

Analysis II - Vorlesungs-Script

Prof. Dr. Camillo De Lellis

Basisjahr 11 Semester I

Mitschrift:

Simon Hafner

Inhaltsverzeichnis

1	Metrik und Topologie des euklidischen Raumes	1
1.1	Konvergenz	3
1.2	Ein bisschen mehr Topologie	5
1.3	Stetigkeit	6
1.4	lineare Abbildungen	7
1.5	Mehr über stetige Funktionen	10
1.6	Kompakte Menge	12

1 Metrik und Topologie des euklidischen Raumes

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n), x \in \mathbb{R}\}$ In \mathbb{R}^n :

- Norm (Euklidische)
- Abstand (Euklidische)
- Topologie

“Abstrakte Theorie”

- Normierte Vektorräume
- Metrische Räume
- Topologische Räume

Definition 1.1. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$)

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Intuitiv: $\|x\|$ = ”der Abstand zwischen x und 0“

Lemma 1.2. $\|\cdot\|$ erfüllt die Regeln

1. $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Beweis. 1. ≥ 0 trivial

$$x = 0 \implies \sum x_i^2 = 0 \implies \|x\| = 0$$

$$x = 0 \iff x_i = 0 \forall i \iff \sum x_i^2 = 0 \iff \|x\| = 0$$

2.

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda x_i)^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |\lambda| \|x\|$$

$$|\lambda| = \frac{\|x\| |\lambda|}{\|x\|}$$

3.

$$\iff \underbrace{\|x + y\|^2}_{=} \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\|$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \overbrace{2 \sum_{i=1}^n x_i y_i}^{\text{Skalarprodukt}} \\ &\iff \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

□

Satz 1.3. Cauchy-Schwartzsche Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Beweis. OBdA $y \neq 0$ ($y = 0$ trivial)

$$\begin{aligned} t \rightarrow g(t) &= \sum_{i=1}^n (x_i + ty_i)^2 \\ &= \left(\sum x_i^2 \right) + 2t \sum x_i y_i + t^2 \sum y_i^2 \\ &= \|x\|^2 + 2t \langle x, y \rangle + \|y\|^2 t^2 \end{aligned}$$

Sei $t_0 = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$, dann $g(t_0) \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 &\leq g(t_0) \\ &= \|x\|^2 - 2 \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} + \|y\|^2 \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^4} \\ &= \|x\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \\ \implies \langle x, y \rangle &\leq \|x\|^2 \|y\|^2 \\ \implies |\langle x, y \rangle| &\leq \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

□

Definition 1.4. Ein normierter Vektorraum ist ein reeller Vektorraum V mit einer Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ so dass:

1. $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Nullvektor)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$

Beispiel 1.5. $V = \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad p \geq 1$$

$p = 2$ euklidische Norm

Definition 1.6. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Die euklidische Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$

Lemma 1.7. 1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$

$$2. \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$3. \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \|x - z\| &\leq \underbrace{\|x - y\|}_v + \underbrace{\|y - z\|}_w \quad v + w = x - z \\ \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\| \end{aligned}$$

□

Definition 1.8. Ein metrischer Raum ist eine Menge X mit einer Abbildung

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R}$$

so dass

1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
3. $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

Lemma 1.9. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann sind V und $d(x, y) = \|x - y\|$ ein metrischer Raum.

Definition 1.10. Die offene Kugel mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$K_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) < r\}$$

Definition 1.11. Eine Menge heisst "Umgebung" von x , wenn V eine offene Kugel mit Mittelpunkt x enthält.

Definition 1.12. Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heisst offen falls $\forall x \in U$ ist U eine Umgebung von x

$$\forall x \in U \exists \text{ eine Kugel } K_r(x) \subset U$$

Bemerkung 1.13. Eine offene Kugel ist offen.

Satz 1.14. 1. \emptyset und \mathbb{R}^n sind offen

2. Der Schnitt endlich vieler offener Mengen ist auch offen.

3. Die Vereinigung einer beliebigen Familie offener Mengen ist auch offen.

Beweis. 1. \mathbb{R}^n trivialerweise offen, auch \emptyset

2. Sei $x \in U \cap \dots \cap U_N$

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad K_r(x) \subset U_i$$

$$\text{Sei } r = \min \{r_1, \dots, r_N\}$$

$$\implies K_r(x) \subset U_i \forall i \implies K_r(x) \subset U_1 \cap \dots \cap U_N$$

3. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Sei $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

$$x \in U \implies x \in U_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \Lambda$$

$$\implies \exists K_r(x) \subset U_\lambda \subset U$$

□

Definition 1.15. Ein topologischer Raum ist eine Menge X und eine Menge \mathcal{O} von Teilmengen von X so dass:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

2. $U_1 \cap \dots \cap U_N \in \mathcal{O}$ falls $U_i \in \mathcal{O}$

3. $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ falls $U_i \in \mathcal{O}$

Satz 1.16. Sei (X, d) ein metrischer Raum

$$K_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Umgebungen und offene Mengen sind wie im euklidischen Fall. $\mathcal{O} = \{\text{offene Menge}\}$ definiert eine Topologie.

