# Analysis II - Vorlesungs-Script

Prof. Dr. Camillo De Lellis

Basisjahr 11 Semester I

**Mitschrift:**
Simon Hafner

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Metrik und Topologie des euklidischen Raumes

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n), x \in \mathbb{R}\}$ In $\mathbb{R}^n$:

- Norm (Euklidische)
- Abstand (Euklidische)
- Topologie

“Abstrakte Theorie”

- Normierte Vektorräume
- Metrische Räume
- Topologische Räume

**Definition 1.1.** Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ($x = (x_1, \cdots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$)

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Intuitiv: $\|x\| =$”der Abstand zwischen $x$ und $0$“

**Lemma 1.2.** $\|.\|$ *erfüllt die Regeln*

1. $\|x\| \geq 0$ *und* $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

*Beweis.* 1. $\geq 0$ trivial

$$x = 0 \implies \sum x_i^2 = 0 \implies \|x\| = 0$$

$$x = 0 \Leftarrow x_i = 0 \forall i \Leftarrow \sum x_i^2 = 0 \Leftarrow \|x\| = 0$$

2.

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i)^2} \sqrt{\lambda^2 (\sum x^2)} = |\lambda| \sqrt{\sum x^2} = |\lambda| \|x\|$$

$$|\lambda| = \frac{\|x\| |\lambda|}{\|x\|}$$

3.

$$\iff \underbrace{\|x + y\|^2}_{=} \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\|$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + y_i^2 + 2 x_i y_i\right) = \|x\|^2 + \|y\|^2 \ \overbrace{2 \sum x_i y_i}^{Skalarprodukt}$$

$$\iff \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$$

$\square$

**Satz 1.3.** *Cauchy-Schwartzsche Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

*Beweis.* OBdA $y \neq 0$ ($y = 0$ trivial)

$$t \to g(t) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + ty_i)^2$$
$$= \left(\sum x_i^2\right) + 2t \sum x_i y_i + t^2 \sum y_i^2$$
$$= \|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + \|y\|^2 t^2$$

Sei $t_0 = \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$, dann $g(t_0) \geq 0$

$$0 \leq g(t_0)$$
$$= \|x\|^2 - 2\frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^2} + \|y\|^2 \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^4}$$
$$= \|x\|^2 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^2}$$
$$\implies \langle x, y\rangle \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$
$$\implies |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

□

**Definition 1.4.** Ein normierter Vektorraum ist ein reeller Vektorraum $V$ mit einer Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ so dass:

1. $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Nullvektor)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in V$

**Beispiel 1.5.** $V = \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad p \geq 1$$

$p = 2$ euklidische Norm

**Definition 1.6.** Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Die euklidische Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$

**Lemma 1.7.** *1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$*

*2. $d(x, y) = d(y, x)$*

*3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)*

*Beweis.*

$$\|x - z\| \leq \underbrace{\|x - y\|}_{v} + \underbrace{\|y - z\|}_{w} \quad v + w = x - z$$
$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

□

**Definition 1.8.** Ein metrischer Raum ist eine Menge $X$ mit einer Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \ \ (x, y) \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R}$$

so dass

1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y \ \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$
3. $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z) \ \forall x, y, z \in X$

**Lemma 1.9.** *Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann sind $V$ und $d(x,y) = \|x-y\|$ ein metrischer Raum.*

**Definition 1.10.** Die offene Kugel mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$K_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n, d(x,y) < r\}$$

**Definition 1.11.** Eine Menge heisst "Umgebung" von $x$, wenn $V$ eine offene Kugel mit Mittelpunkt $x$ enthält.

**Definition 1.12.** Eine Menge $U \in \mathbb{R}^n$ heisst offen falls $\forall x \in U$ ist $U$ eine Umgebung von $x$

$$\forall x \in U \ \ \exists \ \text{eine Kugel} \ \ K_r(x) \in U$$

*Bemerkung* 1.13. Eine offene Kugel ist offen.

**Satz 1.14.** *1. $\varnothing$ und $\mathbb{R}^n$ sind offen*

*2. Der Schnitt endlich vieler offener Mengen ist auch offen.*

*3. Die Vereinigung einer beliebigen Familie offener Mengen ist auch offen.*

*Beweis.* 1. $\mathbb{R}^n$ trivialerweise offen, auch $\varnothing$

2. Sei $x \in U \cap \cdots \cap U_N$

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\} \quad K_r(x) \subset U_i$$

Sei $r = \min\{r_i, \ldots, r_N\}$

$$\implies K_r(x) \subset U_i \forall i \implies K_r(x) \subset U_1 \cap \cdots \cap U_N$$

3. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Sei $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

$$x \in U \implies x \in U_\lambda \ \text{ für ein } \ \lambda \in \Lambda$$

$$\implies \exists K_r(x) \subset U_\lambda \subset U$$

$\square$

**Definition 1.15.** Ein topologischer Raum ist eine Menge $X$ und eine Menge $O$ von Teilmengen von $X$ so dass:

1. $\varnothing, X \in O$
2. $U_1 \cap \cdots \cap_N \in O$ falls $U_i \in O$
3. $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in O$ falls $U_i \in O$

**Satz 1.16.** *Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum*

$$K_r(x) = \{y = X : d(x,y) < r\}$$

*Umgebungen und offene Mengen sind wie im euklidischen Fall. $O = \{$offene Menge$\}$ definiert eine Topologie.*

## 1.1 Konvergenz

Sei $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ $x_k \in \mathbb{R}$ $x_k = (x_{k1}, \cdots, x_{kn})$

**Definition 1.17.** Die Folge $\{x_k\}$ konvergiert gegen $x_\infty \in \mathbb{R}^n$ falls

$$\lim_{k \to \infty} d(x_k, x_\infty) = 0$$

$$\left(\lim_{k \to \infty} \|x_k, x_\infty\| = 0\right)$$

Dann schreiben wir

$$x_\infty = \lim_{k \to \infty} x_k$$

**Satz 1.18.**

$$x_k \to x_\infty \iff x_{ki} \to x_{\infty_i} \ \ \forall i \in \{1, \cdots, n\}$$

*Beweis.*

$$\|x_k - x_\infty\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - x_{\infty_i})^2} \geq |x_{ki} - x_{k\infty}| \geq 0$$

$$\implies 0 \leq \lim_{k\to\infty} |x_{ki} - x_{k\infty}| \leq \lim \|x_k - x_\infty\| = 0$$

$$\|x_k - x_\infty\| = \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_{ki} - x_{\infty_i})^2}_{\to 0}}}_{\to 0} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_{ki} - x_{\infty_i}|$$

$$\implies \|x_k - x_\infty\| \to 0$$

Eine alternative Formulierung: $\lim_{k\to\infty} x_k = \left(\lim_{k\to\infty} x_{k1}, \cdots, \lim_{k\to\infty} x_{kn}\right)$ □

*Bemerkung* 1.19.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \|x_k - x_\infty\| < \varepsilon \ \text{ falls } \ k \geq N$$

Für jede Umgebung $U$ von $x_\infty$ fast alle $x_k \in U$.

**Definition 1.20.** Eine Folge $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heisst Cauchy falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : m, k \geq N \implies \|x_k - x_m\| < \varepsilon$$

**Lemma 1.21.** $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *konvergiert genau dann, wenn* $\{x_k\}$ *Cauchy ist.*

*Beweis.* $\{x_k\}$ ist Cauchy $\implies \left\{ x_k \underbrace{i}_{\{\text{fixiert}\}} \right\}$ Cauchy!

$$|x_{ki} - x_{m_i}| \leq \|x_k - x_m\|$$

$\implies \{x_k\}$ ist eine Cauchyfolge $\overset{\text{Erstes Semester}}{\implies}$ $x_{ki}$ konvergiert $\overset{\text{Lemma 2}}{\implies}$ $x_k$ konvergiert. $x_k$ konvergiert $\implies$ Cauchyfolge

$$x_\infty = \lim_{k\to\infty} x_k \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \|x_k - x_\infty\| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall k \geq N$$

$$\begin{aligned} k, m \geq N \quad \|x_k - x_m\| &\leq \|x_k - x_\infty\| + \|x_\infty - x_m\| \leq d(x_k, x_\infty) + (x_\infty, x_m) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

*Bemerkung* 1.22. In einem metrischen Raum, Cauchy $\Leftarrow$ Konvergenz. Aber allgemein: Cauchy $\not\Longrightarrow$ Konvergenz. Falls Cauchy $\implies$ Konvergenz, dann ist der metrische Raum vollständig.

