrange daraus schliessen.

Beweis vom Satz 8.19.

$$f(b) = f(a) \implies \begin{cases} \exists x \in]a,b[\text{ mit } f(x) < f(b) \\ \exists x \in]a,b[\text{ mit } f(x) > f(b) \\ f(x) = f(b) \;\; \forall x \in]a,b[\end{cases}$$

Dritte Möglichkeit $\implies$ f ist Konstant!

$$f'(\xi) = 0 \;\; \forall \xi \in]a,b[$$

Erste Möglichkeit $\implies$ Sei x_0 eine Maximumstelle von f in $[a,b]$

$$\implies x_0 \in]a,b[\text{ (weil } f(x_0) > f(a) = f(b)) \implies f'(x_0) = 0$$

Zweite Möglichkeit: Sei x_0 eine Maximumstelle:

$$x_0 \in]a,b[\implies f'(x_0) = 0$$

□

Beweis vom Satz 8.18. Sei

$$g(x) = f(a) + \frac{x - a}{b - a}(f(b) - f(a))$$

$g(b) = f(b)$ und $g(a) = f(a)$ $\implies$ Sei $h := f - g$. $h(a) = 0$, $h(b) = 0$.

$$\overset{\text{Satz von Rolle}}{\implies} \exists \xi \in]a,b[\text{ mit } h'(\xi) = 0$$

$$\implies f'(\xi) - g'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{a - b}\,.$$

□

Korollar 8.20. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.*

- $f' \geq 0 \implies f$ *ist wachsend.*
- $f' > 0 \implies f$ *ist wachsend, streng monoton.*
- $f' \leq 0 \implies f$ *ist fallend.*
- $f' < 0 \implies f$ *ist fallend, streng monoton.*

Beweis. Seien $c < d \in [a,b]$

$$\overset{\text{Mittelwertsatz}}{\Longrightarrow} \exists \xi \in]c,d[\text{ mit}$$

$$f(d) - f(c) = f'(\xi) \underbrace{(d-c)}_{>0}$$

≥ 0 im ersten Fall, > 0 im zweiten Fall, usw. □

Korollar 8.21. *Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar. Falls:*

- $f'(x) < 0 \ \forall x > x_0$
- $f'(x) > 0 \ \forall x < x_0$

dann ist x_0 das Maximum von f auf $]a,b[$.

Korollar 8.22. *Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' \equiv 0$. Dann $f =$ konst.*

Beispiel 8.23. tan ist streng monoton auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2} > 0$$

NB: tan ist nicht monoton auf $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$, weil (z.B.) $-1 = \tan -\frac{\pi}{4} < 1 = \tan \frac{\pi}{4} > -1 = \tan 3\pi 4$. In diesem Fall ist Korollar 8.20 nicht anwendbar, weil $\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ kein Intervall ist.

8.4 Anwendugen des Mittelwertsatzes: Schrankensatz und De L'Hôpitalsche Regel

Satz 8.24 (Schrankensatz)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig (überall) und differenzierbar in $]a,b[$ mit*

$$|f'(\xi)| \leq M \qquad \forall \xi \in]a,b[\,.$$

Dann ist f Lipschitzstetig und

$$|f(y) - f(x)| \leq M|x-y| \qquad \forall x, y \in [a,b]\,.$$

Beweis. $\forall y \neq x$ (OBdA: $y > x$)

$$\exists \xi \in]x,y[\subset]a,b[: f(y) - f(x) = f(\xi)(y-x)$$

$$\implies |f(y) - f(x)| = |f'(\xi)||y-x| \leq M|y-x|.$$

□

Die bekannte Funktionen die wir schon gesehen haben sind alle Differenzierbar mit stetigen Ableitungen. Deswegen, wenn eingeschränkt auf einem geschlossenen Intervall, ist die Ableitung beschränkt. Der Schrankensatz impliziert dann die Lipschitzstetigkeit.

Satz 8.25 (Cauchy)**.** *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ überall stetig und differenzierbar in $]a,b[$. Ausserdem $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a,b[$. Dann*

$$\exists \underbrace{\xi}_{\in]a,b[} : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Bemerkung 8.26. Der Mittelwertsatz ist ein Fall des Satzes von Cauchy: setzen wir $g(x) = x$. Dann $g'(x) = 1 \; \forall x$ und deswegen:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{1} = f'(\xi)\,.$$

Beweis. Wie der Satz von Lagrange auch der Satz von Cauchy kann man auf dem Satz von Rolle herleiten. Wie setzten:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

$$F(a) = f(a) = F(b) \overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists \xi : F'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi)\,.$$

□

Satz 8.27 (De L'Hospitalsche Regel)**.** *$f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ überall differenzierbar und mit $g(x), g'(x) \neq 0 \; \forall x \in]a, b[$. In jeder dieser Situationen:*

1. *$f(x) \to 0, g(x) \to 0$ für $x \downarrow a$*
2. *$f(x), g(x) \to +\infty$ (bzw. $-\infty$) für $x \downarrow a$*

Falls $\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert (oder $\pm\infty$ ist), dann

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Die entsprechenden Aussagen gelten auch für Grenzprozesse mit $x \uparrow b$ und $x \to \pm\infty$.

Eine grobe Idee wie so dieser Satz gilt: nehmen wir an dass die Funktionen f und g auch in a definiert und differenzierbar sind, mit $f(a) = g(a) = 0$; dann, wenn $|x - a|$ klein ist,

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(a)(x - a) + R \\ g(x) &= g'(a)(x - a) + R' \end{aligned}$$

wobei R und R' ziemlich klein im vergleich mit $|x - a|$ sind. Deswegen,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(a)}{g'(a)}\,.$$

Wenn die Ableitungen von f und g stetig wären, dann

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. 1. OBdA $f(a) = 0$, $g(a) = 0 \implies f$ und g sind stetig auf $[a, b[$. Verallgemeinerter Mittelwertsatz:

$$\forall x \in]a, b[\;\; \exists \xi \in]a, x[:$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$x \to a \implies \xi \to a$$

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \downarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

2. Wir nehmen zusätzlich an dass
$$\lim_{\xi \downarrow 0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in \mathbb{R}\,.$$
Sei $A := \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in \mathbb{R}$. Wir schätzen $|\frac{f(x)}{g(x)} - A|$ ab für x in der Nähe von a. Für jede $y < x$ mit $y \in]a, b[$ schreiben wir
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}} \tag{35}$$
Sei ε eine gegebene positive Zahl. Wählen wir ein $\delta > 0$ so dass
$$\left|\frac{f'(\xi)}{f'(\xi)} - A\right| < \varepsilon \qquad \forall \xi \in]a, a+\delta[\tag{36}$$
Für jede $a < y < x < a+\delta$, sei ξ die Stelle des Satzes von Cauchy. Dann:
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \leq \underbrace{\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(a+\delta)}{g(x) - g(a+\delta)}\right|}_{=B} + \underbrace{\left|\frac{f(x) - f(a+\delta)}{g(x) - g(a+\delta)}\right|}_{=C}$$
Aus (36) folgt $C < \varepsilon$. Aus (35):
$$\begin{aligned} B &= \left|\frac{f(x) - f(a+\delta)}{g(x) - g(a+\delta} \left(\frac{1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a+\delta)}{f(x)}}\right) - \frac{f(x) - f(a+\delta)}{g(x) - f(a+\delta)}\right| \\ &= \underbrace{\left|\frac{f(x) - f(a+\delta)}{g(x) - g(a+\delta)}\right|}_{\leq |A| + \varepsilon} \underbrace{\left|\frac{1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a+\delta)}{f(x)}} - 1\right|}_{\to 0 \text{ für } x \downarrow a} \end{aligned}$$
$\Longrightarrow$ $\exists \delta*$ so dass für $|x-a| < \delta*$, $B < \varepsilon$. Sei nun x s.d. $x - a < \min\{\delta, \delta*\}$. Dann
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < 2\varepsilon$$

