

# Analysis II - Vorlesungs-Script

Prof. Dr. Camillo De Lellis

Basisjahr 11 Semester I

**Mitschrift:**

Simon Hafner

---

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Metrik und Topologie des euklidischen Raumes

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n), x \in \mathbb{R}\}$  In  $\mathbb{R}^n$ :

- Norm (Euklidische)
- Abstand (Euklidische)
- Topologie

“Abstrakte Theorie”

- Normierte Vektorräume
- Metrische Räume
- Topologische Räume

**Definition 1.1.** Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  ( $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$ )

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Intuitiv:  $\|x\|$  = “der Abstand zwischen  $x$  und 0

**Lemma 1.2.**  $\|\cdot\|$  erfüllt die Regeln

1.  $\|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

*Beweis.* 1.  $\geq 0$  trivial

$$x = 0 \implies \sum x_i^2 = 0 \implies \|x\| = 0$$

$$x = 0 \iff x_i = 0 \forall i \iff \sum x_i^2 = 0 \iff \|x\| = 0$$

2.

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda x_i)^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |\lambda| \|x\|$$

$$|\lambda| = \frac{\|x\| |\lambda|}{\|x\|}$$

3.

$$\iff \underbrace{\|x + y\|^2}_{=} \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\|$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \overbrace{2 \sum_{i=1}^n x_i y_i}^{\text{Skalarprodukt}} \\ &\iff \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

□

**Satz 1.3.** Cauchy-Schwartzsche Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

*Beweis.* OBdA  $y \neq 0$  ( $y = 0$  trivial)

$$\begin{aligned} t \rightarrow g(t) &= \sum_{i=1}^n (x_i + ty_i)^2 \\ &= \left( \sum x_i^2 \right) + 2t \sum x_i y_i + t^2 \sum y_i^2 \\ &= \|x\|^2 + 2t \langle x, y \rangle + \|y\|^2 t^2 \end{aligned}$$

Sei  $t_0 = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$ , dann  $g(t_0) \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 &\leq g(t_0) \\ &= \|x\|^2 - 2 \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} + \|y\|^2 \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \\ &= \|x\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \\ &\implies \langle x, y \rangle \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \\ &\implies |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

□

**Definition 1.4.** Ein normierter Vektorraum ist ein reeller Vektorraum  $V$  mit einer Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  so dass:

1.  $\|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0 \iff x = 0$  (Nullvektor)
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$

**Beispiel 1.5.**  $V = \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \left( \sum |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad p \geq 1$$

$p = 2$  euklidische Norm

**Definition 1.6.** Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Die euklidische Metrik  $d(x, y) = \|x - y\|$

**Lemma 1.7.** 1.  $d(x, y) \geq 0$  und  $d(x, y) = 0 \iff x = y$

2.  $d(x, y) = d(y, x)$

3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (Dreiecksungleichung)

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \|x - z\| &\leq \underbrace{\|x - y\|}_v + \underbrace{\|y - z\|}_w \quad v + w = x - z \\ \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\| \end{aligned}$$

□

**Definition 1.8.** Ein metrischer Raum ist eine Menge  $X$  mit einer Abbildung

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R}$$

1.  $d(x, y) \geq 0$  und  $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X$
2.  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

**Lemma 1.9.** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum. Dann sind  $V$  und  $d(x, y) = \|x - y\|$  ein metrischer Raum.

**Definition 1.10.** Die offene Kugel mit Radius  $r > 0$  und Mittelpunkt  $x \in \mathbb{R}^n$  ist die Menge

$$K_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) < r\}$$

**Definition 1.11.** Eine Menge heisst "Umgebung" von  $x$ , wenn  $V$  eine offene Kugel mit Mittelpunkt  $x$  enthält.

**Definition 1.12.** Eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heisst offen falls  $\forall x \in U$  ist  $U$  eine Umgebung von  $x$

$$\forall x \in U \exists \text{ eine Kugel } K_r(x) \subset U$$

*Bemerkung 1.13.* Eine offene Kugel ist offen.