**Definition 1.23.** Eine Folge $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heisst beschränkt falls $\|x_k\|$ beschränkt ist.

**Satz 1.24.** 1. *Eine konvergente Folge ist beschränkt*

2. *(Bolzano-Weierstrass)* $\{x_k\}$ *beschränkt* $\implies \exists \left\{x_{k_j}\right\}$ *die konvergiert.*

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \{x_k\} \ \text{ beschränkt } &\implies \{x_{k1}\}_{k\in\mathbb{N}} \ \text{ beschränkt} \\ &\implies \exists x_{k_j} : x_{k_j 1} \to x_1 \end{aligned}$$

Ich definiere $y_j = x_{k_j}$ $y_{j1} \to x_1$

$$y_j \ \text{ beschränkt } \implies \exists j_l : y_{j_l 2} \to x_2$$

$$z_l := y_{j_l} \ \text{ und } \ z_{l1} \to x_1, \ \ x_{l2} \to x_2$$

$\ldots (n-2)$ Schritte. $w_r$ Teilfolge von $x_k$ mit $w_{ri} \to x_i$

$$w_r \to (x_1, \cdots, x_n)$$

□

## 1.2 Ein bisschen mehr Topologie

**Definition 1.25.** Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heisst geschlossen falls $G^c (:= \mathbb{R}^n \setminus G)$ eine offene Menge ist.

*Bemerkung* 1.26.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

**Satz 1.27.** *1. $\varnothing, \mathbb{R}^n$ sind abgeschlossen*

*2. $G_1, \cdots, G_N$ abgeschlossen $\implies$ $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_N$ abgeschlossen*

*3. $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ abgeschlossen $\implies$ $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ abgeschlossen.*

**Satz 1.28.** *$G \subset \mathbb{R}^n$ $G$ ist abgeschlossen $\iff$ $\forall$ jede konvergente $\{x_k\} \subset G$ gehört der Grenzwert zu $G$ (gilt auch für metrische Räume).*

*Beweis.* $\Leftarrow$ Die rechte Eigenschaft gilt. Ziel: $G^c$ ist offen. Sei $x \in G^c$: das Ziel ist eine Kugel $K_r(x) \in G^c$ zu finden. Widerspruchsbeweis: $K_{\frac{1}{j}}(x) \not\subset G^c$, $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\implies \exists x_j \in K_{\frac{1}{j}}(x) \cap G \implies \{x_j\} \subset G \text{ und } x_j \to x$$

$$\{x_j\} \subset G \;\; x_j \to x \;\; x \notin G$$

$\implies$ d.h. $G^c$ offen $\implies$ falls $\{x_k\} \subset G$ und $x_k \to x$ dann $x \in G$ Widerspruch: $G^c$ offen, aber $\exists \{x_k\} \subset G$ mit Grenzwert $x \notin G$, d.h. $x \in G^c$. Offenheit von $G^c$.

$$\implies \exists K_r(x) \subset G^c \implies K_r(x) \cap = \varnothing$$

d.h. $\exists N$ mit

$$\|x_N - x\| < r \implies x_N \in K_r(x) \cap G$$

$\square$

**Beispiel 1.29.** Eine offene Kugel ist nicht geschlossen.

$$K_r(x) = \{y : \|y - x\| < r\}$$

Sei $\{y_k\} \in K_r(x)$, (d.h. $\|y_k - x\| < r$) mit $y_k \to y$ und $\|y - x\| = r$.

**Definition 1.30.** Sei $\overline{K_r(x)} := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$.

**Übung 1.31.** $\overline{K_r(x)}$ ist abgeschlossen

**Definition 1.32.** $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein Randpunkt von $M$ falls

$$\forall K_r(x) \;\; \exists y \in K_r(x) \cap M \;\text{ und }\; \exists z \in K_r(x) \cap M^c$$

**Definition 1.33.** Sei $M$ eine Menge in $\mathbb{R}^n$, dann ist der Rand von $M$

$$\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n, \;\text{ Randpunkt von }\; M\}$$

**Satz 1.34.** $\partial M^c = \partial M$

*1. $M \setminus \partial M$ ist die grösste offene Menge die in $M$ enthalten ist.*

*2. $M \cup \partial\partial M$ ist die kleinste geschlossene Menge die $M$ enthält.*

*Beweis.* $M \setminus \partial M$ ist offen.

$$x \in M \setminus \partial M \implies x \in M \text{ und } \exists K_r(x) \text{ mit } K_r(x) \cap M^c = \varnothing$$
$$\implies K_r(x) \subset M$$

Sei $y \in K_r(x)$

$$\implies |y - x| = \rho < r$$
$$\implies K_{r-\rho}(y) \subset K_r(x) \subset M \implies y \in M, y \notin \partial M$$
$$K_r(x) \subset M \setminus \partial M$$

$x$ ist beliebig $\implies M \setminus \partial M$ ist offen.
Sei $A \subset M$ eine offene Menge. Das Ziel ist $A \subset M \setminus \partial M$. Sei $x \in A$. Ziel:($x \in M \setminus \partial M$) $x \notin \partial M$.

$$A \text{ offen} \implies \exists K_r(x) \subset A \subset M \implies x \notin \partial M \implies A \subset M \setminus \partial M$$

□

## 1.3 Stetigkeit

**Definition 1.35.** Sei $f : \Omega_{\subset \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^k$. $f$ ist stetig an der Stelle $x \in \Omega$ falls $\forall \{x_k\} \subset \Omega$ mit $x_k \to x$.

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(x)$$

**Lemma 1.36.** *Eine equivalente Definition:*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : f\left(K_\delta(x) \cap \Omega\right) \subset K_\varepsilon(f(x))$$

*Beweis.* $\varepsilon$-$\delta$ $\implies$ Folgendefinition. Sei $x_k \to x$. Ziel: $f(x_k) \to f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \text{ mit } \underbrace{\underbrace{\|f(x_k) - f(x)\|}_{d(f(x_k), f(x))}}_{f(x_k) \in K_\varepsilon(f(x))} < \varepsilon \;\; \forall k \geq N$$

$$\exists \delta > 0 \;\; \underbrace{f(K_\delta(x)) \subset K_\varepsilon(f(x))}$$

$$\exists \;\; \|x_k - x\| < \delta \;\; k \geq N$$

$$x_k \in K_\delta(x) \implies f(x_k) \in K_\varepsilon(f(x))$$

Folgendefinition $\implies$ ($\varepsilon$-$\delta$)-Defintion. Widerspruchsannahme:

$$\exists \varepsilon > 0 : f(K_\delta(x) \cap \Omega) \not\subset K_\varepsilon(f(x)) \;\; \forall \delta > 0$$

$$\implies \forall \delta > 0 \;\; \exists y_\delta \in K_\delta(x) \text{ und } \|f(y_\delta) - f(x)\| \geq \varepsilon$$

Nehmen wir $\delta = \frac{1}{j}$ und $x_j = \frac{y_1}{j}$

$$\|x_j - x\| < \frac{1}{j} \;\; (\text{weil } x_j \in K_{\frac{1}{j}}(x))$$

$$\|f(x_j) - f(x)\| = \left\| f(y_{\frac{1}{j}} - f(x)) \right\| \geq \varepsilon$$

