Analysis I - Vorlesungs-Script

Prof. Dr. Camillo De Lellis

Basisjahr 10 Semester II

Mitschrift:
Simon Hafner

Inhaltsverzeichnis

1 Die reellen Zahlen

$\mathbb{Q}$ ist nicht genug!

Satz 1.1. *Es gibt kein $q \in \mathbb{Q}$ so dass $q^2 = 2$*

Beweis. Falls $q^2 = 2$, dann $(-q)^2 = 2$ OBdA $q \geq 0$ Deswegen $q > 0$. Sei $q > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ so dass $q^2 = 2$. $q = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\mathrm{GGT}(m, n) = 1$ (d.h. falls $r \in \mathbb{N}$ m und n dividiert, dann $r = 1$!).

$$m^2 = 2n^2 \implies m \text{ ist gerade} \implies m = 2k \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

$$4k^2 = 2n^2 \implies n \text{ ist gerade} \implies 2|n (2 \text{ dividiert } n)$$

$\implies$ Widerspruch! Weil 2 dividiert m und n! (d.h. es gibt <u>keine</u> Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$). ☐

Beispiel 1.2.

$$\sqrt{2} = 1,414 \cdots$$

Intuitiv:

$$\begin{array}{rrr} 1,4^2 < & 2 < & 1,5^2 \\ 1,41^2 < & 2 < & 1,42^2 \\ 1,414^2 < & 2 < & 1,415^2 \end{array} \implies \begin{array}{rrr} 1,4 < & \sqrt{2} < & 1,5 \\ 1,41 < & \sqrt{2} < & 1,42 \\ 1,414 < & \sqrt{2} < & 1,415 \end{array}$$

Intuitiv

- $\mathbb{Q}$ hat “Lücke”
- $\mathbb{R} = \{$ die reellen Zahlen $\}$ haben “kein Loch”.

Konstruktion Die reellen Zahlen kann man “konstruieren”. (Dedekindsche Schnitte, siehe Kapitel I.10 in H. Amann, J. Escher *Analysis I*, oder Kapitel 1.8 in W. Rudin *Principle of Mathematical Analysis*; Cantorsche “Vervollständigung”, siehe I. Stewart *Introduction to metic and topological spaces*). Wir werden “operativ” sein, d.h. wir beschreiben einfach die wichtigsten Eigenschaften von $\mathbb{R}$ durch:

- die Köperaxiomen (K1) – (K4);
- die Anordnugsaxiomen (A1)– (A3);
- das Vollständigkeitsaxiom (V).

1.1 Körperstrukturen

K1 Kommutativgesetz

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

K2 Assoziativgesetz

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

K3 Distributivgesetz

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$$

K4 Die Lösungen x folgender Gleichungen existieren:

$$\begin{aligned} a + x &= b && \forall a, b \in \mathbb{R} \\ a \cdot x &= b && \forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \end{aligned}$$

NB: 0 ist das “Annallierungselement”, d.h. das einzige Element 0 so dass $a0 = 0$ für jede $a \in \mathbb{R}$.

1.2 Die Anordnung von $\mathbb{R}$

A1 $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Relationen:

- $a < 0$
- $a = 0$
- $a > 0$

A2 Falls $a > 0$, $b > 0$, dann $a + b > 0$, $a \cdot b > 0$

A3 Archimedisches Axiom: $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$

Übung 1.3. Beweisen Sie dass $a \cdot b > 0$ falls $a < 0$, $b < 0$

Satz 1.4 (Bernoullische Ungleichung)**.** $\forall x > -1$, $x \neq 0$ *und* $\forall n \in \mathbb{N}$
$\{0, 1\}$ *gilt* $(1 + x)^n > (1 + nx)$

Beweis. Vollständige Induktion.
Schritt 1

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + \underbrace{x^2}_{>0} > 1 + 2x$$

weil $x \neq 0$.
Nehmen wir an dass

$$(1+x)^n > \qquad 1 + nx \qquad (x > -1, x \neq 0)$$

Dann

$$\underbrace{(1+x)}_{a}\underbrace{(1+x)^n}_{c} > \underbrace{(1+nx)}_{d}(1+x) \qquad (\text{weil} \quad (1+x) > 0)$$

(In der Tat,

$$c > d \iff c - d > 0 \overset{\text{A2}}{\implies} a(c-d) > 0 \overset{\text{K4}}{\implies} ac - ad > 0 \overset{\text{A2}}{\implies} ac > ad)$$

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 &= \\ 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{>0} &> 1 + (n+1)x \\ \implies (1+x)^{n+1} &> 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

□

Definition 1.5. Für $a \in \mathbb{R}$ setzt man

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{falls} \quad a < 0 \end{cases}$$

Bemerkung 1.6.

$$|x| = max\{-x, x\}$$

Satz 1.7. *Es gilt :*

$$\begin{aligned}
|ab| &= |a||b| && (1)\\
|a+b| &\leq |a|+|b| \qquad \textit{(Dreiecksungleichung)} && (2)\\
||a|-|b|| &\leq |a-b| && (3)
\end{aligned}$$

Beweis.

- (1) ist trivial.
- Zu (2):

  $$a + b \leq |a| + |b|$$

  (weil $x \leq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$ und die Gleichung gilt genau, dann wenn $x \geq 0$).

  $$-(a+b) = -a - b \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$$

  Aber

  $$|a+b| = max\{a+b, -(a+b)\} \leq |a| + |b|$$

- Zu (3).

  $$\begin{aligned}
  & |a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b| \\
  \Longrightarrow \quad & |a| - |b| \leq |a-b| && (4)\\
  & |b| = |a+(b-a)| \leq |a| + |b-a| \\
  \Longrightarrow \quad & |b| - |a| \leq |b-a| = |a-b| && (5)
  \end{aligned}$$

  $$||a|-|b|| = max\{|a|-|b|, -(|a|-|b|)\} \overset{(4),(5)}{\leq} |a-b|$$

$\square$

1.3 Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Für $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, heisst:

- abgeschlossenes Intervall: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- offenes Intervall: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- (nach rechts) halboffenes Intervall: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- (nach links) halboffenes Intervall: $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Sei $I = [a, b]$ (bzw. $]a, b[$ ...). Dann a, b sind die Randpunkte von I. Die Zahl $|I| = b - a$ ist die Länge von I. $(b - a > 0)$

Definition 1.8. Eine Intervallschachtelung ist eine Folge $I_1, I_2, \cdots$ geschlossener Intervalle (kurz $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (I_n)) mit diesen Eigenschaften:

I1 $I_{n+1} \subset I_n$

I2 Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n so dass $|I_n| < \epsilon$

Beispiel 1.9. $\sqrt{2}$

$$\begin{array}{rrrcrl}
1,4^2 < & 2 < & 1,5^2 & & I_1 = [1,4/1,5] & |I_1| = 0.1\\
1,41^2 < & 2 < & 1,42^2 & \Longrightarrow & I_2 = [1,41/1,42] & |I_2| = 0.01\\
1,414^2 < & 2 < & 1,415^2 & & I_3 = [1,414, 1,415] & |I_2| = 0.001\\
\ldots & & & & & \\
\ldots & & & & I_n = \ldots &
\end{array}$$

I1 und I2 sind beide erfüllt.

Axiom 1.10. *Zu jeder Intervallschachtelung $\exists x \in \mathbb{R}$ die allen ihren Intervallen angehört.*

Satz 1.11. *Die Zahl ist eindeutig.*

Beweis. Sei (I_n) eine Intervallschachtelung. Nehmen wir an dass $\exists \alpha < \beta$ so dass $\alpha, \beta \in I_n$ für alle n. Dann $|I_n| \geq |\beta - \alpha| > a$. Widerspruch! □

Satz 1.12. *$\forall a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ und $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\exists! x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und $x^k = a$ ($\exists! x$ bedeutet "es gibt genau ein x"). Wir nennen $x = \sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$.*

Sei $a > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Dann $a^{m+n} = a^m a^n$. Wir definieren $a^{-m} := \frac{1}{a^m}$ für $m \in \mathbb{N}$. (so dass die Gleichung $a^{m-m} = a^0 = 1$ stimmt). Wir haben dann die Eigenschaft: $a^{j+k} = a^j \cdot a^k \ \forall j, k \in \mathbb{Z}$. Wir haben aber auch, für $m, n \in \mathbb{N}$,

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ Mal}} = a^{\overbrace{m + \cdots + m}^{n \text{ Mal}}} = a^{nm}$$

(Und mit $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ stimmt die Regel $(a^m)^n = a^{mn}$ auch $\forall m, n \in \mathbb{Z}$!). Diese Gleichung motiviert die Notation $a^{\frac{1}{k}}$ für $\sqrt[k]{a}$.

Definition 1.13. $\forall q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $\forall a > 0$, wir setzen $a^q := (\sqrt[n]{a})^m$

Es ist leicht zu sehen dass die Gleichungen

$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r \qquad \text{und} \qquad a^{qr} = (a^q)^r$$

für alle $q, r \in \mathbb{Q}$ gelten.

Beweis vom Satz 1.12. OBdA $x > 1$ (sonst würden wir $\frac{1}{x}$ betrachten). wir konstruieren eine Intervallschachtelung (I_n), $I_n = [a_n, b_n]$ so dass $a_n^k \geq x \geq b_n^k$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Wie setzten

$$I_1 := [1, x]$$

$$I_{n+1} = \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] & \text{falls } x \leq \left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^k \\ \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] & \text{falls } x > \left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^k \end{cases}$$

$|I_n| = \frac{1}{2^{n-1}}|I_1|$ und $I_{n+1} \subset I_n$. Intervallschachtelungsprinzip $\implies \exists y \in \mathbb{R}$ s.d. $y \in I_n \forall n \in \mathbb{N}$

Wir behaupten dass $y^k = x$.

Man definiert $J_n = [a_n^k, b_n^k]$. Wir wollen zeigen, dass J_n eine Intervallschachtelung ist.

- $J_{n+1} \subset J_n$ weil $I_{n+1} \subset I_n$
- $$|J_n| = b_n^k - a_n^k = \underbrace{(b_n - a_n)}_{|I_n|} \underbrace{(b_n^{k-1} + b_n^{k-2} a_n + \cdots + a_n^{k-1})}_{\leq k b_1^{k-1}}$$

$\implies |J_n| \leq |I_n| k b_1^{k-1}$.

Sei ε gegeben. Man wähle N gross genug, so dass

$$|I_n| \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{k b_1^{k-1}} \implies |J_n| \leq \varepsilon' k b_1^{k-1} = \varepsilon$$

Einerseits

$$y \in [a_n, b_n] \quad \implies \quad y^k \in [a_n^k, b_n^k] = J_n$$

Andererseits

$$x \in J_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Satz 1.11 $\implies x = y^k$ □

1.4 Supremumseigenschaft, Vollständigkeit

Definition 1.14. $s \in \mathbb{R}$ heisst obere (untere) Schranke der Menge $M \subset \mathbb{R}$ falls $s \geq x$ $(s \leq x)$ $\forall x \in M$.

Definition 1.15. $s \in \mathbb{R}$ ist das Supremum der Menge $M \subset \mathbb{R}$ $(s = \sup M)$ falls es die kleinste obere Schranke ist. D.h.

- s ist die obere Schranke
- falls $s' < s$, dann ist s' keine obere Schranke.

Beispiel 1.16. $M =]0,1[$. In diesem Fall $\sup M = 1 \notin M$

Beispiel 1.17. $M = [0,1]$. $\sup M = 1 \in M$

Definition 1.18. $s \in \mathbb{R}$ heisst Infimum einer Menge M $(s = \inf M)$ falls s die grösste obere Schranke ist.

Definition 1.19. Falls $s = \sup M \in M$, nennt man s das Maximum von M. Kurz: $s = \max M$. Analog Minimum.