**Satz 1.14.** 1.  $\emptyset$  und  $\mathbb{R}^n$  sind offen

2. Der Schnitt endlich vieler offener Menge ist auch offen.

3. Die Vereinigung einer beliebigen Familie offener Mengen ist auch offen.

*Beweis.* 1.  $\mathbb{R}^n$  trivialerweise offen, auch  $\emptyset$

2. Sei  $x \in U \cap \dots \cap U_N$

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad K_r(x) \subset U_i$$

$$\text{Sei } r = \min \{r_1, \dots, r_N\}$$

$$\implies K_r(x) \subset U_i \forall i \implies K_r(x) \subset U_1 \cap \dots \cap U_N$$

3.  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ . Sei  $U = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

$$x \in U \implies x \in U_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \Lambda$$

$$\implies \exists K_r(x) \subset U_\lambda \subset U$$

□

**Definition 1.15.** Ein topologischer Raum ist eine Menge  $X$  und eine Menge  $\mathcal{O}$  von Teilmengen von  $X$  so dass:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

2.  $U_1 \cap \dots \cap U_N \in \mathcal{O}$  falls  $U_i \in \mathcal{O}$

3.  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$  falls  $U_i \in \mathcal{O}$

**Satz 1.16.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum

$$K_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Umgebungen und offene Mengen sind wie im euklidischen Fall.  $\mathcal{O} = \{\text{offene Menge}\}$  definiert eine Topologie.

## 1.1 Konvergenz

Sei  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$   $x_k \in \mathbb{R}$   $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$

**Definition 1.17.** Die Folge  $\{x_k\}$  konvergiert gegen  $x_\infty \in \mathbb{R}^n$  falls

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x_\infty) = 0$$

$$\left( \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k, x_\infty\| = 0 \right)$$

Dann schreiben wir

$$x_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$$

**Satz 1.18.**

$$x_k \rightarrow x_\infty \iff x_{ki} \rightarrow x_{\infty_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \|x_k - x_\infty\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{ki} - x_{\infty_i})^2} \geq |x_{ki} - x_{\infty_i}| \geq 0 \\ \implies 0 &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} |x_{ki} - x_{\infty_i}| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x_\infty\| = 0 \\ \|x_k - x_\infty\| &= \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^n (x_{ki} - x_{\infty_i})^2}_{\rightarrow 0}} \leq \sum_{i=1}^n |x_{ki} - x_{\infty_i}| \\ &\implies \|x_k - x_\infty\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Eine alternative Formulierung:  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \left( \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k1}, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{kn} \right)$  □

*Bemerkung 1.19.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \|x_k - x_\infty\| < \varepsilon \text{ falls } k \geq N$$

Für jede Umgebung  $U$  von  $x_\infty$  fast alle  $x_k \in U$ .**Definition 1.20.** Eine Folge  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$  heisst Cauchy falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : m, k \geq N \implies \|x_k - x_m\| < \varepsilon$$

**Lemma 1.21.**  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$  konvergiert genau dann, wenn  $\{x_k\}$  Cauchy ist.

$$\text{Beweis. } \{x_k\} \text{ ist Cauchy} \implies \left\{ x_k \underbrace{\quad}_i \right\}_{\{\text{fixiert}\}} \text{ Cauchy!}$$

$$|x_{ki} - x_{mi}| \leq \|x_k - x_m\|$$

$\implies \{x_k\}$  ist eine Cauchyfolge  $\xrightarrow{\text{Erstes Semester}} x_{ki}$  konvergiert  $\xrightarrow{\text{Lemma 2}} x_k$  konvergiert.  $x_k$  konvergiert  $\implies$  Cauchyfolge

$$x_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N : \|x_k - x_\infty\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N$$

$$\begin{aligned} k, m \geq N \quad \|x_k - x_m\| &\leq \|x_k - x_\infty\| + \|x_\infty - x_m\| \leq d(x_k, x_\infty) + d(x_\infty, x_m) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

*Bemerkung 1.22.* In einem metrischen Raum, Cauchy  $\Leftarrow$  Konvergenz. Aber allgemein: Cauchy  $\not\Rightarrow$  Konvergenz. Falls Cauchy  $\implies$  Konvergenz, dann ist der metrische Raum vollständig.