$x_j \to x$ aber $f(x_j) \not\to f(x)$ □

**Definition 1.37.** Die allgemeine Defintion der Stetigkeit für metrische Räume: Seien $(X, d)$ und $(Y, \overline{d})$ zwei metrische Räume. Sei $f : X \to Y$. $f$ ist stetig an der Stelle $x$ falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \text{ mit } d(y, x) < \delta \implies d(f(y), f(x)) < \varepsilon$$

$$\iff f(K\delta(x)) \subset K_\varepsilon(f(x))$$

**Definition 1.38.** Eine $f : X \to Y$ heisst stetig falls $f$ stetig an jeder Stelle $x \in X$ ist.

**Satz 1.39.** *Sei $f : X \to Y$ $((X,d),(Y\overline{d})$ metrische Räume) Dann:*

1. *Die Stetigkeit in $x \iff \forall$ Umgebung $U$ von $f(x)$ ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von $x$.*
2. *Stetigkeit von $f \iff f^{-1}(U)$ ist offen $\forall U$ offen.*

*Beweis.* 1. • Stetigkeit $\implies$ Umgebung. $U$ Umgebung von $f(x) \implies \exists\delta > 0$ mit $K_\delta(f(x)) \subset U$

$$\implies \exists\varepsilon > 0 : f(K_\varepsilon(x)) \subset K_\delta(f(x))$$

$$\implies f^{-1}(U) \supset f^{-1}(K_\delta(f(x))) \supset K_\varepsilon(x) \implies f^{-1}(U) \text{ Umgebung von } U$$

• Umgebung $\implies$ Stetigkeit. Sei $\delta > 0$ $U = K_\delta(f(x))$. $U$ Umgebung von $f(x)$. $f^{-1}(U)$ ist eine Umgebung von $x$.

$$\implies \exists\varepsilon > 0 : K_\varepsilon(X) \subset f^{-1}(U)$$

$$\implies f(K_\varepsilon(x)) \subset U = K_\delta(f(x))$$

2. • Stetigkeit $\implies$ offen. Sei $U$ offen $\iff \forall y \in U$ ist $U$ eine Umgebung von $y$

$$f^{-1}U \ni x \implies f(x) \in U \overset{\text{Stetigkeit in } x}{\implies} f^{-1}(U) \text{ ist eine Umgebung von } x$$

$$\implies f^{-1}(U) \text{ ist offen}$$

• offen $\implies$ Stetigkeit an jedem $x \in X$. Sei $x \in X$, $\delta > 0$, $K_\delta(f(x))$ ist offen

$$f^{-1}(K_\delta(f(x))) \text{ ist offen} \implies x \in f^{-1}(K_\delta(f(x)))$$

$$\implies \exists\varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(K_\delta(f(x)))$$

$$f(K_\varepsilon(x)) \subset K_\delta(f(x))$$

□

## 1.4 lineare Abbildungen

**Definition 1.40.** Eine Abbildung $L : V \to W$ ($V$, $W$ Vektoren) heisst linear, falls

$$L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2) \;\; \forall v_1, v_2 \in V, \;\; \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \iff \exists \text{ eine Matrix } L_{ij} :$$

$$L(x) = \left( \sum_{j=1}^{n} L_{1j} x_j, \sum_{j=1}^{n} L_{2j} x_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n} L_{kj} x_j \right)$$

**Definition 1.41.** Sei $L_{ij}$ eine Matrix die die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ darstellt. Die Hilbert-Schmidt Norm von $L$ ist

$$\|L\|_{\mathrm{HS}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^2}$$

*Bemerkung* 1.42. $\{L : (L_{ij} n \times k \text{ Matrixen}\} \sim \mathbb{R}^{nk}$ $\|.\|_{\mathrm{HS}}$ ist die euklidische Norm.

*Bemerkung* 1.43. Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann $\|L(x)\| \leq \|x\| \, \|L\|_{\mathrm{HS}}$.

**Korollar 1.44.** *Sei $L$ wie oben, dann ist $L$ stetig.*

*Beweis.* Sei $x_k \to x$. Ziel $L(x_k) \to L(x)$

$$\|L(x_k) - L(x)\| = \|L(x_k - x)\| \le \|x_k - x\| \, \|L\|_{\mathrm{HS}} \to 0$$
$$\implies \|L(x_k) - L(x)\| \to 0$$
$$\implies \text{Stetigkeit}$$

□

*Beweis.* Beweis von 1.36: $L(x) = y$

$$\|L(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{k} y_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left( \sum_{j=1}^{n} L_{ij} x_j \right)^2 \overset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\le} \sum_{i=1}^{k} \left( \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^2 \right) \left( \sum_{j=1} x_j \right)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^2 \, \|x\|^2 = \|x\|^2 \left( \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^2 \right)$$
$$\|x\|^2 \, \|L\|_{\mathrm{HS}}^2 \implies \|L(x)\| \le \|x\| \, \|L\|_{\mathrm{HS}}$$

□

**Definition 1.45.** Sei $L : V \to W$ eine lineare Abbildung wobei $(V, \|.\|_V)$ und $(W, \|.\|_W)$ zwei endlich-dimensionierte Vektorräume sind. Die Operatornorm von $L$ ist:

$$\|L\|_{L(V,W)} := \sup_{\|v\|_V \le 1} \|L(v)\|_W$$

**Satz 1.46.** $\|.\|_{L(V,W)}$ *ist eine Norm und*

$$\|L(v)\|_W \le \|L\|_{L(V,W)} \, \|v\|_V$$

*Deswegen: jede lineare Abbildung $L : V \to W$ ist stetig.*

*Beweis.* Der Kern ist die folgende Eigenschaft:

$$\|L\|_{L(V,W)} < +\infty$$

Wenn das gilt dann:

1. $$\underbrace{\|L\|_{L(V,W)}}_{\text{Kern}} \text{ und } \|L\|_{L(V,W)} = 0 \iff L = 0$$

   $\Leftarrow$ einfach. Sei $\|L\|_{L(V,W)} = 0$. Dann sei $v \in V$.

$$v = 0 \implies L(v) = 0$$
$$v \ne 0 \;\; z \frac{v}{\|v_V\|} \implies \|z\|_V = 1$$
$$\|L(z)\|_W \le \sup_{\|y\|_V \le 1} \|L(v)\|_W = 0$$
$$\implies L(z) = 0 \implies L(v) = L\left(\|v\|_V \, z\right) = \|v\|_V \, L(z) = 0$$

2.
$$\|\lambda L\|_{L(V,W)} = |\lambda| \, \|L\|_{L(V,W)}$$
$$\begin{aligned} \|\lambda L\|_{L(V,W)} &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|\lambda L(v)\|_W \\ &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} |\lambda| \, \|L(v)\|_W \\ &= |\lambda| \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W \\ &= |\lambda| \, \|L\|_{L(V,W)} \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} &\|L + L'\|_{L(V,W)} \\ &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|(L + L')(v)\|_{L(V,W)} \\ &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(v) + L'(v)\|_{L(V,W)} \\ &\leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} (\|L(v)\|_W + \|L'(v)\|_W) \\ &\leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W + \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L'(v)\|_W \\ &= \|L\|_{L(V,W)} + \|L'\|_{L(V,W)} \end{aligned}$$

Wenn $v_1, \cdots, v_n$ Basis für $V$, $w_1, \cdots, w_k$ Basis für $W$. Die lineare Abbildung $E_{ij}(v_i) = w_j$, $E_{ij}(v_l) = 0$ falls $l \neq i$ ist eine Basis für $L(V,W) \implies L = \sum_{i,j} \lambda_{ij} E_{ij}$

□

$$(V, \|.\|) \;\; (W, \|.\|) \;\; L : V \to W \;\; \|L\|_{L(V,W)} := \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W \tag{1}$$

**Satz 1.47.** *Falls* $\dim(V)$, $\dim(V) < +\infty$, $\|L\|_{L(V,W)} < +\infty$ *Wahr ohne Beweis in* $V$ *und deswegen* $L(V,W)$, $\|.\|_{L(V,W)}$ $\forall v \in V$, $\forall L \in L(V,W)$

$$\|L(v)\|_W \leq \|L\|_{L(V,W)} \|v\|_V \tag{2}$$

*Aus 2 folgt dass* $L$ *stetig ist wenn* $\|L\|_{L(V,W)} < +\infty$.