1.1 Konvergenz

Sei $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \quad x_k \in \mathbb{R} \quad x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$

Definition 1.17. Die Folge $\{x_k\}$ konvergiert gegen $x_\infty \in \mathbb{R}^n$ falls

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x_\infty) = 0$$

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k, x_\infty\| = 0 \right)$$

Dann schreiben wir

$$x_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$$

Satz 1.18.

$$x_k \rightarrow x_\infty \iff x_{ki} \rightarrow x_{\infty_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \|x_k - x_\infty\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{ki} - x_{\infty_i})^2} \geq |x_{ki} - x_{\infty_i}| \geq 0 \\ \implies 0 &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} |x_{ki} - x_{\infty_i}| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x_\infty\| = 0 \\ \|x_k - x_\infty\| &= \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^n (x_{ki} - x_{\infty_i})^2}_{\rightarrow 0}} \leq \sum_{i=1}^n |x_{ki} - x_{\infty_i}| \\ \implies \|x_k - x_\infty\| &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Eine alternative Formulierung: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k1}, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{kn} \right)$ □

Bemerkung 1.19.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \|x_k - x_\infty\| < \varepsilon \text{ falls } k \geq N$$

Für jede Umgebung U von x_∞ fast alle $x_k \in U$.**Definition 1.20.** Eine Folge $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heisst Cauchy falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : m, k \geq N \implies \|x_k - x_m\| < \varepsilon$$

Lemma 1.21. $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn $\{x_k\}$ Cauchy ist.

$$\text{Beweis. } \{x_k\} \text{ ist Cauchy} \implies \left\{ x_k \underbrace{\quad}_i \right\}_{\{\text{fixiert}\}} \text{ Cauchy!}$$

$$|x_{ki} - x_{mi}| \leq \|x_k - x_m\|$$

$\implies \{x_k\}$ ist eine Cauchyfolge $\xrightarrow{\text{Erstes Semester}} x_{ki}$ konvergiert $\xrightarrow{\text{Lemma 2}} x_k$ konvergiert. x_k konvergiert \implies Cauchyfolge

$$x_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N : \|x_k - x_\infty\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N$$

$$\begin{aligned} k, m \geq N \quad \|x_k - x_m\| &\leq \|x_k - x_\infty\| + \|x_\infty - x_m\| \leq d(x_k, x_\infty) + d(x_\infty, x_m) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.22. In einem metrischen Raum, Cauchy \Leftarrow Konvergenz. Aber allgemein: Cauchy $\not\Rightarrow$ Konvergenz. Falls Cauchy \implies Konvergenz, dann ist der metrische Raum vollständig.

Definition 1.23. Eine Folge $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heisst beschränkt falls $\|x_k\|$ beschränkt ist.**Satz 1.24.** 1. Eine konvergente Folge ist beschränkt2. (Bolzano-Weierstrass) $\{x_k\}$ beschränkt $\implies \exists \{x_{k_j}\}$ die konvergiert.*Beweis.*

$$\begin{aligned} \{x_k\} \text{ beschränkt} &\implies \{x_{k_1}\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt} \\ &\implies \exists x_{k_1} : x_{k_1} \rightarrow x_1 \end{aligned}$$

Ich definiere $y_j = x_{k_j}$ $y_{j1} \rightarrow x_1$

$$y_j \text{ beschränkt} \implies \exists y_{j1} : y_{j1} \rightarrow x_2$$

$$z_l := y_{j_l} \text{ und } z_{l1} \rightarrow x_1, \quad x_{l2} \rightarrow x_2$$

... $(n-2)$ Schritte. w_r Teilfolge von x_k mit $w_{ri} \rightarrow x_i$

$$w_r \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$$

□

1.2 Ein bisschen mehr Topologie

Definition 1.25. Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heisst geschlossen falls $G^c (= \mathbb{R}^n \setminus G)$ eine offene Menge ist.

Bemerkung 1.26.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Satz 1.27. 1. \emptyset, \mathbb{R}^n sind abgeschlossen

2. G_1, \dots, G_N abgeschlossen $\implies G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_N$ abgeschlossen

3. $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ abgeschlossen $\implies \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ abgeschlossen.