Satz 1.20. *Falls $M \subset \mathbb{R}$ nach oben (unten) beschränkt ist, dann existiert* $\sup M$ *(*$\inf M$*).*

Beweis. Wir konstruieren eine Intervallschachtelung I_n, so dass b_n eine obere Schranke ist, und a_n keine obere Schranke ist.

- $I_1 = [a_1, b_1]$, wobei b_1 eine obere Schranke
- a_1 ist keine obere Schranke

Sei I_n gegeben.

$$I_{n+1} = \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] & \text{falls } \frac{a_n+b_n}{2} \text{ eine obere Schranke ist;} \\ \\ \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] & \text{sonst} \ . \end{cases}$$

Also, $\exists s$ s.d. $s \in I_n \quad \forall n$.

Wir behaupten dass s das Supremum von M ist.

- Warum ist s eine obere Schranke?
  Angenommen $\exists x \in M$ so dass $x > s$. Man wähle $|I_n| < x - s$. Daraus folgt

  $$x - s > b_n - a_n \geq b_n - s \implies x > b_n$$

  Widerspruch.

- Warum ist s die kleinste obere Schranke?
  Angenommen $\exists s' < s$. Dann wähle n' so dass $I_{n'} < s - s'$.

  $$s - s' > b_{n'} - a_{n'} \geq s - a_{n'} \implies a_{n'} > s'$$

  Widerspruch.

□

Lemma 1.21. *Jede nach oben (unten) beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{Z}$ mit $M \neq \emptyset$ besitzt das grösste (kleinste) Element.*

Beweis. OBdA betrachte nur nach unten beschränkte Mengen $M \subset N$. Angenommen M hat kein kleinstes Element. Mit der Vollständigen Induktion beweisen wir dass $M = \emptyset$.

- $0 \notin M$, sonst ist 0 das kleinste Element;

- Angenommen dass $\{0,1,\dots,k\}\cap M=\emptyset$, wir schliessen auch $\{0,1,\dots,k+1\}\cap M=\emptyset$, sonst ist $k+1$ das kleinste Element von M.

Vollständige Induktion $\implies$ $\{0,\dots,n\}\cap M=\emptyset\ \forall n\in\mathbb{N}$. D.h. $M\cap\mathbb{N}=\emptyset$. □

Satz 1.22. *$\mathbb{Q}$ ist dich in $\mathbb{R}$, bzw. für beliebige zwei $x,y\in\mathbb{R}$, $y>x$, gibt es eine rationelle Zahl $q\in\mathbb{Q}$, so dass $x<q<y$.*

Beweis. Man wähle $n\in\mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{n}<y-x$. Betrachte die Menge $A\subseteq\mathbb{Z}$, so dass $M\in A\implies M>nx$. Lemma 1.21 $\implies$ $\exists m=\min A$.

$$x<\frac{m}{n}=\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}<x+y-x=y$$

Also setze $q=\frac{m}{n}$ □

1.5 Abzählbarkeit

Definition 1.23. Die Mengen A & B sind gleichmächtig, wenn es eine Bijektion $f:A\to B$ gibt. D.h. es gibt eine Vorschrift f s.d.

- f zuordnet ein Element $b\in B$ jedem $a\in A$; dieses Element wird mit $f(a)$ bezichnet;
- $f(a)\neq f(b)$ falls $a\neq b$;
- $\forall b\in B\ \exists a\in A$ mit $b=f(a)$.

(f ist eine *bijektive Abbildung*; siehe Kapitel 3). A hat grössere Mächtigkeit als B, falls B gleichmächtig wie eine Teilmenge von A ist, aber A zu keiner Teilmenge von B gleichmächtig ist.

Beispiel 1.24.
- $\{1,2\}$ & $\{3,4\}$ sind gleichmächtig.
- $\{1,2,\cdots,n\}$ hat kleinere Mächtigkeit als $\{1,2,\cdots,m\}$, wenn $n<m$ ist.

Definition 1.25. Eine Menge A ist abzählbar, wenn es eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und A gibt D.h. $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$.

Lemma 1.26. *$\mathbb{Z}$ ist abzählbar*

Beweis.

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	...
$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	...

Formal, definiere

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$$

$$f(n):=\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{wenn } n \text{ gerade}\\ \frac{1-n}{2} & \text{wenn } n \text{ ungerade}\end{cases}$$

□

Satz 1.27. *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar*

Satz 1.28. *$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.*

(Für die Beweise siehe Kapitel 2.4 von K. Königsberger *Analysis I*).

2 Komplexe Zahlen

Bemerkung 2.1. $\forall a\in\mathbb{R}$, $a^2>0$. Deswegen ist $x^2=-1$ unlösbar. Die Erfindung der imaginäre Einheit i (die imaginäre Zahl mit $i^2=-1$) hat sehr interessante Konsequenzen auch für die üblichen reellen Zahlen.

2.1 Definition

[Erste Definition der Komplexen Zahlen]

Definition 2.2. Sei $a, b \in \mathbb{R}$, dann $a + bi \in \mathbb{C}$. Wir definieren die Summe:

$$(a + bi) + (\alpha + \beta i) = (a + \alpha) + (b + \beta)i$$

und das Produkt

$$(a + bi)(\alpha + \beta i) = (a\alpha - b\beta) + \underbrace{(a\beta + b\alpha)}_{A} i$$

Definition 2.3. Seien A und B zwei Mengen. Dann ist $A \times B$ die Menge der Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Definition 2.4 (Zweite Definition der Komplezen Zahlen)**.** $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $+$ und $\cdot$, die wir so definieren:

$$\begin{aligned} (a, b) + (\alpha, \beta) &= (a + \alpha, b + \beta) \\ (a, b)(\alpha, \beta) &= (a\alpha - b\beta, \underbrace{a\beta + b\alpha}_{A}) \end{aligned}$$

Bemerkung 2.5.

$$\mathbb{R} \simeq \{(a, 0), a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$$

In der Sprache der abstrakte Algebra $\mathbb{R}$ ist isomorph zu $\mathbb{R}' := \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$: d.h. die Summe und das Produkt in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}'$ sind "gleich":

$$\begin{aligned} (a, 0) + (\alpha, 0) &= (a + \alpha, 0) \\ (a, 0)(\alpha, 0) &= (a\alpha, 0) \end{aligned}$$

Deswegen wir schreiben a statt $(a, 0)$.

Bemerkung 2.6.

$$(0, a)(0, b) = (-ab, 0)$$

Deswegen:

$$\underbrace{(0, 1)}_{\text{Wurzel von -1}} \quad (0, 1) = (-1, 0) \qquad \underbrace{(0, -1)}_{\text{auch eine Wurzel von -1}} \quad (0, -1) = (-1, 0)$$

Bemerkung 2.7. $i = (0, 1)$ und wir schreiben (a, b) für $a + bi$. D.h. die zwei Definitionen der komplezen Zahlen sind equivalent!

Bemerkung 2.8. $0 = (0, 0) = 0 + 0i$. $\xi \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 0\xi &= 0 \\ 0 + \xi &= \xi \end{aligned}$$

Satz 2.9. *Alle Körperaxiome (K1-K4) gelten.*

Beweis. K1 Kommultativität: *trivial*

K2 Assoziativität: *trivial*

K3 Distributivität: *trivial.*

K4 Seien $\xi, \zeta \in \mathbb{C}$.

$$\exists \omega \in \mathbb{C} : \qquad \xi + \omega = \zeta \tag{6}$$

$$\xi \neq 0 \exists \omega : \qquad \xi\omega = \zeta \tag{7}$$

Zu (6). Wir setzen

$$\begin{aligned} \xi &= a + bi \\ \zeta &= c + di \\ \omega &= x + yi \end{aligned}$$

$$\xi + \omega = (a+x) + (b+y)i = \xi = c + di$$

Sei $x := c - a$, $y := d - b$. Dann $\xi + \omega = \zeta$.

Zu (7) 1 ($= 1 + 0i$)) das neutrale Element.

$$(a+bi)(1+0i) = \underbrace{(a1 - b0)}_{a} + \underbrace{(b1 + a0)}_{b} = (a+bi)$$

Sei $\xi \neq 0$ und suchen wir α so dass $\xi\alpha = 1$. Dann ist $\omega = \alpha\zeta$ eine Lösung von (7) (eigentlich DIE Lösung). Falls $\xi = a + bi$, dann

$$\alpha = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\,.$$

In der Tat:

$$\xi\alpha = \overbrace{\left(\frac{aa}{a^2+b^2} - \frac{b(-b)}{a^2+b^2}\right)}^{1} + \overbrace{\left(\frac{a(-b)}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2}\right)}^{0} i = 1\,.$$

□

Definition 2.10. Sei $\xi = (x + yi) \in \mathbb{C}$. Dann:

- x ist der reelle Teil von ξ ($\operatorname{Re}\xi = x$)
- y ist der imaginäre Teil von ξ ($\operatorname{Im}\xi = y$)
- $x - yi$ ist die konjugierte Zahl $\left(\overline{\xi} = x - yi\right)$

Bemerkung 2.11.

$$\sqrt{\overline{\xi}\xi} = \sqrt{(\operatorname{Re}\xi)^2 + (\operatorname{Im}\xi)^2} =: |\xi|$$

Definition 2.12. $|\xi|$ ist der Betrag von ξ.

Satz 2.13. *Es gilt:* $(\forall a, b \in \mathbb{C})$*:*

- –
  $$\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$$
  –
  $$\overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b}$$
- –
  $$\operatorname{Re} a = \frac{a + \overline{a}}{2}$$
  –
  $$(\operatorname{Im} a)i = \frac{a - \overline{a}}{2}$$
- $a = \overline{a}$ *genau dann wenn* $a \in \mathbb{R}$*.*
- $$a\overline{a} = |a|^2 = \sqrt{(\operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2} \geq 0$$
  (die Gleicheit gilt genau dann wenn $a = 0$*)*

Bemerkung 2.14. Sei ω so dass $\xi\omega = 1$ ($\xi \neq 0$). Man schreibt $\omega\frac{1}{\xi}$. Der Beweis vom Satz 2.9 impliziert $\omega = \frac{\overline{\xi}}{|\xi|^2}$

Satz 2.15. $\forall a, b \in \mathbb{C}$

- $|a| > 0$ *für* $a \neq 0$ *(trivial)*
- $|\overline{a}| = |a|$ *(trivial)*
- $|\operatorname{Re} a| \leq |a|$, $|\operatorname{Im} a| \leq |a|$ *(trivial)*

- $|ab| = |a||b|$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$

Beweis.

$$|ab|^2 = (ab)\overline{(ab)} = ab\overline{a}\overline{b} = a\overline{a}\overline{b} = |a|^2|b|^2 \implies |ab| = |a||b|$$

$$\begin{aligned} \underbrace{|a+b|^2}\in\mathbb{R} &= (a+b)\overline{(a+b)} = (a+b)(\overline{a}+\overline{b}) = a\overline{a} + b\overline{b} + a\overline{b} + b\overline{a} \\ &= \underbrace{|a|^2+|b|^2}_{\in\mathbb{R}} + \left(a\overline{b} + b\overline{a}\right) \,. \end{aligned} \tag{8}$$

Bemerkung: die Identität implizert dass $a\overline{b} + b\overline{a}$. In der Tat $a\overline{b} + b\overline{a} = a\overline{b} + \overline{a\overline{b}} = 2\,\mathrm{Re}(a)\overline{b}$. Deswegen

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= |a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}(a)\overline{b} \ \leq \ |a|^2 + |b|^2 + 2|a\overline{b}| \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| = (|a|+|b|)^2\,. \end{aligned} \tag{9}$$

□

3 Funktionen

3.1 Definition

Definition 3.1. Seien A und B zwei Mengen. Eine Funktion $f : A \to B$ ist eine Vorschrift die jedem Element $a \in A$ ein eindeutiges Element $f(a) \in B$ zuordnet.