*Bemerkung* 1.48. $\|L\|_{L(V,W)}$ ist die optimale Konstante in 2.

*Beweis.* Falls $\|v\|_V = 1$

$$\iff \|L(v)\|_W \leq \|L\|_{L(V,W)} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W$$

Die Ungleichung ist eine direkte Folgerung von 1

$$\|v\|_V = 0 \implies L(v) = 0 \implies \|L(v)\|_W) = 0 \implies 2$$

$\|v\|_V > 0$

$$\tilde{v} := \frac{v}{\|v\|_V} \implies \|\tilde{v}\|_V) \frac{\|v\|_V}{\|v\|_V} = 1$$
$$\|L(\tilde{v})\|_W \leq \|L\|_{L(V,W)}$$
$$\left\| \frac{1}{\|v\|_V} L(v) \right\|_W = \frac{1}{\|v\|_V} \|L(v)\|_W$$
$$\implies \frac{\|L(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq \|L\|_{L(V,W)}$$

□

*Beweis.* $\varepsilon - \delta$ Stetigkeit. $v, \varepsilon > 0$. Suche $\delta > 0$ mit

$$\|v' - v\|_V < \delta \implies \|L(v') - L(v)\|_W < \varepsilon$$

Linearität von $L$

$$\implies \|L(v') - L(v)\|_W = \|L(v' - v)\|_W$$

und aus 2

$$\|L(v' - v)\| \leq \underbrace{\|L\|_{L(V,W)} \overbrace{\|v' - v\|_V}^{<\delta}}_{<\varepsilon}$$

$$\implies \delta = \frac{\varepsilon}{\|L\|_{L(V,W)}}$$

$\implies$ Ungleichung erfüllt. ☐

*Bemerkung* 1.49. $V = \mathbb{R}^n$, $\|.\|_V$ euklidische Norm. $W = \mathbb{R}^k$ mit euklidischer Norm.

$$\|L\|_{L(V,W)} \leq \|L\|_{\mathrm{HS}}$$

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \text{ linear}$$

$$\|L\|_{\mathrm{HS}} = \sqrt{\sum_{i,j} L_{ij}^2}$$

$$\|L\|_{L(V,W)} := \sup_{\sum_{i=1}^n v_i^2 \leq 1} \sqrt{\sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^n L_{jiv_i} \right)^2}$$

## 1.5 Mehr über stetige Funktionen

**Regeln** für stetige Funktionen

**Regel 1** Seien $f : X \to Y$, $g : X \to Y$. $X$: topologischer Raum, metrischer Raum, normierter Vektorraum, $\mathbb{R}^n$ $V$ ist ein normierter Vektorraum ($\mathbb{R}^k$). Falls $f, g$ stetig sind, ist auch $f + g$ stetig.

$V = \mathbb{R}$ $fg$, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ stetig

$V = \mathbb{R}$ $fg(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) g_i(x)$

*Beweis.* Im Fall $X$ Teilmenge von $\mathbb{R}^n$

$$\underbrace{\{x^k\}}_{\subset X} x^k \to x \in X$$

Stetigkeit von $f$ und $g$: $g(x^k) \to g(x)$, $f(x^k) \to f(x)$.

$$g(x^k) = (g_1(x^k), \cdots, g_m(x^k))$$

$$g(x) = (g_1(x), \cdots, g_m(x))$$

$$f(x^k) = (f_1(x^k), \cdots, f_m(x^k))$$

$$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$$

$$(g + f)(x^k) = \big(g_1(x^k) + f_1(x^k), \cdots, g_m(x^k) + f_m(x^k)\big)$$

$$\to g_1(x) + f_1(x), \cdots, g_m(x) + f_m(x) = (g + f)(x)$$

$$x^k \to x \in X \implies (f + g)(x^k) \to (f + g)(x).$$

☐

**Regel 2** Seien $X, Y, Z$ topologische Räume. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig

$$g \circ f : \underbrace{X \to Z}_{x \mapsto g(f(x))}$$

*Beweis.* Sei $U$ eine offene Menge in $Z$.

$$(g \circ f)^{-1}(U) = \underbrace{f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(U)}_{\text{offen}})}_{\text{offen}}$$

□

**Definition 1.50.** Sei $f : X \to \mathbb{R}$.

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

$f : X \to V$, $V, \|.\|_V$ normierter Vektorraum

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_V$$

*Bemerkung* 1.51. $X$ Menge, $V, \|.\|$ ein normierter Vektorraum.

$$F := \{f : X \to V\} \quad \text{mit} \quad \|f\|$$

Dann ist $F, \|.\|$ ist ein normierter Vektorraum.

**Definition 1.52.** Eine Folge von Funktionen

$$f^k : X \to V$$

konvergiert gleichmässig gegen $f$ falls

$$\left\|f^k - f\right\| \to 0$$

*Bemerkung* 1.53. $x \in X$

$$\left\|f^k(x) - f(x)\right\|_V \leq \left\|f^k - f\right\|$$

Folgerung $f^k$ konvergiert gleichmässig

$$\implies f^k(x) \to f(x) \;\; \forall x$$

**Satz 1.54.** *Sei $X$ ein metrischer Raum und $f^k : X \to V$ eine Folge die gleichmässig gegen $f$ konvergiert. Dann ist $f$ stetig.*

*Beweis.* Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$.

**Ziel** $\exists \delta > 0$ so dass

$$d(x, y) < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

$\exists N$ so dass

$$\left\|f - f^k\right\| < \frac{\varepsilon}{3} \;\; \text{falls} \;\; k \geq N$$

$f^N$ ist stetig: $\exists \delta > 0$:

$$d(x, y) < \delta \implies \left\|f^N(x) - f^N(y)\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$d(x, y) < \delta$$

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(y)\| &= \left\|(f(x) - f^N(x)) + (f^N(x) - f^N(x)) + (f^N(y) - f(y))\right\|_V \\
&\leq \left\|f(x) - f^N(x)\right\|_V + \left\|f^N(x) - f^N(y)\right\|_V + \left\|f^N(y) - f(y)\right\|_V \\
&< \left\|f^N - f\right\| + \frac{\varepsilon}{3} + \left\|f^N - f\right\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

□

## 1.6 Kompakte Menge

**Definition 1.55.** Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heisst kompakt falls $K$ abgeschlossen und beschränkt ( $\iff \exists B_R(0) : K \subset B_R(0)$) ist.

**Satz 1.56.** *Sei $k \subset \mathbb{R}^n$.*

$$K \text{ kompakt} \iff \forall \left\{x^j\right\} \subset K \;\; \exists x^{j_l}$$

*$x^{j_l}$ ist eine Teilfolge, die gegen $x \in K$ konvergiert.*
*$K \implies$ Sei $\left\{x^j\right\}$ eine Folge*

$$x^j \in K \subset B_R(0) \implies \left\|x^j\right\| < R$$

*$\exists x^{j_l} \to x \in \mathbb{R}^n$, die abgeschlossenheit von $K \implies x \in K$. Folgenkriterium $\implies$ Abgeschlossenheit und Beschränktheit.*

$$\text{nicht abgeschlossen} \implies \exists x^j \subset K \;\; \text{mit} \;\; x^j \to\notin K$$

$$\text{Folgenkompaktheit} \implies \exists x^{j_l} \to y \in K$$

*Widerspruch (weil $x$ und $y$ sind in derselben Menge)*
*Sei $K$ nicht beschränkt.*

$$\forall j \in \mathbb{N} \;\; B_j(0) \not\supset K$$
$$\exists x^j \in K \setminus B_j(0) \implies \left\|x^j\right\| \geq j$$

*Wenn $x^{j_l} \to x$*

$$\left\|x^{j_l}\right\| \leq \|x\| + \left\|x^{j_l} - x\right\|$$
$$\|x\| \leq \left\|x^{j_l}\right\| + \left\|x - x^{j_l}\right\|$$
$$\left|\|x\| - \left\|x^{j_l}\right\|\right| \leq \left\|x - x^{j_l}\right\|$$
$$\implies \left\|x^{j_l}\right\| \to \|x\|$$
$$\left\|x^{j_l}\right\| = j_l \to +\infty$$

*$\implies$ Widerspruch*

**Satz 1.57.** *$E \subset \mathbb{R}^n$*

$$E \text{ kompakt} \iff E \text{ folgenkompakt}$$

*d.h.*

$$\forall \{x_k\} \subset E \;\; \exists \;\; \text{Teilfolge} \;\; \{x_{k_l}\} \;\; \text{die gegen } x \in E \text{ konvergiert}$$

**Definition 1.58.** (Überdeckungseigenschaft) Eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ besitzt die Überdeckungseigenschaft falls:

- $\forall$ Überdeckung $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von $E$ mit offenen Mengen $\exists$ endliche Teilüberdeckung.

$$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \;\; \text{Überdeckung} \iff \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \supset E$$

Teilüberdeckung ist eine Teilfamilie von $\{U_\lambda\}$ die noch eine Überdeckung von $E$ ist.