Um den Beweis zu beenden, es bleibt zu tun:

- $x \downarrow a$, Situation 2., aber
$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty(-\infty).$$
Der Beweis ist in diesem Fall ganz ähnlich zum obigen Beweis, aber anstatt
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < 2\varepsilon \qquad \text{f\`ur } x - a \text{ klein genug}$$
ist das Ziel
$$\frac{f(x)}{g(x)} > M \qquad \text{f``ur } x - a \text{ klein genug}$$
(wobei M eine beliebige reelle Zahl ist).
- $x \uparrow b$. Dieser Fall ist trivial.
- $x \to +\infty$. In diesem Fall, setzen wir
$$F(y) = f\left(\frac{1}{y}\right) \qquad \text{und} \qquad G(y) = g\left(\frac{1}{y}\right)\,.$$
Dann
$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{y \downarrow 0 (=:a)} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} \\ &= \lim_{y \downarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 8.28.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$$

Beispiel 8.29.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n!}=+\infty$$

Beispiel 8.30.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{-\sin x-0}^{\to 0}}{\underbrace{\cos x-x\sin x+\cos x}_{\to 2}}=0$$

8.5 Differentation einer Potenzreihe

Aus den Rechenregeln für die Ableitung wissen wir:

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

$$P'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$$

Sei nun f durch eine Potenzreihe definiert, mit einem nichttrivialen Konvergenzradius:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

Könnten wir schliessen dass f auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar ist? Ausserdem, gilt die Formel

$$f'(x)\stackrel{?}{=}\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

Satz 8.31. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(x)$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R (>0, auch $R=+\infty$ möglich). Falls $|x_0|<R$, dann ist f in x_0 differenzierbar und*

$$f'(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

(falls $R=+\infty$, f ist überall differenzierbar, auf $\mathbb{R}$!)

Bemerkung 8.32. Der Satz von Cauchy-Hadamard gibt

$$R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}$$

Nun, $\sum\infty_{n=1}na_nx^{n-1}$ konvergiert für $x=0$ und für $x\neq 0$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n$ konvergiert. Der Konvergenzradius ist deswegen:

$$R'=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{na_n}}=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}=R\,.$$

Wir wollen nun noch ein Mal das Lemma 5.22 schauen. Dieses Lemma sagt dass, wenn eine Potenzreihe an einer Stelle x_0 konvergiert, dann konvergiert sie auch an jeder Stelle x mit $|x|<|x_0|$. Aber die Kernidee des Beweis dieses Lemma hat auch andere Konsequenzen.

Definition 8.33. Sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funtion. Dann

$$\|f\|_{C^0(I)} \; = \; \max_{x \in I} |f(x)| \, .$$

Definition 8.34. Sei I ein abgeschlossenese Intervall und $f_n : I \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen. Falls $\sum_n f_n(x)$ an jeder Stelle $x \in I$ konvergiert, koennten wir eine neue Funktion definieren:

$$I \in x \quad \mapsto \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \, .$$

Für diese neue Funktion schreiben wir $f = \sum_n f_n$, d.h. eine *Reihe von Funktionen.*

Falls jede f_n stetig ist und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{C^0(I)} < \infty \, ,$$

dann sagen wir dass die Reihe $\sum_n f_n$ konvergiert normal.

Eine Potenzreihe ist ein dann ein Beispiel einer Reihe von Funktionen. Der Beweis vom Lemma 5.22 impliziert dass eine Potenzreihe im *Inneren* des Konvergenzkreis normal konvergiert.

Lemma 8.35. *Sei $\sum a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Sei $\rho < R$ und $I = [-\rho, \rho]$. Die Potenzreihe konvergiert normal auf I.*

Beweis. $\rho < R$ Sei x_0 mit $\rho < |x_0| < R$. Dann

$$\sum |a_n||x_0|^n \quad \text{konvergiert}$$

Deswegen ist $|a_n||x_0|^n$ eine Nullfolge und

$$\exists M : \qquad |a_n||x_0|^n \leq M \quad \forall n$$

Sei nun $f_n(x) := a_n x^n$. Dann

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{C^0(I)} \; &= \; \max_{|x| \leq \rho} |f_n(x)| \; = \; \max_{|x| \leq \rho} |a_n||x|^n = |a_n|\rho^n \\ &\leq |a_n||x_0|^n \underbrace{\left(\frac{\rho}{|x_0|}\right)}_{\gamma}^n \leq M\gamma^n \, . \end{aligned}$$

Aber $\gamma < 1$ und aus dem Majorantenkriterium folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{C^0(I)} < \infty \, .$$

□

Sein nun $\sum_n f_n = \sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe wie im Satz 8.31. Sei R der entsprechende Konvergenzradius und ρ eine beliebige positive reelle Zahl mit $\rho < R$. Aus der Bemerkung 8.32 und dem Lemma 8.35 schliessen wir:

1. $\forall f_n$ ist differenzierbar
2. $\sum f_n$ und $\sum f_n'$ sind beide normal konvergent auf $I = [\rho, \rho]$.

Dann Satz 8.31 folgt aus der folgenden allgemeineren Aussage.

Theorem 8.36. *Sei $\sum f_n$ eine Reihe von Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall I. Falls:*

1. *$\sum f_n(x)$ $\forall x \in I$ konvergiert,*

2. $\sum f_n'$ *normal konvergent ist*

dann ist f *überall differenzierbar mit* $f' = \sum f_n'$.

Beweis. Sei $x \in I$. Die Differenzierbarkeit an dieser Stelle bedeutet:

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| = 0\,.$$

Deswegen müssen wir beweisen dass

$$\lim_{h\to 0}\underbrace{\left|\sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - f_n'(x)\right)\right|} = 0\,.$$

Für jede $N \in \mathbb{N}$ und jede h mit $x+h \in I$ gilt:

$$D \leq \underbrace{\left|\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - f_n'(x)\right)\right|}_{A} + \underbrace{\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - f_n(x)\right)\right|}_{B}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir zeigen dass $\exists N \in \mathbb{N}$ und $\exists \bar{h} > 0$ s.d.

$$A < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad B < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall h \text{ mit } |h| < \bar{h}.$$

Zuerst wählen wir N.

$$B \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\left\{\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}\right| + |f_n'(x)|\right\}$$

$$\overset{Schrankensatz}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty}\left\{\|f_n'\|_{C^0(I)} + \|f_n'\|_{C^0}\right\}$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} 2\,\|f_n'\|_{C^\circ(I)} = 2\left\{\overbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\|f_n'\|_{C^\circ(I)}}^{b} - \overbrace{\sum_{n=0}^{N}\|f_n'\|_{C^\circ(I)}}^{b_N\to b}\right\}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \;\text{ für } N \text{ gross genug }.$$

Eigentlich, diese Wahl von N garantiert dass $A < \varepsilon/2$ für *jede* h.