Satz 1.28. $G \subset \mathbb{R}^n$ G ist abgeschlossen $\iff \forall$ jede konvergente $\{x_k\} \subset G$ gehört der Grenzwert zu G (gilt auch für metrische Räume).

Beweis. \Leftarrow Die rechte Eigenschaft gilt. Ziel: G^c ist offen. Sei $x \in G^c$: das Ziel ist eine Kugel $K_r(x) \in G^c$ zu finden. Widerspruchsbeweis: $K_{\frac{1}{j}}(x) \not\subset G^c$, $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\implies \exists x_j \in K_{\frac{1}{j}}(x) \cap G \implies \{x_j\} \subset G \text{ und } x_j \rightarrow x$$

$$\{x_j\} \subset G \quad x_j \rightarrow x \quad x \notin G$$

\implies d.h. G^c offen \implies falls $\{x_k\} \subset G$ und $x_k \rightarrow x$ dann $x \in G$
Widerspruch: G^c offen, aber $\exists \{x_k\} \subset G$ mit Grenzwert $x \notin G$, d.h. $x \in G^c$. Offenheit von G^c .

$$\implies \exists K_r(x) \subset G^c \implies K_r(x) \cap G = \emptyset$$

d.h. $\exists N$ mit

$$\|x_N - x\| < r \implies x_N \in K_r(x) \cap G$$

□

Beispiel 1.29. Eine offene Kugel ist nicht geschlossen.

$$K_r(x) = \{y : \|y - x\| < r\}$$

Sei $\{y_k\} \in K_r(x)$, (d.h. $\|y_k - x\| < r$) mit $y_k \rightarrow y$ und $\|y - x\| = r$.

Definition 1.30. Sei $\overline{K_r(x)} := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$.

Übung 1.31. $\overline{K_r(x)}$ ist abgeschlossen

Definition 1.32. $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein Randpunkt von M falls

$$\forall K_r(x) \quad \exists y \in K_r(x) \cap M \quad \text{und} \quad \exists z \in K_r(x) \cap M^c$$

Definition 1.33. Sei M eine Menge in \mathbb{R}^n , dann ist der Rand von M

$$\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n, \text{ Randpunkt von } M\}$$

Satz 1.34. $\partial M^c = \partial M$

1. $M \setminus \partial M$ ist die grösste offene Menge die in M enthalten ist.

2. $M \cup \partial M$ ist die kleinste geschlossene Menge die M enthält.

Beweis. $M \setminus \partial M$ ist offen.

$$\begin{aligned} x \in M \setminus \partial M &\implies x \in M \text{ und } \exists K_r(x) \text{ mit } K_r(x) \cap M^c = \emptyset \\ &\implies K_r(x) \subset M \end{aligned}$$

Sei $y \in K_r(x)$

$$\begin{aligned} &\implies |y - x| = \rho < r \\ &\implies K_{r-\rho}(y) \subset K_r(x) \subset M \implies y \in M, y \notin \partial M \\ &\quad K_r(x) \subset M \setminus \partial M \end{aligned}$$

x ist beliebig $\implies M \setminus \partial M$ ist offen.

Sei $A \subset M$ eine offene Menge. Das Ziel ist $A \subset M \setminus \partial M$. Sei $x \in A$. Ziel: $(x \in M \setminus \partial M) \implies x \notin \partial M$.

$$A \text{ offen} \implies \exists K_r(x) \subset A \subset M \implies x \notin \partial M \implies A \subset M \setminus \partial M$$

□

1.3 Stetigkeit

Definition 1.35. Sei $f : \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}^k$. f ist stetig an der Stelle $x \in \Omega$ falls $\forall \{x_k\} \subset \Omega$ mit $x_k \rightarrow x$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x)$$

Lemma 1.36. Eine äquivalente Definition:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(K_\delta(x) \cap \Omega) \subset K_\varepsilon(f(x))$$

Beweis. ε - $\delta \implies$ Folgendefinition. Sei $x_k \rightarrow x$. Ziel: $f(x_k) \rightarrow f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ mit } \underbrace{\|f(x_k) - f(x)\|}_{d(f(x_k), f(x))} < \varepsilon \quad \forall k \geq N$$

$$\exists \delta > 0 \quad \underbrace{f(K_\delta(x)) \subset K_\varepsilon(f(x))}$$

$$\exists \|x_k - x\| < \delta \quad k \geq N$$

$$x_k \in K_\delta(x) \implies f(x_k) \in K_\varepsilon(f(x))$$

Folgendefinition \implies $(\varepsilon$ - $\delta)$ -Defintion. Widerspruchsannahme:

$$\exists \varepsilon > 0 : f(K_\delta(x) \cap \Omega) \not\subset K_\varepsilon(f(x)) \quad \forall \delta > 0$$

$$\implies \forall \delta > 0 \exists y_\delta \in K_\delta(x) \text{ und } \|f(y_\delta) - f(x)\| \geq \varepsilon$$