Beispiel 3.2. $A \subset \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$$f(x) = x^2$$

Definition 3.3. A ist der Definitionsbereich.

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

ist der Wertbereich

Bemerkung 3.4. Wertbereich von x^2:

$$\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$$

Definition 3.5. Der Graph einer Funktion $f : A \to B$ ist

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\}$$

Beispiel 3.6. Verboten: zwei Werte für die Stelle x.

Beispiel 3.7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = |x|$

3.2 Algebraische Operationen

Wenn $B = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Seien f, g zwei Funktionen mit gleichem Definitionsbereich.

- $f + g$ ist die Funktion h so dass $h : A \to B$

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

- Die Funktion fg ist $k : A \to B$

$$k(x) = f(x)g(x)$$

- $\frac{f}{g}$ ist wohldefiniert falls der Wertebereich von g in $B \setminus \{0\}$ enthalten ist:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Falls $B = \mathbb{C}$, kann man auch $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $\overline{f}$.

Definition 3.8. Sei $f : A \to B$, $g : B \to C$. Die Komposition $g \circ f : A \to C$.

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Bemerkung 3.9. Sei $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$. Wir definieren $\Xi : A \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\Xi(a) = (f(a), g(a))$$

und $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\Phi(x, y) = xy$$

Dann

$$\Phi \circ \Xi(a) = \Phi(\Xi(a)) = \Phi\left((f(a)), g(a)\right) = f(a)g(a)$$

Also: die "algebraischen Operationen" sind "Kompositionen".

Definition 3.10.
- Wenn $f : A \to B$ und $f(A) = B$ dann ist f surjektiv.
- Wenn $f : A \to B$ und die folgende Eigenschaft hat:

$$f(x) \neq f(y) \forall x \neq y \in A$$

dann ist f injektiv.
- Falls f surjektiv und injektiv ist, dann sagen wir, dass f bijektiv ist.

Bemerkung 3.11. Die bijektiven Funktionen sind umkehrbar. Sei $f : A \to B$ bijektiv. $\forall b\ \exists a : f(a) = b$ (surjektiv), a ist eindeutig (injektiv) (die Notation für die Eindeutigkeit ist $\exists! a : f(a) = b$). Dann $g(b) = a$ ist eine "wohldefinierte Funktion", $g : B \to A$.

Definition 3.12. g wird Umkehrfunktion genannt. $f : A \to B$, $g : B \to A$, $f \circ g : B \to B$, $g \circ f : A \to A$ und

$$f \circ g(b) = b \quad \forall b \in B \qquad g \circ f(a) = a \quad \forall a \in A\,. \tag{10}$$

Definition 3.13. Die "dumme Funktion" $h : A \to A$ mit $h(a) = a\ \forall a \in A$ heisst Identitätsfunktion (Id). Deswegen, (10) $\iff$ $f \circ g = \mathrm{Id}$ und $g \circ f = \mathrm{Id}$.

3.3 Zoo

3.3.1 Exponentialfunktion

$a \in \mathbb{R}, a > 0$. Defintionsbereich $\mathbb{Q}$ (momentan!):

$$\operatorname{Exp}_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Exp}_a(n) = a^n \qquad (= 1 \text{ falls } n = 0)$$

$$\operatorname{Exp}_a(-n) = \frac{1}{a^n}$$

$$\operatorname{Exp}_a\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Exp_a ist die einzige Funktion $\Phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $\Phi(1) = a$
- $\Phi(q + r) = \Phi(q)\Phi(r)\ \forall q, r \in \mathbb{Q}$

Bemerkung 3.14. Später werden wir Exp_a auf $\mathbb{R}$ fortsetzen.

3.3.2 Polynome

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$f : \mathbb{R}(\mathbb{C}) \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Produkt von Polynomen $x \mapsto f(x)g(x)$:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_n x^n + \cdots + a_0)(b_m x^m + \cdots + b_0) \\ &= b_m a_n x^{n+m} + b_n a_{n-1} x^{n-1+m} + \cdots \\ &= b_m a_n x^{n+m} + (b_m a_{n-1} + b_{m-1} a_n) x^{n+m-1} + \cdots + a_0 b_0 \\ &= c_{m+n} x^{m+n} + \cdots + c_0 \,, \end{aligned}$$

wobei

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Definition 3.15. Der Grad von $a_n x^n + \cdots + a_0$ ist n wenn $a_n \neq 0$

Satz 3.16. *Sei $g \neq 0$ ein Polynom. Dann gibt es zu jedem Polynom f zwei Polynome q und r so dass*

$$g = qf + r$$

$$\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} f$$

Beweis. `http://de.wikipedia.org/wiki/Polynomdivision` □

Bemerkung 3.17. Sei $g = x - x_0$. Sei f mit Grad ≥ 1, Satz 3.16 $\implies$ $f = gq + r = gq + c_0$ und Grad von $r < 1$. r ist eine Konstante $r = c_0$. Deswegen

$$f(x) = q(x)(x - x_0) + c_0$$

$$f(x_0) = q(x_0)0 + c_0 = c_0$$

Korollar 3.18. *Falls f ein Polynom ist und $f(x_0) = 0$, dann $\exists q$ Polynom so dass $f = q(x - x_0)$*

Das Polynom $a_n x^n + \ldots + a_0$ mit $a_n = \ldots = 0$ ist das *Trivialpolynom.*

Korollar 3.19. *Ein Polynom P hat höchstens* $\operatorname{grad} f$ *Nullstellen falls P ist nicht das Trivialpolynom.*

Korollar 3.20. *Falls $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, dann ist f das Trivialpolynom.*

Korollar 3.21. *Falls f, g Polynome sind und $f(x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ dann sind die Koeffizienten von f und g gleich.*

Beweis. $f - g$ ist ein Polynom mit $(f - g)(x) = 0\ \forall x$. □

Definition 3.22. Seien f, g Polynome. Dann ist $\frac{f}{g}$ eine rationale Funktion.

4 Folgen

Definition 4.1. Eine Folge komplexer (reeller) Zahlen ist eine Abbildung: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$(bzw. $\mathbb{R}$). Das heisst:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) \in \mathbb{C} \ \text{(bzw. } \mathbb{R}) \,.$$

Wir schreiben a_n für $f(n)$

N.B.: $\mathbb{N}$ ist auch eine Folge: $a_n = f(n) = n$.

Definition 4.2. Eine Folge (a_n) heisst konvergent, falls $\exists a \in \mathbb{C}$ so dass:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < \varepsilon \ \ \forall n \geq N \,. \tag{11}$$

Beispiel 4.3. $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine konvergente Folge. Sei $a = 0$. Wählen wir $\varepsilon > 0$. Sei dann $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$ (diese Zahl existiert wegen des Axioms von Archimedes!). Für $n \geq N$:

$$|a_n| = \left(\frac{1}{n} - 0\right) = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Bemerkung 4.4. Die Zahl a im Konvergenzkriterium ist eindeutig. Sie heisst der Limes der Folge (a_n).

Beweis. Seien $a \neq a'$ zwei relle Zahlen, die das Konvergenzkriterium (11) erfüllen. Sei $\varepsilon := \frac{|a-a'|}{2}$

$$\exists N : |a_n - a| < \varepsilon \ \ \forall n \geq N$$

$$\exists N' : |a_n - a'| < \varepsilon \ \ \forall n \geq N'$$

Für $n \geq \max\{N, N'\}$

$$|a' - a| \leq |a' - a_n| + |a - a_n| < 2\varepsilon = |a' - a|$$

$$\Longrightarrow \ |a' - a| < |a' - a| \quad \text{Widerspruch!}$$

□

Wenn eine Folge kovergiert und die Zahl a (11) erfüllt, wir schreiben

$$a = \lim_{n\to+\infty}(a_n)$$

oder

$$a_n \to a\,.$$

Bemerkung 4.5. Sei $\alpha = A + 0, b_0 b_1 b_2 \ldots$ eine reelle Zahl, wobei $A \in \mathbb{N}$ und b_i die Ziffern der Dezimaldarstellung von $\alpha - A$ sind. Für jede $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := A + 0, b_0 \ldots b_n \quad \in \mathbb{Q}\,.$$

Die Folge (a_n) konvergiert gegen α. In der Tat, sei ε eine beliebige positive reelle Zahl. Sei N s.d. $10^N > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n \geq N$ gilt $|a_n - \alpha| \leq 10^{-N} < \varepsilon$.

Definition 4.6. Sei (a_n) eine Folge und $A(n)$ eine "Folge von Aussagen über a_n". Wir sagen dass $A(n)$ wahr für "fast alle" a_n ist, wenn $\exists N$ so dass $A(n)$ stimmt $\forall n \geq N$. Eine alternative Formulierung von (11) ist also:

$$|a_n - a| < \varepsilon \ \text{ für fast alle } \ a_n$$

Beispiel 4.7. Sei $s \in \mathbb{Q}$ $s > 0$. Sei $a_n = \frac{1}{n^s}$. Dann

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^s}\right) = 0$$

Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \varepsilon^{\frac{1}{s}}$ (Axiom von Archimedes!). Dann

$$|0 - a_n| = \frac{1}{n^s} < \varepsilon \qquad = \text{falls } n \geq N$$

(NB: $\frac{1}{s}$ ist wohldefiniert weil $s \neq 0$. Ausserdem

$$\frac{1}{n^s} < \varepsilon \iff n^s > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{s}}} \qquad \text{weil } s > 0.)$$

Beispiel 4.8. $a > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Fall $a > 1$. Zu beweisen:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \quad \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \ \ \forall n \geq N \in \mathbb{N}$$

Sei $x_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$ und $n \geq 1$

$$a = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \binom{n}{2} x_n^2 + \binom{n}{3} x_n^3 + \cdots + x_n^n\,.$$

Deswegen

$$a \geq 1 + nx_n \;\; x_n \leq \frac{a-1}{n} \quad \text{für}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \geq \frac{a-1}{\varepsilon}$

$$\Longrightarrow \;\; \sqrt[n]{a} - 1 = x_n \leq \frac{a-1}{n} \leq \frac{a-1}{N} < \frac{a-1}{\frac{a-1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

Fall $0 < a < 1$ Wir haben $\frac{1}{a} > 1$ und nuzten die Rechenregeln (siehe Satz 4.13(iii), unten!):

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to \frac{1}{1} = 1}$$

Fall $a = 1$ Trivial! Die Folge ist "konstant": $a_n = 1 \forall n$.

Beispiel 4.9. $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. Wie oben

$$x_n = \sqrt[n]{n} - 1$$

$$n = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \binom{n}{2} x_n^2 + \cdots + x_n^n$$

Hier wir nuzte die stärkere Ungleichung: $(n \geq 2)$

$$n \geq 1 + \binom{n}{2} x_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

$$x_n^2 \leq \frac{2}{n} \;\Longrightarrow\; x_n \leq \sqrt[2]{\frac{2}{n}}$$

Sei $\varepsilon > 0$, wähle N so dass

$$\sqrt{\frac{N}{2}} > \varepsilon^{-1} \qquad (\iff N > 2\varepsilon^{-2})$$

Dann, für $n \geq N$,

$$0 \geq \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n}} \leq \sqrt{\frac{2}{N}} < \sqrt{\frac{2}{\frac{2}{\varepsilon^2}}} = \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \; |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$$

Übung 4.10. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann $\lim_n \sqrt[n]{n^k} = 1$.

