Analysis II - Vorlesungs-Script

Prof. Dr. Camillo De Lellis

Basisjahr 11 Semester I

Mitschrift:
Simon Hafner

Inhaltsverzeichnis

1 Metrik und Topologie des euklidischen Raumes

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n), x \in \mathbb{R}\}$ In $\mathbb{R}^n$:

- Norm (Euklidische)
- Abstand (Euklidische)
- Topologie

"Abstrakte Theore"

- Normierte Vektorräume
- Metrische Räume
- Topologische Räume

Definition 1.1. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ $(x = (x_1, \cdots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R})$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Intuitiv: $\|x\| =$"der Abstand zwischen x und 0

Lemma 1.2. $\|.\|$ *erfüllt die Regeln*

1. $\|x\| \geq 0$ *und* $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Beweis. 1. ≥ 0 trivial

$$x = 0 \implies \sum x_i^2 = 0 \implies \|x\| = 0$$

$$x = 0 \Leftarrow x_i = 0 \forall i \Leftarrow \sum x_i^2 = 0 \Leftarrow \|x\| = 0$$

2.

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i)^2} \sqrt{\lambda^2 (\sum x^2)} = |\lambda| \sqrt{\sum x^2} = |\lambda| \, \|x\|$$

$$|\lambda| = \frac{\|x\| \, |\lambda|}{\|x\|}$$

3.

$$\iff \underbrace{\|x + y\|^2}_{=} \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \, \|x\| \, \|y\|$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i\right) = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \overbrace{2 \sum x_i y_i}^{Skalarprodukt}$$

$$\iff \langle x, y \rangle \leq \|x\| \, \|y\|$$

$\square$

Satz 1.3. *Cauchy-Schwartzsche Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Beweis. OBdA $y \neq 0$ ($y = 0$ trivial)

$$t \to g(t) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + ty_i)^2$$
$$= \left(\sum x_i^2\right) + 2t \sum x_i y_i + t^2 \sum y_i^2$$
$$= \|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + \|y\|^2 t^2$$

Sei $t_0 = \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$, dann $g(t_0) \geq 0$

$$0 \leq g(t_0)$$
$$= \|x\|^2 - 2\frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^2} + \|y\|^2 \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^2}$$
$$= \|x\|^2 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^2}$$
$$\implies \langle x, y\rangle \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$
$$\implies |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

□

Definition 1.4. Ein normierter Vektorraum ist ein reeller Vektorraum V mit einer Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ so dass:

1. $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Nullvektor)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in V$

Beispiel 1.5. $V = \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad p \geq 1$$

$p = 2$ euklidische Norm

Definition 1.6. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Die euklidische Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$

Lemma 1.7. *1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$*

2. $d(x, y) = d(y, x)$

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Beweis.

$$\|x - z\| \leq \underbrace{\|x - y\|}_{v} + \underbrace{\|y - z\|}_{w} \quad v + w = x - z$$
$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

□

Definition 1.8. Ein metrischer Raum ist eine Menge X mit einer Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \ \ (x, y) \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R}$$

1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y \ \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$
3. $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z) \ \forall x, y, z \in X$

Lemma 1.9. *Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann sind V und $d(x, y) = \|x - y\|$ ein metrischer Raum.*

Definition 1.10. Die offene Kugel mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$K_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) < r\}$$

Definition 1.11. Eine Menge heisst "Umgebung" von x, wenn V eine offene Kugel mit Mittelpunkt x enthält.

Definition 1.12. Eine Menge $U \in \mathbb{R}^n$ heisst offen falls $\forall x \in U$ ist U eine Umgebung von x

$$\forall x \in U \ \ \exists \text{ eine Kugel } \ K_r(x) \in U$$

Bemerkung 1.13. Eine offene Kugel ist offen.

Satz 1.14. *1. $\varnothing$ und $\mathbb{R}^n$ sind offen*

2. Der Schnitt endlich vieler offener Menge ist auch offen.

3. Die Vereinigung einer beliebigen Familie offener Mengen ist auch offen.

Beweis. 1. $\mathbb{R}^n$ trivialerweise offen, auch $\varnothing$

2. Sei $x \in U \cap \cdots \cap U_N$

$$\forall i \subset \{1, \ldots, N\} \ \ K_r(x) \in U_i$$

Sei $r = \min\{r_i, \ldots, r_N\}$

$$\implies K_r(x) \subset U_i \forall i \implies K_r(x) \subset U_1 \cap \cdots \cap U_N$$

3. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Sei $U = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

$$x \in U \implies x \in U_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \Lambda$$

$$\implies \exists K_r(x) \subset U_\lambda \subset U$$

□

Definition 1.15. Ein topologischer Raum ist eine Menge X und eine Menge O von Teilmengen von X so dass:

1. $\varnothing, X \in O$
2. $U_1 \cap \cdots \cap_N \in O$ falls $U_i \in O$
3. $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in O$ falls $U_i \in O$

Satz 1.16. *Sei (X, d) ein metrischer Raum*

$$K_r(x) = \{y = X : d(x, y) < r\}$$

Umgebungen und offene Mengen sind wie im euklidischen Fall. $O = \{\text{offene Menge}\}$ definiert eine Topologie.