**Beispiel 1.59.** Eine offene Kugel hat diese Eigenschaft nicht.

$$\forall x \in K_r(0) \;\; \text{sei} \;\; K_{\frac{r-\|x\|}{2}}(x) = U_x$$

1. $\{U_x\}_{x \in K_r(0)}$ ist eine Überdeckung von $K_r(0)$.

Einfach weil $x \in U_x$! Sei $U_{x_1}, \cdots, U_{x_N}$ eine beliebige endliche Teilfamilie. Sei

$$p := \max_{i \in \{1, \cdots, N\}} \|x_i\| < r$$

$\implies$ falls $\|y\| \geq \frac{\|x_i\|+r}{2}$ dann $y \notin U_{x_i}$. So, wenn $\|y\| \geq \frac{p+r}{2}$ dann

$$y \notin U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_N} \quad \frac{p+r}{2} < r$$

falls $\|y\| = \frac{p+r}{2}$, dann $y \in K_r(0)$. Mit einer geschlossenen Kugel ist das anders.

**Satz 1.60.** *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$*

$$E \text{ kompakt} \iff E \text{ hat die Überdeckungseigenschaft}$$

**Beispiel 1.61.** $E = \mathbb{R}^n$, $U_n = K_{n+1}(0)$.

$$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

Aber $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}^n = E \not\subset \bigcup_{n=0} U_n$$

*Beweis.* $\exists \{x_i\} \subset E$ ohne konvergente Teilfolge in $E \implies E$ ist nicht kompakt $\implies$ Überdeckungseigenschaft gilt nicht. Zwei Möglichkeiten:

1. $\exists$ eine Teilfolge $\{y_i\} \subset E$ $y_i \to y$ $y \notin E$
2. $\exists$ eine Teilfolge $\{y_i\} \subset E$ $y_i \to +\infty$

Beim ersten ist die Menge offen.

$$U_0 := \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{(\{y_1\} \cup \{y\})}_{E \text{ ist abgeschlossen}}$$

Beim zweiten gilt:

$$U_0 = \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{\{x_i\}}_{F} \text{ ist offen}$$

$$U_n = U_0 \cup \{y_1, \cdots, y_{n-1}\} \quad n \geq 0$$

$U_n$ ist auch offen.

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} U_n = \begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \{y\} & \text{im Fall 1} \\ \mathbb{R}^n \setminus & \text{im Fall 2} \end{cases}$$

Aber jede endliche Familie

$$U_1 \cup \cdots \cup U_n \not\supset E$$

in beiden Fällen lassen wir unendlich viele Punkte weg. $E$ kompakt $\implies$ Überdeckungseigenschaft. $E$ ist beschränkt und abgeschlossen und sei $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von offenen Mengen mit $E \subset \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Wir decken die Menge $U$ mit Würfel:

$$[k_1, k_1 + 1] \times [k_2, k_2 + 1] \times \cdots \times [k_n, k_n + 1]$$

$$W_1 \cup \cdots \cup W_M$$

Falls jedes $E \cap W_i$ mit einer endlischen Familie von $\{U_\lambda\}$ überdeckt wird, dann finde ich eine endliche Überdeckung von $E$ wenn $N$ gross genug ist. So, angenommen dass die Überdeckungseigenschaft nicht gilt.

$$\exists E_i := E \cap W_i :$$

1. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Überdeckung von $E_1$
2. keine endliche Teilfamilie deckt $E_1$

Teilen wir $W_i$ in $2^n$ Würfel mit Seite $\frac{1}{2}$

$$\tilde{W}_1, \cdots, \tilde{W}_2$$

$$\exists E_2 := E \cap \tilde{W}_i : \text{ so dass die beiden Eigenschaften noch gelten}$$

Induktiv

$$E \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$$

jede $E_i \subset W^i$ Würfel mit Seite $2^{-i+1}$ und die beiden Eigenschaften gelten mit $E_j$ statt $E_i$.
$\{x_k\} \subset E$. $\{x_k\}$ ist eine Cauchy-Folge. $j, k > i$, $x_k, x_j \in W$ mit Seite $w^{-i+1}$
$\|x_j - x_k\| \leq \sqrt{n}2^{-i+1}$

$$\implies x_j \to x \in E \to x \in U \in \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \implies K_r(x) \supset U$$

$$x \in E, x \in E^i \;\; \forall i \implies x \in W^i$$
$$\implies W^i \subset B_r(x) \subset U$$

für $i$ gross genug

$$\implies E_i \subset U$$

$\implies$ wir haben eine endliche Teilüberdeckung $\{U\} \subset \{U_\lambda\}$ gefunden $\implies$ Widerspruch mit den beiden Eigenschaften. □

*Bemerkung* 1.62. $f$ stetig $\implies f^{-1}(U)$ offen falls $U$ offen.

*Beweis.* Sei $\{U_\lambda\}$ eine Überdeckung (mit offenen Mengen) von $f(E)$, dann ist $\left\{f^{-1}\left(U_\lambda\right)\right\}$ ein Überdeckung von $E$.

$$\exists f^{-1}(U_{\lambda_1}), \cdots, f^{-1}(U_{\lambda_N} \text{ Teilüberdeckung von } E$$

$U_{\lambda_i}, \cdots, U_{\lambda_N}$ ist eine Überdeckung von $f(E) \implies f(E)$ ist kompakt □

**Korollar 1.63.** *Wenn $F : E \to \mathbb{R}$ stetig ist und $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist, besitzt $f$ ein Maximum und ein Minimum.*

*Beweis.* $f(E) \subset \mathbb{R}$ ist kompakt.

$$s = \sup f(E) < +\infty$$

$$\exists \{x_k\} \subset f(E) \text{ mit } x_k \to s \xRightarrow{\text{abgeschlossen}} s \in s \in f(E)$$
$$\left(s - \frac{1}{k} \implies \exists x_k \in f(E) \text{ mit } x_k > s - \frac{1}{k}, x_k \leq s\right)$$

$\implies s$ ist ein Maximum. □

**Definition 1.64.** Das Intervallschachtelungsprinzip in $\mathbb{R}$. Sei $I_j$ eine Intervallschachtelung:

1. $$I_j = [a_j, b_j]$$

2. $$I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_j \supset_{j+1}$$

3. $$b_j - a_j \to 0$$

$$\implies \bigcap_{j=0}^{\infty} E_j \neq \varnothing$$

**Satz 1.65.** *Sei $E_j$ eine Folge von kompakten Mengen mit $E_j \supset E_{j+1}$ $\forall j$ ($E_0 \subset \mathbb{R}^n$)*

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \neq \varnothing \text{ falls } E_j \neq \varnothing \ \forall j$$

*Beweis.* Sei $E_j$ wie im Satz mit $E_j \neq \varnothing$, aber $\bigcap_{j=0}^{\infty} E_j = \varnothing$. Sei $U_j := \mathbb{R}^n \setminus E_j \implies U_j$ ist offen. $\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j = \mathbb{R}^n$ $\{U_j\}$ ist eine Überdeckung von $E_0$. Aber $U_1 \cup \cdots \cup U_N = U_N$ (weil $U_{j+1} \supset U_j$)

$$U_N \not\supset E_N \neq \varnothing \quad E_N \subset E_0$$

Keine endliche Teilfamilie von $\{U_j\}$ ist eine Überdeckung von $E_0$. Widerspruch wegen Kompaktheit von $E_0$. □

## 1.7 Differenzierbare Funktionen

**Erinnerung** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst differenzierbar in $a \in \mathbb{R}$ falls

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert. Was geschieht mit Funktionen von mehrere Variablen? Die "Tangentensteigung" hängt auch von der Richtung ab. D.h. Es gibt eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

**Definition 1.66.** $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, heisst differenzierbar in $a \in U$, falls

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Lh}{\|h\|} = 0 \tag{3}$$

wobei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine lineare Ableitung ist.