**Definition 1.23.** Eine Folge  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$  heisst beschränkt falls  $\|x_k\|$  beschränkt ist.**Satz 1.24.** 1. Eine konvergente Folge ist beschränkt2. (Bolzano-Weierstrass)  $\{x_k\}$  beschränkt  $\implies \exists \{x_{k_j}\}$  die konvergiert.*Beweis.*

$$\begin{aligned} \{x_k\} \text{ beschränkt} &\implies \{x_{k1}\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt} \\ &\implies \exists x_{k_j} : x_{k_j1} \rightarrow x_1 \end{aligned}$$

Ich definiere  $y_j = x_{k_j}$   $y_{j1} \rightarrow x_1$ 

$$y_j \text{ beschränkt} \implies \exists j_l : y_{j_l2} \rightarrow x_2$$

$$z_l := y_{j_l} \text{ und } z_{l1} \rightarrow x_1, \quad z_{l2} \rightarrow x_2$$

...  $(n-2)$  Schritte.  $w_r$  Teilfolge von  $x_k$  mit  $w_{ri} \rightarrow x_i$ 

$$w_r \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$$

□

## 1.2 Ein bisschen mehr Topologie

**Definition 1.25.** Eine Menge  $G \subset \mathbb{R}^n$  heisst geschlossen falls  $G^c := \mathbb{R}^n \setminus G$  eine offene Menge ist.

*Bemerkung 1.26.*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

**Satz 1.27.** 1.  $\emptyset, \mathbb{R}^n$  sind abgeschlossen

2.  $G_1, \dots, G_N$  abgeschlossen  $\implies G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_N$  abgeschlossen

3.  $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  abgeschlossen  $\implies \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$  abgeschlossen.

**Satz 1.28.**  $G \subset \mathbb{R}^n$   $G$  ist abgeschlossen  $\iff \forall$  jede konvergente  $\{x_k\} \subset G$  gehört der Grenzwert zu  $G$  (gilt auch für metrische Räume).

*Beweis.*  $\Leftarrow$  Die rechte Eigenschaft gilt. Ziel:  $G^c$  ist offen. Sei  $x \in G^c$ : das Ziel ist eine Kugel  $K_r(x) \in G^c$  zu finden. Widerspruchsbeweis:  $K_{\frac{1}{j}}(x) \not\subset G^c$ ,  $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\implies \exists x_j \in K_{\frac{1}{j}}(x) \cap G \implies \{x_j\} \subset G \text{ und } x_j \rightarrow x$$

$$\{x_j\} \subset G \quad x_j \rightarrow x \quad x \notin G$$

$\implies$  d.h.  $G^c$  offen  $\implies$  falls  $\{x_k\} \subset G$  und  $x_k \rightarrow x$  dann  $x \in G$   
Widerspruch:  $G^c$  offen, aber  $\exists \{x_k\} \subset G$  mit Grenzwert  $x \notin G$ , d.h.  $x \in G^c$ . Offenheit von  $G^c$ .

$$\implies \exists K_r(x) \subset G^c \implies K_r(x) \cap G = \emptyset$$

d.h.  $\exists N$  mit

$$\|x_N - x\| < r \implies x_N \in K_r(x) \cap G$$

□

**Beispiel 1.29.** Eine offene Kugel ist nicht geschlossen.

$$K_r(x) = \{y : \|y - x\| < r\}$$

Sei  $\{y_k\} \in K_r(x)$ , (d.h.  $\|y_k - x\| < r$ ) mit  $y_k \rightarrow y$  und  $\|y - x\| = r$ .