Beispiel 4.11. Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann,

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

In der Tat

$$|q^n - 0| = |q^n| - |0| \leq |q|^n$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $\sqrt[n]{\varepsilon} \to 1$ und $|q| < 1$, $\exists N$ s.d.

$$|\sqrt[n]{\varepsilon} - 1| < 1 - |q| \qquad \forall n \geq N$$

Deswegen, für $n \geq N$,

$$\sqrt[n]{\varepsilon} > 1 - (1 - |q|) = |q| \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon > |q|^n\,.$$

Übung 4.12. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann

$$\lim_{n \to \infty} n^k q^n \;=\; 0\,.$$

4.1 Rechenregeln

Satz 4.13. *Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen, mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$, dann:*

(ii) $a_n + b_n \to a + b$

(i) $a_n b_n \to ab$

(iii) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ *falls* $b \neq 0$

Beweis vom Satz 4.13(i).

$$|(a_n + b_n) - (a - b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \tag{12}$$

Sei $\varepsilon > 0$:

$$\exists N : \qquad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N \tag{13}$$

$$\exists N' : \qquad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N' \tag{14}$$

Für $n \geq \max\{N, N'\}$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \overset{(12),(13)\&(14)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

□

Definition 4.14. Eine Folge heisst beschränkt, falls

$$\exists M > 0 : \qquad |a_n| \leq M \quad \forall N\,. \tag{15}$$

Lemma 4.15. *Eine konvergente Folge ist immer beschränkt.*

Beweis. Sei $a_n \to a$. Dann $\exists N$ s.d. $|a_n - a| < 1\ \forall n \geq N$. Deswegen, $|a_n| < |a| + 1$ $\forall n \geq N$. Wählen wir

$$M := \max\{|a_0|, \ldots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}\,.$$

Dann $|a_n| \leq M\ \forall n$. □

Beweis vom Satz 4.13(ii)&(iii). **(ii)** Wegen des Lemmas 4.15 $\exists M > 0$ die (15) erfüllt

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \leq M|b_n - b| + |b||a_n - a| \end{aligned} \tag{16}$$

Wähle

$$\begin{aligned} N \in \mathbb{N} : &\qquad |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad \forall n \geq N \\ N \in \mathbb{N}' : &\qquad |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2|b|} \quad \forall n \geq N' \end{aligned}$$

Für $n \geq \max\{N, N'\}$ gilt

$$|a_n b_n - ab| \overset{(16),(17)\&(17)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(iii) Folgt aus (ii) und

$$\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b} \qquad \text{falls } b_n \to b \neq 0 \tag{17}$$

Um (17) zu beweisen:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{1}{|b|}\frac{|b - b_n|}{|b_n|} \tag{18}$$

Da $|b| > 0$ und $b_n \to b$,

$$\exists N : \qquad |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq N$$

Deswegen, für $n \geq N$,

$$|b_n| \geq |b| - |b - b_n| \geq \frac{|b|}{2} > 0 \tag{19}$$

und

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| \,.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und wähle N' s.d. $|b_n - b| < \varepsilon |b|^2/2$ forall $n \geq N$. Für $n \geq \max\{N, N'\}$ schliessen wir

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon \,.$$

□

Bemerkung 4.16. Falls $a_n \to a$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, folgt aus dem Satz 4.13(ii) dass $\lambda a_n \to \lambda a$: wir setzen eifach $b_n := \lambda \; \forall n$!

Satz 4.17. *Sei $a_n \to a$ ($a_n \in \mathbb{C}$), dann:*

- $|a_n| \to |a|$
- $\bar{a_n} \to \bar{a}$
- $\operatorname{Re} a_n \to \operatorname{Re} a$
- $\operatorname{Im} a_n \to \operatorname{Im} a$

Beweis. Die Behauptungen sind triviale Konsequenzen des Konvergenzkriteriums (11) und der folgenden Ungleichungen:

- $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$
- $|\bar{a_n} - \bar{a}| = |a_n - a|$
- $|\operatorname{Im} a_n - \operatorname{Im} a| \leq |a_n - a|$
- $|\operatorname{Re} a_n - \operatorname{Re} a| \leq |a_n - a|$

□

Satz 4.18. *Seien $a_n \to a$, $b_n \to b$ mit $a_n \leq b_n$. Dann $a \geq b$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N} : \qquad & |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \\ \exists N' \in \mathbb{N} : \qquad & |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N' \end{aligned}$$

Für $n = \max\{N, N'\}$:

$$b - a \geq b_n - |b_n - b| - a_n - |a - a_n| \geq (b_n - a_n) + 2\varepsilon \geq 2\varepsilon \,.$$

Da ε eine beliebige positive Zahl ist, gilt $b - a \geq 0$. □

Satz 4.19. *Seien $a_n \to a$, $b_n \to a$. Sei (c_n) mit $a_n \geq c_n \geq b_n$. Dann ist (c_n) eine konvergente Folge mit $c_n \to a$*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle

$$\begin{aligned} N \in \mathbb{N} : \qquad & |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \\ N' \in \mathbb{N} : \qquad & |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N' \end{aligned}$$

Für $n \geq \max\{N, N'\}$:

$$a - \varepsilon < a - |a - a_n| \leq a_n = a_n \leq c_n \leq b_n \leq a + |b_n - a| < a + \varepsilon \,.$$

$$\Longrightarrow |c_n - a| < \varepsilon \,.$$

□

Beispiel 4.20. Sei $s \geq 0$ und wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq s \leq k+1$. Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann

$$\sqrt[n]{n^k} \leq \sqrt[n]{n^s} \leq \sqrt[n]{n^{k+1}}$$
$$0 \leq n^s |q|^n \leq n^k |q|^n .$$

Deswegen $\sqrt[n]{n^s} \to 1$ und $n^k q^n \to 0$.

Satz 4.21. *Seien $a_n \to a$ und $b_n \to b$ reelle Folgen. Falls $a_n \leq b_n$, dann $a \leq b$.*

Beweis 4.22. *Sei $\varepsilon > 0$. Dann:*

- $$\exists N : |a_n - a| < \varepsilon \ \ \forall n \geq N$$
- $$\exists N : |b_n - b| < \varepsilon \ \ \forall n \geq N'$$

Sei $n \geq \max\{N', N\}$.

$$b - a = b_n + (b - b_n) - a_n + (a_n - a) \geq (b - b_n) + (a_n - a)$$
$$\geq -|a_n - a| - |b_n - b| \geq -2\varepsilon$$
$$b - a \geq -2\varepsilon \overset{\forall \varepsilon > 0}{\Longrightarrow} b - a \geq 0$$

(wäre $b - a < 0$: Sei

$$Sei \varepsilon = \frac{|b-a|}{3} = \frac{-(b-a)}{3}$$

Widerspruch!)

Satz 4.23. *(Einschliessungsregel). Sei c_n eine Folge reeller Zahlen. Seien $a_n \to a$ und $b_n \to a$ so dass $a_n \leq c_n \leq b_n$. Dann $c_n \to a$.*

Beweis 4.24. *Sei $\varepsilon > 0$.*

- $$\exists N : |a_n - a| < \varepsilon \ \ \forall n \geq N$$
- $$\exists N : |b_n - a| < \varepsilon \ \ \forall n \geq N'$$

Sei $n \geq \max\{N, N'\}$.

$$a\varepsilon \leq a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$$
$$\Longrightarrow \ |c_n - a| < \varepsilon$$

Beispiel 4.25.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1 \ \ k \in \mathbb{N}$$
$$\sqrt[n]{n^s} \ \ s \in \mathbb{Q}, s > 0$$
$$\underbrace{1}_{a_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n^s}}_{c_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n^k}}_{b_n}$$

Einschliessungsregel: $\sqrt[n]{n^s} \to 1$.

4.2 Monotone Folgen

Definition 4.26. Eine Folge a_n reeller Zahlen heisst fallend (bzw. wachsend) falls $a_n \geq a_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ($a_n \geq a_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$). Monoton bedeuted fallend oder wachsend.

Satz 4.27. *Eine monotone (beschränkte) Folge konvergiert.*

Beweis 4.28. *oBdA kann ich (a_n) wachsend annehmen. (Sei a_n fallend, dann $-a_n$ wachsend. a_n konvergiert (mit Limes $= L$), a_n konvergiert mit Limes $-L$. $a_n = (-1)(-a_n)$ $a_n \to \lim(-1)\lim(-a_n) = -1$, $L = -L$). Sei*

$$s = \sup \underbrace{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}_{M}$$

Behauptung:

$$s = \lim_{n\to\infty} a_n$$

$a_n \geq a$. *Zu beweisen:*

$$forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : a_n > s - \varepsilon \ \ \forall n \geq N$$

Beweis:

$$forall \varepsilon > 0 \ \ \exists a_j \in M : a_j > s - \varepsilon$$

Die Folge wächst $\implies a_n \geq a_j > s - \varepsilon \ \forall n \geq j$.

Beispiel 4.29.

$$a_n = (-1)^n$$

4.3 Der Satz von Bolzano-Weierstrass

Definition 4.30. Sei (a_n) eine Folge. Eine Teilfolge von (a_n) ist eine neue Folge $b_n := a_{n_k}$, $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_k > n_{k-1}$

$$\underbrace{a_0} \quad a_1 \quad \underbrace{a_2} \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad \underbrace{a_6} \quad s \cdots$$

Satz 4.31. *Jede berschränkte Folge (a_n) $(\subset \mathbb{R}, \mathbb{C})$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis 4.32. *Schritt 1: Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Sei I und $M \in \mathbb{R}$ so dass $I \leq a_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

$$\overbrace{[I, M]}^{J_0} = [I, A_0] \cup [A_0, M] \quad A_0 = \frac{M - I}{2} + I = \frac{M + I}{2}$$

mindestens ein Intervall enthält unendlich viele (a_n). Nennen wir dieses Intervall J_1. Intervallschachtelung:

- $J_{k+1} \subset J_k$
- l_k = *Länge von* J_k. $l_0 = M - I$, $l_k = (M - I)2^{-k}$, $l_k \downarrow 0$

$$\exists a \in J_k \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\exists n_0 : a_{n_0} \in J_0$$

J_1 *enthält unendlich viele* $a_n \implies \exists n_1 > n_0$ *mit* $a_{n_1} \in J$. *Rekursiv:* (a_{a_k}) *Teilfolge mit* $a_{n_k} \in J_k$

$$|a_{n_k} - a| \leq l_k = (M - I)2^{-k} \implies a_{n_k} - a \to 0$$

$$\overbrace{a_{n_k}}^{\to a + a = a} = \underbrace{a_{n_k}}_{\to 0} + \underbrace{a}_{\to a}$$

$$a_k = \xi_k + i\Xi_k$$

(ξ_k) ist eine beschränkte Folge reeller Zahlen. $\exists(\xi_{k_j})$ Teilfolge die konvergiert.

$$a_{k_j} = \xi_{k_j} + i\Xi_{k_j}$$

(Ξ_{k_j}) ist eine beschränkte Folge reeller Zahlen und (Ξ_{k_j}) eine konvergente Teilfolge.

$$a_{k_{j_l}} = \Xi_{k_{j_l}} + i\Xi_{k_{j_l}}$$

ist eine konvergente Teilfolge!

Definition 4.33. Falls (a_k) eine Folge ist und a der Limes einer Teilfolge, dann heisst a Häufungswert.

Lemma 4.34. *Sei (a_k) eine Folge. a Häufungswert $\iff$ $\forall$ Invervall mit $a \in I$ $\exists$ unendlich viele $a_k \in I$.*

Definition 4.35. Wenn die Menge der Häufungswerte von (a_n) (relle Folge) ein Supremum (bzw. ein Infimum) besitzen, heisst dieses Supremum "Limes Superior" (bzw. "Limes Inferior").