Nehmen wir $\delta = \frac{1}{j}$ und $x_j = \frac{y_1}{j}$

$$\|x_j - x\| < \frac{1}{j} \quad (\text{weil } x_j \in K_{\frac{1}{j}}(x))$$

$$\|f(x_j) - f(x)\| = \|f(y_{\frac{1}{j}}) - f(x)\| \geq \varepsilon$$

$x_j \rightarrow x$ aber $f(x_j) \not\rightarrow f(x)$

□

Definition 1.37. Die allgemeine Defintion der Stetigkeit für metrische Räume: Seien (X, d) und (Y, \bar{d}) zwei metrische Räume. Sei $f : X \rightarrow Y$. f ist stetig an der Stelle x falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } d(y, x) < \delta \implies \bar{d}(f(y), f(x)) < \varepsilon$$

$$\iff f(K_\delta(x)) \subset K_\varepsilon(f(x))$$

Definition 1.38. Eine $f : X \rightarrow Y$ heisst stetig falls f stetig an jeder Stelle $x \in X$ ist.

Satz 1.39. Sei $f : X \rightarrow Y$ $((X, d), (Y, \bar{d}))$ metrische Räume) Dann:

1. Die Stetigkeit in $x \iff \forall$ Umgebung U von $f(x)$ ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x .
2. Stetigkeit von $f \iff f^{-1}(U)$ ist offen $\forall U$ offen.

Beweis. 1. • Stetigkeit \implies Umgebung. U Umgebung von $f(x) \implies \exists \delta > 0$ mit $K_\delta(f(x)) \subset U$

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : f(K_\varepsilon(x)) \subset K_\delta(f(x))$$

$$\implies f^{-1}(U) \supset f^{-1}(K_\delta(f(x))) \supset K_\varepsilon(x) \implies f^{-1}(U) \text{ Umgebung von } x$$

- Umgebung \implies Stetigkeit. Sei $\delta > 0$ $U = K_\delta(f(x))$. U Umgebung von $f(x)$. $f^{-1}(U)$ ist eine Umgebung von x .

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(U)$$

$$\implies f(K_\varepsilon(x)) \subset U = K_\delta(f(x))$$

2. • Stetigkeit \implies offen. Sei U offen $\iff \forall y \in U$ ist U eine Umgebung von y

$$f^{-1}U \ni x \implies f(x) \in U \xrightarrow{\text{Stetigkeit in } x} f^{-1}(U) \text{ ist eine Umgebung von } x$$

$$\implies f^{-1}(U) \text{ ist offen}$$

- offen \implies Stetigkeit an jedem $x \in X$. Sei $x \in X$, $\delta > 0$, $K_\delta(f(x))$ ist offen

$$f^{-1}(K_\delta(f(x))) \text{ ist offen} \implies x \in f^{-1}(K_\delta(f(x)))$$

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(K_\delta(f(x)))$$

$$f(K_\varepsilon(x)) \subset K_\delta(f(x))$$

□

1.4 lineare Abbildungen

Definition 1.40. Eine Abbildung $L : V \rightarrow W$ (V, W Vektoren) heisst linear, falls

$$L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \iff \exists \text{ eine Matrix } L_{ij} :$$

$$L(x) = \left(\sum_{j=1}^n L_{1j} x_j, \sum_{j=1}^n L_{2j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n L_{kj} x_j \right)$$

Definition 1.41. Sei L_{ij} eine Matrix die die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ darstellt. Die Hilbert-Schmidt Norm von L ist

$$\|L\|_{\text{HS}} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n L_{ij}^2}$$

Bemerkung 1.42. $\{L : (L_{ij} n \times k \text{ Matrixen}) \sim \mathbb{R}^{nk} \|\cdot\|_{\text{HS}}$ ist die euklidische Norm.

Bemerkung 1.43. Sei $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann $\|L(x)\| \leq \|x\| \|L\|_{\text{HS}}$.

Korollar 1.44. Sei L wie oben, dann ist L stetig.

