Analysis I - Vorlesungs-Script

Prof. Dr. Camillo De Lellis

Basisjahr 10 Semester II

Mitschrift:
Simon Hafner

Inhaltsverzeichnis

1 Die reellen Zahlen

Beispiel 1. $\mathbb{R}$ ist nicht genug

Satz 1. *Es gibt kein $q \in \mathbb{Q}$ so dass $q^2 = 2$*

Beweis 1. *Falls $q^2 = 2$, dann $(-q)^2 = 2$ OBdA $q \geq 0$ Deswegen $q > 0$. Sei $q > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ so dass $q^2 = 2$. $q = \frac{m}{n}$ mit $m > 0, > 0$. $GGT(m, n) = 1$ (d.h. falls $r \in \mathbb{N}$ m und n dividiert, dann $r = 1$!).*

$$\begin{aligned} m^2 = 2n^2 &\implies m \text{ ist gerade} && \implies m = 2k \text{ für } k \in \mathbb{N} \\ \{0\} & \\ 4k^2 = 2n^2 &\implies n \text{ ist gerade} && \implies 2|n (2 \text{ dividiert } n) \end{aligned}$$

$\implies$ *Widerspruch! Weil 2 dividiert m und n! (d.h. es gibt <u>keine</u> Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$*

Beispiel 2.

$$\sqrt{2} = 1,414\cdots$$

Intuitiv:

$$\begin{array}{rrrcrrr} 1,4^2 < & 2 < & 1,5^2 & & 1,4 < & \sqrt{2} < & 1,5 \\ 1,41^2 < & 2 < & 1,42^2 & \implies & 1,41 < & \sqrt{2} < & 1,42 \\ 1,414^2 < & 2 < & 1,415^2 & & 1,414 < & \sqrt{2} < & 1,415 \end{array}$$

Intuitiv

- $\mathbb{Q}$ hat "Lücke"
- $\mathbb{R} = \{$ die reellen Zahlen $\}$ haben "kein Loch".

Konstruktion Die reellen Zahlen kann man "konstruieren". (Dedekindsche Schritte, Cantor "Vervollständigung"). Google knows more. Wir werden "operativ" sein, d.h. wir beschreiben einfach die wichtigsten Eigenschaften von $\mathbb{R}$

1.1 Körperstrukturen

K1 Kommutativgesetz

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned}$$

K2 Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= a + (b + c) \\ (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \end{aligned}$$

K3 Distributivgesetz

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

K4

$$\begin{aligned} a + x &= b \\ a \cdot x &= b \text{falls } a \neq 0 \end{aligned}$$

1.2 Die Anordnung von $\mathbb{R}$

A1 $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Relationen:

- $a < 0$
- $a = 0$
- $a > 0$

A2 Falls $a > 0$, $b > 0$, dann $a + b > 0$, $a \cdot b > 0$

A3 Archimedisches Axiom: $\forall a \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$

Übung 1. Beweisen Sie dass $a \cdot b > 0$ falls $a < 0$, $b < 0$

Satz 2. $\forall x > -1$, $x \neq 0$ *und* $\forall n \in \mathbb{N}$
$\{0, 1\}$ *gilt* $(1 + x)^n > (1 + nx)$

Beweis 2.

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + \underbrace{x^2}_{>0} > 1 + 2x$$

weil $x \neq 0$.
Nehmen wir an dass

$$\begin{aligned} (1 + x)^n &> & 1 + nx(x > -1, x \neq 0) \\ \underbrace{(1 + x)}_{a}\underbrace{(1 + x)^n}_{c} &> & \underbrace{(1 + nx)}_{d}(1 + x)(\mathit{weil}(1 + x) > 0) \end{aligned}$$

$$c > d \iff c - d > 0 \overset{A2}{\implies} a(c - d) > 0 \overset{K4}{\implies} ac - ad > 0 \overset{A2}{\implies} ac > ad$$

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} > (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 = \\ 1 + (n + 1)x + \underbrace{nx^2}_{>0} > 1 + (n + 1)x \\ \implies (1 + x)^{n+1} > 1 + (n + 1)x \end{aligned}$$

Vollständige Induktion.

