Analysis II - Vorlesungs-Script

Prof. Dr. Camillo De Lellis

Basisjahr 11 Semester I

Mitschrift:
Simon Hafner

Inhaltsverzeichnis

1 Metrik und Topologie des euklidischen Raumes

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n), x \in \mathbb{R}\}$ In $\mathbb{R}^n$:

- Norm (Euklidische)
- Abstand (Euklidische)
- Topologie

"Abstrakte Theorie"

- Normierte Vektorräume
- Metrische Räume
- Topologische Räume

Definition 1.1. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ $(x = (x_1, \cdots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R})$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Intuitiv: $\|x\|$ ="der Abstand zwischen x und 0"

Lemma 1.2. $\|.\|$ *erfüllt die Regeln*

1. $\|x\| \geq 0$ *und* $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Beweis. 1. ≥ 0 trivial

$$x = 0 \implies \sum x_i^2 = 0 \implies \|x\| = 0$$

$$x = 0 \Leftarrow x_i = 0 \forall i \Leftarrow \sum x_i^2 = 0 \Leftarrow \|x\| = 0$$

2.

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i)^2} \sqrt{\lambda^2 (\sum x^2)} = |\lambda| \sqrt{\sum x^2} = |\lambda| \|x\|$$

$$|\lambda| = \frac{\|x\| |\lambda|}{\|x\|}$$

3.

$$\iff \underbrace{\|x + y\|^2}_{=} \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\|$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i\right) = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \overbrace{2 \sum x_i y_i}^{Skalarprodukt}$$

$$\iff \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$$

$\square$

Satz 1.3. *Cauchy-Schwartzsche Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Beweis. OBdA $y \neq 0$ ($y = 0$ trivial)

$$t \to g(t) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + ty_i)^2$$

$$= \left(\sum x_i^2\right) + 2t \sum x_i y_i + t^2 \sum y_i^2$$

$$= \|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + \|y\|^2 t^2$$

Sei $t_0 = \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$, dann $g(t_0) \geq 0$

$$0 \leq g(t_0)$$

$$= \|x\|^2 - 2\frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^2} + \|y\|^2 \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^4}$$

$$= \|x\|^2 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^2}$$

$$\implies \langle x, y\rangle \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

$$\implies |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

□

Definition 1.4. Ein normierter Vektorraum ist ein reeller Vektorraum V mit einer Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ so dass:

1. $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Nullvektor)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in V$

Beispiel 1.5. $V = \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad p \geq 1$$

$p = 2$ euklidische Norm

Definition 1.6. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Die euklidische Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$

Lemma 1.7. *1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$*

2. $d(x, y) = d(y, x)$

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Beweis.

$$\|x - z\| \leq \underbrace{\|x - y\|}_{v} + \underbrace{\|y - z\|}_{w} \quad v + w = x - z$$

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

□

Definition 1.8. Ein metrischer Raum ist eine Menge X mit einer Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \ \ (x, y) \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R}$$

so dass

1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y \ \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$
3. $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z) \ \forall x, y, z \in X$

Lemma 1.9. *Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann sind V und $d(x,y) = \|x-y\|$ ein metrischer Raum.*

Definition 1.10. Die offene Kugel mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$K_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n, d(x,y) < r\}$$

Definition 1.11. Eine Menge heisst "Umgebung" von x, wenn V eine offene Kugel mit Mittelpunkt x enthält.

Definition 1.12. Eine Menge $U \in \mathbb{R}^n$ heisst offen falls $\forall x \in U$ ist U eine Umgebung von x

$$\forall x \in U \ \exists \text{ eine Kugel } \ K_r(x) \in U$$

Bemerkung 1.13. Eine offene Kugel ist offen.

Satz 1.14.
1. *$\varnothing$ und $\mathbb{R}^n$ sind offen*
2. *Der Schnitt endlich vieler offener Mengen ist auch offen.*
3. *Die Vereinigung einer beliebigen Familie offener Mengen ist auch offen.*

Beweis.
1. $\mathbb{R}^n$ trivialerweise offen, auch $\varnothing$
2. Sei $x \in U \cap \cdots \cap U_N$

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\} \quad K_r(x) \subset U_i$$

Sei $r = \min\{r_i, \ldots, r_N\}$

$$\implies K_r(x) \subset U_i \forall i \implies K_r(x) \subset U_1 \cap \cdots \cap U_N$$

3. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Sei $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

$$x \in U \implies x \in U_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \Lambda$$

$$\implies \exists K_r(x) \subset U_\lambda \subset U$$

□

Definition 1.15. Ein topologischer Raum ist eine Menge X und eine Menge O von Teilmengen von X so dass:

1. $\varnothing, X \in O$
2. $U_1 \cap \cdots \cap_N \in O$ falls $U_i \in O$
3. $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in O$ falls $U_i \in O$

Satz 1.16. *Sei (X, d) ein metrischer Raum*

$$K_r(x) = \{y = X : d(x,y) < r\}$$

Umgebungen und offene Mengen sind wie im euklidischen Fall. $O = \{$offene Menge$\}$ definiert eine Topologie.

1.1 Konvergenz

Sei $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ $x_k \in \mathbb{R}$ $x_k = (x_{k1}, \cdots, x_{kn})$

Definition 1.17. Die Folge $\{x_k\}$ konvergiert gegen $x_\infty \in \mathbb{R}^n$ falls

$$\lim_{k \to \infty} d(x_k, x_\infty) = 0$$

$$\left(\lim_{k \to \infty} \|x_k, x_\infty\| = 0\right)$$

Dann schreiben wir

$$x_\infty = \lim_{k \to \infty} x_k$$

Satz 1.18.

$$x_k \to x_\infty \iff x_{ki} \to x_{\infty_i} \ \ \forall i \in \{1, \cdots, n\}$$

Beweis.

$$\|x_k - x_\infty\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - x_{\infty_i})^2} \geq |x_{ki} - x_{k\infty}| \geq 0$$

$$\implies 0 \leq \lim_{k\to\infty} |x_{ki} - x_{k\infty}| \leq \lim \|x_k - x_\infty\| = 0$$

$$\|x_k - x_\infty\| = \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_{ki} - x_{\infty_i})^2}_{\to 0}}}_{\to 0} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_{ki} - x_{\infty_i}|$$

$$\implies \|x_k - x_\infty\| \to 0$$

Eine alternative Formulierung: $\lim_{k\to\infty} x_k = \left(\lim_{k\to\infty} x_{k1}, \cdots, \lim_{k\to\infty} x_{kn}\right)$ □

Bemerkung 1.19.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \|x_k - x_\infty\| < \varepsilon \ \text{ falls } \ k \geq N$$

Für jede Umgebung U von x_∞ fast alle $x_k \in U$.

Definition 1.20. Eine Folge $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heisst Cauchy falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : m, k \geq N \implies \|x_k - x_m\| < \varepsilon$$

Lemma 1.21. $\{x_k\}$ $\subset \mathbb{R}^n$ *konvergiert genau dann, wenn* $\{x_k\}$ *Cauchy ist.*

Beweis. $\{x_k\}$ ist Cauchy $\implies \left\{ x_k \underbrace{i}_{\{\text{fixiert}\}} \right\}$ Cauchy!

$$|x_{ki} - x_{m_i}| \leq \|x_k - x_m\|$$

$\implies \{x_k\}$ ist eine Cauchyfolge $\overset{\text{Erstes Semester}}{\implies}$ x_{ki} konvergiert $\overset{\text{Lemma 2}}{\implies}$ x_k konvergiert. x_k konvergiert $\implies$ Cauchyfolge

$$x_\infty = \lim_{k\to\infty} x_k \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \|x_k - x_\infty\| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall k \geq N$$

$$\begin{aligned} k, m \geq N \quad \|x_k - x_m\| &\leq \|x_k - x_\infty\| + \|x_\infty - x_m\| \leq d(x_k, x_\infty) + (x_\infty, x_m) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.22. In einem metrischen Raum, Cauchy $\Leftarrow$ Konvergenz. Aber allgemein: Cauchy $\not\Longrightarrow$ Konvergenz. Falls Cauchy $\implies$ Konvergenz, dann ist der metrische Raum vollständig.

Definition 1.23. Eine Folge $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heisst beschränkt falls $\|x_k\|$ beschränkt ist.

Satz 1.24. *1. Eine konvergente Folge ist beschränkt*

2. (Bolzano-Weierstrass) $\{x_k\}$ *beschränkt* $\implies \exists \left\{x_{k_j}\right\}$ *die konvergiert.*

Beweis.

$$\begin{aligned} \{x_k\} \ \text{ beschränkt} &\implies \{x_{k1}\}_{k\in\mathbb{N}} \ \text{ beschränkt} \\ &\implies \exists x_{k_j} : x_{k_j 1} \to x_1 \end{aligned}$$

Ich definiere $y_j = x_{k_j}$ $y_{j1} \to x_1$

$$y_j \ \text{ beschränkt} \implies \exists j_l : y_{j_l 2} \to x_2$$

$$z_l := y_{j_l} \ \text{ und } \ z_{l1} \to x_1, \ \ x_{l2} \to x_2$$

$\ldots (n-2)$ Schritte. w_r Teilfolge von x_k mit $w_{ri} \to x_i$

$$w_r \to (x_1, \cdots, x_n)$$

□

1.2 Ein bisschen mehr Topologie

Definition 1.25. Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heisst geschlossen falls $G^c (:= \mathbb{R}^n \setminus G)$ eine offene Menge ist.

Bemerkung 1.26.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Satz 1.27. *1. $\varnothing, \mathbb{R}^n$ sind abgeschlossen*

2. $G_1, \cdots, G_N$ abgeschlossen $\implies$ $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_N$ abgeschlossen

3. $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ abgeschlossen $\implies$ $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ abgeschlossen.

Satz 1.28. *$G \subset \mathbb{R}^n$ G ist abgeschlossen $\iff$ $\forall$ jede konvergente $\{x_k\} \subset G$ gehört der Grenzwert zu G (gilt auch für metrische Räume).*

Beweis. $\Leftarrow$ Die rechte Eigenschaft gilt. Ziel: G^c ist offen. Sei $x \in G^c$: das Ziel ist eine Kugel $K_r(x) \in G^c$ zu finden. Widerspruchsbeweis: $K_{\frac{1}{j}}(x) \not\subset G^c$, $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\implies \exists x_j \in K_{\frac{1}{j}}(x) \cap G \implies \{x_j\} \subset G \text{ und } x_j \to x$$

$$\{x_j\} \subset G \ \ x_j \to x \ \ x \notin G$$

$\implies$ d.h. G^c offen $\implies$ falls $\{x_k\} \subset G$ und $x_k \to x$ dann $x \in G$ Widerspruch: G^c offen, aber $\exists \{x_k\} \subset G$ mit Grenzwert $x \notin G$, d.h. $x \in G^c$. Offenheit von G^c.

$$\implies \exists K_r(x) \subset G^c \implies K_r(x) \cap = \varnothing$$

d.h. $\exists N$ mit

$$\|x_N - x\| < r \implies x_N \in K_r(x) \cap G$$

$\square$

Beispiel 1.29. Eine offene Kugel ist nicht geschlossen.

$$K_r(x) = \{y : \|y - x\| < r\}$$

Sei $\{y_k\} \in K_r(x)$, (d.h. $\|y_k - x\| < r$) mit $y_k \to y$ und $\|y - x\| = r$.

Definition 1.30. Sei $\overline{K_r(x)} := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$.

Übung 1.31. $\overline{K_r(x)}$ ist abgeschlossen

Definition 1.32. $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein Randpunkt von M falls

$$\forall K_r(x) \ \ \exists y \in K_r(x) \cap M \ \text{ und } \ \exists z \in K_r(x) \cap M^c$$

Definition 1.33. Sei M eine Menge in $\mathbb{R}^n$, dann ist der Rand von M

$$\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n, \ \text{Randpunkt von } \ M\}$$

Satz 1.34. $\partial M^c = \partial M$

1. $M \setminus \partial M$ ist die grösste offene Menge die in M enthalten ist.

2. $M \cup \partial\partial M$ ist die kleinste geschlossene Menge die M enthält.