*Bemerkung* 1.67. $n = 1$: Es gilt $Lh = f'(a)h$

*Bemerkung* 1.68. Die lineare Abbilung $L$ in 3 ist eindeutig definiert. Annahme $L' \neq L$ erfüllt die Bedungung. Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$. Es gilt:

$$(L - L')(v) \overset{\text{linear und} \quad \|v\|=1}{=} \lim_{t \downarrow 0} \frac{(L - L')(tv)}{\|tv\|} \overset{3 \quad h=tv}{=} \implies L = L'$$

*Bemerkung* 1.69. Wir können 3 auch anders beschreiben:

$$f(a+h) - f(a) = Lh + \underbrace{R(h)}_{\text{Restglied}}$$

Dann gilt

$$3 \iff \lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0 \tag{4}$$

**Definition 1.70.** $L$ heisst Differential von $f$ in $a$. Man schreibt $\mathrm{d}\, f(a)$. Sei nun $\{e_1, \cdots, e_n\}$ die Standardbasis $\mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\implies \mathrm{d}\, f(a)h = \mathrm{d}\, f(a) \left( \sum_{i=1}^{k} h_i - e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} h_i \, \mathrm{d}\, f(a) e_i$$

**Definition 1.71.**

$$f'(a) = (\mathrm{d}\, f(a)e_1, \cdots, \mathrm{d}\, f(a)e_n)$$

heisst Ableitung

**Definition 1.72.**

$$Tf(x, a) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{(Ebene (tangential))}$$

lineare Approximation

**Satz 1.73.** *$f$ differentierbar in $a$ $\implies$ $f$ ist stetig in $a$*

*Beweis.*

$$|f(a+b)-f(a)| = |\mathrm{d}\, f(a)h + R(h)| \leq |\mathrm{d}\, f(a)| + \underbrace{|R(h)|}_{\to 0}$$

□

**Beispiel 1.74.** $f(x) = Ax + b$, $A \in M_a(1, n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}$

**Behauptung 1.75.** *$Lh := ah$ ist linear*

$$\mathrm{d}\, f(a)h = Ah, \quad f'(a) = A$$

*Beweis.*

$$f(a+h) - f(a) - Lh = \cancel{R}(h) = 0$$

□

**Beispiel 1.76.** $f(x) := x^T Ax$, $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$

$$f(a+h) - f(a) - \underbrace{2a^T Ah}_{\mathrm{d}\, f(a)h} + \underbrace{h^T Ah}_{R(h)}$$

$Lh := 2a^T Ah$ ist linear (in $h$), $R(h) = h^T Ah$ $(= \sum h_i a_{ik} h_l)$ z.z.: $|Rh| \leq \sum_{i,j=1}^{h} |a_{ij}| \, \|h\|_\infty^2$, d.h. $\frac{R(h)}{\|h\|} \to 0$ (falls $\|h\| \to 0$)

**Ziel** Wir wollen $\mathrm{d}\, f(a)h$ berechnen. sei $t \in \mathbb{R}$

$$f(a+th) = f(a) + \mathrm{d}\, f(a)th + R(th)$$

$$\implies \mathrm{d}\, f(a)h = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \tag{5}$$

**Definition 1.77.** $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$. Die Richtungsableitung von $f$ in Richtung $h \in \mathbb{R}^n$ ist der Grenzwert (falls er existiert)

$$\partial_n f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

Die Ableitungen in Richtung $e_1, \cdots, e_n$ heissen partielle Ableitungen in $a$. Wir schreiben

$$\partial_{ei} f(a) = \partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_{xi}(a)$$

*Bemerkung* 1.78. Wir haben <u>nicht</u> vorausgesetzt, dass $f$ differenzierbar ist in $a$!

**Satz 1.79.** *Sei $f$ in $a$ differenzierbar. Dann existieren die Richtungsableitungen in jede Richtung. Insbesondere existieren die aprtiellen Ableitungen. Es gelten:*

$$\mathrm{d}\, f(a)h = f'(a)h = \partial_n f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) h_i \tag{6}$$

*und*

$$f'(a) = (\partial_1 f(a), \cdots, \partial_n f(a))$$

*Beweis.* Existenz der Richtungsableitung oke (Herleitung von 5) □

**Frage** Wie berechnet man die partielle Ableitung effizient? Es gilt:

$$\partial_i f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t_{ei}) - f(a)}{t}, \quad a = (a_1, \cdots, a_n)$$

$$g_i(x) := f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n)$$

$$\partial_i f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{g(a_i + t) - f(a_i)}{t} = g'(a_i)$$

**Beispiel 1.80.**

$$f(x,y) := \sin(2x)e^{3y}$$

$$\partial_x f = 2e^{3y}\cos(2x)$$

$$\partial_y f = \sin(2x)e^{3y}3$$

**Frage** Wann folgt aus der Existenz der partiellen Ableitung (Richtungsableitung) die Differenzierbarkeit?

**Beispiel 1.81.**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Es gilt: $f(tx,ty) = tf(x,y)$, d.h. der Graph von $f$ besteht aus Geraden durch 0, für $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\implies \partial_h f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(th_1,th_2) - f(0,0)}{k} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} f(h_1,h_2) = f(h_1,h_2)$$

$$\implies \partial f(0,0) = f(h_1,h_2)$$

$$\partial_{e_1} f(0,0) = f(1,0) = 0$$

$$\partial_{e_2} f(0,0) = f(0,1) = 0$$

**Annahme** $f$ ist in $(0,0)$ differenzierbar

$$\xrightarrow{\text{aus } 6} \underbrace{\partial_n f(0,0)}_{=\mathrm{d}\, f(a)h=0} = \underbrace{\partial_1 f(a)}_{0}(h_1) + \underbrace{\partial_2 f(a)}_{0}(h_2) = 0$$

$$\implies \mathrm{d}\, f(a) = 0$$

**Test** $L = 0$

$$\frac{f(h_1,h_1) - \overbrace{f(a_0) - L(h_1,h_1)}}{\|(h_1,h_1)\|_\infty} = \frac{h_1^3}{2h_1^2|h_1|} \to \pm\frac{1}{2}$$

$\implies$ $f$ ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

### 1.7.1 Das Differenzial

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Umgebung von $x$.

$$f \text{ diff in } x \iff \exists L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ linear s.d.}$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0 \tag{7}$$

$$\lim_{h\downarrow 0} G(h) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \|h\| < \delta \implies |G(h)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall h_k = 0 \quad G(h_k) \to 0$$

Wenn $f$ differenzierbar ist und 7 erfüllt, heisst $L$ das Differential von $f$.

$$L = \mathrm{d}\, f$$

$$\mathrm{d}\, f_x \text{ das Differential an der Stelle } x$$

### 1.7.2 Richtungsableitung

$x \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^m$, $g(t) = f(x+th)$ (wohldefiniert für $|t|$ klein)

$$\partial_n f(x) = g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

### 1.7.3 Partielle Ableitung

$(x_1, \cdots, x_n)$ Kond. in $\mathbb{R}^n$ $y \in \Omega$ so dass $\Omega$ eine Umgebung von $y$ ist

$$\frac{f}{x_i}(y)\,(=\partial_{x_i} f(y)) = \lim_{t\to 0} \frac{y_1, \ldots, y_i + t, \ldots, y_n - f(y)}{t}$$