**Definition 1.30.** Sei  $\overline{K_r(x)} := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$ .

**Übung 1.31.**  $\overline{K_r(x)}$  ist abgeschlossen

**Definition 1.32.**  $x \in \mathbb{R}^n$  ist ein Randpunkt von  $M$  falls

$$\forall K_r(x) \quad \exists y \in K_r(x) \cap M \quad \text{und} \quad \exists z \in K_r(x) \cap M^c$$

**Definition 1.33.** Sei  $M$  eine Menge in  $\mathbb{R}^n$ , dann ist der Rand von  $M$

$$\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n, \text{ Randpunkt von } M\}$$

**Satz 1.34.**  $\partial M^c = \partial M$

1.  $M \setminus \partial M$  ist die grösste offene Menge die in  $M$  enthalten ist.

2.  $M \cup \partial M$  ist die kleinste geschlossene Menge die  $M$  enthält.

*Beweis.*  $M \setminus \partial M$  ist offen.

$$\begin{aligned} x \in M \setminus \partial M &\implies x \in M \text{ und } \exists K_r(x) \text{ mit } K_r(x) \cap M^c = \emptyset \\ &\implies K_r(x) \subset M \end{aligned}$$

Sei  $y \in K_r(x)$

$$\begin{aligned} &\implies |y - x| = \rho < r \\ &\implies K_{r-\rho}(y) \subset K_r(x) \subset M \implies y \in M, y \notin \partial M \\ &\quad K_r(x) \subset M \setminus \partial M \end{aligned}$$

$x$  ist beliebig  $\implies M \setminus \partial M$  ist offen.

Sei  $A \subset M$  eine offene Menge. Das Ziel ist  $A \subset M \setminus \partial M$ . Sei  $x \in A$ . Ziel:  $(x \in M \setminus \partial M) \implies x \notin \partial M$ .

$$A \text{ offen} \implies \exists K_r(x) \subset A \subset M \implies x \notin \partial M \implies A \subset M \setminus \partial M$$

□

### 1.3 Stetigkeit

**Definition 1.35.** Sei  $f : \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}^k$ .  $f$  ist stetig an der Stelle  $x \in \Omega$  falls  $\forall \{x_k\} \subset \Omega$  mit  $x_k \rightarrow x$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x)$$

**Lemma 1.36.** Eine äquivalente Definition:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(K_\delta(x) \cap \Omega) \subset K_\varepsilon(f(x))$$

*Beweis.*  $\varepsilon$ - $\delta \implies$  Folgendefinition. Sei  $x_k \rightarrow x$ . Ziel:  $f(x_k) \rightarrow f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ mit } \underbrace{\|f(x_k) - f(x)\|}_{d(f(x_k), f(x))} < \varepsilon \quad \forall k \geq N$$

$$\exists \delta > 0 \quad \underbrace{f(K_\delta(x)) \subset K_\varepsilon(f(x))}$$

$$\exists \|x_k - x\| < \delta \quad k \geq N$$

$$x_k \in K_\delta(x) \implies f(x_k) \in K_\varepsilon(f(x))$$

Folgendefinition  $\implies$  ( $\varepsilon$ - $\delta$ )-Defintion. Widerspruchsannahme:

$$\exists \varepsilon > 0 : f(K_\delta(x) \cap \Omega) \not\subset K_\varepsilon(f(x)) \quad \forall \delta > 0$$

$$\implies \forall \delta > 0 \exists y_\delta \in K_\delta(x) \text{ und } \|f(y_\delta) - f(x)\| \geq \varepsilon$$