Beweis. $M \setminus \partial M$ ist offen.

$$x \in M \setminus \partial M \implies x \in M \text{ und } \exists K_r(x) \text{ mit } K_r(x) \cap M^c = \varnothing$$
$$\implies K_r(x) \subset M$$

Sei $y \in K_r(x)$

$$\implies |y - x| = \rho < r$$
$$\implies K_{r-\rho}(y) \subset K_r(x) \subset M \implies y \in M, y \notin \partial M$$
$$K_r(x) \subset M \setminus \partial M$$

x ist beliebig $\implies$ $M \setminus \partial M$ ist offen.
Sei $A \subset M$ eine offene Menge. Das Ziel ist $A \subset M \setminus \partial M$. Sei $x \in A$. Ziel:($x \in M \setminus \partial M$) $x \notin \partial M$.

$$A \text{ offen} \implies \exists K_r(x) \subset A \subset M \implies x \notin \partial M \implies A \subset M \setminus \partial M$$

□

1.3 Stetigkeit

Definition 1.35. Sei $f : \Omega_{\subset \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^k$. f ist stetig an der Stelle $x \in \Omega$ falls $\forall \{x_k\} \subset \Omega$ mit $x_k \to x$.

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x)$$

Lemma 1.36. *Eine equivalente Definition:*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : f\left(K_\delta(x) \cap \Omega\right) \subset K_\varepsilon(f(x))$$

Beweis. ε-δ $\implies$ Folgendefinition. Sei $x_k \to x$. Ziel: $f(x_k) \to f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \text{ mit } \underbrace{\underbrace{\|f(x_k) - f(x)\|}_{d(f(x_k), f(x))}}_{f(x_k) \in K_\varepsilon(f(x))} < \varepsilon \;\; \forall k \geq N$$

$$\exists \delta > 0 \;\; \underbrace{f(K_\delta(x)) \subset K_\varepsilon(f(x))}$$
$$\exists \;\; \|x_k - x\| < \delta \;\; k \geq N$$
$$x_k \in K_\delta(x) \implies f(x_k) \in K_\varepsilon(f(x))$$

Folgendefinition $\implies$ (ε-δ)-Defintion. Widerspruchsannahme:

$$\exists \varepsilon > 0 : f(K_\delta(x) \cap \Omega) \not\subset K_\varepsilon(f(x)) \;\; \forall \delta > 0$$
$$\implies \forall \delta > 0 \;\; \exists y_\delta \in K_\delta(x) \text{ und } \|f(y_\delta) - f(x)\| \geq \varepsilon$$

Nehmen wir $\delta = \frac{1}{j}$ und $x_j = \frac{y_1}{j}$

$$\|x_j - x\| < \frac{1}{j} \;\; (\text{weil } x_j \in K_{\frac{1}{j}}(x))$$

$$\|f(x_j) - f(x)\| = \left\| f(y_{\frac{1}{j}} - f(x)) \right\| \geq \varepsilon$$

$x_j \to x$ aber $f(x_j) \not\to f(x)$ □

Definition 1.37. Die allgemeine Defintion der Stetigkeit für metrische Räume: Seien (X, d) und $(Y, \overline{d})$ zwei metrische Räume. Sei $f : X \to Y$. f ist stetig an der Stelle x falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \text{ mit } d(y, x) < \delta \implies d(f(y), f(x)) < \varepsilon$$
$$\iff f(K\delta(x)) \subset K_\varepsilon(f(x))$$

Definition 1.38. Eine $f : X \to Y$ heisst stetig falls f stetig an jeder Stelle $x \in X$ ist.

Satz 1.39. *Sei $f : X \to Y$ $((X,d),(Y\overline{d})$ metrische Räume) Dann:*

1. *Die Stetigkeit in x $\iff$ $\forall$ Umgebung U von $f(x)$ ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x.*
2. *Stetigkeit von f $\iff$ $f^{-1}(U)$ ist offen $\forall U$ offen.*

Beweis. 1. • Stetigkeit $\implies$ Umgebung. U Umgebung von $f(x)$ $\implies$ $\exists \delta > 0$ mit $K_\delta(f(x)) \subset U$

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : f(K_\varepsilon(x)) \subset K_\delta(f(x))$$

$$\implies f^{-1}(U) \supset f^{-1}(K_\delta(f(x))) \supset K_\varepsilon(x) \implies f^{-1}(U) \text{ Umgebung von } U$$

• Umgebung $\implies$ Stetigkeit. Sei $\delta > 0$ $U = K_\delta(f(x))$. U Umgebung von $f(x)$. $f^{-1}(U)$ ist eine Umgebung von x.

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(X) \subset f^{-1}(U)$$

$$\implies f(K_\varepsilon(x)) \subset U = K_\delta(f(x))$$

2. • Stetigkeit $\implies$ offen. Sei U offen $\iff$ $\forall y \in U$ ist U eine Umgebung von y

$$f^{-1}U \ni x \implies f(x) \in U \overset{\text{Stetigkeit in } x}{\implies} f^{-1}(U) \text{ ist eine Umgebung von } x$$

$$\implies f^{-1}(U) \text{ ist offen}$$

• offen $\implies$ Stetigkeit an jedem $x \in X$. Sei $x \in X$, $\delta > 0$, $K_\delta(f(x))$ ist offen

$$f^{-1}(K_\delta(f(x))) \text{ ist offen} \implies x \in f^{-1}(K_\delta(f(x)))$$

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(K_\delta(f(x)))$$

$$f(K_\varepsilon(x)) \subset K_\delta(f(x))$$

□

1.4 lineare Abbildungen

Definition 1.40. Eine Abbildung $L : V \to W$ (V, W Vektoren) heisst linear, falls

$$L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2) \;\; \forall v_1, v_2 \in V, \;\; \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \iff \exists \text{ eine Matrix } L_{ij} :$$

$$L(x) = \left(\sum_{j=1}^n L_{1j} x_j, \sum_{j=1}^n L_{2j} x_j, \cdots, \sum_{j=1}^n L_{kj} x_j \right)$$

Definition 1.41. Sei L_{ij} eine Matrix die die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ darstellt. Die Hilbert-Schmidt Norm von L ist

$$\|L\|_{\text{HS}} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n L_{ij}^2}$$

Bemerkung 1.42. $\{L : (L_{ij} n \times k \text{ Matrixen}\} \sim \mathbb{R}^{nk}$ $\|.\|_{\text{HS}}$ ist die euklidische Norm.

Bemerkung 1.43. Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann $\|L(x)\| \leq \|x\| \, \|L\|_{\text{HS}}$.

Korollar 1.44. *Sei L wie oben, dann ist L stetig.*

Beweis. Sei $x_k \to x$. Ziel $L(x_k) \to L(x)$

$$\|L(x_k) - L(x)\| = \|L(x_k - x)\| \leq \|x_k - x\| \, \|L\|_{\mathrm{HS}} \to 0$$

$$\implies \|L(x_k) - L(x)\| \to 0$$

$$\implies \text{Stetigkeit}$$

□

Beweis. Beweis von 1.36: $L(x) = y$

$$\|L(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{k} y_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} L_{ij} x_j \right)^2 \overset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} L_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1} x_j \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^2 \, \|x\|^2 = \|x\|^2 \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^2 \right)$$

$$\|x\|^2 \, \|L\|_{\mathrm{HS}}^2 \implies \|L(x)\| \leq \|x\| \, \|L\|_{\mathrm{HS}}$$

□

Definition 1.45. Sei $L : V \to W$ eine lineare Abbildung wobei $(V, \|.\|_V)$ und $(W, \|.\|_W)$ zwei endlich-dimensionierte Vektorräume sind. Die Operatornorm von L ist:

$$\|L\|_{L(V,W)} := \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W$$

Satz 1.46. $\|.\|_{L(V,W)}$ *ist eine Norm und*

$$\|L(v)\|_W \leq \|L\|_{L(V,W)} \, \|v\|_V$$

Deswegen: jede lineare Abbildung $L : V \to W$ ist stetig.

Beweis. Der Kern ist die folgende Eigenschaft:

$$\|L\|_{L(V,W)} < +\infty$$

Wenn das gilt dann:

1.
$$\underbrace{\|L\|_{L(V,W)}}_{\text{Kern}} \text{ und } \|L\|_{L(V,W)} = 0 \iff L = 0$$

$\Leftarrow$ einfach. Sei $\|L\|_{L(V,W)} = 0$. Dann sei $v \in V$.

$$v = 0 \implies L(v) = 0$$

$$v \neq 0 \;\; z \frac{v}{\|v_V\|} \implies \|z\|_V = 1$$

$$\|L(z)\|_W \leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W = 0$$

$$\implies L(z) = 0 \implies L(v) = L\left(\|v\|_V \, z\right) = \|v\|_V \, L(z) = 0$$

2.
$$\|\lambda L\|_{L(V,W)} = |\lambda| \, \|L\|_{L(V,W)}$$
$$\begin{aligned} \|\lambda L\|_{L(V,W)} &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|\lambda L(v)\|_W \\ &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} |\lambda| \, \|L(v)\|_W \\ &= |\lambda| \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W \\ &= |\lambda| \, \|L\|_{L(V,W)} \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} &\|L + L'\|_{L(V,W)} \\ &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|(L + L')(v)\|_{L(V,W)} \\ &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(v) + L'(v)\|_{L(V,W)} \\ &\leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} (\|L(v)\|_W + \|L'(v)\|_W) \\ &\leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W + \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L'(v)\|_W \\ &= \|L\|_{L(V,W)} + \|L'\|_{L(V,W)} \end{aligned}$$

Wenn $v_1, \cdots, v_n$ Basis für V, $w_1, \cdots, w_k$ Basis für W. Die lineare Abbildung $E_{ij}(v_i) = w_j$, $E_{ij}(v_l) = 0$ falls $l \neq i$ ist eine Basis für $L(V,W) \implies L = \sum_{i,j} \lambda_{ij} E_{ij}$

□

$$(V, \|.\|) \;\; (W, \|.\|) \;\; L : V \to W \;\; \|L\|_{L(V,W)} := \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W \tag{1}$$

Satz 1.47. *Falls* $\dim(V)$, $\dim(V) < +\infty$, $\|L\|_{L(V,W)} < +\infty$ *Wahr ohne Beweis in V und deswegen* $L(V,W)$, $\|.\|_{L(V,W)}$ $\forall v \in V$, $\forall L \in L(V,W)$

$$\|L(v)\|_W \leq \|L\|_{L(V,W)} \|v\|_V \tag{2}$$

Aus 2 folgt dass L stetig ist wenn $\|L\|_{L(V,W)} < +\infty$.

Bemerkung 1.48. $\|L\|_{L(V,W)}$ ist die optimale Konstante in 2.

Beweis. Falls $\|v\|_V = 1$

$$\iff \|L(v)\|_W \leq \|L\|_{L(V,W)} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W$$

Die Ungleichung ist eine direkte Folgerung von 1

$$\|v\|_V = 0 \implies L(v) = 0 \implies \|L(v)\|_W) = 0 \implies 2$$

$\|v\|_V > 0$

$$\tilde{v} := \frac{v}{\|v\|_V} \implies \|\tilde{v}\|_V) \frac{\|v\|_V}{\|v\|_V} = 1$$
$$\|L(\tilde{v})\|_W \leq \|L\|_{L(V,W)}$$
$$\left\| \frac{1}{\|v\|_V} L(v) \right\|_W = \frac{1}{\|v\|_V} \|L(v)\|_W$$
$$\implies \frac{\|L(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq \|L\|_{L(V,W)}$$

□

Beweis. $\varepsilon - \delta$ Stetigkeit. $v, \varepsilon > 0$. Suche $\delta > 0$ mit

$$\|v' - v\|_V < \delta \implies \|L(v') - L(v)\|_W < \varepsilon$$

Linearität von L

$$\implies \|L(v') - L(v)\|_W = \|L(v' - v)\|_W$$

und aus 2

$$\|L(v' - v)\| \le \underbrace{\|L\|_{L(V,W)} \overbrace{\|v' - v\|_V}^{<\delta}}_{<\varepsilon}$$

$$\implies \delta = \frac{\varepsilon}{\|L\|_{L(V,W)}}$$

$\implies$ Ungleichung erfüllt. $\square$

Bemerkung 1.49. $V = \mathbb{R}^n$, $\|.\|_V$ euklidische Norm. $W = \mathbb{R}^k$ mit euklidischer Norm.

$$\|L\|_{L(V,W)} \le \|L\|_{\mathrm{HS}}$$

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \ \text{ linear}$$

$$\|L\|_{\mathrm{HS}} = \sqrt{\sum_{i,j} L_{ij}^2}$$

$$\|L\|_{L(V,W)} := \sup_{\sum_{i=1}^n v_i^2 \le 1} \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n L_{jiv_i} \right)^2}$$

1.5 Mehr über stetige Funktionen

Regeln für stetige Funktionen

Regel 1 Seien $f : X \to Y$, $g : X \to Y$. X: topologischer Raum, metrischer Raum, normierter Vektorraum, $\mathbb{R}^n$ V ist ein normierter Vektorraum ($\mathbb{R}^k$). Falls f, g stetig sind, ist auch $f + g$ stetig.

