Analysis II - Vorlesungs-Script

Prof. Dr. Camillo De Lellis

Basisjahr 11 Semester I

Mitschrift:
Simon Hafner

Inhaltsverzeichnis

1 Metrik und Topologie des euklidischen Raumes

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n), x \in \mathbb{R}\}$ In $\mathbb{R}^n$:

- Norm (Euklidische)
- Abstand (Euklidische)
- Topologie

"Abstrakte Theore"

- Normierte Vektorräume
- Metrische Räume
- Topologische Räume

Definition 1.1. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ $(x = (x_1, \cdots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R})$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Intuitiv: $\|x\|$ ="der Abstand zwischen x und 0

Lemma 1.2. $\|.\|$ *erfüllt die Regeln*

1. $\|x\| \geq 0$ *und* $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Beweis. 1. ≥ 0 trivial

$$x = 0 \implies \sum x_i^2 = 0 \implies \|x\| = 0$$

$$x = 0 \Leftarrow x_i = 0 \forall i \Leftarrow \sum x_i^2 = 0 \Leftarrow \|x\| = 0$$

2.

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i)^2} \sqrt{\lambda^2 (\sum x^2)} = |\lambda| \sqrt{\sum x^2} = |\lambda| \|x\|$$

$$|\lambda| = \frac{\|x\| |\lambda|}{\|x\|}$$

3.

$$\iff \underbrace{\|x + y\|^2}_{=} \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\|$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i\right) = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \overbrace{2 \sum x_i y_i}^{Skalarprodukt}$$

$$\iff \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$$

□

Satz 1.3. *Cauchy-Schwartzsche Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Beweis. OBdA $y \neq 0$ ($y = 0$ trivial)

$$t \to g(t) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + ty_i)^2$$

$$= \left(\sum x_i^2\right) + 2t \sum x_i y_i + t^2 \sum y_i^2$$

$$= \|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + \|y\|^2 t^2$$

Sei $t_0 = \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$, dann $g(t_0) \geq 0$

$$0 \leq g(t_0)$$

$$= \|x\|^2 - 2\frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^2} + \|y\|^2 \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^2}$$

$$= \|x\|^2 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^2}$$

$$\implies \langle x, y\rangle \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

$$\implies |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

□

Definition 1.4. Ein normierter Vektorraum ist ein reeller Vektorraum V mit einer Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ so dass:

1. $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Nullvektor)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in V$

Beispiel 1.5. $V = \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad p \geq 1$$

$p = 2$ euklidische Norm

Definition 1.6. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Die euklidische Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$

Lemma 1.7. *1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$*

2. $d(x, y) = d(y, x)$

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Beweis.

$$\|x - z\| \leq \underbrace{\|x - y\|}_{v} + \underbrace{\|y - z\|}_{w} \quad v + w = x - z$$

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

□

Definition 1.8. Ein metrischer Raum ist eine Menge X mit einer Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \ \ (x, y) \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R}$$

1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y \ \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$
3. $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z) \ \forall x, y, z \in X$

Lemma 1.9. *Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann sind V und $d(x, y) = \|x - y\|$ ein metrischer Raum.*

Definition 1.10. Die offene Kugel mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$K_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n, d(x,y) < r\}$$

Definition 1.11. Eine Menge heisst "Umgebung" von x, wenn V eine offene Kugel mit Mittelpunkt x enthält.

Definition 1.12. Eine Menge $U \in \mathbb{R}^n$ heisst offen falls $\forall x \in U$ ist U eine Umgebung von x

$$\forall x \in U \;\; \exists \text{ eine Kugel } \; K_r(x) \in U$$

Bemerkung 1.13. Eine offene Kugel ist offen.

Satz 1.14.
1. *$\varnothing$ und $\mathbb{R}^n$ sind offen*
2. *Der Schnitt endlich vieler offener Menge ist auch offen.*
3. *Die Vereinigung einer beliebigen Familie offener Mengen ist auch offen.*

Beweis.
1. $\mathbb{R}^n$ trivialerweise offen, auch $\varnothing$
2. Sei $x \in U \cap \cdots \cap U_N$

$$\forall i \subset \{1, \ldots, N\} \;\; K_r(x) \in U_i$$

Sei $r = \min\{r_i, \ldots, r_N\}$

$$\implies K_r(x) \subset U_i \forall i \implies K_r(x) \subset U_1 \cap \cdots \cap U_N$$

3. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Sei $U = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

$$x \in U \implies x \in U_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \Lambda$$

$$\implies \exists K_r(x) \subset U_\lambda \subset U$$

□

Definition 1.15. Ein topologischer Raum ist eine Menge X und eine Menge O von Teilmengen von X so dass:

1. $\varnothing, X \in O$
2. $U_1 \cap \cdots \cap_N \in O$ falls $U_i \in O$
3. $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in O$ falls $U_i \in O$

Satz 1.16. *Sei (X, d) ein metrischer Raum*

$$K_r(x) = \{y = X : d(x,y) < r\}$$

Umgebungen und offene Mengen sind wie im euklidischen Fall. $O = \{\text{offene Menge}\}$ definiert eine Topologie.

1.1 Konvergenz

Sei $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ $x_k \in \mathbb{R}$ $x_k = (x_{k1}, \cdots, x_{kn})$

Definition 1.17. Die Folge $\{x_k\}$ konvergiert gegen $x_\infty \in \mathbb{R}^n$ falls

$$\lim_{k \to \infty} d(x_k, x_\infty) = 0$$

$$\left(\lim_{k \to \infty} \|x_k, x_\infty\| = 0 \right)$$

Dann schreiben wir

$$x_\infty = \lim_{k \to \infty} x_k$$

Satz 1.18.
$$x_k \to x_\infty \iff x_{ki} \to x_{\infty_i} \ \ \forall i \in \{1, \cdots, n\}$$

Beweis.
$$\|x_k - x_\infty\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - x_{\infty_i})^2} \geq |x_{ki} - x_{kinfty}| \geq 0$$
$$\implies 0 \leq \lim_{k\to\infty} |x_{ki} - x_{kinfty}| \leq \lim \|x_k - x_\infty\| = 0$$
$$\|x_k - x_\infty\| = \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_{ki} - x_{\infty_i})^2}_{\to 0}}}_{\to 0} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_{ki} - x_{\infty_i}|$$
$$\implies \|x_k - x_\infty\| \to 0$$

Eine alternative Formulierung: $\lim_{k\to\infty} x_k = \left(\lim_{k\to\infty} x_{k1}, \cdots, \lim_{k\to\infty} x_{kn}\right)$ □

Bemerkung 1.19.
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \|x_k - x_\infty\| < \varepsilon \ \text{ falls } \ k \geq N$$

Für jede Umgebung U von x_∞ fast alle $x_k \in U$.

Definition 1.20. Eine Folge $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heisst Cauchy falls:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : m, k \geq N \implies \|x_k - x_m\| < \varepsilon$$

Lemma 1.21. *$\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn $\{x_k\}$ Cauchy ist.*

Beweis. $\{x_k\}$ ist Cauchy $\implies \left\{ x_k \underbrace{i}_{\{\text{fixiert}\}} \right\}$ Cauchy!
$$|x_{ki} - x_{m_i}| \leq \|x_k - x_m\|$$

$\implies \{x_k\}$ ist eine Cauchyfolge $\overset{\text{Erstes Semester}}{\implies}$ x_{ki} konvergiert $\overset{\text{Lemma 2}}{\implies}$ x_k konvergiert. x_k konvergiert $\implies$ Cauchyfolge
$$x_\infty = \lim_{k\to\infty} x_k \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \|x_k - x_\infty\| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall k \geq N$$
$$\begin{aligned} k, m \geq N \quad \|x_k - x_m\| &\leq \|x_k - x_\infty\| + \|x_\infty - x_m\| \leq d(x_k, x_\infty) + (x_\infty, x_m) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.22. In einem metrischen Raum, Cauchy $\Leftarrow$ Konvergenz. Aber allgemein: Cauchy $\not\Longrightarrow$ Konvergenz. Falls Cauchy $\implies$ Konvergenz, dann ist der metrische Raum vollständig.

Definition 1.23. Eine Folge $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heisst beschränkt falls $\|x_k\|$ beschränkt ist.

Satz 1.24. *1. Eine konvergente Folge ist beschränkt*

2. (Bolzano-Weierstrass) $\{x_k\}$ beschränkt $\implies \exists \left\{x_{k_j}\right\}$ die konvergiert.