Beweis. Sei $x_k \rightarrow x$. Ziel $L(x_k) \rightarrow L(x)$

$$\begin{aligned}\|L(x_k) - L(x)\| &= \|L(x_k - x)\| \leq \|x_k - x\| \|L\|_{\text{HS}} \rightarrow 0 \\ \implies \|L(x_k) - L(x)\| &\rightarrow 0 \\ \implies \text{Stetigkeit}\end{aligned}$$

□

Beweis. Beweis von 1.36: $L(x) = y$

$$\begin{aligned}\|L(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^k y_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^n L_{ij} x_j \right)^2 \stackrel{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \|x\|^2 = \|x\|^2 \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \right) \\ \|x\|^2 \|L\|_{\text{HS}}^2 &\implies \|L(x)\| \leq \|x\| \|L\|_{\text{HS}}\end{aligned}$$

□

Definition 1.45. Sei $L : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung wobei $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ zwei endlich-dimensionalisierte Vektorräume sind. Die Operatornorm von L ist:

$$\|L\|_{L(V,W)} := \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W$$

Satz 1.46. $\|\cdot\|_{L(V,W)}$ ist eine Norm und

$$\|L(v)\|_W \leq \|L\|_{L(V,W)} \|v\|_V$$

Deswegen: jede lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ ist stetig.

Beweis. Der Kern ist die folgende Eigenschaft:

$$\|L\|_{L(V,W)} < +\infty$$

Wenn das gilt dann:

1.

$$\underbrace{\|L\|_{L(V,W)}}_{\text{Kern}} \text{ und } \|L\|_{L(V,W)} = 0 \iff L = 0$$

\Leftarrow einfach. Sei $\|L\|_{L(V,W)} = 0$. Dann sei $v \in V$.

$$v = 0 \implies L(v) = 0$$

$$v \neq 0 \implies z \frac{v}{\|v\|_V} \implies \|z\|_V = 1$$

$$\|L(z)\|_W \leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(y)\|_W = 0$$

$$\implies L(z) = 0 \implies L(v) = L(\|v\|_V z) = \|v\|_V L(z) = 0$$

2.

$$\begin{aligned}
\|\lambda L\|_{L(V,W)} &= |\lambda| \|L\|_{L(V,W)} \\
\|\lambda L\|_{L(V,W)} &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|\lambda L(y)\|_W \\
&= \sup_{\|y\|_V \leq 1} |\lambda| \|L(y)\|_W \\
&= |\lambda| \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(y)\|_W \\
&= |\lambda| \|L\|_{L(V,W)}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
&\|L + L'\|_{L(V,W)} \\
&= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|(L + L')(y)\|_{L(V,W)} \\
&= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(y) + L'(y)\|_{L(V,W)} \\
&\leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} (\|L(y)\|_W + \|L'(y)\|_W) \\
&\leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(y)\|_W + \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L'(y)\|_W \\
&= \|L\|_{L(V,W)} + \|L'\|_{L(V,W)}
\end{aligned}$$

Wenn v_1, \dots, v_n Basis für V , w_1, \dots, w_k Basis für W . Die lineare Abbildung $E_{ij}(v_i) = w_j$, $E_{ij}(v_l) = 0$ falls $l \neq i$ ist eine Basis für $L(V, W) \implies L = \sum_{i,j} \lambda_{ij} E_{ij}$

□

$$(V, \|\cdot\|) \quad (W, \|\cdot\|) \quad L : V \rightarrow W \quad \|L\|_{L(V,W)} := \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W \quad (1)$$

Satz 1.47. Falls $\dim(V), \dim(W) < +\infty$, $\|L\|_{L(V,W)} < +\infty$ Wahr ohne Beweis in V und deswegen $L(V, W), \|\cdot\|_{L(V,W)} \forall v \in V, \forall L \in L(V, W)$

$$\|L(v)\|_W \leq \|L\|_{L(V,W)} \|v\|_V \quad (2)$$

Aus 2 folgt dass L stetig ist wenn $\|L\|_{L(V,W)} < +\infty$.

Bemerkung 1.48. $\|L\|_{L(V,W)}$ ist die optimale Konstante in 2.

Beweis. Falls $\|v\|_V = 1$

$$\iff \|L(v)\|_W \leq \|L\|_{L(V,W)} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W$$

Die Ungleichung ist eine direkte Folgerung von 1

$$\|v\|_V = 0 \implies L(v) = 0 \implies \|L(v)\|_W = 0 \implies 2$$

$\|v\|_V > 0$

$$\begin{aligned}
\tilde{v} &:= \frac{v}{\|v\|_V} \implies \|\tilde{v}\|_V = 1 \\
\|L(\tilde{v})\|_W &\leq \|L\|_{L(V,W)} \\
\left\| \frac{1}{\|v\|_V} L(v) \right\|_W &= \frac{1}{\|v\|_V} \|L(v)\|_W \\
\implies \frac{\|L(v)\|_W}{\|v\|_V} &\leq \|L\|_{L(V,W)}
\end{aligned}$$