$V = \mathbb{R}$ fg, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ stetig

$V = \mathbb{R}$ $fg(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) g_i(x)$

Beweis. Im Fall X Teilmenge von $\mathbb{R}^n$

$$\underbrace{\{x^k\}}_{\subset X} x^k \to x \in X$$

Stetigkeit von f und g: $g(x^k) \to g(x)$, $f(x^k) \to f(x)$.

$$g(x^k) = (g_1(x^k), \cdots, g_m(x^k))$$

$$g(x) = (g_1(x), \cdots, g_m(x))$$
$$f(x^k) = (f_1(x^k), \cdots, f_m(x^k))$$
$$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$$
$$(g + f)(x^k) = \big(g_1(x^k) + f_1(x^k), \cdots, g_m(x^k) + f_m(x^k)\big)$$
$$\to g_1(x) + f_1(x), \cdots, g_m(x) + f_m(x) = (g + f)(x)$$
$$x^k \to x \in X \implies (f + g)(x^k) \to (f + g)(x).$$

$\square$

Regel 2 Seien X, Y, Z topologische Räume. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig

$$g \circ f : \underbrace{X \to Z}_{x \mapsto g(f(x))}$$

Beweis. Sei U eine offene Menge in Z.

$$(g \circ f)^{-1}(U) = \underbrace{f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(U)}_{\text{offen}})}_{\text{offen}}$$

□

Definition 1.50. Sei $f : X \to \mathbb{R}$.

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

$f : X \to V$, $V, \|.\|_V$ normierter Vektorraum

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_V$$

Bemerkung 1.51. X Menge, $V, \|.\|$ ein normierter Vektorraum.

$$F := \{f : X \to V\} \quad \text{mit} \quad \|f\|$$

Dann ist $F, \|.\|$ ist ein normierter Vektorraum.

Definition 1.52. Eine Folge von Funktionen

$$f^k : X \to V$$

konvergiert gleichmässig gegen f falls

$$\left\|f^k - f\right\| \to 0$$

Bemerkung 1.53. $x \in X$

$$\left\|f^k(x) - f(x)\right\|_V \leq \left\|f^k - f\right\|$$

Folgerung f^k konvergiert gleichmässig

$$\implies f^k(x) \to f(x) \ \ \forall x$$

Satz 1.54. *Sei X ein metrischer Raum und $f^k : X \to V$ eine Folge die gleichmässig gegen f konvergiert. Dann ist f stetig.*

Beweis. Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$.

Ziel $\exists \delta > 0$ so dass

$$d(x, y) < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

$\exists N$ so dass

$$\left\|f - f^k\right\| < \frac{\varepsilon}{3} \ \text{ falls } \ k \geq N$$

f^N ist stetig: $\exists \delta > 0$:

$$d(x, y) < \delta \implies \left\|f^N(x) - f^N(y)\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\begin{aligned}
&d(x, y) < \delta \\
\|f(x) - f(y)\| &= \left\|(f(x) - f^N(x)) + (f^N(x) - f^N(x)) + (f^N(y) - f(y))\right\|_V \\
&\leq \left\|f(x) - f^N(x)\right\|_V + \left\|f^N(x) - f^N(y)\right\|_V + \left\|f^N(y) - f(y)\right\|_V \\
&< \left\|f^N - f\right\| + \frac{\varepsilon}{3} + \left\|f^N - f\right\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

□

1.6 Kompakte Menge

Definition 1.55. Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heisst kompakt falls K abgeschlossen und beschränkt ($\iff \exists B_R(0) : K \subset B_R(0)$) ist.

Satz 1.56. *Sei $k \subset \mathbb{R}^n$.*

$$K \text{ kompakt} \iff \forall \left\{x^j\right\} \subset K \ \exists x^{j_l}$$

x^{j_l} ist eine Teilfolge, die gegen $x \in K$ konvergiert.
$K \implies$ Sei $\left\{x^j\right\}$ eine Folge

$$x^j \in K \subset B_R(0) \implies \left\|x^j\right\| < R$$

$\exists x^{j_l} \to x \in \mathbb{R}^n$, die abgeschlossenheit von $K \implies x \in K$. Folgenkriterium $\implies$ Abgeschlossenheit und Beschränktheit.

$$\textit{nicht abgeschlossen} \implies \exists x^j \subset K \ \textit{ mit } \ x^j \to\notin K$$

$$\textit{Folgenkompaktheit} \implies \exists x^{j_l} \to y \in K$$

Widerspruch (weil x und y sind in derselben Menge)
Sei K nicht beschränkt.

$$\forall j \in \mathbb{N} \ \ B_j(0) \not\supset K$$

$$\exists x^j \in K \setminus B_j(0) \implies \left\|x^j\right\| \geq j$$

Wenn $x^{j_l} \to x$

$$\left\|x^{j_l}\right\| \leq \|x\| + \left\|x^{j_l} - x\right\|$$

$$\|x\| \leq \left\|x^{j_l}\right\| + \left\|x - x^{j_l}\right\|$$

$$\left|\|x\| - \left\|x^{j_l}\right\|\right| \leq \left\|x - x^{j_l}\right\|$$

$$\implies \left\|x^{j_l}\right\| \to \|x\|$$

$$\left\|x^{j_l}\right\| = j_l \to +\infty$$

$\implies$ Widerspruch

Satz 1.57. *$E \subset \mathbb{R}^n$*

$$E \ \textit{ kompakt} \iff E \ \textit{ folgenkompakt}$$

d.h.

$$\forall \left\{x_k\right\} \subset E \ \exists \ \textit{ Teilfolge } \ \left\{x_{k_l}\right\} \ \textit{ die gegen } x \in E \textit{ konvergiert}$$

Definition 1.58. (Überdeckungseigenschaft) Eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ besitzt die Überdeckungseigenschaft falls:

- $\forall$ Überdeckung $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von E mit offenen Mengen $\exists$ endliche Teilüberdeckung.

$$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \ \text{ Überdeckung } \iff \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \supset E$$

Teilüberdeckung ist eine Teilfamilie von $\{U_\lambda\}$ die noch eine Überdeckung von E ist.

Beispiel 1.59. Eine offene Kugel hat diese Eigenschaft nicht.

$$\forall x \in K_r(0) \ \text{ sei } \ K_{\frac{r-\|x\|}{2}}(x) = U_x$$

1. $\{U_x\}_{x \in K_r(0)}$ ist eine Überdeckung von $K_r(0)$.

Einfach weil $x \in U_x$! Sei $U_{x_1}, \cdots, U_{x_N}$ eine beliebige endliche Teilfamilie. Sei

$$p := \max_{i \in \{1, \cdots, N\}} \|x_i\| < r$$

$\implies$ falls $\|y\| \geq \frac{\|x_i\|+r}{2}$ dann $y \notin U_{x_i}$. So, wenn $\|y\| \geq \frac{p+r}{2}$ dann

$$y \notin U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_N} \quad \frac{p+r}{2} < r$$

falls $\|y\| = \frac{p+r}{2}$, dann $y \in K_r(0)$. Mit einer geschlossenen Kugel ist das anders.

Satz 1.60. *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$*

$$E \text{ kompakt} \iff E \text{ hat die Überdeckungseigenschaft}$$

Beispiel 1.61. $E = \mathbb{R}^n$, $U_n = K_{n+1}(0)$.

$$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

Aber $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}^n = E \not\subset \bigcup_{n=0} U_n$$

Beweis. $\exists \{x_i\} \subset E$ ohne konvergente Teilfolge in $E \implies E$ ist nicht kompakt $\implies$ Überdeckungseigenschaft gilt nicht. Zwei Möglichkeiten:

1. $\exists$ eine Teilfolge $\{y_i\} \subset E$ $y_i \to y$ $y \notin E$
2. $\exists$ eine Teilfolge $\{y_i\} \subset E$ $y_i \to +\infty$

Beim ersten ist die Menge offen.

$$U_0 := \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{(\{y_1\} \cup \{y\})}_{E \text{ ist abgeschlossen}}$$

Beim zweiten gilt:

$$U_0 = \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{\{x_i\}}_{F} \text{ ist offen}$$

$$U_n = U_0 \cup \{y_1, \cdots, y_{n-1}\} \quad n \geq 0$$

U_n ist auch offen.

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} U_n = \begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \{y\} & \text{im Fall 1} \\ \mathbb{R}^n \setminus & \text{im Fall 2} \end{cases}$$

Aber jede endliche Familie

$$U_1 \cup \cdots \cup U_n \not\supset E$$

in beiden Fällen lassen wir unendlich viele Punkte weg. E kompakt $\implies$ Überdeckungseigenschaft. E ist beschränkt und abgeschlossen und sei $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von offenen Mengen mit $E \subset \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Wir decken die Menge U mit Würfel:

$$[k_1, k_1 + 1] \times [k_2, k_2 + 1] \times \cdots \times [k_n, k_n + 1]$$

$$W_1 \cup \cdots \cup W_M$$

Falls jedes $E \cap W_i$ mit einer endlischen Familie von $\{U_\lambda\}$ überdeckt wird, dann finde ich eine endliche Überdeckung von E wenn N gross genug ist. So, angenommen dass die Überdeckungseigenschaft nicht gilt.

$$\exists E_i := E \cap W_i :$$

1. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Überdeckung von E_1
2. keine endliche Teilfamilie deckt E_1

Teilen wir W_i in 2^n Würfel mit Seite $\frac{1}{2}$

$$\tilde{W}_1, \cdots, \tilde{W}_2$$

$$\exists E_2 := E \cap \tilde{W}_i : \text{ so dass die beiden Eigenschaften noch gelten}$$

Induktiv

$$E \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$$

jede $E_i \subset W^i$ Würfel mit Seite 2^{-i+1} und die beiden Eigenschaften gelten mit E_j statt E_i.
$\{x_k\} \subset E$. $\{x_k\}$ ist eine Cauchy-Folge. $j, k > i$, $x_k, x_j \in W$ mit Seite w^{-i+1}
$\|x_j - x_k\| \leq \sqrt{n}2^{-i+1}$

$$\implies x_j \to x \in E \to x \in U \in \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \implies K_r(x) \supset U$$

$$x \in E, x \in E^i \ \ \forall i \implies x \in W^i$$
$$\implies W^i \subset B_r(x) \subset U$$

für i gross genug

$$\implies E_i \subset U$$

$\implies$ wir haben eine endliche Teilüberdeckung $\{U\} \subset \{U_\lambda\}$ gefunden $\implies$ Widerspruch mit den beiden Eigenschaften. □

Bemerkung 1.62. f stetig $\implies f^{-1}(U)$ offen falls U offen.