Lemma 4.36. *Der Limes Superior (bzw. Inferior) ist das Maximum (bzw. Minimum) der der Häufungswerte.*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n = \textit{Limes Superior}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n = \textit{Limes Inferior}$$

4.4 Konvergenzkriterium von Cauchy

Satz 4.37. *Eine Folge komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn:*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : |a_n - a_m| < \varepsilon \;\; \forall n, m \geq N$$

Beweis 4.38. *Konvergenz $\implies$ Cauchy: $a_n \to a$. Sei $\varepsilon > 0$*

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall n, m \geq N$$

Dann

$$\exists N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall n \geq N$$

Bemerkung 4.39. Falls a ein Häufungswert ist, dann konvergiert die Ganze Folge $\to$ fertig! Weil: $a_{n_k} \to a$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K : k > K : |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N : \forall m, n \geq N \;\; |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Cauchy $\implies$ Konvergenz Sei $n \geq N$. Sicher: $\exists n_k > N \implies$

$$|a - a_n| = |a - a_{n_k} + a_{n_k} - a_n|$$

$$\leq |a - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_n|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Wähle $\varepsilon = 1$.

$$\exists \bar{N} : |a_n - a_m| < 1 \;\; \forall n, m \geq \bar{N}$$

$$|a_n| \leq |a_n - a_{\bar{N}}| + |a_{\bar{N}}| < |a_{\bar{N}}| + 1 \;\; \forall n \geq \bar{N}$$

Sei nun

$$M := \max\left(\left\{|a_k| : k < \bar{N}\right\} \cup \{|a_{\bar{N}} + 1|\}\right)$$

$$|a_n| \leq M \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \overset{B\text{-}W}{\implies} \exists \;\; \textit{ein Häufungswert}$$

Definition 4.40. Sei a_n eine Folge von reellen Zahlen. Dann sagen wir:

- $a_n \to +\infty$ (oder $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$) falls $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{R} : a_n \geq M$ $\forall n \geq N$ (oder $a_n \geq$ für fast alle $n \in \mathbb{R}$)
- $a_n \to -\infty$ ($\lim_{n\to-\infty} a_n = -\infty$) falls $\forall M \in \mathbb{R}$, $a_n \leq M$ für fast alle n.

Wenn die Folge a_n keine obere Schranke besitzt: $\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = +\infty$. Dasselbe gilt equivalent auch für untere Schranken.

Übung 4.41. $\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = +\infty \iff \exists$ Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\to} +\infty$

Bemerkung 4.42. Sei a_n eine wachsende (bzw. fallende) Folge. Dann:

- entweder konvergiert a_n
- oder $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (bzw. $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$)

5 Reihen

5.1 Konvergenz der Reihen

Definition 5.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wir setzen:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$s_k := \sum_{i=0}^{k} a_i$$

Definition 5.2. Die $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist die Folge der Partialsummen. Die Reihe ist die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ falls der Limes von s_k existiert, dann ist $\lim_{n\to+\infty} s_n$ ist der <u>Wert der Reihe</u>. Und wir sagen dass (s_k) eine <u>konvergente Reihe</u> ist.

Notation 5.3. Die Notation der Reihe ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ bezeichnet <u>die Reihe</u> und <u>den Wert der Reihe</u>.

Beispiel 5.4. Sei z eine komplexe Zahl. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ die <u>geometrische Reihe</u>.

- $|z| < 1$ dann konvergiert $\implies$ die geometrische Reihe.

Falls $z = 0$ ist der Wert der Reihe 1.

$$\begin{aligned} 0 &\neq z, |z| < 1 \\ (1-z)(1+z+\cdots z^n) &= 1 - z^{n+1} \\ s_n &= \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1-z^n}{1-z} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1-z}\right) - \frac{1}{1-z}\underbrace{\left(\lim_{n\to+\infty} z^n\right)}_{=0 \text{ weil } |z|<1} &= \frac{1}{1-z} \end{aligned}$$

Für $|z| > 1$ ist $s_n = \frac{(1-z)^{n+1}}{1-z}$ falls $\lim_{n\to+\infty} s_n$ existiert, dann konvergiert die Folge $z^{n+1} \implies$ die Folge $\underbrace{|z|^n + 1}_{\text{falsch weil } |z^n| \text{ divergiert}}$ konvergiert. Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$

$$a^n = (1 + (a-1))^n = 1 + n(a-1)$$

- $z = 1$ $s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1 \implies (s_n)$ konvergiert nicht!
- $s \neq 1$ s_n konvergiert nicht weil z^{n+1} nicht konvergiert!
- $|z| = 1 \implies$

  $$z = \cos\theta + i\sin\theta \implies z^{n+1} = \cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)$$

  (Übung 4, Blatt 3)

Bemerkung 5.5. Falls $z \in \mathbb{R}$, $z \geq 1$. Dann ist s_n eine Folge reeller Zahlen, $s_n \geq 0$, s_n ist monoton wachsend ($s_{n+1} = s_n + z^{n+1} \geq s_n$). $\implies$ in diesem Fall $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = +\infty$
$z \in \mathbb{R}$, $z = -1$

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{für gerade } n \\ 0 & \text{für ungerade } n \end{cases}$$

$\implies$ s_n ist beschränkt und s_n konvergiert nicht (Häufungspunkte $0, 1$.
$z \in \mathbb{R}$, $z < -1$.

$$s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 + z}$$

$\implies$ (s_n) ist nicht beschränkt

Bemerkung 5.6. Wenn die Partialsumme eine Folge reeller Zahlen ist und $s_n \to +\infty$ (bzw. $-\infty$), dann $\sum a_n = +\infty$ (bzw. $-\infty$).

Beispiel 5.7. Harmonische Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $s_{n+1} \geq s_n \implies$ entweder $\lim_{n\to+\infty} s_n$ existiert oder $\lim n \to +\infty = +\infty$

$$\begin{aligned} s_{2^n-1} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{} + \underbrace{\cdots}_{2^{k-1} \leq j \leq 2^k - 1} + \cdots + \underbrace{\cdots}_{2^{n-1} \leq j \leq 2^n - 1} \\ \geq 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}} + \cdots \\ \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{n-1}{2}\sigma_n = s_{2^n-1} \geq +1\frac{n-1}{2} \implies \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty$$

$\implies$ die ursprüngliche Folge (s_n) konvergiert nicht!

$$\implies \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty \implies +\infty \implies \sum \frac{1}{n} = +\infty$$

5.2 Konvergenzkriterien für reelle Reihen

Bemerkung 5.8. (gilt auch für komplexe Reihen!)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{konvergiert} \implies a_n \to 0$$

Übung 5.9. ganz schnell: die geometrische Reihe konvergiert nicht falls $|z| \geq 1$

Bemerkung 5.10. $a_{\to}0 \not\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert! Bsp: $a_n = \frac{1}{n}$

Satz 5.11. *Sei $\sum a_n$ eine Reihe mit reellen Zahlen $a_n \geq 0$. Dann:*

- *entweder ist die Folge (s_n) beschränkt (und die Reihe konvergiert deswegen)*
- *oder $\sum_{n=0}^{\infty} s_n = +\infty$*

Satz 5.12. *(Konvergenzkriterium Leibnitz). Sei (a_n) eine fallende Nullfolge. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ (eine alternierende Reihe).*

Beweis 5.13. *Betrachten wir*

$$s_k - s_{k-2} = (-1)^{k-1} a_{k-1} + (-1)^k a_k)(-1)^k \overbrace{(a_k - a_{k-1})}^{\leq 0}$$

- $s_k - s_{k-2} \geq 0$ *falls* k *ungerade ist*
- $s_k - s_{k-2} \leq 0$ *falls* k *gerade ist*

Für k ungerade:

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots$$

$$\underbrace{s_k}_{gerade} = \underbrace{s_{k+1}}_{ungerade} + \underbrace{(-1)^{k+1}}_{\geq 0} \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \leq s_{k+1} \leq s_n$$

Für k gerade:

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots$$

(Beweis gleich wie für ungerade)
$\implies$ *die Folge* $s_0, s_2, s_4, \cdots$ *ist monoton fallend und von unten beschränkt* $\implies$ $\lim_{k\to+\infty} 2k = S_g \in \mathbb{R}$

$$S_u - S_g = \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to+\infty} s_{2n} = \lim_{n\to+\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$$

$$\implies S_u = S_g \implies \lim_{n\to+\infty} s_n = S_u (= S_g)$$

Korollar 5.14.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

konvergiert

5.3 Konvergenzkriterien für allgemeine (komplexe) Reihen

Bemerkung 5.15. $\sum a_n$ konvergiert $\iff$ (s_n) konvergiert $\iff$ (s_n) ist eine Cauchyfolge. $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : |s_n - s_m| < \varepsilon\ \forall n \geq m \geq N$. $\varepsilon > |s_n - s_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n|$.

Korollar 5.16. *Majorantenkriterium: Sei* $\sum a_n$ *eine Reihe komplexer Zahlen und* $\sum b_n$ *eine konvergente Reihe nichtnegativer reeller Zahlen. Falls* $|a_n| \leq b_n$ *(d.h.* $\sum b_n$ *majorisiert* $\sum a_n$*, dann ist* $\sum a_n$ *konvergent.*

Beweis 5.17. $\sum b_n$ *konvergiert* $\iff$ $\sigma_n = \sum_{k=0}^n b_n$ *ist eine Cauchyfolge.*

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \underbrace{|\sigma_n - \sigma_m|}_{<} \varepsilon \forall n \geq m \geq N$$

$$b_n + \cdots + b_{m+1} \geq |a_n| + \cdots + |a_{m+1}| \geq |a_n + \cdots + a_{m+1}| = |s_n - s_m|$$

Wobei $\sum s_n = \sum_{k=0}^n a_n$.

$$\iff \forall \varepsilon > 0 |s_n - s_m| \leq |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon \forall n \geq m \geq N$$

$\iff$ (s_n) *ist eine Cauchyfolge* $\iff$ $\sum a_n$ *konvergiert*

5.4 Wurzel- und Quotientenkriterium

Definition 5.18. Eine Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ heisst absolut konvergent, falls $\sum_{a=0}^\infty |a_n|$ eine konvergente Reihe ist.

Bemerkung 5.19. Majorantenkriterium $\iff$ die absolute Konvergent impliziert die Konvergent.