Nun wählen wir $\bar{h}$.

$$A = \left|\sum_{n=0}^{N}\underbrace{\left(\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - f_n'(x)\right)}_{\to 0}\right| \to 0 \qquad \text{für } h \to 0$$

Deswegen, $\exists \bar{h} > 0$ s.d. $A < \varepsilon/2$ wenn $|h| < \bar{h}$. □

8.6 Ableitungen höherer Ordnung und Taylorreihe

Definition 8.37. Eine Funktion f ist 2 mal differenzierbar an einer Stelle $x \in I$ wenn:

- f' existiert $\forall y \in J$, wobei $x \in]a,b[\leftrightarrow x \in$ Innern von J, $J = [x, \tilde{b}[$ falls $I = [x, b[$ und $J =]\tilde{a}, x]$ falls $I =]a, x]$)
- f' ifferenzierbar in x ist.

$$(f')'(x) =: f''(x) \qquad \text{sist die Ableitung zweiter Ordnung}$$

Induktiv: f n-mal differenzierbar in x falls:

- $f^{(n-1)}$ (d.h. die Ableitung $n-1$-ter Ordnung von f) in einer Umgebung von x existiert
- $f^{(n-1)}$ differenzierbar in x ist.

$$f^{(n)}(x) := \left(f^{(n-1)}\right)'(x) \qquad \text{ist die Ableitung } n\text{-ter Ordnung.}$$

Eine Funktion heisst belieb mal differenzierbar auf I falls die Ableitung aller Ordnungen auf jeder Stelle existieren.

Bemerkung 8.38. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius R. Dann ist f beliebig mal differezierbar auf $]-R, R[$. Ausserdem, könnten wir $f^{(k)}(x)$ wie folgt bestimmen:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

Es folgt dass

$$f(0) = a_0$$
$$f'(0) = a_1$$
$$f^{(k)}(0) = k!a_k$$

Definition 8.39. Eine Funktion f heisst analytisch an einer Stelle x_0, falls auf einem Intervall $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ gilt

$$f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n$$

Die Bemerkung 8.38 hat deswegen die folgende Konsequenz:

Korollar 8.40. *Sei f analytisch in x_0. Dann $\exists \rho > 0$ s.d.:*

- *f beliebig mal differenzierbar auf $I =]x - \rho, x + \rho[$ ist*
- *$f(x) = \sum \infty_{n=0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ \forall x \in I$.*

Aber Vorsicht: *Beliebig mal differenzierbar $\not\Longrightarrow$ analytisch!*

Beispiel 8.41.

$$x_0 = 0$$
$$f(x) = e^x = f'(x) = f''(x) = \cdots \implies f^{(k)}(x) = e^x$$
$$\implies f^n(0) = 1 \implies e^x = \sum \frac{x^k}{k!}$$

8.7 Konvexität

`http://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe_und_konkave_Funktionen`

Definition 8.42. Eine $f : I \to R$ heisst konvex, wenn: $\forall x_1 < x_2 \in I$

$$f(x) \le \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) = g(x) \ \ \forall x \in]x_1, x_2[\tag{37}$$

streng konvex	$<$	
konkav	$\geq$	in (37)
streng konkav	$>$	

Bemerkung 8.43. Allgemein, die Konvexit—'at impliziert nicht die Differenzierbarkeit. Nehmen Sie z.B. $f(x) = |x|$ auf $\mathbb{R}$.

Satz 8.44. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar im Inneren*

$$f \text{ konvex} \iff f'(x_1) \le f'(x_2) \;\; \forall x_1 < x_2$$

$$f \text{ streng konvex} \iff f'(x_1) < f'(x_2) \;\; \forall x_1 < x_2$$

Korollar 8.45. *Sei f wie im Satz 8.44 aber 2-mal differenzierbar im Inneren*

$$f \text{ konvex} \iff f'' \ge 0$$

$$f \text{ streng konvex} \Leftarrow f'' > 0$$

Beispiel 8.46. Sei $f(x) = x^4$. f ist streng konvex und $f''(x) = 12x^2$. Deswegen $f''(0) = 0$

Bemerkung 8.47. Sei f differenzierbar überall und 2 mal differenzierbar ain einer Stelle x_0 mit $f'(x_0) = 0$. Falls

- $f''(x_0) > 0 \implies x_0$ ist ein lokales Minimum
- $f''(x_0) < 0 \implies x_0$ ist ein lokales Maximum

Nehmen z.B. dass $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$. Dann $\exists \varepsilon$ so dass

$$f'(x) > 0 \;\; \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[$$

und

$$f'(x) < 0 \;\; \forall x \in]x_0, x_0 + \varepsilon[$$

In der Tat,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) \implies \lim_{x \to x_0} \frac{f`(x)}{x - x_0} = f''(x_0) > 0$$

$$\implies \exists \varepsilon : \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0 \;\; \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\}$$
$$\implies f'(x) > 0 \;\; \forall x \in]x_0, x_0 + \varepsilon[$$
$$\implies f'(x) < 0 \;\; \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[.$$

Lemma 8.48.

$$(37) \iff f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \;\; \forall x_1 < x_2 \;\; \forall \lambda \in]0, 1[$$

Beweis. $x_1 < x_2$

$$f(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \;\; \forall x \in]x_1, x_2[\qquad (38)$$

Wir setzen $\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$

$$\forall x \in]x_1, x_2[\implies \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \in]0, 1[$$

$$\forall \lambda \in]0, 1[\implies x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in]x_1, x_2[$$

$$\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \iff \lambda(x_2 - x_1) = x_2 - x \iff x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$$

Wir schliessen dass die Abbildung

$$]0, 1[\ni \lambda \mapsto \lambda x_1 + (1 - \lambda x_2) \in]x_1, x_2[$$

bijektiv ist. Deswegen wir können λ statt x in der Identität (38) nutzen. Aber

$$\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \iff 1 - \lambda = 1 - \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{\cancel{x_2} - x_1 - \cancel{x_2} + x}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Deswegen ist (38) equivalent zu

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

□

Lemma 8.49. *$f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex wenn für jedes Tripel $x_1 < x < x_2 \in I$ die folgende Ungleichung gilt:*

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \tag{39}$$

f ist genau dann streng konvex wenn für jedes Tripel $x_1 < x < x_2$ die echte Ungleichung in (39) gilt.

Beweis.

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \\
\iff & f(x)\left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x_2 - x}\right) \leq \frac{f(x_1)}{x - x_1} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x} \\
\iff & f(x)\frac{x_2 - x + x - x_1}{(x - x_1)(x_2 - x)}\left(\frac{(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1}\right) \\
& \leq f(x_1)\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\
\iff & f(x) \leq f(x_1)\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}
\end{aligned}$$

□

Beweis vom Satz 8.44. **Konvexität $\implies$ f' ist wachsend.**

$$f'(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x}$$

$$f'(y) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(y + h) - f(y)}{(y + h) - y}$$

h klein $\implies$ $x < x + h < y < y + h$. In diesem Fall impliziert Lemma 8.49 die Ungleichungen:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} \leq \frac{f(y) - f(x + h)}{y - (x + h)} \leq \frac{f(y + h) - f(y)}{(y + h) - y}$$

Deswegen

$$f'(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} \leq \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(y + h) - f(y)}{(y + h) - y} = f'(y)$$

Konvexität $\Leftarrow$ f' wachsend. Sei $x_1 < x < x_2$: Der Satz von Lagrange $\implies$ $\exists \xi_1 \in]x_1, x[$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1)$$

$\exists \xi_2 \in]x_1, x[$ mit

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2)$$

NB: $\xi_2 > \xi_1$. Weil $f'(\xi_2) \geq f'(\xi_2)$, gilt das Lemma 8.49 und Lemma $\implies$ Konvexität.

Der Beweis der zweiten Behauptung des Satzes ist analog. □

8.8 Die Lagrange Fehlerabschätzung

Definition 8.50. Sei f n-mal differenzierbar. Das Taylorpolynom mit Ordnung n an der Stelle x_0 ist:

$$T^n_{x_0} = \sum_{T=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

Satz 8.51 (Lagrange Fehlerabschätzung). *Sei f $(n+1)$-mal differenzierbar in I und $x_0 \in$. $\forall x \in I$ $\exists \xi$ zwischen x_0 und x so dass*

$$\underbrace{f(x) - T^n_{x_0}(x)}_{R^n_{x_0}(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!}(x-x_0)^{n+1} \tag{40}$$

Bemerkung 8.52. Für $n = 0$ (40) ist:

$$f(x) - \underbrace{f(x_0)}_{T^0_{x_0}(x)} = f'(\xi)(x-x_0)$$

$$\iff \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi)$$

Deswegen die Lagrange Fehlerabschätzung ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Lagrange.