Beweis. Sei $\{U_\lambda\}$ eine Überdeckung (mit offenen Mengen) von $f(E)$, dann ist $\left\{f^{-1}\left(U_\lambda\right)\right\}$ ein Überdeckung von E.

$$\exists f^{-1}(U_{\lambda_1}), \cdots, f^{-1}(U_{\lambda_N} \text{ Teilüberdeckung von } E$$

$U_{\lambda_i}, \cdots, U_{\lambda_N}$ ist eine Überdeckung von $f(E) \implies f(E)$ ist kompakt □

Korollar 1.63. *Wenn $F : E \to \mathbb{R}$ stetig ist und $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist, besitzt f ein Maximum und ein Minimum.*

Beweis. $f(E) \subset \mathbb{R}$ ist kompakt.

$$s = \sup f(E) < +\infty$$

$$\exists \{x_k\} \subset f(E) \text{ mit } x_k \to s \xRightarrow{\text{abgeschlossen}} s \in s \in f(E)$$
$$\left(s - \frac{1}{k} \implies \exists x_k \in f(E) \text{ mit } x_k > s - \frac{1}{k}, x_k \leq s\right)$$

$\implies s$ ist ein Maximum. □

Definition 1.64. Das Intervallschachtelungsprinzip in $\mathbb{R}$. Sei I_j eine Intervallschachtelung:

1. $$I_j = [a_j, b_j]$$
2. $$I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_j \supset_{j+1}$$
3. $$b_j - a_j \to 0$$

$$\implies \bigcap_{j=0}^{\infty} E_j \neq \varnothing$$

Satz 1.65. *Sei E_j eine Folge von kompakten Mengen mit $E_j \supset E_{j+1}$ $\forall j$ ($E_0 \subset \mathbb{R}^n$)*

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \neq \varnothing \text{ falls } E_j \neq \varnothing \ \forall j$$

Beweis. Sei E_j wie im Satz mit $E_j \neq \varnothing$, aber $\bigcap_{j=0}^{\infty} E_j = \varnothing$. Sei $U_j := \mathbb{R}^n \setminus E_j \implies U_j$ ist offen. $\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j = \mathbb{R}^n$ $\{U_j\}$ ist eine Überdeckung von E_0. Aber $U_1 \cup \cdots \cup U_N = U_N$ (weil $U_{j+1} \supset U_j$)

$$U_N \not\supset E_N \neq \varnothing \quad E_N \subset E_0$$

Keine endliche Teilfamilie von $\{U_j\}$ ist eine Überdeckung von E_0. Widerspruch wegen Kompaktheit von E_0. □

1.7 Differenzierbare Funktionen

Erinnerung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst differenzierbar in $a \in \mathbb{R}$ falls

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert. Was geschieht mit Funktionen von mehrere Variablen? Die "Tangentensteigung" hängt auch von der Richtung ab. D.h. Es gibt eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definition 1.66. $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, heisst differenzierbar in $a \in U$, falls

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Lh}{\|h\|} = 0 \tag{3}$$

wobei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung ist.

Bemerkung 1.67. $n = 1$: Es gilt $Lh = f'(a)h$

Bemerkung 1.68. Die lineare Abbilung L in 3 ist eindeutig definiert. Annahme $L' \neq L$ erfüllt die Bedungung. Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$. Es gilt:

$$(L - L')(v) \overset{\text{linear und } \|v\|=1}{=} \lim_{t \downarrow 0} \frac{(L - L')(tv)}{\|tv\|} \overset{3 \quad h=tv}{=} \implies L = L'$$

Bemerkung 1.69. Wir können 3 auch anders beschreiben:

$$f(a+h) - f(a) = Lh + \underbrace{R(h)}_{\text{Restglied}}$$

Dann gilt

$$3 \iff \lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0 \tag{4}$$

Definition 1.70. L heisst Differential von f in a. Man schreibt $\mathrm{d} f(a)$. Sei nun $\{e_1, \cdots, e_n\}$ die Standardbasis $\mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\implies \mathrm{d} f(a)h = \mathrm{d} f(a) \left(\sum_{i=1}^{k} h_i - e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} h_i \, \mathrm{d} f(a) e_i$$

Definition 1.71.

$$f'(a) = (\mathrm{d} f(a)e_1, \cdots, \mathrm{d} f(a)e_n)$$

heisst Ableitung

Definition 1.72.

$$Tf(x,a) = f(a) + f'(a)(x-a) \ \text{ (Ebene (tangential))}$$

lineare Approximation

Satz 1.73. *f differentierbar in $a \implies f$ ist stetig in a*

Beweis.

$$|f(a+b)-f(a)| = |\mathrm{d}\, f(a)h + R(h)| \leq |\mathrm{d}\, f(a)| + \underbrace{|R(h)|}_{\to 0}$$

□

Beispiel 1.74. $f(x) = Ax + b$, $A \in M_a(1, n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}$

Behauptung 1.75. *$Lh := ah$ ist linear*

$$\mathrm{d}\, f(a)h = Ah, \quad f'(a) = A$$

Beweis.

$$f(a+h) - f(a) - Lh = \cancel{R}(h) = 0$$

□

Beispiel 1.76. $f(x) := x^T Ax$, $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$

$$f(a+h) - f(a) - \underbrace{2a^T Ah}_{\mathrm{d}\, f(a)h} + \underbrace{h^T Ah}_{R(h)}$$

$Lh := 2a^T Ah$ ist linear (in h), $R(h) = h^T Ah$ $(= \sum h_i a_{ik} h_l)$ z.z.: $|Rh| \leq \sum_{i,j=1}^{h} |a_{ij}|\, \|h\|_\infty^2$, d.h. $\frac{R(h)}{\|h\|} \to 0$ (falls $\|h\| \to 0$)

Ziel Wir wollen $\mathrm{d}\, f(a)h$ berechnen. sei $t \in \mathbb{R}$

$$f(a+th) = f(a) + \mathrm{d}\, f(a)th + R(th)$$

$$\implies \mathrm{d}\, f(a)h = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \tag{5}$$

Definition 1.77. $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$. Die Richtungsableitung von f in Richtung $h \in \mathbb{R}^n$ ist der Grenzwert (falls er existiert)

$$\partial_n f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

Die Ableitungen in Richtung $e_1, \cdots, e_n$ heissen partielle Ableitungen in a. Wir schreiben

$$\partial_{ei} f(a) = \partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_{xi}(a)$$

Bemerkung 1.78. Wir haben <u>nicht</u> vorausgesetzt, dass f differenzierbar ist in a!

Satz 1.79. *Sei f in a differenzierbar. Dann existieren die Richtungsableitungen in jede Richtung. Insbesondere existieren die aprtiellen Ableitungen. Es gelten:*

$$\mathrm{d}\, f(a)h = f'(a)h = \partial_n f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) h_i \tag{6}$$

und

$$f'(a) = (\partial_1 f(a), \cdots, \partial_n f(a))$$

Beweis. Existenz der Richtungsableitung oke (Herleitung von 5) □

Frage Wie berechnet man die partielle Ableitung effizient? Es gilt:

$$\partial_i f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t_{ei}) - f(a)}{t}, \quad a = (a_1, \cdots, a_n)$$

$$g_i(x) := f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n)$$

$$\partial_i f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{g(a_i + t) - f(a_i)}{t} = g'(a_i)$$

Beispiel 1.80.

$$f(x,y) := \sin(2x) e^{3y}$$

$$\partial_x f = 2e^{3y} \cos(2x)$$

$$\partial_y f = \sin(2x) e^{3y} 3$$

Frage Wann folgt aus der Existenz der partiellen Ableitung (Richtungsableitung) die Differenzierbarkeit?

Beispiel 1.81.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Es gilt: $f(tx,ty) = tf(x,y)$, d.h. der Graph von f besteht aus Geraden durch 0, für $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\implies \partial_h f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(th_1,th_2) - f(0,0)}{k} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} f(h_1,h_2) = f(h_1,h_2)$$

$$\implies \partial f(0,0) = f(h_1,h_2)$$

$$\partial_{e_1} f(0,0) = f(1,0) = 0$$

$$\partial_{e_2} f(0,0) = f(0,1) = 0$$

Annahme f ist in $(0,0)$ differenzierbar

$$\xRightarrow{\text{aus } 6} \underbrace{\partial_n f(0,0)}_{=\mathrm{d}\, f(a)h=0} = \underbrace{\partial_1 f(a)}_{0}(h_1) + \underbrace{\partial_2 f(a)}_{0}(h_2) = 0$$

$$\implies \mathrm{d}\, f(a) = 0$$

Test $L = 0$

$$\frac{f(h_1,h_1) - \overbrace{f(a_0) - L(h_1,h_1)}}{\|(h_1,h_1)\|_\infty} = \frac{h_1^3}{2h_1^2|h_1|} \to \pm\frac{1}{2}$$

$\implies$ f ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

1.7.1 Das Differenzial

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Umgebung von x.

$$f \text{ diff in } x \iff \exists L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ linear s.d.}$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0 \tag{7}$$

$$\lim_{h\downarrow 0} G(h) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \|h\| < \delta \implies |G(h)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall h_k = 0 \;\; G(h_k) \to 0$$

Wenn f differenzierbar ist und 7 erfüllt, heisst L das Differential von f.

$$L = \mathrm{d}\, f$$

$$\mathrm{d}\, f_x \text{ das Differential an der Stelle } x$$

1.7.2 Richtungsableitung

$x \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^m$, $g(t) = f(x+th)$ (wohldefiniert für $|t|$ klein)

$$\partial_n f(x) = g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

1.7.3 Partielle Ableitung

$(x_1, \cdots, x_n)$ Kond. in $\mathbb{R}^n$ $y \in \Omega$ so dass Ω eine Umgebung von y ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \, (= \partial_{x_i} f(y)) = \lim_{t \to 0} \frac{y_1, \ldots, y_i + t, \ldots, y_n - f(y)}{t}$$

Falls $e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0)$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(y + te_i) - f(y)}{t} = \partial_{e_i} f(y)$$

Satz 1.82. *(Hauptkriterium der Differenzierbarkeit) Sei $f : U \to \mathbb{R}$ und U eine Umgebung von y. Falls $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ $\underline{\text{in } U}$ existieren und stetig in $\underline{\text{in } y}$ sind, dann ist f in y differenzierbar.*

Beweis. $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$L(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) h_i$$

Ziel L ist das Differential von f

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0$$

$$f(x+h) - f(x) = f(x + (h_1, \ldots, h_n)) - f(y + (h_1, \ldots, h_{n-1}, 0) + f(y + (h_1, \ldots, h_{n-1}, 0) - \ldots$$

$$+ \ldots \quad (i\text{te Zeile})$$

$$+ f(y + (k, 0, \ldots, 0)) - f(y) \tag{8}$$

$i \in \{1, \ldots, n\}$

$$g(t)) = f(y + (h_1, \ldots, h_{i-1}, th_i, 0, \ldots, 0)$$

$$i\text{te Zeile} = g_i(1) - g_i(0) = g_i'(\xi_i) \quad \xi \in [0, 1]$$

$$g_i'(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g_i(t + \varepsilon) - g_i(t)}{\varepsilon}$$

$$= h_i \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(y_1 + h_1, \ldots, y_{i-1}, y_i + (t + \varepsilon) h_i, y_{i+1} \ldots, y_n) - f(y_1 + h_1, \ldots, y_i + th_i, \ldots, y_n}{\varepsilon h_i}$$

$$= h_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \, (y_1 + h_i, \ldots, y_i + th_1, y_{i+1}, \ldots, y_n)$$

$$i\text{te Zeile} = h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(y_1 + h_1, \ldots, y_{i-1} h_{i-1}, y_i + \xi_i h_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$$

$$\zeta_i = (h_1, \ldots, h_{i-1}, \xi h_i, 0, \ldots, 0)$$

$$= h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(y + \zeta_i) \tag{9}$$

9 in 8:

$$f(y + h) - f(y) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(y + \zeta_i) \tag{10}$$

$$f(x + h) - f(x) - L(h)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(y + \zeta_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \right) \tag{11}$$

$$\frac{|f(x + h) - f(x) - L(h)|}{\|h\|}$$

$$\overset{11}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \frac{|h_i|| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y+\zeta_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)|}{\|h\|} \tag{12}$$

Wenn $\|h\| \to 0$, $\|\zeta\| \to 0$. Die Stetigkeit von $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ in y impliziert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(y+\zeta_i) \to \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Die rechte Seite von 12 $\to 0$ wenn $h \to 0 \implies$ **??**. □

Definition 1.83. Der Gradient an der Stelle $x_0$ist der Vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\right) = \nabla f(x_0)$$

Bemerkung 1.84.

$$df|_{x_0}(h)\,(\partial_n f(x_0)) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

$$(\langle \nabla f(x_0), h\rangle) = \nabla f(x_0) h$$

$$|\partial_n f(x_0)| \overset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \|\nabla f(x_0)\|\,\|h\|$$

Falls $\|h\| = 1$, dann

$$|\partial_n f(x_0)| \leq \|\nabla f(x_0)\|$$

Fall $\|\nabla f(x_0)\| \neq 0$, wenn wir

$$K = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

bekommen wir $\|K\| = 1$ und

$$\partial_K f(x_0) = \|\nabla f(x_0)\|$$

Deswegen:

$$K = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

ist die Richtung der maximalen Steigung und

$$\|\nabla f(x_0)\|$$

ist die maximale Steigung.