Satz 5.20. *(Quotientenkriterium) Sei* $\sum a_n$ *eine Reihe mit* $a_n \neq 0$ *für fast alle* n *und s.d.* $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q$ *existiert. Falls*

- $q < 1$ *konvergiert die Reihe absolut.*
- $q > 1$ *divergiert die Reihe.*
- $q = 1$ *unentschieden.*

Beweis 5.21. • $q > 1 \implies \exists N$ *so dass* $|a_{n+1}| \geq \tilde{q}|a_n|$ *falls* $n \geq N$. $1 < \tilde{q} = \frac{1}{2} + \frac{q}{2} < q$.

$$|a_n| \geq \tilde{q}|a_{n-1}| \geq \tilde{q}^2|a_{n-2}| \cdots > \tilde{q}^{n-N}|a_N|$$

oBdA $|a_N| \neq 0$

$$\implies \lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty \implies \sum a_n \text{ divergiert}$$

- $q < 1$ $1 < \tilde{q} = \frac{1}{2} + \frac{q}{2} < q$ $\exists N$ *so dass* $|a_n| \leq \tilde{q}^{n-N}|a_N|$ *(das gleiche Argument wie vorher).*

$$b_n = \tilde{q}^{n-N}|a_N| = C\tilde{q}^n$$

$$b_n = |a_n|$$

$\sum b_n$ *majorisiert* $\sum a_n$

$$\sum b_n \text{ konv} \overset{Maj.}{\implies} \sum |a_n| \text{ konvergiert}$$

Satz 5.22. *(Wurzelkriterium) Sei* $\sum a_n$ *eine Reihe und* $L := \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *("$L = +\infty$" falls* $|a_n|$ *unbeschränkt ist!) Dann:*

- $L < 1$ *konvergiert die Reihe absolut*
- $L > 1$ *divergiert die Reihe*
- $L = 1$ *unentschieden*

Beweis 5.23. • $L < 1$

$$L < \tilde{L} = \frac{L}{2} + \frac{1}{2} < 1 \implies \exists N : \sqrt[n]{|a_n|} \leq \tilde{L} \implies |a_n| \leq \tilde{L}^n$$

für $n \geq N$ *haben wir wie oben die absolute Konvergenz.*

- $L > 1$

$$\exists k_n : \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} \to L$$

$$1 < \tilde{L} = \frac{L}{2} + \frac{1}{2} < L$$

$$\exists N : k_n \geq N : \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} \geq \tilde{L}$$

$$\implies |a_{k_n}| \geq \tilde{L}^{k_n} \to +\infty \text{ für } n \to +\infty$$

$$\implies a_n \not\to 0 \implies \sum a_n \text{ divergiert}$$

Beispiel 5.24. Sei $s \geq 1$ $\sum \frac{1}{n^s}$

- $s = 1$ harmonische Reihe divergiert
- $s > 1$ konvergiert! $\sum \frac{1}{n^2}$ Bernoulli?? $= \frac{\pi^2}{6}$

$$\sum \frac{1}{n^{2k}} \sim \underbrace{c_k}_{\in\mathbb{Q}} \pi^{2k}$$

- $a_n = \frac{1}{n^s}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \forall s \geq 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \forall s \geq 1$$

$s = 1 \implies$ Divergenz, $s > 1 \implies$ Konvergenz.

$$\implies \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots + \frac{1}{7^s} + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

$b_n \geq 0$

$$s_n = b_0 + \cdots + b_n$$

$\{s_n\}$ ist beschränkt. Wir setzen

$$s_{2k-1} = \frac{1}{1^s} + \frac{2}{2^s} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^{(k-1)s}} = \frac{1}{1^{s-1}} + \frac{1}{2^{s-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{(s-1)(k-1)}}$$

$$= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^1} + \cdots + \frac{1}{a^{k-1}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^s} < +\infty$$

$$\alpha := 2^{s-1} > 2^0 = 1$$

$$\overset{\text{Majo.}}{\implies} \sum \frac{1}{n^s} \text{ konvergiert}$$

5.5 Das Cauchyprodukt

Definition 5.25. $\sum a_n$ und $\sum b_n$. Das CP ist die Reihe $\sum c_n$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = \sum_{j+k=n} a_j b_k$$

Satz 5.26. *Falls $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergieren, dann konvergiert das CP absolut.*

$$\sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$$

Beweis 5.27.

$$s - k = \sum_{j=0}^{k} a_j, \sigma_k = \sum_{i=0}^{k} b_i$$

$$s_k \sigma_k = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} b_i a_j$$

$$c_n = \sum_{j+i=n} a_i b_j, \beta_k = \sum_{n=0}^{k} c_k$$

$$\sum_{n=0}^{k} \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i+j\leq n} a_i b_j$$

$$c_0 = a_0 b_0$$
$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$
$$c_1 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$\beta_k - \sigma_k s_k$$

Absolute Konvergenz:

- $\sum |c_k| < +\infty$
- $B_n = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$

(B_n) ist eine beschränkte Folge

$$B_n = \sum_{k=0}^{N} |sum_{i+j\geq k} a_i b_j| \leq \sum_{k=0}^{N} \sum_{i+j=k} |a_i||b_j|$$

$$= \sum_{i+j\leq N} |a_i||b_j| \leq \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} |a_i||b_j|$$

$$= \left(\sum_{i00}^{N} |a_i|\right) \left(\sum_{j=0}^{N} |b_j|\right) \leq \left(\sum |a_i|\right) \left(\sum |b_j|\right)$$

$$= LM$$

Wobei $L = \sum |a_i|$ und $M = \sum |b_j|$. $\implies$ (B_n) konvergiert $\implies$ $\sum c_n$ konvergiert absolut.

$$|\sum_{i=0}^{N} a_i \sum_{j=0}^{N} b_j - \sum_{k=0}^{N}|$$

$$= |\sum_{i=0,j=0}^{N} a_i b_j - \sum_{i+j\leq N} a_i b_j|$$

$$= |\sum_{i+j>N, i\leq, j\leq N} a_i b_j| \leq \sum_{i+j>N, i\leq, j\leq N} |a_i||b_j|$$

$$\leq \sum_{i\leq N, j\leq N, i\geq \frac{N}{2}, j\geq \frac{N}{2}} |a_i||b_j| = \sum_{i,j\leq N} |a_i||b_j| = \sum_{i,j<\frac{N}{2}} |a_i||b_j|$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{N} |a_i|\right) \left(\sum_{j=0}^{N} |b_j|\right) - \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{1}{N} 2} |a_i|\right) \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{1}{N} 2} |b_j|\right)}_{\Gamma_N}$$

$$0 \leq |\sum_{i=0}^{N} a_i \sum_{j=0}^{N} b_j - \sum_{k=0}^{N} c_k| \leq \Gamma_N$$

$$\lim_{N\to+\infty} \Gamma_N = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| - \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \sum_{j=0}^{\infty} |b_j|$$

$$\implies \sum c_k = \sum a_i \sum b_j$$

5.6 Potenzreihen

Definition 5.28. Die Potenzreihen: $\sum a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$

Lemma 5.29. *Falls $a_n z_0^n$ eine konvergente Reihe ist, dann $\forall z$ mit $|z| < |z_0|$ konvergiert $\sum a_n z^n$ absolut.*

Beweis 5.30. *$a_n z_0^n$ ist eine Nullfolge.*

$$\implies \exists C : |a_n z_0^n| \leq C \forall n$$

$$|a_n z^n| \leq |a_n z_0^n| \underbrace{\frac{|z|^n}{|z_0|^n}}_{\alpha} \leq C\alpha^n$$

$$|z| < |z_0| \implies \alpha < 1$$

$\implies$ $\sum C\alpha^n$ *eine konvergente Majorante.*

Satz 5.31. *Sei (a_n) eine Folge von Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$. Sei $K := \{z \in \mathbb{C} : \sum a_n z^n$ konvergiert$\}$ $K \ni z \to f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Wenn*

$$f(z) = \sum a_n z^n, g(z) = \sum b_n z^n$$

$$\implies f(z) + g(z) = \sum (a_n + b_n) z^n$$

$$\implies f(z)g(z) = \underbrace{\sum c_n z^n}_{\textit{falls } z \textit{ absolute Konvergenz garantiert}}$$

Beweis 5.32. *Sei $\sum \gamma_n$ das CP von $\sum a_n z^n$ und $b_n z^n$.*

$$\sum \gamma_n = \sum a_n z^n \sum b_n z^n$$

$$= \sum \sum_{i+j=n} \left(a_i z^i\right)\left(b_j z^j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} a_i b_j z^{i+j}$$

$$= \sum n = 0 z^n \underbrace{\sum_{i+j=n} a_i b_j}_{=c_n}$$

Satz 5.33. *(Cauchy-Hadamard) $\sum a_n z^n$. Sei $L := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann (Wurzelkriterium)*

- $|z| < \frac{1}{L} \implies \sum a_n z^n$ *konvergiert absolut*
- $|z| > \frac{1}{L} \implies \sum a_n z^n$ *divergiert*
- $|z| = 1$ *unentschieden*

6 Stetige Funktionen und Grenzwerte

6.1 Stetigkeit

In $D \subset \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{C}$.

Definition 6.1. Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Sei $x_0 \in D$. f heisst stetig in x_0 falls $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta, x \in D \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(Bedingung S). Gegenüber:

$$\forall \delta > 0 \exists x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\text{ mit } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Beispiel 6.2. Die Polynome sind stetige Funktionen.

Beispiel 6.3. (Später), Summe und Produkte stetiger Funktionen sind auch stetig.

Bemerkung 6.4.
- Die Bedingung (S) ist trivial für die Funktion $f = const$
- Die Bedingung (S) ist trivial für die Funktion $f(x) = x$

$$|x - x_0| < \delta = \varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$$

Definition 6.5. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ heisst Lipschitz(-stetig) falls $\exists L \geq 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in D$$

(L) $\implies$ (S): wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$

Korollar 6.6. *$g(x) := |x|$ ist stetig.*

$$|g(x) - g(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

d.h. (L) mit $L = 1$

Beispiel 6.7. (Später): $\frac{f}{g}$ ist stetig falls f,g stetig und $g(x) \neq 0\ \forall x \in D$. $\implies$ Rationale Funktionen $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sind stetig auf $d = \mathbb{C} \setminus \{x : Q(x) = 0\}$

Beispiel 6.8. $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$ ist ein Polynom $\implies$ f ist stetig. Sei $g(x) := x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ($g(x)$ ist die einzige relle Zahl $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$ und $y^k = x$). $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

$$|\underbrace{\sqrt[k]{x}}_{y} - \underbrace{\sqrt[k]{x_0}}_{y_0}| \leq \sqrt[k]{absx - x_0}$$

$$\iff |y - y_0|^k \leq |y^k - y_0^k|$$

oBdA $y \geq y_0$

$$\underbrace{(y - y_0)^k}_{a} \leq \underbrace{y^k}_{c} - \underbrace{y_0^k}_{b}$$

$$\iff a^k + b^k \leq c^k = (a + b)^k$$

$$a^k + b^k \leq (a + b)^k = a^k + \overbrace{\binom{k}{1} a^{k-1} b + \cdots + b^k}^{\geq 0}$$

Deswegen: $\delta = \varepsilon^k$. $|x - x_0| < \delta$ $x > x_0$, $x < x_0 + \delta$

$$|\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0}| = \left(\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0}\right) < \left(\sqrt[k]{x_0 + \delta} + \sqrt[k]{x_0}\right)$$

$$= |\sqrt[k]{x_0 + \delta} - \sqrt[k]{x_0}| \leq \sqrt[k]{\delta} = \sqrt[k]{\varepsilon^k} = \varepsilon$$

Oder wähle $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^k$

$$|x - x_0| < \delta \implies |\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0}| \leq \sqrt[k]{|x - x_0|} \leq \sqrt[k]{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^k} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Beispiel 6.9. Sei $a > 0$ und $f(x) = a^x\ \forall x \in \mathbb{Q}$ $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ist stetig!

Satz 6.10. *Sei $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Sei $x_0 \in D$. Diese zwei Aussagen sind equivalent:*

- *f ist stetig an der Stelle x_0.*
- *$\forall (x_n) \subset D$ mit $x_n \to x_0$ haben wir $f(x_n) \to f(x_0)$*

Beweis 6.11. *Sei $\varepsilon > 0$. f stetig in x_0 $\implies$ $\exists \delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ falls $|x - x_0| < \delta$. $x_n \to x_0$ $\implies$ $\exists N$:*

$$|x_n - x_0| < \delta \forall n \geq N \implies |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Andere Richtung: Nehmen wir an dass f stetig falsch ist.