Beweis.
$$\begin{aligned} \{x_k\} \ \text{ beschränkt } &\implies \{x_{k1}\}_{k\in\mathbb{N}} \ \text{ beschränkt} \\ &\implies \exists x_{k_j} : x_{k_j 1} \to x_1 \end{aligned}$$

Ich definiere $y_j = x_{k_j}$ $y_{j1} \to x_1$
$$y_j \ \text{ beschränkt } \implies \exists j_l : y_{j_l 2} \to x_2$$
$$z_l := y_{j_l} \ \text{ und } \ z_{l1} \to x_1, \ \ x_{l2} \to x_2$$

$\ldots (n-2)$ Schritte. w_r Teilfolge von x_k mit $w_{ri} \to x_i$
$$w_r \to (x_1, \cdots, x_n)$$

□

1.2 Ein bisschen mehr Topologie

Definition 1.25. Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heisst geschlossen falls $G^c (:= \mathbb{R}^n \setminus G)$ eine offene Menge ist.

Bemerkung 1.26.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Satz 1.27. *1. $\varnothing, \mathbb{R}^n$ sind abgeschlossen*

2. $G_1, \cdots, G_N$ abgeschlossen $\implies$ $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_N$ abgeschlossen

3. $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ abgeschlossen $\implies$ $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ abgeschlossen.

Satz 1.28. *$G \subset \mathbb{R}^n$ G ist abgeschlossen $\iff$ $\forall$ jede konvergente $\{x_k\} \subset G$ gehört der Grenzwert zu G (gilt auch für metrische Räume).*

Beweis. $\Leftarrow$ Die rechte Eigenschaft gilt. Ziel: G^c ist offen. Sei $x \in G^c$: das Ziel ist eine Kugel $K_r(x) \in G^c$ zu finden. Widerspruchsbeweis: $K_{\frac{1}{j}}(x) \not\subset G^c$, $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\implies \exists x_j \in K_{\frac{1}{j}}(x) \cap G \implies \{x_j\} \subset G \text{ und } x_j \to x$$

$$\{x_j\} \subset G \;\; x_j \to x \;\; x \notin G$$

$\implies$ d.h. G^c offen $\implies$ falls $\{x_k\} \subset G$ und $x_k \to x$ dann $x \in G$ Widerspruch: G^c offen, aber $\exists \{x_k\} \subset G$ mit Grenzwert $x \notin G$, d.h. $x \in G^c$. Offenheit von G^c.

$$\implies \exists K_r(x) \subset G^c \implies K_r(x) \cap = \varnothing$$

d.h. $\exists N$ mit

$$\|x_N - x\| < r \implies x_N \in K_r(x) \cap G$$

□

Beispiel 1.29. Eine offene Kugel ist nicht geschlossen.

$$K_r(x) = \{y : \|y - x\| < r\}$$

Sei $\{y_k\} \in K_r(x)$, (d.h. $\|y_k - x\| < r$) mit $y_k \to y$ und $\|y - x\| = r$.

Definition 1.30. Sei $\overline{K_r(x)} := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$.

Übung 1.31. $\overline{K_r(x)}$ ist abgeschlossen

Definition 1.32. $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein Randpunkt von M falls

$$\forall K_r(x) \;\; \exists y \in K_r(x) \cap M \;\text{ und }\; \exists z \in K_r(x) \cap M^c$$

Definition 1.33. Sei M eine Menge in $\mathbb{R}^n$, dann ist der Rand von M

$$\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n, \;\text{ Randpunkt von }\; M\}$$

Satz 1.34. $\partial M^c = \partial M$

1. $M \setminus \partial M$ ist die grösste offene Menge die in M enthalten ist.

2. $M \cup \partial\partial M$ ist die kleinste geschlossene Menge die M enthält.

Beweis. $M \setminus \partial M$ ist offen.

$$x \in M \setminus \partial M \implies x \in M \text{ und } \exists K_r(x) \text{ mit } K_r(x) \cap M^c = \varnothing$$
$$\implies K_r(x) \subset M$$

Sei $y \in K_r(x)$

$$\implies |y - x| = \rho < r$$
$$\implies K_{r-\rho}(y) \subset K_r(x) \subset M \implies y \in M, y \notin \partial M$$
$$K_r(x) \subset M \setminus \partial M$$

x ist beliebig $\implies$ $M \setminus \partial M$ ist offen.
Sei $A \subset M$ eine offene Menge. Das Ziel ist $A \subset M \setminus \partial M$. Sei $x \in A$. Ziel:($x \in M \setminus \partial M$) $x \notin \partial M$.

$$A \text{ offen} \implies \exists K_r(x) \subset A \subset M \implies x \notin \partial M \implies A \subset M \setminus \partial M$$

□