Falls $e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0)$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(y+te_i) - f(y)}{t} = \partial_{e_i} f(y)$$

**Satz 1.82.** *(Hauptkriterium der Differenzierbarkeit) Sei $f : U \to \mathbb{R}$ und $U$ eine Umgebung von $y$. Falls $\frac{f}{x_1}, \ldots, \frac{f}{x_n}$ $\underline{\text{in } U}$ existieren und stetig in $\underline{\text{in } y}$ sind, dann ist $f$ in $y$ differenzierbar.*

*Beweis.* $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$L(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f}{x_i}(y) h_i$$

**Ziel** $L$ ist das Differential von $f$

$$Limoh \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0$$

$$f(x+h) - f(x) = f(x+(h_1, \ldots, h_n)) - f(y+(h_1, \ldots, h_{n-1}, 0) + f(y+(h_1, \ldots, h_{n-1}, 0) - \ldots$$

$$+ \ldots \quad (i\text{te Zeile})$$

$$+ f(y + (k, 0, \ldots, 0)) - f(y) \tag{8}$$

$i \in \{1, \ldots, n\}$

$$g(t)) = f(y + (h_1, \ldots, h_{i-1}, th_i, 0, \ldots, 0)$$

$$i\text{te Zeile} = g_i(1) - g_i(0) = g_i'(\xi_i) \quad \xi \in [0,1]$$

$$g_i'(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{g_i(t+\varepsilon) - g_i(t)}{\varepsilon}$$

$$= h_i \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(y_1 + h_1, \ldots, y_{i-1}, y_i + (t+\varepsilon)h_i, y_{i+1} \ldots, y_n) - f(y_1 + h_1, \ldots, y_i + th_i, \ldots, y_n}{\varepsilon h_i}$$

$$= h_i \frac{f}{x_i}\,(y_1 + h_i, \ldots, y_i + th_1, y_{i+1}, \ldots, y_n)$$

$$i\text{te Zeile} = h_i \frac{f}{x_i}(y_1 + h_1, \ldots, y_{i-1} h_{i-1}, y_i + \xi_i h_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$$

$$\zeta_i = (h_1, \ldots, h_{i-1}, \xi h_i, 0, \ldots, 0)$$

$$= h_i \frac{f}{x_i}(y + \zeta_i) \tag{9}$$

9 in 8:

$$f(y+h) - f(y) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{f}{x_i}(y + \zeta_i) \tag{10}$$

$$f(x+h) - f(x) - L(h)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i \left( \frac{f}{x_i}(y+\zeta_i) - \frac{f}{x_i}(y) \right) \tag{11}$$

$$\frac{|f(x+h) - f(x) - L(h)|}{\|h\|}$$

$$\stackrel{11}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \frac{|h_i| |\frac{f}{x_i}(y+\zeta_i) - \frac{f}{x_i}(y)|}{\|h\|} \tag{12}$$

Wenn $\|h\| \to 0$, $\|\zeta\| \to 0$. Die Stetigkeit von $\frac{f}{x_i}$ in $y$ impliziert

$$\frac{f}{x_i}(y+\zeta_i) \to \frac{f}{x_i}$$

Die rechte Seite von 12 $\to 0$ wenn $h \to 0 \implies$ **??**. $\square$

**Definition 1.83.** Der Gradient an der Stelle $x_0$ist der Vektor

$$\left(\frac{f}{x_1}(x_0), \dots, \frac{f}{x_i}(x_0)\right) = \nabla f(x_0)$$

*Bemerkung* 1.84.

$$df|_{x_0}(h)\,(\partial_n f(x_0)) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{f}{x_i}(x_0)$$

$$(\langle \nabla f(x_0), h\rangle) = \nabla f(x_0) h$$

$$|\partial_n f(x_0)| \stackrel{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \|\nabla f(x_0)\|\,\|h\|$$

Falls $\|h\| = 1$, dann

$$|\partial_n f(x_0)| \leq \|\nabla f(x_0)\|$$

Fall $\|\nabla f(x_0)\| \neq 0$, wenn wir

$$K = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

bekommen wir $\|K\| = 1$ und

$$\partial_K f(x_0) = \|\nabla f(x_0)\|$$

Deswegen:

$$K = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

ist die Richtung der maximalen Steigung und

$$\|\nabla f(x_0)\|$$

ist die maximale Steigung.

## 1.8 Rechenregeln

**Satz 1.85.** *Sei $U$ eine Umgebung von $x \in \mathbb{R}^n$ und $f, g : U \to \mathbb{R}$ in $x$ differenzierbar. Dann sind $f+g$ und $fg$ auch differenzierbar in $x$ und*

$$\mathrm{d}(f+g)|_x = \mathrm{d}\,f|_x + \mathrm{d}\,g|x$$

$$\mathrm{d}(fg) = f(x)\,\mathrm{d}\,g|x + g(x)\,\mathrm{d}\,f|_x$$

*Falls $f(x) \neq 0$ ist auch $\frac{1}{f}$ in $x$ differenzierbar*

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right)|_x = -\frac{1}{(f(x))^2}\,\mathrm{d}\,f|_x$$

**Korollar 1.86.** *$g(x) \neq 0$, dann*

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)|_x = \frac{1}{g(x)}\,\mathrm{d}\,f|_x - \frac{f(x)}{g(x)^2}\,\mathrm{d}\,g|_x$$

$$= \frac{g(x)\,\mathrm{d}\,f|_x - f(x)\,\mathrm{d}\,g|_x}{g(x)^2}$$

*Beweis.* Das Ziel ist eine lineare Abbildung $L$ zu finden so dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h) - \frac{1}{f(x)} - L(h)}}{\|h\|}$$

$$L = -\frac{1}{f(x)^2} \,\mathrm{d}\, f|_x$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\frac{1}{f(x+h) - \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)^2}(h)\,\mathrm{d}\, f|_x(h)}}^{A}}{\|h\|} = \frac{B+C}{\|h\|}$$

$$\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)} = \frac{f(x) - f(x+h)}{f(x)f(x+h)}$$

$f(x+h) \neq 0$ falls $\|h\|$ klein genug

$$\frac{f(x+h) - f(x) - \mathrm{d}\, f|_x(h)}{\|h\|} \to 0$$

$$A = \left[\frac{-(-f(x) + f(x+h))}{f(x)f(x+h)} \frac{\mathrm{d}\, f|_x(h)}{f(x)f(x+h)}\right] = C$$

$$+\frac{-\,\mathrm{d}\, f|_x(h)}{f(x)f(x+h)} + \frac{\mathrm{d}\, f|_x(h)}{f(x)^2} = B$$

$$\frac{B}{\|h\|} = -\frac{1}{f(x)f(x+h)} \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x) - \mathrm{d}\, f|_x(h)}{\|h\|}}_{\to 0}$$

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x) \neq 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{B}{\|h\|} = 0$$

Diff von $f$ für $\|h\| \to 0$

$$\frac{C}{\|h\|} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\, f|_x(h)}{\|h\|}}_{\text{ist beschränkt}} \frac{1}{f(x)} \underbrace{\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x+h)}\right)}_{\to 0}$$

Sei $L = \mathrm{d}\, f|_x$ und $\|L\|_O$ ihre Operatornorm

$$|\mathrm{d}\, f|_x(h)| = |L(h)| \leq \|K\|_O \|h\|$$

$$\implies \frac{|\mathrm{d}\, f|_x(h)|}{\|h\|} \leq \|L\|$$

□

**Definition 1.87.** Eine Kurve ist eine Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (d.h. $\forall t \;\; \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t))$$

deswegen $t \to \gamma_i(t) \in \mathbb{R}$. Die Kurve $\gamma$ heisst differenzierbar wenn jede $\gamma_i$ differenzierbar ist.