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x : |x - x_0| < \delta \land |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

$foralln \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ich setze $\delta = \frac{1}{n}$ $\implies$ $\exists x_n$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ $\implies$ $x_n \to x_0$ und $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

Satz 6.12. *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ zwei stetige Funktionen. Dann:*

- *$f + g$, fg sind stetig*
- *$\frac{f}{g}$ ist stetig auf $D \setminus \{x : g(x) = 0\}$*

Beweis 6.13. *Sei $x_0 \in D$, $(x_n) \subset D$ $x_n \to x_0$ (für $\frac{f}{g}$ $g(x_n) \neq 0, q(x_0) \neq 0$ weil $(x_n), x_0 \subset D \setminus \{x : g/x(=0\})$*

$$\begin{aligned} f(x_n) + g(x_n) \to &\qquad f(x_0) + g(x_0) \\ f(x_n)g(x_n) \to &\qquad f(x_0)g(x_0) \\ \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to &\qquad \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \end{aligned}$$

Satz 6.14. *$f : D \to A$, $g : A \to B$ stetig $\implies$ $g \circ f : D \to B$ stetig.*

Beweis 6.15. *$x_0, (x_n) \subset D$ mit $x_n \to x_0$ $\implies$ $\underbrace{f(x_n)}_{y_n} \to f(x_0)_{y_0}$ $(y_n), y_0 \in A$*

$\implies$

- $g(y_n) \to g(y_0)$
- $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$

$\implies$ *$g \circ f(x_n) \to g \circ f(x_0)$ $\implies$ Stetigkeit von $g \circ f$*

Satz 6.16. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ injektiv. Sei*

$$B := f\,([a, b])\,(= \{z : \exists x \in [a, b] \text{ mit } f(x) = z\})$$

Bemerkung 6.17. $f : [a, b] \to B$ ist bijektiv und deswegen umkehrbar.

Sei $f^{-1} : B \to [a, b]$ die Umkehrfunktion. Dann ist $f^{-1}B \to [a, b]$ stetig, falls f stetig ist.

Beweis 6.18. *Sei $x_0 \in B$, (x_n) mit $(x_n) \subset B$ und $x_n \to x_0$. Die Folge*

$$\underbrace{f^{-1}(x_n)}_{=y_n} \overset{?}{\to} \underbrace{f^{-1}(x_0)}_{=y_0}$$

$(y_n) \subset [a, b]$, $y_0 \in [a, b]$. Falls $y_n \not\to y_0$, dann:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \exists \underbrace{n}_{n_k} \geq \underbrace{N}_{k} : |y_n - y_0| \geq \varepsilon$$

$$n_k \geq n_{k-1} \implies \textit{Teilfolge } (y_{n_k}) : |y_{n_k} - y_0| \geq \varepsilon \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\textit{Bolzano-Weiterstrass} \implies \exists y_{n_k} \to \bar{y} \implies \bar{y} \neq y_0$$

$$f(y_{n_{k_j}}) = x_{n_{k_j}}$$

Stetigkeit von f:$f(y_{n_{k_j}}) \to f(\bar{y})$ Und da $x_{n_{k_j}} \to x_0$ sowie $x_{n_{k_j}} = f(y_{n_{k_j}}$, heisst dass das $f(\bar{y}) = x_0$, aber $f(y_0) = x_0$ $\implies$ $f(\bar{y}) = f(y_0)$, mit $\bar{y} \neq y_0$. Widerspruch mit der Injektivität von f. Deswegen $f^{-1}(x_n) = y_n \to y_0 = f^{-1}(x_0)$ $\implies$ f^{-1} ist stetig.

Bemerkung 6.19. Aus diesem Satz schliessen Sie die Stetigkeit von $x \mapsto x^{\frac{1}{k}}$ von der Stetigkeit $x \mapsto x^k$.

Definition 6.20. Wenn eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}(D)$ stetig ist für $x \in D$, dann ist f stetig auf D.

Bemerkung 6.21. Für Satz 1 genügt die Stetigkeit der beiden Funktionen ander der Stelle x_0. Für Satz 2 ähnlich. Für Satz 3 ist die Stetigkeit auf dem ganzen D wichtig.

6.2 Zwischenwertsatz

Satz 6.22. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, mit $f(b) \geq f(a)$ (bzw. $f(b) \leq f(a)$). Dann $\forall y \in [f(a), f(b)]$ (bzw. $\forall y \in [f(b), f(a)]$) existsx $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.*

6.3 Zwischenwertsatz

Satz 6.23. *Eine stetige Abbildung $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert γ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beweis 6.24. *oBdA $f(a) \leq f(b)$ und $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$*

$$I_0 = [a, b] = [a_0, b_0]$$

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \gamma \implies I_1 = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] = [a_1, b_1]$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \gamma \implies I_1 = \left[\frac{a+b}{2}, b\right] = [a_1, b_1]$$

Rekursiv $I_k = [a_k, b_k]$ mit $f(a_k) \leq \gamma \leq f(b_k)$, $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$

$$I_{k+1} = \begin{cases} \left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right] & f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) \geq \gamma \\ \left[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k\right] & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$|I_k| = 2^{-k}(b-a) \overset{k\to+\infty}{\to} 0$$

Intervallschachtelung $\implies \exists! x_0$ mit $x_0 \in I_k \ \forall k$.

$$b_k \downarrow x_0 \implies f(x_0) = \lim_{k\to+\infty} f(b_k) \geq \gamma$$

$$b_k \downarrow x_0 \implies f(x_0) = \lim_{k\to+\infty} f(a_k) \geq \gamma$$

$$\implies f(x_0) = \gamma$$

Korollar 6.25. *Fixpunktsatz: Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Abbildung. Dann besitzt f einen Fixpunkt, d.h.*

$$\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = x_0$$

Beweis 6.26. *$g(x) := f(x) - x$*

$$g(a) = f(a) - a \geq 0$$

$$g(b) = f(b) - b \geq 0$$

Mithilfe des oberen Satzes $\implies \exists x_0$ mit

$$g(x_0) = 0 \iff f(x_0) - x_0 = 0 \iff f(x_0) = x_0$$

6.4 Maxima und Minima

Satz 6.27. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann $\exists x_M, x_m \in [a, b]$ mit*

$$f(x_m) \geq f(x) \geq f(x_M) \ \ \forall x \in [a, b]$$

Beweis 6.28. *oBdA suche ich die Maximumstelle*

$$S = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

$$(= +\infty \textit{ falls } \{f(x) : x \in [a, b]\} \textit{ keine obere Schranke}$$

$S \in \mathbb{R}$, sei $S_n = S - \frac{1}{n} \implies \exists x_n$ mit $f(x_n) \geq S - \frac{1}{n}$

$$(x_n) \subset [a, b] \implies \exists\,(x_{n_k}) \ \textit{ mit } \ x_{n_k} \to \bar{x}$$

$$\overset{S\in\mathbb{R}}{\implies} f(\bar{x}) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = S \overset{!}{=} \max_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{[a,b]} f$$

$$\overset{S=+\infty}{\implies} f(\bar{x}) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = +\infty \implies \textit{Widerspruch}$$

Bemerkung 6.29. Sei $E \subset \mathbb{R}$ eine Menge mit der Eigenschaft $\forall (x_n) \subset E$ $\exists$eine Teilfolge (x_{n_k}) $x \in E$ mit

$$x_{n_k} \to x$$

Ist E immer ein abgeschlossenes Intervall? Nein

$$E := [0,1] \cup [2,3]$$

Sei $(x_n) \subset [0,1] \cup [2,3]$. Dann $\exists\, (x_{n_k})$ die entweder in $[0,1]$ oder in $[2,3]$ enthalten ist $\implies$ $\exists$ eine konvergente Teilfolge.

Definition 6.30. Die Mengen $E(\subset \mathbb{R}, \subset \mathbb{C})$ mit der Eigenschaft in der Bemerkung oben heissen kompakte Mengen.

Satz 6.31. *Eine reellwertige stetige Funktion auf einem kompakten Definitionbereich besitzt mindestens eine Maximumstelle (und eine Minimumstelle).*

Definition 6.32. Stetigkeit an einer Stelle x:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \text{mit} \;\; \underbrace{|x-y| < \delta \;\; \text{und} \;\; y \in D} \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Stetigkeit auf D bedeutet Stetigkeit an jeder Stelle $x \in D$.

Definition 6.33. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ heisst gleichmässig stetig falls

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \text{mit} \;\; |x-y| < \delta \;\; \text{mit} \;\; x, y \in D \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Beispiel 6.34. f Lipschitz

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \;\; \forall x, y \in D$$

Dann ist f gleichmässig stetig $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$

$$|x-y| < \frac{\varepsilon}{L} \implies |f(x) - f(y)| \leq L|x-y| < L\delta = L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

Satz 6.35. *Falls D eine kompakte Menge ist, ist jede stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ gleichmässig stetig!*

Beweis 6.36. *(Widerspruchsbeweis) f stetig aber nicht gleichmässig. Dann $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta$ die ich wählen kann*

$$\exists x, y \in D \;\; \textit{mit} \;\; |x-y| < \delta \;\; \textit{und} \;\; |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

$$\delta = \frac{1}{n} > 0 \implies \exists x_n, y_n \;\; \textit{mit} \;\; |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \;\; \textit{und} \;\; |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

$$\textit{Kompaktheit} \implies \exists x_{n_k} \;\; \textit{Teilfolge mit} \;\; x_{n_k} \to x \in D$$

$$\implies y_{n_k} \to x \in D$$

$$\implies f(y_{n_k}) \overset{f(x_{n_k}) \to f(x)}{\to} f(x) \implies |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$$

6.5 Stetige Fortsetzung, Grenzwerte

Definition 6.37. Sei $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ stetig. Sei $E > D$. Eine stetige Fortsetzung von f ist eine $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ stetig mit $f(x) = \tilde{f}(x) \;\; \forall x \in D$

Definition 6.38. $g : E \to A$, $D \subset E$,

$$g\|_D \to A \;\; \text{mit} \;\; g\|_D(x) = g(x) \;\; \forall x \in D$$

Bemerkung 6.39. Sei $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ stetig. Sei $x_0 \notin D$. Die Fragen:

- gibt es eine stetige Fortsetzung von f auf $D \cup \{x_0\}$
- ist diese Fortsetzung eindeutig?

Definition 6.40. x_0 ist ein Häufungspunkt von einer Menge E wenn $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ unendlich viele Punkte $x \in E$ mit

$$|x - x_0| < \varepsilon$$

Bemerkung 6.41. x_0 ist ein Häufungspunkt von $E \iff \exists (x_n) \subset \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$

Bemerkung 6.42. In Bem 10, 1. Frage: Falls x_0 kein Häufungspunkt von D ist: $\exists$ stetige Fortsetzungen, $\exists$ unendlich viele!

Bemerkung 6.43. Wenn x_0 ein Häufungspunkt von D ist, die Antwort zur 2. Frage ist ja. Die Antwort zur 1. ist undefiniert.