Beweis. Seien

$$h(x) = R^n_{x_0}(x) \qquad \text{und} \qquad g(x) = (x-x_0)^{n+1}\,.$$

Es ist leicht zu sehen dass

$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$$

$$h(x_0) = h'(x_0) = \ldots = h^{(n)}(x_0) = 0$$

und

$$h^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \quad \forall x\,.$$

Deswegen, wir wenden $n+1$ Mal den verallgemeinerten Mittelwertsatz (Satz von Cauchy) und schliessen:

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h(x)-h(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{h'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{h'(\xi_1)-h'(x_0)}{g'(\xi_1)-g'(x_0)} \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{h''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}$$

$$= \cdots \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{h^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{g^{(n+1)}(\xi_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}\,,$$

wobei: ξ_1 eine Stelle zwischen x und x_0 ist; ξ_2 eine Stelle zwischen ξ_1 und x_0 ist; $\ldots \xi_{n+1}$ eine Stelle zwischen ξ_n und x_0 ist.

Wenn wir $\xi := \xi_{n+1}$ setzen, dann

$$f(x) - T^n_{x_0}(x) = R^n_{x_0}(x) = h(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,.$$

□

Beispiel 8.53. Wir wissen schon dass

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Diese Identität kann man auch aus der Lagrange Fehlerabschätzung schliessen. Das Taylor Polynom mit Ordnung n in 0 ist

$$T^n_0(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}\,.$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ fixiert.

$$\left|\overbrace{e^x - \sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}}^{R^{n+1}_0(x)}\right| = \left|\frac{e^{\xi_n}x^{n+1}}{(n+1)!}\right|,$$

wobei ξ_n eine Stelle zwischen x und 0 ist. Deswegen, $|\xi_n| \leq |x|$ und

$$\left| e^x - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^0}{j!} \right| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{41}$$

Wir wissen schon dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0\,. \tag{42}$$

(In der Tat, sei N so dass $N \geq 2|x|$. Dann

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^N}{N!} \frac{|x|}{N+1} \frac{|x|}{N+2} \cdots \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{|x|^N}{N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-N}. \Bigg)$$

(41) und (42) implizieren dass

$$0 \leq \left| f(x) - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \right| = \left| f(x) - \lim_{n\to\infty} T_0^n(x) \right|$$

$$= \left| \lim_{n\to\infty} R_0^n(x) \right| = \lim_{n\to\infty} |R_0^n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0\,.$$

Beispiel 8.54. Sei

$$f(x) = \ln(x+1)$$

(Bem: das Taylorpolynom (bzw. die Taylorreihe) in 0 von f ist das Taylorpolynom (bzw. die Taylorreihe) von $\ln x$ an der Stelle 1.) Dann

$$T_0^n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^j = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Wir wollen zeigen dass

$$\ln(x+1) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-1} \frac{x^j}{j} \quad \left(= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \right) \tag{43}$$

in einer Umgebung von 0.

Sei $x > -1$. Die Lagrange Fehlerabschätzung impliziert:

$$\Big| \overbrace{f(x) - T_0^n(x)}^{R_0^n(x)} \Big| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi_n)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} = \frac{\frac{n!}{(1+\xi_n)^{n+1}}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

wobei ξ_n zwischen 0 und x liegt. Deswegen $\xi_n > -1$ und $1+\xi_n \geq 1-|\xi_n| \geq 1-|\xi|$. Wir schliessen

$$|R_0^n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)} \frac{|x|^{n+1}}{(1-|x|)^{n+1}}\,.$$

Aber $|x| \leq \frac{1}{2} \implies \frac{|x|}{1-|x|} \leq 1$ und

$$\lim_{\to n\to\infty} |R_0^n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \qquad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Falls $x \in]0,1]$, dann $\xi_n > 0$ und

$$|R_0^n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}\,.$$

Deswegen gilt die Gleichung (43) auch für $x \in]1/2, 1]$. In der Tat, gilt diese Gleichung auch für $x \in]-1, -1/2[$, aber diesen Fall ist keine einfache Folgerung der Lagrange Fehlerabscätzung.

Ausserdem, die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} (-1)^j$ hat Konvergenzradius $R = 1$. Deswegen ist die Gleichung (43) falsch wenn $x > 1$.

9 Integralrechnung

Sei $f : [x_0, x_1] = I \to \mathbb{R}$ eine stetig nichtnegative Funktion. Das Ziel der Integralrechnung ist den Inhalt der folgenden Fläche zu finden:

$$G = \{(x, y) : x \in I \text{ und } 0 \le y \le f(x)\}$$

9.1 Treppenfunktion

Definition 9.1. Eine $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst Treppenfunktion wenn $\exists a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ so dass ϕ in jedem Intervall $]x_{k-1}, x_k[$ konstant ist.

Definition 9.2. Sei ϕ eine Treppenfunktion und $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ wie oben. Falls c_k der Wert von ϕ in $]x_{k-1}, x_k[$ ist, dann

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) c_k\,.$$

Bemerkung 9.3. Es ist leicht zu sehen dass die Zahl $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ unabhängig von der Verteilung ist.

Lemma 9.4. *Für Treppenfunktionen ϕ, ψ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:*

1. *$\alpha\phi + \beta\psi$ eine Treppenfunktion ist und*

$$\int_a^b (\alpha\phi + \beta\psi)\,\mathrm{d}\,x = \alpha \int_a^b \psi\,\mathrm{d}\,x + \beta \int_a^b \psi\,\mathrm{d}\,x$$

2. *$|\psi|$ eine Treppenfunktion ist und*

$$\left| \int_a^b \psi\,\mathrm{d}\,x \right| \le \int_a^b |\psi|\,\mathrm{d}\,x \le (b - a) \max_{x \in [a,b]} \phi(x)$$

3. *Falls $\phi \le \psi$ (d.h. $\phi(x) \le \psi(x) \forall x \in [a, b]$), dann*

$$\int_a^b \phi\,\mathrm{d}\,x \le \int_a^b \psi\,\mathrm{d}\,x$$

Beweis. **1** $\exists a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ so dass $\phi|_{]x_k, x_{k+1}} \equiv$ konst und $\exists a = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b$ so dass $\phi|_{]y_k, y_{k+1}} \equiv$ konst Seien $a = z_0 < z_1 < \ldots < z_N = b$ so dass

$$\{x_0, \cdots, x_n, y_0, \cdots y_m\} = \{z_0 < z_1 < \cdots < z_N\}$$

Dann: $\forall k \in \{1, \ldots, N\}$

$$\phi|_{]z_{k-1}, z_k[} \equiv c_k \in \mathbb{R}$$
$$\psi|_{]z_{k-1}, z_k[} \equiv d_k \in \mathbb{R}$$