$$\gamma' = (\gamma'(t), \cdots, \gamma'_n(t))$$

**Satz 1.88.** *(Kettenregel 1. Version) Sei $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U$ Umgebung von $x$ und $f$ differenzierbar in $x$. Sei $\gamma : [a, b] \to U$ eine differenzierbare Kurve mit $\gamma(t_0) = x$. Sei $g = f \circ \gamma$*

$$g(t) = f(\gamma(t))$$

*Sei $g$ in $t_0$ differenzierbar. Dann*

$$g'(t_0) = \mathrm{d}\,|_{\gamma}(t_0)(\dot{\gamma}(t_0)) = \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \dot{\gamma}(t_0)\rangle$$

*Beweis.* Das Ziel:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(t_0+h)-g(t_0)-h\left[\mathrm{d}\, f|_{\gamma(t_0)}(\dot\gamma(t_0))\right]}{h} = 0$$

$$R(h) = g(t_0+h)-g(t_0)-g(t_0)-h\left[\mathrm{d}\, f|_{\gamma(t_0)}(\dot\gamma(t_0))\right] \tag{13}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{R(h)}{h} = 0 \tag{14}$$

Neue Notation

$$14 \iff R(h) = o(h)$$

$$x_0 = \gamma(t_0)$$

Annahmen: Differenzierbarkeit von $f$

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0+k)-f(x_0)-\mathrm{d}\, f|_{x_0}(k)}{\|k\|}\left(=\frac{r(k)}{\|k\|}\right) = 0$$

$$(r(k) = o(\|k\|))$$

Differenzierbarkeit von $\gamma$:

$$\lim_{k\to 0}\frac{\gamma(x_0+k)-\gamma(x_0)-\mathrm{d}\, h\gamma'|_{x_0}(k)}{h}\left(=\frac{p(k)}{\|k\|}\right) = 0$$

$$p(h) = o(h)$$

$$\gamma(t_0+h) = \gamma(t_0)+k\left(=\gamma(t_0+h)-\underbrace{\gamma(t_0)}_{x_0}\right)$$

$$\begin{aligned}
g(t_0+h)-g(t_0) &= f(\gamma(t_0+h)) - g(\overbrace{\gamma(t_0)}^{x_0})\\
&= f(\gamma(t_0)-k) - f(\gamma(t_0)) = \mathrm{d}\, f|_{\gamma(t_0)}(k) + r(k)\\
&= \mathrm{d}\, f|_{\gamma(t_0)}(\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)) + r(k)\\
&= \mathrm{d}\, f|_{\gamma(t_0)}(h\dot\gamma(t_0)+p(h)) + r(k)\\
&\overset{\text{Linearität von d}\, f}{=} h\,\mathrm{d}\, f|_{\gamma(t_0)}(\dot\gamma(t_0)) + \mathrm{d}\, f|_{\gamma(t_0)}(p(h)) + r(k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&g(t_0+h)-g(t_0)-h\,\mathrm{d}\, f|_{\gamma(t_0)}(\dot\gamma(t_0))\\
&= f|_{\gamma(t_0)}(p(h)) + r(\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)) = R(h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|R(h)| &\le \frac{\underbrace{\overbrace{|f|_{\gamma(t_0)}(p(h))|}^{L} + r(\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0))}}{\|h\|}\\
&\le \|L\|\frac{p(h)}{\|h\|} + \frac{r(\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)}{\|h\|}
\end{aligned}$$

Ziel

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)}{|h|}$$

Falls

$$r(\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0) = 0$$

dann $r(0)=0$. Wenn

$$r(\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)\neq 0$$

$$= \frac{r(\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)}{\|\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)\|}\,\frac{\|t_0+h)-\gamma(t_0)\|}{|h|}$$

$$\frac{r(\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)}{\|\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)\|} = \frac{r(k)}{\|k\|}\to 0$$

... wenn $\|k\| \to 0$ und $h \to 0$. Es fehlt die Beschränktheit von

$$\frac{\|t_0 + h) - \gamma(t_0)\|}{|h|}$$

$$\frac{t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} - \frac{\cancel{h}\dot{\gamma}(t_0)}{\cancel{h}} = \frac{p(h)}{h}$$

$$\frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} = \underbrace{\dot{\gamma}(t_0)}_{\text{konstant}} + \underbrace{\frac{p(h)}{h}}_{\to 0}$$

Deswegen

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\|}{|h|} = \|\dot{\gamma}(t_0)\|$$

$$\implies \frac{|R(h)|}{\|h\|} \to 0$$

$\implies$ Differenzierbarkeit und Kettenregel! □

*Bemerkung* 1.89. Der Gradient ist orthogonal zur Niveaumenge (Höhenlinien).

**Definition 1.90.** Sei $\gamma : [a, b] \to U$ eine differenzierbare Kurve, $U$ offen. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $f(\gamma(t)) = c_0$ ($c_0$ hängt nicht von $t$ ab). Dann

$$\nabla f(\gamma(t)) \perp \dot{\gamma}(t)$$

d.h.

$$\langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$$

$$0 = g'(t) = (f(\gamma(t)))' \overset{\text{Kettenregel}}{=} \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle$$

## 1.9 Mittelwertsatz und Schrankensatz

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\xi \in ]a, b[$

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Sei nun:

$$f : U \mapsto \mathbb{R} \;\text{ differenzierbar auf } U$$

$$x, y \in U \;\text{ so dass das Segment }\; [x, y] \subset U$$

Was ist ein Segment? Gerade durch $x$ und $y$

$$\{x + t(y - x) | t \in \mathbb{R}\}$$

$$[[x, y]] = \{x + t(y - x) | t \in [0, 1]\}$$

$$\gamma(t) := x + t(y - x)$$

$$f(y) - f(X) = (x_1 + t(y_1 - x_1), \cdots, x_n + t(y_n - x_n))$$

$\gamma$ ist differenzierbar.

$$g = f \circ \gamma g(t) = f(\gamma(t))$$

$$g(1) - g(0) = g'(\tau) \;\text{ für }\; \tau \in ]0, 1[$$

$$f(y) - f(x) = \mathrm{d}\, f|_{\gamma(\tau)}(\dot{\gamma}(\tau))$$

$$\dot{\gamma}(\tau) = (\gamma_1'(\tau), \cdots, \gamma_n'(\tau))$$

$$= (y_1 - x_1, \cdots, y_n - x_n) = y - x$$

$$\gamma(\tau) = \xi$$

$$f(y) - f(x) = \mathrm{d}\, f|_{\xi}(y - x) = \partial_{y-x} f(\xi) \tag{15}$$

**Satz 1.91.** *(Mittelwertsatz) $U$ offen, $[x, y] \subset U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann $\exists \xi \in ]x, y[$ so das 15 gilt.*

**Definition 1.92.** $U$ sternförmig: wenn $0 \in U$ und $[x, 0] \subset U\ \forall x \in U$. Sternförmig mit Zentrum $x_0$ wenn $x_0 \in U\ [x, x_0] \subset U\ \forall x \in U$

**Satz 1.93.** *(Schrankensatz) Sei $U$ eine offene Menge, die sternförmig ist und $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit*

$$\sup_{x\in U} \|\mathrm{d}\, f|_x\|_O = S < \infty \left(= \sup_{x\in U} \|\nabla f(x)\|\right)$$

*Dann*

$$|f(x) - f(0)| \leq S\, \|x\|$$

*Wenn $U$ konvex ist, d.h. das Segment $[x, y] \subset U\ \forall x, y \in U$, dann*

$$|f(x) - f(y)| \leq S\, \|y - x\|$$

**Definition 1.94.** $f : \underbrace{K}_{\in\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$ heisst Lipschitz wenn $\exists L[0, +\infty[$ so dass

$$|f(y) - f(x)| \leq L\, \|y - x\| \quad \forall x, y \in K$$

Wenn $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ Lipschitz bedeutet die Existenz eines $L$ so dass

$$|f(y) - f(x)| \leq Ld(y - x) \quad \forall x, y \in K$$