Definition 6.44. x_0 Häufungspunkt von D, $x_0 \notin D$, falls $\exists$ stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ von f auf $D \cup \{x_0\}$ existiert. Dann $\tilde{f}(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

6.6 Grenzwerte

Definition 6.45. Sei $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $D \subset \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Der Grenzwert von f (falls er existiert) an der Stelle x_0 ist die einzige Zahl $a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ so dass

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \setminus \{x_0\} \\ a & x = x_0 \end{cases}$$

stetig in x_0 ist. ($f(x_0) \neq a$) falls $x_0 \in D$

Bemerkung 6.46. $f(x_0) = a$ und $x_0 \in D \implies f$ ist stetig an der Stelle x_0

Satz 6.47. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$
- $\forall \{x_n\} \subset D \setminus \{x_0\}$ *mit* $x_n \to x_0$ *gilt* $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = 0$
- $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *so dass* $|x - x_0| < \delta$ *und* $x \in D \setminus \{x_0\} \implies |f(x) - a| < 0$

Satz 6.48. *(Rechenregeln)* $f, g : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, x_0 *Häufungspunkt von* D

$$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) + \left(\lim_{x \to x_0} g(x_0)\right)$$

falls die Grenzwerte existieren!

$$\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x \to x_0} g(x_0)\right)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) \ \textit{falls} \ \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$$

Satz 6.49. *Seien* $f : D \to E$, $g : E \to \mathbb{R}\mathbb{C}$ *mit*

- x_0 *Häufungspunkt von* D *und* $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$
- $y_0 \in E$ *und* g *ist stetig and der Stelle* y_0

Dann:

$$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = g(y_0) = g(\lim_{x \to x_0} f(x))$$

Beweis 6.50. *Wenden Sie die entsprechenden Rechenregeln für Folgen* $x_{\to} x_0$ ($\{x_n\} \subset D \setminus \{x_0\}$)

Beispiel 6.51. Teil 1 von Satz 3. A $\implies$ B: für $f, g \implies \forall \{x_n\} \subset D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) \wedge \lim_{n \to \infty} g(x_n) = \lim_{x \to x_0} g(x_0)$$

$$\implies \lim_{n \to \infty} (f + g) = \overbrace{\lim_{n \to \infty} f(x_n)}^{\lim_{x \to x_0} f(x)} + \overbrace{\lim_{n \to \infty} g(x_n)}^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

$$\overset{\text{Satz 2}}{\implies} \lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Definition 6.52. Falls $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D ist, dann:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty(-\infty)$ falls $\forall \{x_n\} \subset D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$ (bzw. $-\infty$)

Ähnlich $f : D \to \mathbb{C}$ und:

- D ist nicht nach oben beschränkt. Wir schreiben $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ genau dann, wenn $\forall \{x_n\} \subset D$ mit $x_n \to \infty$ gilt $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = a$

gleich wenn D nicht nach unten beschränkt ist. $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$$

Definition 6.53. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Falls x_0 ein Häufungspunkt von $]-\infty, x_0[\cap D$ ist, dann $\lim x \uparrow x_0 f(x) = a$ falls $\forall \{x_n\} \subset D\cap]-\infty, x_0[$ mit $x_n \in D$ $x_n < x_n$ $\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x)\right)$ gilt $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = a$. Falls x_0 ein Häufingspunkt von $D \cap]x_0 + \infty[$ ist

$$\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = a \wedge (\lim_{\to x_0^+} f(x))$$

falls $\forall \{x_n\} \subset D\cap]x_0, +\infty[$ mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to a$. Ähnlich $\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$.

Beispiel 6.54. Stetigkeit:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ wenn die Funktion f in x_0 nicht stetig ist
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ wenn die Funktion f in x_0 eine Asymptote hat.

7 Exponentialfunktion

$a \in \mathbb{R}a > 0$ $a^a = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{m}$, $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

7.1 Existenz und Eindeutigkeit

Satz 7.1. $\exists!\, \mathrm{Exp} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

- *Additionstheorem* $\mathrm{Exp}(z + w) = \mathrm{Exp}(z)\,\mathrm{Exp}(w)$
- $\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Exp}(z)-1}{z} = 1$

Für Exp *wissen wir:*

- $\mathrm{Exp}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\forall z \in \mathbb{C}$
- $\mathrm{Exp}(z) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ $\forall z \in \mathbb{C}$
- Exp *ist stetig und falls* $e = \mathrm{Exp}(1)$ *dann* $e^q = \mathrm{Exp}(1)$ $forallq \in \mathbb{R}$

Bemerkung 7.2.

$$e = \sum \frac{1}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Bemerkung 7.3. Kernidee:

$$\mathrm{Exp}(z) = f(z)$$

$$f(z) = f(\frac{nz}{n}) = f(\frac{z}{n} + \frac{z}{n} + \cdots + \frac{z}{n}) \overset{\text{Add}}{=} f(z)^n$$

$$f\left(\frac{z}{n}\right) = 1 + \frac{z_n}{n} = \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n$$

$$z_n = n\left(f\left(\frac{z}{n}\right) - 1\right) = \left(\frac{f\left(\frac{z}{n}\right) - 1}{\frac{z}{n}}\right) z$$

$n \to +\infty$ $\frac{z}{n} \to 0$

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z \lim_{n} \to n \to +\infty \frac{f\left(\frac{z}{n}\right) - 1}{\frac{z}{n}} = z$$

$$f(z) = \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \implies f(z) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{\{overbrace z_n{}^z}{n}\right)^n \stackrel{?}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Bemerkung 7.4. Zusammenfassung: Falls f die Bedingungen Additionstheorem und Wachstum erfüllt, dann:

$$f(z) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

wobei $\lim_{n\to+\infty} z_n = z$

Lemma 7.5. *Fundamentallemma:* $\forall \{z_n\} \subset \mathbb{C}$ *mit* $z_n \to z$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum \frac{z^n}{n!}$$

Bemerkung 7.6. (1)+(2) liefern Eindeutigkeit und zwei Darstellungen: Die Darstellungen definieren eine stetige Funktion mit den ganzen Eigenschaften des Theorems.

Bemerkung 7.7. $\sum \frac{z^n}{n!}$ konvergiert auf $\mathbb{C}$ (und konvergiert deswegen absolut)

Beweis 7.8. *Das Kriterium von Hadamand:*

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{n!}}} = +\infty$$

Das bedeutet:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 0$$

$$\begin{cases} n \;\; gerade & n! \geq \underbrace{n(n-1)\cdots}_{\frac{n}{2}} \\ n \;\; ungerade & n! \geq \underbrace{n(n-1)\cdots}_{\frac{n-1}{2}} \end{cases}$$

$$n! \geq \frac{n}{2}^{\frac{n}{2}}$$

n gerade: n ungerade

Beweis 7.9. *Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ *konvergiert absolut* $\forall z \in \mathbb{C}$

Behauptung 7.10.

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty}(sup)|\left(1 - \frac{z_n}{n}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}|}_{A_n} = 0$$

Bemerkung 7.11.

$$\left(1 - \frac{z_n}{n}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = |\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}|$$

Sei $M \in \mathbb{N}$ und $M \leq n$

$$\leq \underbrace{|\sum_{k=0}^{M}\left(\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k} - \frac{z^k}{k!}\right)|}_{B_n} + \underbrace{\sum_{k\geq M+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{|z_n|^k}{n^k}}_{C_n} + \underbrace{\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}}_{D}$$

$$\underbrace{\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k}}_{z_n^k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{z_n^k}{n^k} = \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{nn\cdots n}}_{k \text{ mal}}\frac{z_n^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k = \lim_{n\to+\infty} 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{z_n^k}{k!} = \frac{z^k}{k!} \tag{20}$$

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n \le \underbrace{\limsup_{n\to+\infty} B_n}_{=0,aus20} + \limsup_{n\to+\infty} C_n + D$$

Abschätzung für C_n:

$$C_n = \sum_{k=M+1}^{n} \frac{|z_n|^k}{k!} 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$|z_n|$ konvergiert nach $|z| \implies \exists R \ge 0$ mit $|z_n| \le R$

$$\le \sum_{k=M+1}^{n} \frac{|z_n|^k}{k!} \le \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{R^k}{k!}$$

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n \le \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{R^k}{k!} + \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \tag{21}$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{R^k}{k!} = 0 \tag{22}$$

$$\text{(weil } \limsup_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{M} \frac{R^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!} \implies \lim_{M\to+\infty} \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{R^k}{k!}$$

$$\lim_{M\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!} - \sum_{k=0}^{M} \frac{R^k}{k!}\right) = 0)$$

$$2122 \implies \limsup_{n\to+\infty} A_n = 0$$

Bemerkung 7.12. Lemma + Bemerkung $\implies$ Falls eine Funktion mit der Eigenschaft (AT) und (WT) existiert, dann gilt:

$$\operatorname{Exp}(z) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

Beweis 7.13. *(Eindeutigkeit haben wir schon ↑.) Wir definieren*

$$\operatorname{Exp}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k=0} \left(= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)$$

(AT) gilt:

$$\operatorname{Exp}(z)\operatorname{Exp}(w) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{w}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{w}{n}\right)\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z+w}{n}+\frac{zw}{n^2}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\overbrace{\left(z+w+\frac{zw}{n}\right)}^{\alpha_n}}{n}\right) \overset{Fundamentallemma}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z+w}{n}\right)^n$$

$$= \operatorname{Exp}(z+w) \quad da \alpha \to (z+w)$$

Sei

$$e = \operatorname{Exp}(1) \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right)$$

$$\operatorname{Exp}(q+s) = \operatorname{Exp}(q)\operatorname{Exp}(s) \quad \forall q, s \in \mathbb{Q}$$

(Zur Erinnerung: Falls $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ erfüllt $f(1) = a > 0$ und $f(q+s) = f(q)(s)$. Dann $f(q) = a^q \ \forall q \in \mathbb{Q}$.) Setze

$$f : \operatorname{Exp} \implies \operatorname{Exp} q = e^q \quad \forall q \in \mathbb{Q}$$

(Später: $\operatorname{Exp}(z) = e^z$*)*

Lemma 7.14. *Sei $\sum a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R >$ ($R = +\infty$ falls die Reihe überall konvergiert). Dann ist $f(z) = \sum a_n z^n$ eine stetige Funktion auf $\{|z| < R\}$ ($\mathbb{C}$ falls $R = +\infty$).*

Bemerkung 7.15. Lemma $\implies$ Stetigkeit von Exp. Ausserdem:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Exp} z - 1}{z} = 1$$

$$\frac{\operatorname{Exp}(z) - 1}{z} = \frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - 1}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} = G(z)$$

Die Reihe, die G definiert hatKonvergenzradius $+\infty$. Deswegen ist G stetig.

$$\implies \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Exp}(z) - 1}{z} = \lim_{z\to 0} G(z) - G(0) = 1$$

Beweis 7.16. *Zu beweisen: Sei z_0 mit $|z_0| < R$*

$$\textit{Stetigkeit in } x_0 \iff \lim z \to z_0 f(z) = f(z_0)$$

$$\lim_{z\to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum^{+} \infty_{n=0} a_n z_0^n$$

Finden sie $a_{k,n} \in \mathbb{R}$ $\forall k$ $\lim_{n\to\infty} a_{k,n} = a_n (k, n \in \mathbb{N})$ aber $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n} \neq \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Sei $z_k \to z_0$.

$$\limsup_{k\to+\infty} \overbrace{|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_k^n - \sum_{n=0}^{\infty} z_0^n|}^{A_k}$$

$$\leq \limsup_{k\to+\infty} |\sum_{n=0}^{M} a_n z_k^n - \sum_{n=0}^{M} a_n z_0^n| + \limsup_{k\to+\infty} \sum_{n=M}^{\infty} |a_n||z_k^n| + \sum_{n=M}^{\infty} |a_n||z_0|^n$$

Sei ρ mit $|z_0| < \rho < R$. Da $z_k \to z_0$: $|z_k| < \rho$, falls k gross genug ist.

$$\limsup_{k\to+\infty} A_k \leq 0 + 2 \sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n| \rho^n$$

$$\implies \limsup_{k\to+\infty} A_k \leq 2 \limsup_{M\to+\infty} \underbrace{\sum \infty_{n=M+1} |a_n| \rho^n}_{\textit{konvergiert}} = 0$$

$$\implies \lim_{k\to\infty} (z_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_k^n a_n \right) = f(z_0) \left(= \sum_{n=0}^{\infty} z_0^n a_n \right) \implies \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Bemerkung 7.17.

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n - \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n| \\
&= |\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \xi_n - \zeta_n \right)| \\
&\leq \lim_{N\to\infty} \left\{ |\sum_{n=0}^{M} (\xi_n - \zeta_n)| + |\sum_{n=M+1}^{N} (\xi_n - \zeta_n)| \right\} \\
&= |\sum_{n=0}^{M} (\xi_n - \zeta_n)| + \lim_{N\to\infty} |\sum_{n=M+1}^{\infty} (\xi_n - \zeta_n)| \\
&\leq |\sum_{n=0}^{M} (\xi_n - \zeta_n)| + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=M+1}^{\infty} (|\xi_n| - |\zeta_n|) \\
&= |\sum_{n=0}^{M} (\xi_n - \zeta_n)| + \sum_{n=M+1}^{\infty} |\xi_n| - \sum_{n=M+1}^{\infty} |\zeta_n|
\end{aligned}
$$