$F := \alpha\phi + \beta\psi$ ist konstant in jedem $]z_{k-1}, z_k[$ und das beweist dass F eine Treppenfunktion ist. Ausserdem,

$$F|_{]z_{k-1}, z_n[} = \alpha c_k + \beta d_k\,,$$

$$\int_a^b \phi = \sum_{k=1}^{N} (z_k - z_{k-1}) c_k\,,$$

$$\int_a^b \psi = \sum_{k=1}^{N} (z_k - z_{k-1}) d_k$$

und

$$\int_a^b F = \sum_{k=1}^{N} (z_k - z_{k-1})(\alpha c_k + \beta d_k) = \alpha \sum_{k=1}^{N} (z_k - z_{k-1}) c_k + \beta \sum_{k=1}^{N} (z_k - z_{k-1}) c_k$$

$$= \alpha \int_a^b \phi + \beta \int_a^b \psi$$

2 Seien $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ mit

$$\phi|_{]x_{k-1},x_k} = c_k \in \mathbb{R}$$

Dann

$$|\phi||_{]x_{k-1},x_k} = |c_k| \in \mathbb{R}\,.$$

$|\phi$ ist eine Treppenfunktion und

$$|\int_a^b \phi| = \left|\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})c_n\right| \leq \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})|c_k| = \int_a^b |\phi|\,.$$

3 ist eine einfache Folgerung der gleichen Ideen. □

9.2 Regelfunktion

Definition 9.5. Eine Abbildung $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst Regelfunktion falls $\exists f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ (Folge von Funktionen), so dass:

- Jede f_n eine Treppenfunktion ist
-
$$\lim_{k\to\infty} \underbrace{\left(\sup_{x\in[a,b]} |f_k(x) - f(x)|\right)}_{:=\|f_k - f\|} = 0$$

Satz 9.6. *Sei f eine Regelfunktion. Seien $\{f_n\}$ und $\{g_n\}$ zwei Folgen von Treppenfunktionen, welche die zwei Bedingungen in efinition 9.5 erfüllen. Dann:*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k = \lim_{k\to\infty} \int_a^b g_k \ \ (\in \mathbb{R})$$

Definition 9.7. Sei f eine Regelfunktion und $\{f_k\}$ eine Folge welche die zwei Bedinungen in Definition 9.5 erfüllen. Dann existieren die Grenzwerte

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \qquad \text{und} \qquad \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}\,x\,.$$

existieren. Ausserdem, sie sind gleich und gehören zu $\mathbb{R}$.

Der Satz 9.6 garantiert dass $\int_a^b f$ wohldefiniert ist!

Bemerkung 9.8. Es ist leicht zu sehen dass

$$\begin{cases} \int_a^b f \geq 0 & \text{falls } f \geq 0 \\ \int_a^b f = -\int_a^b (-f) \leq 0 & \text{falls } f \leq 0 \end{cases}$$

Deswegen, wenn $f \leq 0$, der Inhalt von $G := \{(x,y) : x \in\in I \text{ und } f(x) \leq y \leq 0\}$ ist $-\int_a^b f$.

Beweis vom Satz 9.6. Zuerst bemerken wir dass, $\forall k, i$,

$$\left|\int_a^b f_k - \int_a^b f_i\right| = \left|\int_a^b (f_k - f_i)\right| \leq$$

$$(b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_k - f_i|(x) \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} \{|f_k - f|(x) + |f - f_i|(x)\}$$

$$\leq (b-a) \left(\sup_{x\in[a,b]} |f_k - f|(x) + \sup_{x\in[a,b]} |f - f_i|(x)\right)$$

$$= (b-a)\left(\|f_k - f\| + \|f - f_i\|\right)$$

Sein nun $\varepsilon > 0$. Dann, $\exists N$ so dass $\|f - f_j\| < \varepsilon/(2(b-a))$ $\forall i \geq N$. Dann, wenn $k, i \geq N$,

$$\left| \int_a^b f_k - \int_a^b f_i \right| < \varepsilon\,.$$

$\implies (a_k) = \left(\int_a^b f_k\right)$ ist eine Cauchyfolge $\implies \exists \lim\limits_{k\to\infty} \int_a^b f_k \in \mathbb{R}$

(Wir bemerken hier eine wichtige Eigenschaft der Norm $\|\cdot\|$:

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \tag{44}$$

In der Tat

$$|\sup_x f(x) + g(x)| \leq \sup_x |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_x |f(x)| + \sup_x |g(x)|\,.$$

Die (44) ist ähnlich zur Dreiecksungleichung $|a+b| \leq |a| + |b|$.)

Ausserdem,

$$\left|\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k - \lim_{k\to\infty}\int_a^b g_k\right| = \left|\lim_{k\to\infty}\left(\int_a^b f_k - \int_a^b g_k\right)\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\int_a^b (f_k - g_k)\right|$$

$$\leq \int_a^b |f_k - g_k| \leq \lim_{k\to\infty} (b-a)\,\|f_k - g_k\| \leq (b-a)\left(\lim_{k\to\infty}\left\{\underbrace{\|f_k - f\|}_{\to 0} + \underbrace{\|g_k - f\|}_{\to 0}\right\}\right) = 0$$

$$\implies \lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k = \lim_{k\to\infty}\int_a^b g_k\,.$$

□

Satz 9.9. *Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion.*

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, f stetig, $[a,b]$ kompakt. f ist gleichmässig stetig. Wir setzten $\varepsilon = \frac{1}{k}$ in der Definition der gleichmässigen Stetigkeit.

$$\implies \exists \delta > 0 \;\; |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{1}{k}$$

Seien

$$x_0 := a\,, \quad x_1 := a + \delta, \quad \ldots \quad x_N := a + N\delta, \quad x_{N+1} = b$$

wobei $N = \max\{k, a + k\delta < b\}$.

Sei $y_j = \frac{x_{j-1}+x_j}{2}$ (der Mittelpunkt von $I = [x_{j-1}, x_j]$). Wir definieren

$$f_k(x) = \begin{cases} f_k(x) = f(y_j) & x \in [x_{j-1}, x_j[\\ f_k(x) = f(y_{N+1}) & x = b \end{cases}$$

Wir bemerken dass

$$\|f - f_k\| = \sup_{x\in I} |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

In der Tat, falls $x \in I$, dann $x \in [x_{j-1}, x_j[$ oder $x \in [x_N, x_{N+1}]$. Deswegen, $|x - y_j| \leq \frac{\delta}{2}$ oder $|x - y_{N+1}| \leq \frac{\delta}{2}$.

$$\implies |f(x) - f_k(x)| = |f(x) - f(y_j)| < \frac{1}{k}$$

$$\text{oder } \; |f(x) - f_k(x)| = |f(x) - f(y_{N+1})| < \frac{1}{k}$$

$\forall k$ ist f_k eine Treppenfunktion und $\|f_k - f\| \to 0$ für $k \to +\infty$ □

Bemerkung 9.10. Da f_k eine Treppefunktion ist,

$$\int_a^b f_k = \sum_{j=1}^{N+1} (x_j - x_{j-1}) f(y_j)\,.$$

Die Summe

$$\sum_{j=1}^{N+1} (x_j - x_{j-1}) f(y_j) \tag{45}$$

konvergiert gegen $\int_a^b f$ wenn $N \to \infty$.