1.8 Rechenregeln

Satz 1.85. *Sei U eine Umgebung von $x \in \mathbb{R}^n$ und $f, g : U \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar. Dann sind $f+g$ und fg auch differenzierbar in x und*

$$\mathrm{d}(f+g)|_x = \mathrm{d}\, f|_x + \mathrm{d}\, g|x$$

$$\mathrm{d}(fg) = f(x)\,\mathrm{d}\, g|x + g(x)\,\mathrm{d}\, f|_x$$

Falls $f(x) \neq 0$ ist auch $\frac{1}{f}$ in x differenzierbar

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right)|_x = -\frac{1}{(f(x))^2}\,\mathrm{d}\, f|_x$$

Korollar 1.86. *$g(x) \neq 0$, dann*

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)|_x = \frac{1}{g(x)}\,\mathrm{d}\, f|_x - \frac{f(x)}{g(x)^2}\,\mathrm{d}\, g|_x$$

$$= \frac{g(x)\,\mathrm{d}\, f|_x - f(x)\,\mathrm{d}\, g|_x}{g(x)^2}$$

Beweis. Das Ziel ist eine lineare Abbildung L zu finden so dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)-\frac{1}{f(x)}-L(h)}}{\|h\|}$$

$$L = -\frac{1}{f(x)^2}\,\mathrm{d}\, f|_x$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\frac{1}{f(x+h)-\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x)^2}(h)\,\mathrm{d}\, f|_x(h)}}^{A}}{\|h\|} = \frac{B+C}{\|h\|}$$

$$\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)} = \frac{f(x)-f(x+h)}{f(x)f(x+h)}$$

$f(x+h) \neq 0$ falls $\|h\|$ klein genug

$$\frac{f(x+h)-f(x)-\mathrm{d}\, f|_x(h)}{\|h\|} \to 0$$

$$A = \left[\frac{-(-f(x)+f(x+h))}{f(x)f(x+h)} \frac{\mathrm{d}\, f|_x(h)}{f(x)f(x+h)}\right] = C$$

$$+\frac{-\,\mathrm{d}\, f|_x(h)}{f(x)f(x+h)} + \frac{\mathrm{d}\, f|_x(h)}{f(x)^2} = B$$

$$\frac{B}{\|h\|} = -\frac{1}{f(x)f(x+h)} \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)-\mathrm{d}\, f|_x(h)}{\|h\|}}_{\to 0}$$

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x) \neq 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{B}{\|h\|} = 0$$

Diff von f für $\|h\| \to 0$

$$\frac{C}{\|h\|} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\, f|_x(h)}{\|h\|}}_{\text{ist beschränkt}} \frac{1}{f(x)} \underbrace{\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x+h)}\right)}_{\to 0}$$

Sei $L = \mathrm{d}\, f|_x$ und $\|L\|_O$ ihre Operatornorm

$$|\mathrm{d}\, f|_x(h)| = |L(h)| \leq \|K\|_O \|h\|$$

$$\Longrightarrow \frac{|\mathrm{d}\, f|_x(h)|}{\|h\|} \leq \|L\|$$

□

Definition 1.87. Eine Kurve ist eine Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (d.h. $\forall t \ \ \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t))$$

deswegen $t \to \gamma_i(t) \in \mathbb{R}$. Die Kurve γ heisst differenzierbar wenn jede γ_i differenzierbar ist.

$$\gamma' = (\gamma'(t), \cdots, \gamma'_n(t))$$

Satz 1.88. *(Kettenregel 1. Version) Sei $f : U \to \mathbb{R}$ mit U Umgebung von x und f differenzierbar in x. Sei $\gamma : [a,b] \to U$ eine differenzierbare Kurve mit $\gamma(t_0) = x$. Sei $g = f \circ \gamma$*

$$g(t) = f(\gamma(t))$$

Sei g in t_0 differenzierbar. Dann

$$g'(t_0) = \mathrm{d}\,|_{\gamma}(t_0)(\dot\gamma(t_0)) = \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \dot\gamma(t_0)\rangle$$

Beweis. Das Ziel:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(t_0+h) - g(t_0) - h\left[\mathrm{d}\, f|_{\gamma(t_0)}(\dot\gamma(t_0))\right]}{h} = 0$$

$$R(h) = g(t_0+h) - g(t_0) - g(t_0) - h\left[\mathrm{d}\, f|_{\gamma(t_0)}(\dot\gamma(t_0))\right] \tag{13}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = 0 \tag{14}$$

Neue Notation

$$14 \iff R(h) = o(h)$$

$$x_0 = \gamma(t_0)$$

Annahmen: Differenzierbarkeit von f

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0+k) - f(x_0) - \mathrm{d}\, f|_{x_0}(k)}{\|k\|} \left(= \frac{r(k)}{\|k\|}\right) = 0$$

$$(r(k) = o(\|k\|))$$

Differenzierbarkeit von γ:

$$\lim_{k\to 0} \frac{\gamma(x_0+k) - \gamma(x_0) - \mathrm{d}\, h\gamma'|_{x_0}(k)}{h} \left(= \frac{p(k)}{\|k\|}\right) = 0$$

$$p(h) = o(h)$$

$$\gamma(t_0+h) = \gamma(t_0) + k \left(= \gamma(t_0+h) - \underbrace{\gamma(t_0)}_{x_0}\right)$$

$$g(t_0+h) - g(t_0) = f(\gamma(t_0+h)) - g(\overbrace{\gamma(t_0)}^{x_0})$$
$$= f(\gamma(t_0) - k) - f(\gamma(t_0)) = \mathrm{d}\, f|_{\gamma(t_0)}(k) + r(k)$$
$$= \mathrm{d}\, f|_{\gamma(t_0)}(\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)) + r(k)$$
$$= \mathrm{d}\, f|_{\gamma(t_0)}(h\dot\gamma(t_0) + p(h)) + r(k)$$
$$\overset{\text{Linearität von d}\,f}{=} h\,\mathrm{d}\, f|_{\gamma(t_0)}(\dot\gamma(t_0)) + \mathrm{d}\, f|_{\gamma(t_0)}(p(h)) + r(k)$$
$$g(t_0+h) - g(t_0) - h\,\mathrm{d}\, f|_{\gamma(t_0)}(\dot\gamma(t_0))$$
$$= f|_{\gamma(t_0)}(p(h)) + r(\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)) = R(h)$$

$$|R(h)| \le \frac{\underbrace{\overbrace{|f|_{\gamma(t_0)}(p(h))|}^{L} + r(\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0))}}{\|h\|}$$
$$\le \|L\| \frac{p(h)}{\|h\|} + \frac{r(\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{\|h\|}$$

Ziel

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{|h|}$$

Falls

$$r(\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0) = 0$$

dann $r(0) = 0$. Wenn

$$r(\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0) \neq 0$$
$$= \frac{r(\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)\|} \frac{\|t_0+h) - \gamma(t_0)\|}{|h|}$$
$$\frac{r(\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)\|} = \frac{r(k)}{\|k\|} \to 0$$

... wenn $\|k\| \to 0$ und $h \to 0$. Es fehlt die Beschränktheit von

$$\frac{\|t_0 + h) - \gamma(t_0)\|}{|h|}$$

$$\frac{t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} - \frac{\cancel{h}\dot{\gamma}(t_0)}{\cancel{h}} = \frac{p(h)}{h}$$

$$\frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} = \underbrace{\dot{\gamma}(t_0)}_{\text{konstant}} + \underbrace{\frac{p(h)}{h}}_{\to 0}$$

Deswegen

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\|}{|h|} = \|\dot{\gamma}(t_0)\|$$

$$\implies \frac{|R(h)|}{\|h\|} \to 0$$

$\implies$ Differenzierbarkeit und Kettenregel! $\square$

Bemerkung 1.89. Der Gradient ist orthogonal zur Niveaumenge (Höhenlinien).

Definition 1.90. Sei $\gamma : [a, b] \to U$ eine differenzierbare Kurve, U offen. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $f(\gamma(t)) = c_0$ (c_0 hängt nicht von t ab). Dann

$$\nabla f(\gamma(t)) \perp \dot{\gamma}(t)$$

d.h.

$$\langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$$

$$0 = g'(t) = (f(\gamma(t)))' \overset{\text{Kettenregel}}{=} \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle$$

1.9 Mittelwertsatz und Schrankensatz

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\xi \in]a, b[$

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Sei nun:

$$f : U \mapsto \mathbb{R} \text{ differenzierbar auf } U$$

$$x, y \in U \text{ so dass das Segment } [x, y] \subset U$$

Was ist ein Segment? Gerade durch x und y

$$\{x + t(y - x) | t \in \mathbb{R}\}$$

$$[[x, y]] = \{x + t(y - x) | t \in [0, 1]\}$$

$$\gamma(t) := x + t(y - x)$$

$$f(y) - f(X) = (x_1 + t(y_1 - x_1), \cdots, x_n + t(y_n - x_n))$$

γ ist differenzierbar.

$$g = f \circ \gamma g(t) = f(\gamma(t))$$

$$g(1) - g(0) = g'(\tau) \text{ für } \tau \in]0, 1[$$

$$f(y) - f(x) = \mathrm{d} f|_{\gamma(\tau)}(\dot{\gamma}(\tau))$$

$$\dot{\gamma}(\tau) = (\gamma_1'(\tau), \cdots, \gamma_n'(\tau))$$

$$= (y_1 - x_1, \cdots, y_n - x_n) = y - x$$

$$\gamma(\tau) = \xi$$

$$f(y) - f(x) = \mathrm{d} f|_\xi(y - x) = \partial_{y-x} f(\xi) \tag{15}$$

Satz 1.91. *(Mittelwertsatz) U offen, $[x, y] \subset U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann $\exists \xi \in]x, y[$ so das 15 gilt.*

Definition 1.92. U sternförmig: wenn $0 \in U$ und $[x,0] \subset U \; \forall x \in U$. Sternförmig mit Zentrum x_0 wenn $x_0 \in U \; [x, x_0] \subset U \; \forall x \in U$

Satz 1.93. *(Schrankensatz) Sei U eine offene Menge, die sternförmig ist und $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit*

$$\sup_{x \in U} \|\mathrm{d}\, f|_x\|_O = S < \infty \left(= \sup_{x\in U} \|\nabla f(x)\| \right)$$

Dann

$$|f(x) - f(0)| \leq S \, \|x\|$$

Wenn U konvex ist, d.h. das Segment $[x,y] \subset U \; \forall x, y \in U$, dann

$$|f(x) - f(y)| \leq S \, \|y - x\|$$

Definition 1.94. $f : \underbrace{K}_{\in \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$ heisst Lipschitz wenn $\exists L[0, +\infty[$ so dass

$$|f(y) - f(x)| \leq L \, \|y - x\| \quad \forall x, y \in K$$

Wenn $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ Lipschitz bedeutet die Existenz eines L so dass

$$|f(y) - f(x)| \leq L d(y - x) \;\; \forall x, y \in K$$

1.10 Höhere (partielle) Ableitungen

Sei

$$f : \Omega_{\subset \mathbb{R}} \to \mathbb{R}$$

Die partiellen Ableitungen von f:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon e_i) - f(x)}{\varepsilon}$$

$$e_i = (0, \cdots, i, \cdots, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_j}(x) \left(= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right)(x))$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x + \varepsilon e_j) - \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x)$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i}(x + \varepsilon e_j) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)}{\varepsilon}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}$$

Satz 1.95. *(von Schwarz) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion die in einer Umgebung von $p \in \Omega$ die partielle Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ und $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ besitzt. Falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ stetig in p ist, dann existiert $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)$ und*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)$$

Beispiel 1.96.