Nehmen wir  $\delta = \frac{1}{j}$  und  $x_j = \frac{y_1}{j}$

$$\|x_j - x\| < \frac{1}{j} \quad (\text{weil } x_j \in K_{\frac{1}{j}}(x))$$

$$\|f(x_j) - f(x)\| = \|f(y_{\frac{1}{j}}) - f(x)\| \geq \varepsilon$$

$x_j \rightarrow x$  aber  $f(x_j) \not\rightarrow f(x)$

□

**Definition 1.37.** Die allgemeine Defintion der Stetigkeit für metrische Räume: Seien  $(X, d)$  und  $(Y, \bar{d})$  zwei metrische Räume. Sei  $f : X \rightarrow Y$ .  $f$  ist stetig an der Stelle  $x$  falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } d(y, x) < \delta \implies \bar{d}(f(y), f(x)) < \varepsilon$$

$$\iff f(K_\delta(x)) \subset K_\varepsilon(f(x))$$



**Definition 1.38.** Eine  $f : X \rightarrow Y$  heisst stetig falls  $f$  stetig an jeder Stelle  $x \in X$  ist.

**Satz 1.39.** Sei  $f : X \rightarrow Y$   $((X, d), (Y, \bar{d}))$  metrische Räume) Dann:

1. Die Stetigkeit in  $x \iff \forall$  Umgebung  $U$  von  $f(x)$  ist  $f^{-1}(U)$  eine Umgebung von  $x$ .
2. Stetigkeit von  $f \iff f^{-1}(U)$  ist offen  $\forall U$  offen.

*Beweis.* 1. • Stetigkeit  $\implies$  Umgebung.  $U$  Umgebung von  $f(x) \implies \exists \delta > 0$  mit  $K_\delta(f(x)) \subset U$

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : f(K_\varepsilon(x)) \subset K_\delta(f(x))$$

$$\implies f^{-1}(U) \supset f^{-1}(K_\delta(f(x))) \supset K_\varepsilon(x) \implies f^{-1}(U) \text{ Umgebung von } x$$

- Umgebung  $\implies$  Stetigkeit. Sei  $\delta > 0$   $U = K_\delta(f(x))$ .  $U$  Umgebung von  $f(x)$ .  $f^{-1}(U)$  ist eine Umgebung von  $x$ .

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(U)$$

$$\implies f(K_\varepsilon(x)) \subset U = K_\delta(f(x))$$

2. • Stetigkeit  $\implies$  offen. Sei  $U$  offen  $\iff \forall y \in U$  ist  $U$  eine Umgebung von  $y$

$$f^{-1}U \ni x \implies f(x) \in U \xrightarrow{\text{Stetigkeit in } x} f^{-1}(U) \text{ ist eine Umgebung von } x$$

$$\implies f^{-1}(U) \text{ ist offen}$$

- offen  $\implies$  Stetigkeit an jedem  $x \in X$ . Sei  $x \in X$ ,  $\delta > 0$ ,  $K_\delta(f(x))$  ist offen

$$f^{-1}(K_\delta(f(x))) \text{ ist offen} \implies x \in f^{-1}(K_\delta(f(x)))$$

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(K_\delta(f(x)))$$

$$f(K_\varepsilon(x)) \subset K_\delta(f(x))$$

□

## 1.4 lineare Abbildungen

**Definition 1.40.** Eine Abbildung  $L : V \rightarrow W$  ( $V, W$  Vektoren) heisst linear, falls

$$L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \iff \exists \text{ eine Matrix } L_{ij} :$$

$$L(x) = \left( \sum_{j=1}^n L_{1j} x_j, \sum_{j=1}^n L_{2j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n L_{kj} x_j \right)$$

**Definition 1.41.** Sei  $L_{ij}$  eine Matrix die die lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  darstellt. Die Hilbert-Schmidt Norm von  $L$  ist

$$\|L\|_{\text{HS}} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n L_{ij}^2}$$

*Bemerkung 1.42.*  $\{L : (L_{ij} n \times k \text{ Matrixen}) \sim \mathbb{R}^{nk} \|\cdot\|_{\text{HS}}$  ist die euklidische Norm.