Es ist nicht nötig dass y_j der Mittelpunkt des Intervalls $[x_{j-1}, x_j]$ ist. Die gleiche Konvergenz erreicht man für beliebige Stellen $y_j \in [x_{j-1}, x_j]$. In diesem Fall heisst die Summe in (45) eine *Riemannsche Summe.*

Korollar 9.11. *Eine "stückweise stetige" Funktion auf* $[a, b]$ *ist auch eine Regelfunktion. (Eine Funktion heisst stückweis Stetig wenn* $\exists a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ *s.d.*

- f *ist stetig überall auf* $]x_{j-1}, x_j[$
- $\forall j \in \{0, \cdots, n\}$

$$\lim_{x \downarrow x_j} f(x) \in \mathbb{R} \qquad \textit{und} \qquad \lim_{x \uparrow x_j} f(x) \in \mathbb{R}\,.\Big)$$

Theorem 9.12. *Seien* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Regelfunktionen und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- **Linearität** $\alpha f + \beta g$ *ist auch eine Regelfunktion und*

$$\int_a^b (\alpha + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

- **Dreiecksungleichung**

$$\left| \int_a^b f \right| \leq |b - a|\, \|f\|$$

- **Monotonie**

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g \ \textit{ falls } \ f \leq g$$

- $\forall a < c < b$*:*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \tag{46}$$

- **Mittelwertsatz** *Falls* f *stetig ist,* $\exists \xi]a, b[$ *so dass*

$$\int_a^b f = f(\xi)(b - a)$$

Beweis. **Linearität**. Seien f_k, g_k Treppenfunktionen mit $\|f_k\| \to 0$, $\|g - g_k\| \to 0$. $\alpha f_k + \beta g_k$ ist auch eine Treppenfunktion und

$$\|(\alpha f + \beta g) - (\alpha f_k - \beta g_k)\| \leq |\alpha|\, \|f - f_k\| + |\beta|\, \|g - g_k\| \to 0$$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \lim_{k \to \infty} \int_a^b (\alpha f_k + \beta g_k) = \lim_{k \to \infty} (\alpha \int_a^b f_k + \beta \int_a^b g_k)$$

$$= \lim_{k \to \infty} \alpha \int_a^b f_k + \lim_{k \to \infty} \beta \int_a^b g_n = \alpha \lim_{k \to \infty} \int_a^b f_k + \beta \lim_{k \to \infty} \int_a^b g_k$$

$$= \alpha \int_a^b f + \beta \int_b^a g$$

Dreiecksungleichung Sei f_k wie oben. Dann $-\|f-f_k\| \leq \|f\| - \|f_k\| \leq \|f-f_k\|$ (aus der Dreiecksungleichung für die Norm $\|\cdot\|$. Deswegen

$$\left|\int_a^b f\right| = \lim_k \left|\int_a^b f_k\right| \leq \lim_k (b-a)\|f_k\| = (b-a)\|f\|\,.$$

Monotonie Seien f_k und g_k wie oben. Wir definieren $\tilde{f}_k := f_k + \|f - f_k\|$ (deswegen $\tilde{f}_k \geq f$) und $\tilde{g}_k := g_k + \|g - g_k\|$ (deswegen $g \geq \tilde{g}_k$). Dann, $\tilde{f}_k \geq f \geq g \geq \tilde{g}_k$ und

$$\int_a^b f = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \tilde{f}_k \geq \lim_{k\to\infty} \int_a^b \tilde{g}_k = \int_a^b g$$

(46) Sei f_k wie oben. Die Identität folgt aus der entsprechenden Identitäten für die Funktionen f_k.

Zwischenwertsatz Die Monotonie impliziert:

$$(b-a)\min f \leq \int_a^b f \leq (b-a)\max f$$

Der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen impliziert die Existenz einer Stelle $\xi \in]a,b[$ mit

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f}{b-a}\,.$$

□

9.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Das Integral ist eine Art "Umkehrung" der Ableitung!

Definition 9.13. Wir setzen:

$$\int_a^b f := -\int_b^a f \qquad \text{falls } b < a$$

$$\int_a^b f := 0 \qquad \text{falls } a = b$$

Theorem 9.14 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a \in I$ eine beliebige Stelle. Wir definieren $F(x) := \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}\,y$. Dann ist F differenzierbar und $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$ (d.h. F ist <u>eine</u>* Stammfunktion *von f).*

Bemerkung 9.15. F Stammfunktion von $f \implies F + c_0$ ist auch eine Stammfunktion von f: Stammfunktionen sind nicht eindeutig!

Beweis. Sei $x \in I$. Wir wollen zeigen dass

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}\,. \tag{47}$$

Falls $h > 0$,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(y)\,\mathrm{d}\,y - \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}\,y\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,\mathrm{d}\,y\,.$$

Ausserdem,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,\mathrm{d}\,y - \frac{1}{h} h f(x)$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,\mathrm{d}\,y - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(y) - f(x))\,\mathrm{d}\,y\,.$$

Sei $\varepsilon > 0$: $\exists \delta > 0$ so dass $|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Für $h < \delta$:

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(y) - f(x)) \,\mathrm{d}\, y \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(y) - f(x)| \,\mathrm{d}\, y \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varepsilon \,\mathrm{d}\, y = \varepsilon$$

$$\implies \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(y) - f(x)) \,\mathrm{d}\, y = 0 \implies (47)$$

Im Fall $h < 0$, wir setzen $h = -k$ ($k > 0$) und schliessen

$$\frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) = \frac{1}{-k}(F(x-k) - F(x)) = \frac{F(x) - F(x-k)}{k}$$

$$= \frac{1}{k} \left\{ \int_a^x f(y) \,\mathrm{d}\, y - \int_a^{x-k} f(y) \,\mathrm{d}\, y \right\} = \frac{1}{k} \int_{x-k}^x f(y) \,\mathrm{d}\, y$$

Gleiche Idee wie oben

$$\implies \lim_{k \downarrow 0} \frac{1}{k} \int_{x-k}^x f(y) \,\mathrm{d}\, y = f(x)$$

□

Bemerkung 9.16. Sei f eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Seien $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Stammfunktionen von f.

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$$

$$\implies F - G = \text{konstant}$$

Korollar 9.17. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Se $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion. Dann:*

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x = G(b) - G(a) \left(=: G|_a^b\right)$$

Beweis. $F(x) = \int_a^x f(y) \,\mathrm{d}\, y$, $x > a$.

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x > a$$

(NB: Der Beweis oben impliziert die Differenzierbarkeit auch an der Stelle a, wobei (wegen unserer Konvention) $F(a) = 0$. Ausserdem, die Stetigkeit an dieser Stelle kann man wir folgt sehen

$$|\int_a^x f(y) \,\mathrm{d}\, y| \leq \int_a^x |f(y)| \,\mathrm{d}\, y \leq M(x - a)$$

Deswegen $F(a) := 0$. ($\int_a^a f(x) \,\mathrm{d}\, x := 0$ und $\int_a^x f(y) \,\mathrm{d}\, y = -\int_x^a f(y) \,\mathrm{d}\, y$)

Zusammenfassung

- $F - G$ ist differenzierbar auf $[a, b]$
- $(F - G)' = f - f = 0$

$$\implies F(x) = G(x) + c$$

$$\implies \int_a^b f(y) \,\mathrm{d}\, y = F(b) - F(a) = (F(b) - c) - (F(a) - c) = G(b) - G(a)$$

□

Beispiel 9.18. $f(x) = x^2$. $A := \{(x, y) : |x|leq1, x^2 \leq y \leq 1\}$ und $B := \{(x, y) : |x|leq1, 0 \leq y \leq x^2\}$. Inhalt von $A = 2 - \underbrace{\text{Inhalt von } B}_{|B|}$

$$f(x) = x^2$$

$$G(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$G'(x) = x^2 = f(x)$$

$$|B| = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Beispiel 9.19. Wir wollen den Inhalt des Kreis K mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1 rechnen. Sei $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ und $A := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f(x)$. Dann

$$|K| = 4|A| = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}\,x \tag{48}$$

Das Ingeral in (48) ist nicht so einfach zu bestimmen. Wir bemerken dass die Ableitung des Arcsinus "fast" f ist:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,.$$

In der naechsten Kapitel werden wir diese Bemerkung nuzten um das Integral in (48) zu bestimmen. Dafür brauchen wir eine wichtige Methode der Integrationsrechnung.