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} a_{ij} x_1^i x_2^j$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} i a_{ij} x_1^{i-1} x_2^j$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} ij a_{ij} x_1^{i-1} x_2^{j-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} j a_{ij} x_1^i x_2^{j-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} ij a_{ij} x_1^{i-1} x_2^{j-1}$$

Beispiel 1.97. Sei $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$v(x_1, x_2) = V(x_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_+} = 0$$

Beweis. Die Idee ist den Mittelwertsatz zu benutzen.

Schritt 1 Von Dimension $n \to 2$

$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$$

$$p = (p_1, \cdots, p_i, \cdots, p_j, \cdots, p_n)$$

$$g : U_{\subset \mathbb{R}} \to \mathbb{R}$$

$$g(y, z) = g(p_1, \cdots, p_{i-1}, y, p_{i+1}, \cdots, p_{j-1}, z, p_{j+1}, \cdots, p_n$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial g}{\partial y}(p_i, p_j)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial g}{\partial y}(p_i, p_j)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}(p_i, p_j)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_1, \ldots, p_i + \varepsilon, \ldots, p_j, \ldots, p_n) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(p) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_i + \varepsilon p_j) - \frac{\partial g}{\partial z}(p)}{\varepsilon}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial y \partial z}(p_i, p_j)$$

Falls

$$\frac{\partial g}{\partial y \partial z}(p_i, p_j)$$

existiert und

$$\frac{\partial g}{\partial z \partial y}(p_i, p_j)$$

gleicht, dann ist das Theorem bewiesen.

Deswegen Nun,

$$f : \Omega_{\subset \mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ existieren in einer Umgebunv von $p = (a,b)$, dann ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ stetig auf p. Zu beweisen: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p)$ existiert und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p)$$

$p = (a,b)$, $h,k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Q =$ Rechteck mit Ecken (a,b), $(a+h,b)$, $(a,b+k)$, $(a+h,b+k$.

$$D_Q f = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)$$

$$\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} \frac{D_Q f}{hk}$$

$$= \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b+k)}{hk} - \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{hk}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a,b+k) - \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a,b)}{k}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a,b)$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\lim_{k\to 0} \frac{D_Q f}{hk}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a+h,b) - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a,b)}{h} =?$$

wenn der Limes existiert

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a,b)$$

Ziel $\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \dfrac{D_Q f}{hk}$ existiert und gleicht $\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} \dfrac{D_Q f}{hk}$. $\implies$ Satz von Schwarz

Zuerst Wir behaupten ($\forall h,k$ klein genug) die Existenz von einer Stelle $(\xi,\zeta) \in Q$ so dass

$$\frac{D_Q f}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi,\zeta) \tag{16}$$

$$\frac{D_Q f}{hk} \neq \frac{1}{h}\left\{\frac{f(a+h,b+k) - f(a+h,b)}{k} - \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}\right\}$$

$$= \frac{1}{h}\{g(a+h) - g(a)\} \overset{\text{Mittelwertsatz}}{=} g'(\xi)$$

$x \in]a,a+h[$, $\zeta \in]b,b+k[$ OBdA: $h,k > 0$

$$g(z) = \frac{f(z,b+k) - f(z,b)}{k}$$

$$g'(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(z,b+k) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(z,b)\right)\frac{1}{k}$$

...

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi,b+k) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi,b)\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(\xi,\zeta)$$

Womit wir beim zweiten Teil von 16 wären.

$$\frac{D_Q f}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi,\zeta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a,b)$$

$$\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\left(\frac{D_Q f'}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a,b)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi,\zeta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a,b)\right)$$

$\forall\varepsilon$ $\exists\delta$ so dass wenn $\sqrt{h^2+k^2} < \delta$

$$\implies |\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi,\zeta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a,b)| < \varepsilon \tag{17}$$

$$\limsup_{h\to 0} |\lim_{k\to 0}\frac{D_Q f}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a,b)|$$

$$\leq \sup_{h\in]0,\frac{\delta}{2}[} |\lim_{k\to 0}\frac{D_Q f}{hk} - \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1}(a,b)|$$

$$\leq \sup_{h\in]0,\frac{\delta}{2}[}\ \sup_{k\in]0,\frac{\delta}{2}[} |\frac{D_Q f}{hk} - \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1}(a,b)| \overset{17}{\leq} \varepsilon$$

$$\implies \limsup_{k\to 0} \cdots = \lim_{k\to 0}\cdots = 0$$

$$\implies \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{D_+ f}{hk}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a,b) \tag{18}$$

$$\left(= \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{D_Q f}{hk}\right)$$

$$\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{1}{hk}\left\{f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+h) + f(a,b)\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} frac1h \left\{\lim_{k\to 0}\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)}{k} - \frac{f(a,b+h)+f(a,b)}{k}\right\}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_2}(a+h,b) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a,b)\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(a,b)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a,b) \tag{19}$$

$18 = 19$ □

Sei $a \in \Omega$ und $w \in \mathbb{R}$. Dann

$$\mathrm{d}^{(k)} f(a) w^k = \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}} w_{i_1}\cdots w_{i_k}$$

$$T_x^k f(z) = f(x) + \mathrm{d} f|_x (z-x) + \cdots + \frac{1}{k!}\,\mathrm{d} f^{(k)}|_x (z-x)^k$$

$$R_x^k f(z) = \frac{1}{(k+1)!}\,\mathrm{d} f^{(k+1)}|_\zeta (z-x)^{k+1}$$

Falls f beliebig mal differenzierbar ist ($f \in C^\infty(\Omega)$ d.h. die ganze partielle Ableitung existieren und sind stetig) können wir die Taylorreihe schreiben.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\mathrm{d} f^{(k)}|_x (z-x)^k$$

Konvention:

$$\frac{1}{0!}\,\mathrm{d} f^{(0)}|_x (z-x)^0 = f(x)$$

Definition 1.98. Eine Funktion $f \in C^\infty(\Omega)$ heisst analytisch wenn $\forall x \in \Omega$ $\exists B_r(x) \subset \Omega$ mit der Eigenschaft dass:

$$T_x(z) = f(z) \;\; \forall z \in B_r(x)$$
$$(f \in C^\omega(\Omega))$$

1.11 Das Taylorpolynom zweiter Ordnung

$$f(z) = f(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(z_i - x_i)}_{\langle \nabla f(x), z-x\rangle}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)(z_i - w_i)(z_j - w_j) \tag{20}$$

$$+\text{Fehler} = \sum\sum\sum \cdots (z_{i_1} - x_{j_1})(z_{i_2} - x_{i_2})(z_{i_3} - x_{i_3}$$

Die Hessche Matrix

$$Hf(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}$$

Bemerkung 1.99. Schwarz $\implies$ $Hf(x)$ ist symmetrisch wenn alle Ableitungen zweiter Ordnung stetig sind.

$$\underbrace{\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j}(x)(z_i - x_i), \cdots, \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_i}(x)(z_i - x_i)}_{=Hf(x)(z-x)}$$

Deswegen

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n (z_j - x_j) \sum_{i_1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)(z_j - x_j) &= 20 \\ &= \langle z - x, Hf(x)(z-x)\rangle \\ &= (z-x)^T Hf(x)(z-x)\end{aligned}$$

H $n \times n$ Matrix, die Abbildung

$$w \mapsto w^T AW (= \langle w, Aw\rangle)$$

ist eine “quadratische Form”.

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung

$$T_x^2 f(z) = f(x) + \langle \nabla f(x), z - x\rangle + \frac{1}{2}(z-x)^T Hf(x)(z-x)$$

Korollar 1.100. *Falls $f \in C^3(\Omega)$ und $B_r(x) \subset \Omega$*

$$f(z) = T_x^2 + O(\|x - z\|^3)$$

d.h.

$$|f(z) - T_x^2 f(z)| \leq C\,\|z - x\|^3$$

Korollar 1.101. *Falls $f \in C^2(\Omega)$ und $B_r(x) \subset \Omega$, dann*

$$f(z) = T_x^2 f(z) + o(\|z - x\|^2)$$

d.h.

$$\lim_{z \to x} \frac{f(z) - T_x^2 f(z)}{\|z - x\|^2} = 0$$

Beweis. Taylorapprozetamation mit Ordnung 1

$$f(z) = T_x^1 f(z) + \frac{1}{2}(z-x)^T Hf(\zeta)(z-x)$$

$$\begin{aligned}
f(z) - T_x^2 f(z) &= \frac{1}{2}(z-x)^T Hf(\zeta)(z-x) - \frac{1}{2}(z-x)^T Hf(x)(z-x) \\
&= \frac{1}{2}(z-x)^T (Hf(\zeta) - Hf(x))(z-x) \\
&\leq \frac{1}{2} \|z-x\| \, \|Hf(\zeta) - Hf(x)(z-x)\| \\
&\leq \frac{1}{2} \|z-x\| \, \|Hf(\zeta) - Hf(x)\|_O \, \|z-x\| \\
&= \frac{1}{2} \|z-x\|^2 \, \|Hf(\zeta) - Hf(x)\|_O \\
\frac{|f(z-) - T_x^2 f(z)|}{\|z-x\|^2} &\leq \frac{1}{2} \|Hf(\zeta) - Hf(x)\|_O \\
\|\zeta - x\| &\leq \|z-x\|^x
\end{aligned}$$

Stetigkeit der Ableitungen 2. Ordnung

$$\implies \lim_{\zeta \to x} \|Hf(\zeta) - Hf(x)\|_O = 0$$

□

Definition 1.102. $X \subset \mathbb{R}^n$, $\exists : X \to \mathbb{R}$. f hat in $a \in X$ ein lokales Minimum/Maximum

$$\iff \exists a \in V \text{ (Umgebung) } .f(a) \leq f(x)(\text{bzw. } \geq f(x)) \forall x \in V$$

Man sagt das Minimum/Maximum ist <u>strikt</u> (oder <u>isoliert</u>)

$$\iff f(a) < f(x)(\text{bzw. } > f(x)) \forall x \in V \setminus \{a\}$$

Satz 1.103. *(Notwendiges Kriteroium für lokale Extrema). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ haben ein lokales Extremum in $a \in U$ und sei partiell differenzierbar. Dann gilt*

$$\partial_1 f(a) = \cdots = \partial_n f(a) = 0$$

D.h. wenn f differenzierbar ist, dann gilt $\mathrm{d}\, f|_a = 0$

Beweis. $F(t) = f(a + t_{e_i})$ (für t sehr klein, so dass $a + t_{e_i} \in U$ F hat lokale Extrema in 0, d.h. $F'(0) = \partial_1 f(a) = 0$ □

Definition 1.104. f differenzierbar, dann heisst a mit $\mathrm{d}\, f|_a = 0$ <u>kritischer Punkt</u>. Man sagt auch f ist <u>stationär</u> in a.

Bemerkung 1.105. lokale Extremum $\implies \not\Leftarrow$ kritischer Punkt.

Satz 1.106. *(Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema) $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ it $\mathrm{d}\, f|_a = 0$. Dann*

$$\begin{aligned}
H_f(a) > 0 &\implies a \text{ lokales Minimum} \\
H_f(a) < 0 &\implies a \text{ lokales Maximum} \\
H_f(a) \text{ indefinit} &\implies a \text{ kein Extremum}
\end{aligned}$$

Im indefiniten Fall gilt: $\exists$ Geraden G_1, G_2 durch a so dass $f|_{G_1 \cap U}$ in a ein lokales Minimum und $f|_{G_2 \cap U}$ in a ein lokales Maximum hat, d.h. a ist ein Sattelpunkt.

Bemerkung 1.107.

- $H_f(a) > 0$ bedeutet $H_f(a)$ <u>positiv definit</u>, d.h.

$$v^T H_f(a) v > 0 \;\; \forall v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- $H_f(a)$ indefinit, $\exists v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit
$$v^t H_f(a) v > 0$$
$$w^t H_f(a) w < 0$$

Beweis. $H_f(a) > 0$

$$\mathrm{d}\, f|_a = 0 \xRightarrow{\text{Taylor}} f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + R(h)$$

mit
$$\frac{R(h)}{\|h\|^2} \to 0 \ \ (\|H\| \to 0)$$

$f \in C^2$

- $\implies h \mapsto h^T H_f(a) h$ ist stetig
- $\implies$ ... hat ein Minimum auf $\{\|h\| = 1\}$ (kompakt), $m > 0$ (da $H_f(a) > 0$).
- $\implies h^T H_f h h \geq m \|h\|^2$ (da $h = \|h\| \frac{h}{\|h\|}$, $h \neq 0$

Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(a) \subset U$
$$|R(h)| \leq \frac{m}{4} \|h\|^2 \quad \forall h \in B_\varepsilon(a)$$
$$\implies f(a+h) \geq f(a) + \frac{m}{4} \|h\|^2 > f(a) \ \ \forall h \in B_\varepsilon(a)$$

d.h. f hat in a ein lokales Minimum

$H_f(a) < 0$ Betrachte $-f$ wie oben.