□

Beweis. $\varepsilon - \delta$ Stetigkeit. $v, \varepsilon > 0$. Suche $\delta > 0$ mit

$$\|v' - v\|_V < \delta \implies \|L(v') - L(v)\|_W < \varepsilon$$

Linearität von L

$$\implies \|L(v') - L(v)\|_W = \|L(v' - v)\|_W$$

und aus 2

$$\begin{aligned} \|L(v' - v)\| &\leq \underbrace{\|L\|_{L(V,W)}}_{< \varepsilon} \overbrace{\|v' - v\|_V}^{< \delta} \\ \implies \delta &= \frac{\varepsilon}{\|L\|_{L(V,W)}} \end{aligned}$$

\implies Ungleichung erfüllt. □

Bemerkung 1.49. $V = \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_V$ euklidische Norm. $W = \mathbb{R}^k$ mit euklidischer Norm.

$$\|L\|_{L(V,W)} \leq \|L\|_{\text{HS}}$$

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ linear}$$

$$\|L\|_{\text{HS}} = \sqrt{\sum_{i,j} L_{ij}^2}$$

$$\|L\|_{L(V,W)} := \sup_{\sum_{i=1}^n v_i^2 \leq 1} \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n L_{ji} v_i \right)^2}$$

1.5 Mehr über stetige Funktionen

Regeln für stetige Funktionen

Regel 1 Seien $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Y$. X : topologischer Raum, metrischer Raum, normierter Vektorraum, \mathbb{R}^n . V ist ein normierter Vektorraum (\mathbb{R}^k). Falls f, g stetig sind, ist auch $f + g$ stetig.

$V = \mathbb{R}$ $fg, \frac{f}{g}$ ($g \neq 0$) stetig

$$V = \mathbb{R} \quad fg(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)g_i(x)$$

Beweis. Im Fall X Teilmenge von \mathbb{R}^n

$$\underbrace{\{x^k\}}_{\subset X} \rightarrow x \in X$$

Stetigkeit von f und g : $g(x^k) \rightarrow g(x)$, $f(x^k) \rightarrow f(x)$.

$$g(x^k) = (g_1(x^k), \dots, g_m(x^k))$$

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$$

$$f(x^k) = (f_1(x^k), \dots, f_m(x^k))$$

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

$$(g + f)(x^k) = (g_1(x^k) + f_1(x^k), \dots, g_m(x^k) + f_m(x^k))$$

$$\rightarrow g_1(x) + f_1(x), \dots, g_m(x) + f_m(x) = (g + f)(x)$$

$$x^k \rightarrow x \in X \implies (f + g)(x^k) \rightarrow (f + g)(x).$$

□

Regel 2 Seien X, Y, Z topologische Räume. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetig

$$g \circ f : \underbrace{X \rightarrow Z}_{x \mapsto g(f(x))}$$

Beweis. Sei U eine offene Menge in Z .

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(U)}_{\text{offen}})$$

□

Definition 1.50. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

$f : X \rightarrow V$, $V, \|\cdot\|_V$ normierter Vektorraum

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_V$$

Bemerkung 1.51. X Menge, $V, \|\cdot\|$ ein normierter Vektorraum.

$$F := \{f : X \rightarrow V\} \quad \text{mit} \quad \|f\|$$

Dann ist $F, \|\cdot\|$ ist ein normierter Vektorraum.

Definition 1.52. Eine Folge von Funktionen

$$f^k : X \rightarrow V$$

konvergiert gleichmässig gegen f falls

$$\|f^k - f\| \rightarrow 0$$

Bemerkung 1.53. $x \in X$

$$\|f^k(x) - f(x)\|_V \leq \|f^k - f\|$$

Folgerung f^k konvergiert gleichmässig

$$\implies f^k(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x$$

Satz 1.54. Sei X ein metrischer Raum und $f^k : X \rightarrow V$ eine Folge die gleichmässig gegen f konvergiert. Dann ist f stetig.

Beweis. Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$.

Ziel $\exists \delta > 0$ so dass

$$d(x, y) < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

$\exists N$ so dass

$$\|f - f^k\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{falls} \quad k \geq N$$

f^N ist stetig: $\exists \delta > 0$:

$$d(x, y) < \delta \implies \|f^N(x) - f^N(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$d(x, y) < \delta$$

$$\|f(x) - f(y)\| = \|(f(x) - f^N(x)) + (f^N(x) - f^N(y)) + (f^N(y) - f(y))\|_V$$

$$\leq \|f(x) - f^N(x)\|_V + \|f^N(x) - f^N(y)\|_V + \|f^N(y) - f(y)\|_V$$

$$< \|f^N - f\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f^N - f\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

1.6 Kompakte Menge

Definition 1.55. Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heisst kompakt falls K abgeschlossen und beschränkt ($\iff \exists B_R(0) : K \subset B_R(0)$) ist.