9.4 Integrationsmethoden

- Partielle Integration
- Substitutionsregel

Satz 9.20. *[Partielle Integration] Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und F, G entsprechende Stammfunktionen.*

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = FG|_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{49}$$

Beweis.

$$(49) \iff \int_a^b \underbrace{(F(x)g(x) + f(x)G(x))}_{h(x)}\,\mathrm{d}\,x = FG|_a^b \tag{50}$$

$$(FG)(x) = F(x)G'(x) + F'(x)G(x) = F(x)g(x) + f(x)G(x)$$

$FG(x)$ ist eine Stammfunktion von h. h ist stetig! Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $\implies$ (50) □

Beispiel 9.21. Wir rechnen nun das Integral in (48).

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \underbrace{\sqrt{1 - x^2}}_{F(x)}\underbrace{g(x)}_{1}\,\mathrm{d}\,x$$

$$F(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$g(x) = 1$$

$$G(x) = x$$

Leider, könnten wir den Satz 9.20 nicht direkt anwenden, weil $f(x)$ nicht definiert in $x = 1$ ist (in der Tat $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$ und deswegen besitzt f keine stetige Fortsetzung auf $[0,1]$).

Aber:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x \\
&\overset{Satz 9.20}{=} \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[\sqrt{1-x^2}x\Big|_0^{1-\varepsilon} + \int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x\right] \\
&= \underbrace{\sqrt{1-x^2}x\Big|_0^1}_{=0} + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{1-\varepsilon}\left(\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)\right)\mathrm{d}\,x \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{1-\varepsilon} -\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= -\int_0^1 \sqrt{1-x^2} + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\arcsin\Big|_0^{1-\varepsilon} \\
&= -\int_0^1 \sqrt{1-x^2} + \arcsin\Big|_0^1 \\
&= -\int_0^1 \sqrt{1-x^2} + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\
&= -\int_0^1 \sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Wir schliessen

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x &= -\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{\pi}{2} \\
\implies 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Deswegen, der Inhalt des Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1 ist π (siehe Beispiel 9.19)!

Satz 9.22 (Substitutionsregel)**.** *Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : \underbrace{f([a,b])}_{[m,M]} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen ($m = \min_{[a,b]} f$, $M = \max_{[a,b]} f$). Falls f differenzierbar ist mit f' stetig, dann*

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,\mathrm{d}\,y$$

Beweis. Sei G eine Stammfunktion von g. (Später: warum gibt es eine solche Stammfunktion?)

$$\begin{aligned}
\int_a^b G'(f(x)f'(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b (G(f(x)))'\,\mathrm{d}\,x &= G\circ f\Big|_a^b \\
\implies \int_A^b g(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}\,x &= G(f(b)) - G(f(a)) \\
&= G\Big|_{f(a)}^{f(b)} = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,\mathrm{d}\,y
\end{aligned}$$

Zur Existenz der Stammfunktion. Diese wird vom Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung garantiert! In der Tat ist $G(x) := \int_m^x g(y)dy$ eine Stammfunktion von g. □

Bemerkung 9.23. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung entählt das erste Beispiel eines Existenzsatzes für Differentialgleichungen, d.h. die Existenz der Lösungen dieser Differentialgleichung:

$$\underbrace{F'}_{\text{Die Unbekannte}} = \underbrace{f}_{\text{bekannt}}$$

9.5 Uneigentliche Integrale

Definition 9.24. Sei $I =]a, b[$ (wobei $-\infty \leq a < b \leq +\infty$; z.B. $I =]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$ ist eine Möglichkeit). Sei $f : I \to \mathbb{R}$ so dass

$$\forall a < \alpha < \beta < b \;\; f|_{[\alpha,\beta]} \text{ eine Regelfunktion ist}$$

Falls $c \in I$ und

$$\lim_{\beta \uparrow b} \int_c^\beta \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad \lim_{\alpha \downarrow \alpha} \int_c^\alpha \in \mathbb{R}$$

dann definieren wir

$$\int_a^b f := \lim_{\beta \uparrow b} \int_c^\beta f + \lim_{a \downarrow 0} \int_\alpha^c f$$

Bemerkung 9.25. $\int_a^b f$ hängt nicht von c ab! In der Tat, sei $\tilde{c}$ eine andere Stelle in I. Dann:

$$\lim_{\beta \uparrow b} \int_{\tilde{c}}^b f = \lim_{\beta \uparrow b} \left(\int_c^\beta f - \int_c^{\tilde{c}} f \right) = \lim_{\beta \uparrow b} \int_c^\beta f - \int_c^{\tilde{c}} f$$

und analog

$$\lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^{\tilde{c}} f = \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^c f + \int_c^{\tilde{c}} f$$

Deswegen

$$\begin{aligned}\lim_{\beta \uparrow b} \int_{\tilde{c}}^b f + \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^{\tilde{c}} f &= \lim_{\beta \uparrow b} \int_c^\beta f - \int_c^{\tilde{c}} f + \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^c f + \int_c^{\tilde{c}} f \\ &= \lim_{\beta \uparrow b} \int_c^\beta f + \lim_{a \downarrow 0} \int_\alpha^c f\end{aligned}$$

Definition 9.26. (Absolute Integrierbarkeit) Sei I wie oben. Eine Abbildung $f : I \to \mathbb{R}$ ist absolut integriebar falls

- $f|_{[\alpha,\beta]}$ eine Regelfunktion ist $\forall a < \alpha < \beta < b$
- $$\int_a^b |f| \infty = \lim_{\alpha \downarrow a, \beta \uparrow b} \int_\alpha^\beta |f| < \infty$$

Bemerkung 9.27. f Regelfunktion auf $[\alpha, \beta] \implies |f|$ Regelfunktion auf $[\alpha, \beta]$. f Regelfunktion: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists g$ Treppenfunktion mit $\|f - g\| < \varepsilon$. $|g|$ ist eine Treppenfunktion $\||f| - |g|\| < \varepsilon$.

$$(||f|(x) - |g|(x)| \leq |f(x) - g(x)| \implies \||f| - |g|\| \leq \|f - g\|)$$

Satz 9.28. *Absolute Integrierbarkeit* $\implies \int_a^b f$ *existiert.*

Beweis. $\int_a^b |f|$ existiert $\implies \forall x_0 \in I$

$$\lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^{x_0} |f| \in \mathbb{R} \implies \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^{x_0} f \;\; \text{existiert} \tag{51}$$

$$\lim_{\beta \uparrow b} \int_\beta^{x_0} |f| \in \mathbb{R} \implies \lim_{\beta \uparrow b} \int_\beta^{x_0} f \;\; \text{existiert} \tag{52}$$

Beweis von (51) Sei $F(\alpha) := \int_a lpha^{x_0} |f|$. Die Existenz von $\lim\limits_{\alpha \downarrow a} F(\alpha) \implies$ die Cauchy Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta \;\text{ so dass, wenn }\; \tilde{a}, \bar{a} \in]a, a+\delta[\;\text{ dann }\; |F(\tilde{a}) - F(\bar{a})| < \varepsilon$$

Aber

$$|F(\tilde{a}) - F(\bar{a})| = \left| \int_{\tilde{a}}^{x_0} |f| - \int_{\bar{a}}^{x_0} |f| \right| = \int_{\tilde{a}}^{\bar{a}} |f| < \varepsilon$$

Sei nun $G(\alpha) := \int_\alpha^{x_0} f$. Für $a < \tilde{a} \leq \bar{a} < a + \delta$:

$$|G(\tilde{a}) - G(\bar{a})| = \left| \int_{\tilde{a}}^{\bar{a}} f \right| \leq \int_{\tilde{a}}^{\bar{a}} |f| < \varepsilon\,.$$

$$\implies G \text{ erfüllt die Cauchy Bedingung} \implies \lim_{\alpha \downarrow a} G(\alpha) \in \mathbb{R}$$