$H_f(a) <> 0$
$$\exists v, w: \ \ v^T H_f(a) v > 0, w^T H_f(a) w < 0$$
$$F_v(t) := f(a+tv), F_w(t) = f(a+tw)$$
$$\implies F_v''(0) > 0 \implies \text{lokales Maximum}$$
$$\implies F_v''(0) < 0 \implies \text{lokales Minimum}$$

$\implies$ Beh

□

Bemerkung 1.108. Mit diesem Satz lässt sich keine Aussage machen, falls $H_f(a)$ semidefinitiv ist, d.h. $H_f(a) \geq 0$, $H_f(a) \leq 0$.

Beispiel 1.109. $f(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x+1)$
$$\mathrm{d}\, f|_{(x,y)} = (y^2 + 3x^2 + 2x, 2(x-1)y)$$
$\implies \mathrm{d}\, f|_{(x,y)} = (0,0) \implies$ kritische Punkte:
$$P_1 = (0,0), P_2(-\frac{2}{3}, 0)$$
$$\implies H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+2 & 2y \\ 2y & 2(x-1) \end{pmatrix}$$
d.h.
$$\implies H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
indefinit, d.h. Sattelpunkt.
$$\implies H_f(P_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix} < 0$$
d.h. lokales Maximum

Beispiel 1.110. $f(x,y) = x^2 + y^3$, $g(x,y) = x^2 + y^4$ Beim Punkt 0 ist die Hesse-Matrix in beiden Fällen $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Daraus kann man nichts schliessen (sehe Graphen (Freiwilliger gesucht))

1.12 Konvexität

Definition 1.111. $U \subset \mathbb{R}^n$ heisst <u>konkav</u>

$$\iff \forall x, y \in U: \quad [x, y] \subset U$$

Definition 1.112. $f : U \to \mathbb{R}$ heisst <u>konvex</u>

$$\iff \forall x, y \in U: \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f|_y$$

- Falls $\forall x, y \in U$ $\forall t \in (0,1)$ "¡", heisst die Funktion <u>strikt</u> konkav.
- f heisst (streng) <u>konkav</u>, falls $-f$ (streng) <u>konvex</u>

Bemerkung 1.113. f ist konvex

$$\iff \forall x \neq y \in U: \quad F_{x,y}(t) = f(x + t(y-x)) \text{ konvex (auf } [x,y])$$

Satz 1.114. *(Konvexitätskriterium) Sei $f : U \to \mathbb{R}, C^2$ $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, konvex. Es gilt:*

1. *f konvex $\iff$ $H_f(x) \geq 0$ $\forall x \in U$*
2. *$H_f(x) > 0$ $\forall x \in U$ $\implies$ f streng konvex*

Bemerkung 1.115. Umkehrung von 1 gilt nicht, z.B. $f(x,y) = x^4 + y^4$

Beweis. 1. f konvex: $\forall x \in U$ wähle $r > 0$: $B_r(x) \subset U$

$$\implies F_{x,x+h}(t) \text{ konvex } \forall h \in B_r(0)$$

$$\implies h^T H_f(x) h = F''_{x,x+h}(0) \underbrace{\geq}_{\text{Konvexität in 1-Dim}} 0 \forall h \in B_r(0)$$

$$\xRightarrow{\text{homogenität}} h^T H_f(x) h \geq 0 \ \ \forall h \in \mathbb{R}^n, \text{d.h. } H_f(x) \text{ positiv semidefinit}$$

$H_f(x) \geq 0$ $\forall x \in U$:

$$a, b \in U \implies F''_{a,b}(t) = (b-a)^T H_f(a + t(b-a))(b-a) \geq 0$$

$$\implies F_{a,b} \text{ konvex } \forall a, b \in U \implies \text{Behauptung}$$

2. Analog wie die zweite Richtung im Ersten.

□

1.13 Differentation parameterabhängiger Integrale

$f : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $t \to f(x,t)$ stetig. $\forall x \in U$. Definiere

$$F(X) := \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\, t \quad x \in U$$

Satz 1.116. *Sei f wie oben und es gelte:*

1. *$\forall t \in [a,b]$: $x \mapsto f(x,t)$ nach x_i partiell differenzierbar*
2. *$(x,t) \mapsto \partial_i f(x,t)$ ist stetig auf $U \times [a,b]$*

$\implies$ F ist nach x_i stetig partiell differenzierbar, und es gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t) \, \mathrm{d}\, t$$

Sei $f : \underbrace{U}_{\subset \mathbb{R}} \times [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig (U offen) $\forall x \in U$ sei

$$F(x) = \int_a^b f(x,t) \, \mathrm{d}\, t$$

Satz 1.117. *(Differentationssatz) Falls*

1. *$\forall t \in [x, b]$ ist $x \mapsto f(x, t)$ nach x_i partiell differenzierbar*

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) \;\; \forall (x, t) \in U \times [a, b]$$

2. *und $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ist stetig*

dann $\exists$ auch $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$ und

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) \,\mathrm{d}\, t$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^b f(x, t) \,\mathrm{d}\, t = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(x, t) \,\mathrm{d}\, t$$

Beweis. Sei $x \in U$ und $e_i = (0, \cdots, \underbrace{1}_{i\text{te Stelle}}, \cdots, 0)$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x + \varepsilon e_i) - F(x)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \int_a^b f(x + \varepsilon e_i, t) \,\mathrm{d}\, t - \int_a^b f(x, t) \,\mathrm{d}\, t \right\}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b \frac{f(x + \varepsilon e_i, t) - f(x, t)}{\varepsilon} \,\mathrm{d}\, t$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) \,\mathrm{d}\, t \iff$$

$$\iff \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_a^b \frac{f(x + \varepsilon e_i, t) - f(x, t)}{\varepsilon} \,\mathrm{d}\, t - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) \,\mathrm{d}\, t \right\} = 0$$

$$\iff \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_a^b \left[\frac{f(x + \varepsilon e_i, t) - f(x, t)}{\varepsilon} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) \,\mathrm{d}\, t \right] \right\} = 0$$

Wir behaupten mehr, d.h.

$$\int_a^b | \underbrace{\frac{f(x + \varepsilon e_i, t) - f(x, t)}{\varepsilon}}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi_\varepsilon, t)} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) | \,\mathrm{d}\, t \overset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$$

wobei $\xi_\varepsilon(t) \in [x, x + \varepsilon e_i]$

$$\int_a^b |\cdots| = \int_a^b | \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi(t), t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) | \,\mathrm{d}\, t$$

$$\lim_{e \to 0} \xi_\varepsilon(t) = x$$

und (wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial x_i}$)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi_\varepsilon(t), t) \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)$$

Behauptung 1.118. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \varepsilon_0 > 0$ *so dass*

$$|\varepsilon| \le \varepsilon_0 \implies \sup_{t \in [a,b]} | \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi(t), t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) | < \delta$$

$\implies$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} A(\varepsilon) \le \sup_{|\varepsilon|<\varepsilon_0} A(\varepsilon)$$
$$\le \int_a^b \delta \,\mathrm{d}\, t = \delta(b-a)$$

δ ist beliebig

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A(\varepsilon) = 0$$

Lemma 1.119. *Sei $g : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig (wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist). Sei $x \in U$ Dann $\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0$ mit*

$$\sup_{y\in B_\varepsilon(x)} |g(y,t) - g(x,t)| < \delta \ \ \forall t \in [a,b]$$

Betrachte x als "Parameter" $\forall y$ sei $t \mapsto g(y,t) = g_y(t)$. Dann $g_y \to g_x$ gleichmässig für $x \to x$.

Bemerkung 1.120. Das Lemma nutzt nur die Kompaktheit von $[a,b]$ (in der Behauptung können wir $[a,b]$ durch eine beliebige kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ ersetzen)

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben $\forall (x,t)\ \exists \delta(x,t) > 0$ so dass

$$|g(\xi,\tau) - g(x,t)| < \frac{\varepsilon}{10} \ \ \forall(\xi,\tau)$$

mit

$$\left\|\underbrace{(\xi,\tau)}_{\in\mathbb{R}^n} - \underbrace{(x,t)}_{\in\mathbb{R}^n}\right\| < \delta(x,t)$$

$$\|(\xi,\tau)-(x,t)\| = \sqrt{\|\xi - x\|^2 + (t-\tau)^2}$$

Nun $\forall t \in [a,b]$

$$\left\{B_{\delta(x,t)}(x,t) : t \in [a,b]\right\}$$

ist eine Überdeckung von

$$K = \{(x,t) : t \in [a,b]\}$$

kompakt weil

$$[a,b] \ni t \mapsto (x,t)$$

stetig von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. K ist das Bild von $[a,b]$ durch diese Abbildung. $\square$

Bemerkung 1.121. f stetig
$$\begin{array}{lcl} K \text{ kompakt} & \implies & f(K) \text{ kompakt} \\ A \text{ abgechlossen} & \implies & f^{-1}(A) \text{ abgeschlossen} \\ O \text{ offen} & \implies & f^{-1}(A) \text{ offen} \end{array}$$
Alle anderen Implikationen stimmen NICHT.

$\forall (x,t)$ Sei

$$U_{x,t} = \underbrace{B_{\frac{\sqrt{2}}{2}\delta(x,t)}(x)}_{\subset\mathbb{R}^n} \times \left]t - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta(x,t), t + \frac{\sqrt{2}}{2}\delta(x,t)\right[$$

$(y,\tau) \in U_{x,t}$

$$\implies \|y - x\| \le \frac{\sqrt{2}}{2}\delta(x,t) \ \text{ und } \ |t-\tau| < \frac{\sqrt{2}}{2}\delta(x,t)$$

$$\|(y,t)-(x,\tau)\| < \sqrt{\frac{1}{2}\delta^2(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2(x,t)} = \delta(x,t)$$
$$\implies (y,t) \in B_{\delta(x,t)}(x,t)$$

$$\implies U_{x,t} \subset B_{\delta(x,t)}(x,t)$$

$\{U_x, t : t \in [a,b]\}$ ist eine offene Überdeckung von K. Kompaktheit $\implies \exists\{U_{x_i,t_i} : i \in \{1, \cdots, N\}\}$ Überdeckung von K. Sei

$$\delta = \min\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\delta(x_i, t_i) : i \in \{1, \cdots, N\}\right\} > 0$$

Sei $t \in [a,b]$, $(x,t) \in U_{x_i,t_i}$ für mindestens ein $i \in \{i, \cdots, N\}$. Sei y so dass $y - x < \delta$

$$(x,t), (y,t) \in U_{x_i,t_i} \subset B_{\delta(x_i,t_i}(x_i, t_i)$$

$$\implies |g(y,t) - g(x_i, t_i)| < \frac{\varepsilon}{10}$$

und

$$\implies |g(x,t) - g(x_i, t_i)| < \frac{\varepsilon}{10}$$

$$\implies |g(x,t) - g(y,t)| < \frac{\varepsilon}{5}$$

$$\implies \sup_{y \in B_\delta(x)} |g(x,t) - g(y-t)| \leq \frac{\varepsilon}{5} < \varepsilon \ \ \forall t \in [a,b]$$

□

Korollar 1.122. *Sei $g : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann*

$$F(x) = \int_a^b g(x,t)\,\mathrm{d}\,t$$

ist eine stetige Funktion

Beweis. Seien $x \in U$ und $\varepsilon > 0$. Das letzte Lemma $\implies \exists\delta > 0$ so dass

$$|g(x,t) - g(y,t)|\frac{\varepsilon}{b-a}$$

$\forall t$ und $\forall y, x$ mit $\|y - x\| < \delta$. Deswegen für $\|y - x\| < \delta$

$$|F(y) - F(x)| = |\int_a^b (g(x,t) - g(y,t))\,\mathrm{d}\,t|$$

$$\leq \int_a^b |g(x,t) - g(y,t)|\,\mathrm{d}\,t$$

$$< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}\,t = \varepsilon$$

□

Bemerkung 1.123. Im Differentiationssatz ist $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ eine stetige Funktion. Da

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,\mathrm{d}\,t$$

ist $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ stetig.