Satz 1.56. Sei $k \subset \mathbb{R}^n$.

$$K \text{ kompakt} \iff \forall \{x^j\} \subset K \exists x^{j_l}$$

x^{j_l} ist eine Teilfolge, die gegen $x \in K$ konvergiert.

$K \implies$ Sei $\{x^j\}$ eine Folge

$$x^j \in K \subset B_R(0) \implies \|x^j\| < R$$

$\exists x^{j_l} \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$, die Abgeschlossenheit von $K \implies x \in K$. Folgenkriterium \implies Abgeschlossenheit und Beschränktheit.

$$\text{nicht abgeschlossen} \implies \exists x^j \subset K \text{ mit } x^j \rightarrow \notin K$$

$$\text{Folgenkompaktheit} \implies \exists x^{j_l} \rightarrow y \in K$$

Widerspruch (weil x und y sind in derselben Menge)

Sei K nicht beschränkt.

$$\forall j \in \mathbb{N} \ B_j(0) \not\supset K$$

$$\exists x^j \in K \setminus B_j(0) \implies \|x^j\| \geq j$$

Wenn $x^{j_l} \rightarrow x$

$$\|x^{j_l}\| \leq \|x\| + \|x^{j_l} - x\|$$

$$\|x\| \leq \|x^{j_l}\| + \|x - x^{j_l}\|$$

$$\| \|x\| - \|x^{j_l}\| \| \leq \|x - x^{j_l}\|$$

$$\implies \|x^{j_l}\| \rightarrow \|x\|$$

$$\|x^{j_l}\| = j_l \rightarrow +\infty$$

\implies Widerspruch

Satz 1.57. $E \subset \mathbb{R}^n$

$$E \text{ kompakt} \iff E \text{ folgenkompakt}$$

d.h.

$$\forall \{x_k\} \subset E \exists \text{ Teilfolge } \{x_{k_l}\} \text{ die gegen } x \in E \text{ konvergiert}$$

Definition 1.58. (Überdeckungseigenschaft) Eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ besitzt die Überdeckungseigenschaft falls:

- \forall Überdeckung $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von E mit offenen Mengen \exists endliche Teilüberdeckung.

$$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \text{ Überdeckung} \iff \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \supset E$$

Teilüberdeckung ist eine Teilfamilie von $\{U_\lambda\}$ die noch eine Überdeckung von E ist.

Beispiel 1.59. Eine offene Kugel hat diese Eigenschaft nicht.

$$\forall x \in K_r(0) \text{ sei } K_{\frac{r-\|x\|}{2}}(x) = U_x$$

1. $\{U_x\}_{x \in K_r(0)}$ ist eine Überdeckung von $K_r(0)$.

Einfach weil $x \in U_x$! Sei U_{x_1}, \dots, U_{x_N} eine beliebige endliche Teilfamilie. Sei

$$p := \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \|x_i\| < r$$

\implies falls $\|y\| \geq \frac{\|x_i\|+r}{2}$ dann $y \notin U_{x_i}$. So, wenn $\|y\| \geq \frac{p+r}{2}$ dann

$$y \notin U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_N} \quad \frac{p+r}{2} < r$$

falls $\|y\| = \frac{p+r}{2}$, dann $y \in K_r(0)$. Mit einer geschlossenen Kugel ist das anders.

Satz 1.60. Sei $E \subset \mathbb{R}^n$

$$E \text{ kompakt} \iff E \text{ hat die Überdeckungseigenschaft}$$

Beispiel 1.61. $E = \mathbb{R}^n$, $U_n = K_{n+1}(0)$.

$$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

Aber $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}^n = E \not\subset \bigcup_{n=0} U_n$$

Beweis. $\exists \{x_i\} \subset E$ ohne konvergente Teilfolge in $E \implies E$ ist nicht kompakt
 \implies Überdeckungseigenschaft gilt nicht. Zwei Möglichkeiten:

1. \exists eine Teilfolge $\{y_i\} \subset E$ $y_i \rightarrow y$ $y \notin E$
2. \exists eine Teilfolge $\{y_i\} \subset E$ $y_i \rightarrow +\infty$

Beim ersten ist die Menge offen.

$$U_0 := \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{(\{y_1\} \cup \{y\})}_{E \text{ ist abgeschlossen}}$$

Beim zweiten gilt:

$$U_0 = \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{\{x_i\}}_F \text{ ist offen}$$

$$U_n = U_0 \cup \{y_1, \dots, y_{n-1}\} \quad n \geq 0$$

U_n ist auch offen.