(52) folgt aus der gleichen Idee. □

Beispiel 9.29. Es gibt f mit $\int_a^b f < +\infty$ die aber nicht absolut integrierbar sind.

$$f(x) = (-1)^n n \qquad \text{für } x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \qquad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$$

$f :]0,1] \to \mathbb{R}$ und $\forall \alpha > 0$ ist $f|_{[\alpha,1]}$ offenbar eine Regelfunktion ($f|_{[\alpha,1]}$ ist in der Tat eine Treppenfunktion!). Sei nun $\alpha \in \left] \frac{1}{N+2}, \frac{1}{N+1} \right]$. Dann gilt:

$$\int_\alpha^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) n(-1)^n + (N+1)\left(\frac{1}{N+1} - \alpha \right)(-1)^{N+1}$$

Beachte, dass:

- $$\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) n(-1)^n = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1}(-1)^n$$
- $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-)^n}{n+1}$ konvergiert
- $$0 \leq (N+1)\left(\frac{1}{N+1} - \alpha \right) \leq (N+1)\left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right) = \frac{1}{N+2} \overset{N\to\infty}{\to} 0$$

Somit existiert $\lim\limits_{\alpha \downarrow 0} \displaystyle\int_\alpha^1 f$. ABER:

$$\int_\alpha^1 |f(x)|\,\mathrm{d}\,x \geq \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) n = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1}$$

und $\sum \frac{1}{n+1}$ divergiert! (Harmonische Reihe). Also ist f integrierbar aber nicht absolut integrierbar.

Korollar 9.30. *(Majorantenkriterium) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ so dass*

- *$f|_{[\alpha,\beta]}$ ist eine Regelfunktion $\forall \alpha < \beta \in I$*
- *$|f| \leq g$ und g ist integrierbar auf I. Dann ist f auch absolut integrierbar*

Bemerkung 9.31. 9.30 ist sehr nützlich, um die Integrierbarkeit einer Funktion zu berweisen.

Beispiel 9.32.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \,\mathrm{d}\, x \in \mathbb{R}$$

Tatsächlich ist auf $[1, +\infty[$: $e^{-x^2} \leq xe^{-x^2}$ und

$$\int_1^{-\infty} xe^{-x^2} \,\mathrm{d}\, x$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_1^R xe^{-x^2} \,\mathrm{d}\, x$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_{x=1}^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-1} - \frac{1}{2} \underbrace{e^{-R}}_{\to 0} \right)$$

$$= \frac{1}{2e}$$

Analog benutzt man nun $e^{-x^2} \leq -xe^{-x^2}$ für $x \in]-\infty, -1]$.

Bemerkung 9.33. Korollar 9.30 kann auch benutzt werden, um die Konvergenz von Reihen zu beweisen.

Korollar 9.34 ("Integralkriterium" für Reigen)**.** *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Definiere $f : [0, +\infty]$ durch $f(x) = a_n$, falls $x \in [n, n+1[$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt:*

$$\int_0^{+\infty} f \text{ existiert} \iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

und so:

$$f \text{ ist absolut integrierbar} \iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

Beweis. "$\Leftarrow$"

$$\int_0^R f = \int_0^N f + \int_N^R f \ \ (N = \lfloor R \rfloor)$$

und

$$\int_0^N f = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$$

Ausserdem, da $\sum a_n$ konvergiert, ist a_n eine Nullfolge. Und so

$$\left| \int_N^R f \right| = |(R-N)a_N| \leq |a_N| \to 0 \text{ für } R \to +\infty$$

" $\implies$ " $\int_0^{N+1} f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, und da $\lim_{N\to\infty} \int_0^{N+1} f$ existiert, folgern wir die Konvergenz von $\sum a_n$. □

Beispiel 9.35.

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2} < \infty$$

Wir werden Korollar 9.34 zwischen 3 und ∞ statt 0 und ∞ anwenden. Seien $f(x) = \frac{1}{n(\ln n)^2}$ falls $x[n, n+1[$ $(n \geq 3)$ und $g(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$. Beachte: $\ln x > 0$ $\forall x > 1$. Somit, falls $x \in [n, n+1[$ mit $n \geq 3$ gilt $n > x - 1$,

$$\ln n > \ln(x-1) \geq \ln(n-1) \geq \ln 2 > 0$$

$$\implies f(x) = \frac{1}{n(\ln n)^2} < \frac{1}{(x-1)(\ln(x-1))^2} = g(x-1)$$

Aber:

$$\int_3^{+\infty} g(x-1)\,\mathrm{d}\,x = \int_2^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_{x=2}^R = \frac{1}{\ln 2} - \underbrace{\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\ln R}}_{=0}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} < +\infty$$

und so:

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^2} = \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \sum_{n\geq 3}\frac{1}{n(\ln n)^2}$$

$$\leq \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2} < +\infty$$

9.6 Integration einer Potenzreihe

Zur Erinnerung:

Satz 9.36. *Ist $\sum f_n = \sum a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R, so konvergiert $\sum f_n$ normal auf jedem Intevall $[-\rho,\rho]$ mit $0<\rho<R$*

Zun`achst beweisen wir den folgenden Satz. Als Korollar erhalten wir eine entsprechende Potenzreihedarstellung für das Integral einer Potenzreihe.

Satz 9.37. *Ist $f = \sum f_n$ eine Reihe von Regelfunktionen auf $[a,b]$, welche auf $[a,b]$ normal konvergiert, so ist f selber eine Regelfunktion auf $[a,b]$ und es gilt:*

$$\int_a^b f = \sum \int_a^b f_n \tag{53}$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle N so dass

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \|f_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sowie Treppenfunktion g_n mit

$$\|f_n - g_n\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad \forall n \in \{0,\dots,N\}$$

Dann ist $g := \sum_{n=0}^N g_n$ eine Treppenfunktion und es gilt:

$$|f(x)-g(x)| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=0}^n f_k(x) - \sum_{k=0}^N g_k(x)\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^N |f_k(x)-g_k(x)| + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=N+1}^n |f_k(x)|$$

$$\leq \sum_{n=0}^N \|f_k - g_k\| + \sum_{k=N+1}^{+\infty}\|f_k\|$$

$$< \sum_{k=0}^N \varepsilon 2^{-k-1} + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k-1} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Longrightarrow$ f iste eine Regelfunktion. Es gilt damit auch:

$$\left|\int_a^b f - \sum_{n=0}^{N}\int_a^b f_n\right| \le \left|\int_a^b (f-g)\right| + \left|\sum_{n=0}^{N}\int_a^b (f_n - g_n)\right| < (b-a)\varepsilon + (b-a)\frac{\varepsilon}{2}$$

aber auch:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n - \sum_{n=0}^{N}\int_a^b f_n\right| &= \lim_{k\to\infty}|\sum_{n=N+1}^{k}\int_a^b f_n| \\ &\le \sum_{n=N+1}^{k}(b-1)\,\|f_n\| < (b-a)\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Folglich:

$$\left|\int_a^b f - \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n\right| < 2\varepsilon(b-a)$$

Da ε beliebig war, folgt (53). □

Korollar 9.38. *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ eine analytische Funktion mit Konvergenzradius R. Dann ist $F(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}\,y$ ebenfalls analytisch. Ihre Potenzreihe ist gegeben durch*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} \tag{54}$$

und der Konvergenzradius ist R.

Beweis. Gleichung (54) für $|x| < R$ ist ein Korollar von Satz 9.36 und Satz 9.37. Der Konvergenzradius ist

$$\begin{aligned}R' &= \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{n+1}}} \\ &= \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}} = R\end{aligned}$$

□

Beispiel 9.39.

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\,y}{1+y}$$

aber für $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$$

und so:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

Beispiel 9.40.

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}\,y$$

und für $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$$

und so

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$