Bemerkung 1.124. Eine sehr wichtige Konsequenz: Sei $f : \underbrace{U}_{\subset \mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $\underbrace{[a,b] \times [c,d]}_{R} \subset U$

$$s \mapsto F(s) = \int_a^b f(t,s)\,\mathrm{d}\,t$$

$$\int_c^d F(s)\,\mathrm{d}\,s = \int_c^d \left(\int_a^b f(t,s)\,\mathrm{d}\,s\right)\mathrm{d}\,t$$

$$\int_c^d \int_a^b f(t,s)\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,s$$

$$t \mapsto G(t) = \int_c^d f(t,s)\,\mathrm{d}\,s$$

$$\int_a^b G(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b \int_c^d f(t,s)\,\mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}\,t$$

Satz 1.125. *f stetig* $\Longrightarrow$

$$\int_a^b \int_c^d f(s,t)\,\mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}\,t = \int_c^d \int_a^b f(s,t)\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,s$$

Beweis. $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$

$$F(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(s,t)\,\mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}\,t$$

$$G(x,y) = \int_c^y \int_a^x f(t,s)\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,s$$

□

Satz 1.126. *Sei $f : \underbrace{U}_{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $R = [a,b] \times [c,d] \subset U$. Dann:*

$$\int_a^b \int_c^d f(s,t)\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,s = \int_c^d \int_a^b f(s,t)\,\mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}\,t$$

Beweis. Wir definieren

$$\Phi(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(s,t)\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,s$$

$$\Psi(x,y) = \int_c^y \int_a^x f(s,t)\,\mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}\,t$$

Konvention: $\int_\alpha^\beta = -\int_\beta^\alpha$ falls $\beta < \alpha$ und $\int_\alpha^\alpha = 0$
Φ und Ψ sind stetig differenzierbar und $\nabla\Phi = \nabla\Psi$
$\Phi = \Psi$ (Kein Problem mit Definition. Die FUnktion sind wohldefiniert fur $(x,y) \in]a-\varepsilon, b+\varepsilon[\times]c-\varepsilon, d+\varepsilon[$ wobei $\varepsilon > 0$ klein genug ist) Sei y fixiert

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y) = ?$$

$$\phi(x) = \int_c^y f(x,t)\,\mathrm{d}\,t$$

ϕ stetig wegen der letzten Vorlesung. Fundamentalsatz der Int.:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y) = \phi(x) = \int_c^y f(x,t)\,\mathrm{d}\,t$$

$\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}$ ist eine stetige Funktion. Sei (x_0,y_0), $\varepsilon > 0$. Dann (aus der letzten Vorlesung stetig in x) $\exists\delta$

$$|\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,y_0) - \frac{\partial\Psi}{\partial x}(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei x fixiert:

$$|\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,y_0) - \frac{\partial Psi}{\partial x}(x,y)|$$

$$= |\int_c^y f(x,t)\,\mathrm{d}\,t - \int_c^{y_0} f(x,t)\,\mathrm{d}\,t|$$
$$= |\int_{y_0}^y f(x,t)\,\mathrm{d}\,t|$$
$$\leq \int_{y_0}^y |f(x,t)|\,\mathrm{d}$$
$$\leq M|y - y_0|$$

Deswegen für $\bar{\delta} \leq \frac{\varepsilon}{2H}$

$$|y - y_0| < \bar{\delta}$$
$$\implies |\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y_0) - \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wenn

$$\|(x,y) - (x_0, y_0)\|] < \min\left\{\delta, \bar{\delta}\right\}$$

$\implies |x - x_0| < \delta$ und $|y - y_0| < \bar{\delta}$

$$|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0)|$$
$$\leq |\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y_0)| + |\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y_0) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Das gleiche Argument: $\dfrac{\partial \Psi}{\partial y}$ exisiert und ist stetig.

$$\psi(x,y) := \int_a^x f(s,y)\,\mathrm{d}\,s$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_c^y \psi(x,t)\,\mathrm{d}\,t$$
$$\stackrel{?}{=} \int_c^y \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}\,t$$

Wir brauchen hier die Stetigkeit von ψ. Das haben wir mit dem letzten Argument!

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\int_a^x f(s,t)\,\mathrm{d}\,s \stackrel{\text{Fundamentalsatz}}{=} f(x,t) \tag{21}$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \int_c^y f(x,t)\,\mathrm{d}\,t \stackrel{!}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Das gleiche Argument $\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$ sind stetig. Sei $\alpha := \Phi - \psi \implies \alpha$ ist differenzierbar und $\mathrm{d}\,\alpha = 0$

$$= [a - \varepsilon, b + \varepsilon[\times]c - \varepsilon, d + \varepsilon[$$
$$|\alpha(x_0,y_0) - \alpha(x_1,y_1)| \leq \|(x_1,y_1) - (x_0,y_0)\| \max \|\nabla\alpha\| = 0$$

Schrankensatz? da $[(x_0,y_0)(x_1,y_1)]$ ist im Definitionsbereich

$$\Phi - \Psi = \alpha = \text{konstant} = \Phi(a,c) - \Psi(a,c) = 0 - 0 = 0$$
$$\implies \Phi(x,y) = \Psi(x,y) \;\; \forall (x,y) \in]a - \varepsilon, b + \varepsilon[\times]c - \varepsilon, d + \varepsilon[$$

$y = d, x = b \implies$ den Satz. □

2 Differenzierbare Abbildungen

$f : \underbrace{\subset \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^m$

Definition 2.1. f ist in x_0 differenzierbar falls $\exists L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare Abbildung:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)}{\|h\|} = 0$$

d.h. wenn

$$R(h) := f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)$$

dann

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|R(h)\|}{\|h\|} = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\text{ so dass }\; 0 < \|h\| < \delta \implies \frac{\|R(h)\|}{\|h\|} < \varepsilon$$

oder auch "$\|R(h)\| \to 0$ schneller als $\|(\| h)$" (in "klein-o-Notation": $R(h) = o(\|h\|)$) Deswegen

$$f \text{ diff in } \; x_0 \iff \exists L \lim \;\text{ mit }\; f(x_0+h) - f(x_0) + L(h) + o(\|h\|) \tag{22}$$

Bemerkung 2.2. f differenzierbar in $x_0 \implies$ stetig in x_0
f differenzierbar in $x_0 \implies \exists!$ lineare Abbildung die 22 erfüllt. Wir nennen L das Differential von f. $\mathrm{d}\, f|_{x_0}$
Bemerkung 2.3. $f : U \to \mathbb{R}^m$

$$f(x) = \underbrace{(f(x), \cdots, f_m(x))}_{m \text{ Funktionen}}$$

$\forall i \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ n partielle Ableitungen

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1n} \\ L_{21} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{m1} & \cdots & L_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$$

$$L(x) = \begin{pmatrix} L_{11} + L_{12} + \cdots + L_{1n}x_n \\ L_{21} + \cdots + L_{2n}x_n \\ \vdots \\ L_{m1} + \cdots + L_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1x \\ L_2x \\ \vdots \\ L_mx \end{pmatrix}$$

$\exists m$ lineare Abbildungen $\mathbb{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$L(x) = \begin{pmatrix} \mathbb{L}_1(x) \\ \mathbb{L}_2(x) \\ \vdots \\ \mathbb{L}_n(x) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{L}_i(x) = L_i x$$

Bemerkung 2.4. Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x_0 und sei $L = \mathrm{d}\, f|_{x_0}$. Dann:

$$\frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)}^{A}}{\|h\|} \to 0 \tag{23}$$

$$A := \begin{pmatrix} f_1(x+h) \\ \vdots \\ f_m(x_0+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_m(x_0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{L}_1(h) \\ \vdots \\ \mathbb{L}_m(h) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(x_0+h) - f_1(x_0) - \mathbb{L}_1(h) \\ \vdots \\ f_m(x_0+h) - f_m(x_0) - \mathbb{L}_m(h) \end{pmatrix}$$

$$\frac{A}{\|h\|} = \begin{pmatrix} \frac{f_1(x_0+h)-f_1(x_0)-\mathbb{L}_1(h)}{\|h\|} \\ \vdots \\ \frac{f_m(x_0+h)-f_m(x_0)-\mathbb{L}_m(h)}{\|h\|} \end{pmatrix}$$

Deswegen

$$23 \iff \lim_{h \to 0} \frac{f_i(x_0+h) - f_i(x_0) - \mathbb{L}_i(h)}{\|h\|} = 0 \;\; \forall i \in \{1, \cdots, m\}$$

$\iff$ f_i ist differenzierbar in x_0 und $\mathbb{L}_i = \mathrm{d}\, f_i|_{x_0}$

Satz 2.5. *Sei* $f : \underbrace{U}_{\subset \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^m$ *mit* U *offen und* $f = (f_1, \cdots, f_m)$

1. f *ist differenzierbar in* $x_0 \iff f_i$ *differenzierbar in* x_0 $\forall i \in \{1, \cdots, m\}$
2. $$\mathrm{d}\, f|_{x_0}(h) = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\, f_1|_{x_0}(h) \\ \vdots \\ \mathrm{d}\, f_m|_{x_0} \end{pmatrix}$$
3. $$\mathrm{d}\, f|_{x_0}(h) = \begin{pmatrix} \nabla f_1 + (x_0)h \vdots \\ \nabla f_n + (x_0)h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 & & \\ & \vdots & h_n \end{pmatrix}$$

   Das ist die Jacobi Matrix.

Bemerkung 2.6. $f, g; U \to \mathbb{R}^m$ beide differenzierbar in x_0, dann

$$f + g \left(= \begin{pmatrix} f_1 + g_1 \\ \vdots \\ f_m + g_m \end{pmatrix} \right)$$

ist differenzierbar in x_0 und $\mathrm{d}\, f|_{x_0} + \mathrm{d}\, g|_{x_0}$

Bemerkung 2.7. $f : U \to \mathbb{R}^m$ und $g : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x_0

$$(gf)(x) = g(x)f(x) = \begin{pmatrix} g(x)f_1(x) \\ \vdots \\ g(x)f_m(x) \end{pmatrix}$$

$$\frac{?}{\mathrm{d}(gf)} = \mathrm{d} \begin{pmatrix} gf_1 \\ \vdots gf_m \end{pmatrix} \Big|_{x_0} (h) = \begin{pmatrix} \mathrm{d}(gf_1)|_{x_0}(h) \\ \vdots \\ \mathrm{d}(gf_m)|_{x_0}(h) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{d}\, g|_{x_0}(h) f_1(x_0) + g(x_0)\, \mathrm{d}\, f_1|_{x_0}(h) \\ \vdots \\ \mathrm{d}\, g|_{x_0}(h) f_m(x_0) + g(x_0)\, \mathrm{d}\, f_m|_{x_0}(h) \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_0) f_1(x_0) + g(x_0)\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0) f_1(x_0) + g(x_0)\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_0) f_m(x_0) + g(x_0)\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0) f_m(x_0) + g(x_0)\frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_0) f_1(x_0) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0) f_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_0) f_m(x_0) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0) f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} g(x_0)\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & g(x_0)\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(x_0)\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & g(x_0)\frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}(x_0) f_i(x_0)\right)}_{=f(x_0)\otimes\nabla g(x_0)} + \overbrace{\underbrace{g(x_0)\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)}_{\text{Jacobi}}}^{A}$$

$$\mathrm{d}(gf)|_{x_0} = \underbrace{g(x_0)\,\mathrm{d}\,f|_{x_0}}_{A} + \overbrace{f(x_0)\otimes \mathrm{d}\,g|_{x_0}}^{\text{lineare Abbildung mit Rang 1}}$$

$$\mathrm{d}(gf)|_{x_0}(h) = g(x_0)\,[\mathrm{d}\,f|_{x_0}(h)] + [f(x_0)]\,\mathrm{d}\,g|_{x_0}(h)$$