*Bemerkung 1.43.* Sei  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine lineare Abbildung und  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dann  $\|L(x)\| \leq \|x\| \|L\|_{\text{HS}}$ .

**Korollar 1.44.** Sei  $L$  wie oben, dann ist  $L$  stetig.

*Beweis.* Sei  $x_k \rightarrow x$ . Ziel  $L(x_k) \rightarrow L(x)$

$$\begin{aligned}\|L(x_k) - L(x)\| &= \|L(x_k - x)\| \leq \|x_k - x\| \|L\|_{\text{HS}} \rightarrow 0 \\ \implies \|L(x_k) - L(x)\| &\rightarrow 0 \\ \implies \text{Stetigkeit}\end{aligned}$$

□

*Beweis.* Beweis von 1.36:  $L(x) = y$

$$\begin{aligned}\|L(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^k y_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^n L_{ij} x_j \right)^2 \stackrel{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \|x\|^2 = \|x\|^2 \left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \right) \\ \|x\|^2 \|L\|_{\text{HS}}^2 &\implies \|L(x)\| \leq \|x\| \|L\|_{\text{HS}}\end{aligned}$$

□

**Definition 1.45.** Sei  $L : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung wobei  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  zwei endlich-dimensionalisierte Vektorräume sind. Die Operatornorm von  $L$  ist:

$$\|L\|_{L(V,W)} := \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W$$

**Satz 1.46.**  $\|\cdot\|_{L(V,W)}$  ist eine Norm und

$$\|L(v)\|_W \leq \|L\|_{L(V,W)} \|v\|_V$$

Deswegen: jede lineare Abbildung  $L : V \rightarrow W$  ist stetig.

*Beweis.* Der Kern ist die folgende Eigenschaft:

$$\|L\|_{L(V,W)} < +\infty$$

Wenn das gilt dann:

1.

$$\underbrace{\|L\|_{L(V,W)}}_{\text{Kern}} \text{ und } \|L\|_{L(V,W)} = 0 \iff L = 0$$

$\Leftarrow$  einfach. Sei  $\|L\|_{L(V,W)} = 0$ . Dann sei  $v \in V$ .

$$v = 0 \implies L(v) = 0$$

$$v \neq 0 \implies z \frac{v}{\|v\|_V} \implies \|z\|_V = 1$$

$$\|L(z)\|_W \leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(y)\|_W = 0$$

$$\implies L(z) = 0 \implies L(v) = L(\|v\|_V z) = \|v\|_V L(z) = 0$$

2.

$$\begin{aligned}\|\lambda L\|_{L(V,W)} &= |\lambda| \|L\|_{L(V,W)} \\ \|\lambda L\|_{L(V,W)} &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|\lambda L(v)\|_W \\ &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} |\lambda| \|L(v)\|_W \\ &= |\lambda| \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W \\ &= |\lambda| \|L\|_{L(V,W)}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\|L + L'\|_{L(V,W)} &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|(L + L')(v)\|_{L(V,W)} \\ &= \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(v) + L'(v)\|_{L(V,W)} \\ &\leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} (\|L(v)\|_W + \|L'(v)\|_W) \\ &\leq \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L(v)\|_W + \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|L'(v)\|_W \\ &= \|L\|_{L(V,W)} + \|L'\|_{L(V,W)}\end{aligned}$$

Wenn  $v_1, \dots, v_n$  Basis für  $V$ ,  $w_1, \dots, w_k$  Basis für  $W$ . Die lineare Abbildung  $E_{ij}(v_i) = w_j$ ,  $E_{ij}(v_l) = 0$  falls  $l \neq i$  ist eine Basis für  $L(V, W) \implies L = \sum_{i,j} \lambda_{ij} E_{ij}$

□