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} U_n = \begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \{y\} & \text{im Fall 1} \\ \mathbb{R}^n \setminus \{x_i\} & \text{im Fall 2} \end{cases}$$

Aber jede endliche Familie

$$U_1 \cup \dots \cup U_n \not\supset E$$

in beiden Fällen lassen wir unendlich viele Punkte weg. E kompakt \implies Überdeckungseigenschaft. E ist beschränkt und abgeschlossen und sei $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von offenen Mengen mit $E \subset \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Wir decken die Menge U mit Würfeln:

$$[k_1, k_1 + 1] \times [k_2, k_2 + 1] \times \dots \times [k_n, k_n + 1] \\ W_1 \cup \dots \cup W_M$$

Falls jedes $E \cap W_i$ mit einer endlichen Familie von $\{U_\lambda\}$ überdeckt wird, dann finde ich eine endliche Überdeckung von E wenn N gross genug ist. So, angenommen dass die Überdeckungseigenschaft nicht gilt.

$$\exists E_i := E \cap W_i :$$

1. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Überdeckung von E_1
2. keine endliche Teilfamilie deckt E_1

Teilen wir W_i in 2^n Würfel mit Seite $\frac{1}{2}$

$$\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_2$$

$\exists E_2 := E \cap \tilde{W}_i$: so dass die beiden Eigenschaften noch gelten

Induktiv

$$E \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$$

jede $E_i \subset W^i$ Würfel mit Seite 2^{-i+1} und die beiden Eigenschaften gelten mit E_j statt E_i .

$\{x_k\} \subset E$. $\{x_k\}$ ist eine Cauchy-Folge. $j, k > i$, $x_k, x_j \in W$ mit Seite w^{-i+1}
 $\|x_j - x_k\| \leq \sqrt{n}2^{-i+1}$

$$\implies x_j \rightarrow x \in E \rightarrow x \in U \in \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \implies K_r(x) \supset U$$

$$x \in E, x \in E^i \quad \forall i \implies x \in W^i$$

$$\implies W^i \subset B_r(x) \subset U$$

für i gross genug

$$\implies E_i \subset U$$

\implies wir haben eine endliche Teilüberdeckung $\{U\} \subset \{U_\lambda\}$ gefunden \implies Widerspruch mit den beiden Eigenschaften. \square

Bemerkung 1.62. f stetig $\implies f^{-1}(U)$ offen falls U offen.

Beweis. Sei $\{U_\lambda\}$ eine Überdeckung (mit offenen Mengen) von $f(E)$, dann ist $\{f^{-1}(U_\lambda)\}$ eine Überdeckung von E .

$$\exists f^{-1}(U_{\lambda_1}), \dots, f^{-1}(U_{\lambda_N}) \text{ Teilüberdeckung von } E$$

$U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_N}$ ist eine Überdeckung von $f(E) \implies f(E)$ ist kompakt \square

Korollar 1.63. Wenn $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist und $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist, besitzt f ein Maximum und ein Minimum.

Beweis. $f(E) \subset \mathbb{R}$ ist kompakt.

$$s = \sup f(E) < +\infty$$

$$\exists \{x_k\} \subset f(E) \text{ mit } x_k \rightarrow s \xrightarrow{\text{abgeschlossen}} s \in s \in f(E)$$

$$\left(s - \frac{1}{k} \implies \exists x_k \in f(E) \text{ mit } x_k > s - \frac{1}{k}, x_k \leq s \right)$$

$\implies s$ ist ein Maximum. \square

Definition 1.64. Das Intervallschachtelungsprinzip in \mathbb{R} . Sei I_j eine Intervallschachtelung:

1.

$$I_j = [a_j, b_j]$$

2.

$$I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_j \supset I_{j+1}$$

3.

$$b_j - a_j \rightarrow 0$$

$$\implies \bigcap_{j=0}^{\infty} I_j \neq \emptyset$$

Satz 1.65. Sei E_j eine Folge von kompakten Mengen mit $E_j \supset E_{j+1} \forall j$ ($E_0 \subset \mathbb{R}^n$)

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \neq \emptyset \text{ falls } E_j \neq \emptyset \forall j$$

Beweis. Sei E_j wie im Satz mit $E_j \neq \emptyset$, aber $\bigcap_{j=0}^{\infty} E_j = \emptyset$. Sei $U_j := \mathbb{R}^n \setminus E_j \implies U_j$ ist offen. $\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j = \mathbb{R}^n \setminus \{U_j\}$ ist eine Überdeckung von E_0 . Aber $U_1 \cup \dots \cup U_N = U_N$ (weil $U_{j+1} \supset U_j$)

$$U_N \not\supset E_N \neq \emptyset \quad E_N \subset E_0$$

Keine endliche Teilfamilie von $\{U_j\}$ ist eine Überdeckung von E_0 . Widerspruch wegen Kompaktheit von E_0 . \square