Definition 1. Für $a \in \mathbb{R}$ setzt man

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls} a \geq 0 \\ -a & \text{falls} a < 0 \end{cases}$$

Satz 3. *Es gilt (Dreiecksungleichung):*

$$\begin{aligned} |ab| = & & |a||b| \\ |a + b| \leq & & |a| + |b| \\ ||a| - |b|| \leq & & |a - b| \end{aligned}$$

Beweis 3.

- $|ab| = |a||b|$ *trivial*
- $$a + b \leq |a| + |b|$$

  ($a > 0$ und $b > 0 \implies a + b = |a| + |b|$ sonst $a + b < |a| + |b|$ weil $x \leq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$ und die Gleichung gilt).

  $$-(a + b) = -a - b \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$$

  Aber

  $$|a + b| = max\,\{a + b, -(a + b)\} \leq |a| + |b|$$

- $$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

  Zuerst:

$$\begin{aligned} |a| = |(a-b)+b| &\leq |a-b| + |b| \\ \implies |a| - |b| &\leq |a-b| \\ |b| = |a+(b-a)| &\leq |a| + |b-a| \\ \implies |b| - |a| &\leq |b-a| = |a-b| \\ \implies (|a| - |b|) &\leq |a-b| \end{aligned}$$

$$||a| - |b|| = max\{|a| - |b|, -(|a| - |b|)\} \leq |a-b|$$

Bemerkung 1.
$$|x| = max\{-x, x\}$$

1.3 Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Für $a < b$, $a \in \mathbb{R}$, heisst:

- abgeschlossenes Intervall: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- offenes Intervall: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- (nach rechts) halboffenes Intervall: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- (nach links) halboffenes Intervall: $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Sei $I = [a, b]$ (bzw. $]a, b[\ldots$). Dann a, b sind die Randpunkte von I. Die Zahl $|I| = b - a$ ist die Länge von I. $(b - a > 0)$

Definition 2. Eine Intervallschachtelung ist eine Folge $I_1, I_2, \cdots$ geschlossener Intervalle (kurz $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (I_n)) mit diesen Eigenschaften:

I1 $I_{n+1} \subset I_n$

I2 Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n so dass $|I_n| < \epsilon$

Beispiel 3. $\sqrt{2}$

$$\begin{array}{cccccc} 1,4^2 < & 2 < & 1,5^2 & & I_1 = [1,4/1,5] |I_1| = 0.1 \\ 1,41^2 < & 2 < & 1,42^2 & \implies & I_2 = [1,41/1,42] |I_2| = 0.01 \\ 1,414^2 < & 2 < & 1,415^2 & & I_3 = [1,414, 1,415] |I_2| = 0.001 \end{array}$$

Beweis 4. *I1 und I2 sind beide erfüllt.*

Axiom 1. *Zu jeder Intervallschachtelung $\exists x \in \mathbb{R}$ die allen ihren Intervallen angehört.*

Satz 4. *Die Zahl ist eindeutig.*

Beweis 5. *Sei (I_n) eine Intervallschachtelung. Nehmen wir an dass $\exists \alpha < \beta$ so dass $\alpha, \beta \in I_n \forall n$. Dann $|I_n| \geq |\beta - \alpha| > a$. Widerspruch!*

Satz 5. *$\forall a \geq 0, a \in \mathbb{R}$ und $\forall x \in \mathbb{N}$*
$\{0\}$, $\exists$ eine einziges $x \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ s.d. $x^k = a$. Wir nennen $x = \sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$.
Sei $m, n \in \mathbb{N}$, $a^{m+n} = a^m a^n$ und deswegen $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ für $m \in \mathbb{N}$ (so dass die Regel $a^{m-m} = a^0 = 1$.
$n, m \in \mathbb{N}$
$\{0\}$ n Mal.

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n\ Mal} = a^{\overbrace{m + \cdots + m}^{n\ Mal}} = a^{nm}$$

Und mit $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ stimmt die Regel $(a^m)^n = a^{mn}$ auch $\forall m, n \in \mathbb{Z}$!

Bemerkung 2. $x^k = \left(a^{\frac{1}{k}}\right)^k = a \left(= a^{\frac{1}{k}k} = a^1\right)$

Definition 3. $\forall q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $\forall a > 0$ mit definiertem $a^q = (\sqrt[n]{a})^m$

Beweis 6. *Mit dieser Definition gilt* $a^{q+q_2} = a^q a^{q_2}$ $\forall a > 0$ *und* $\forall q, q_2 \in \mathbb{Q}$.

Satz 6. *Zu jedem* $x > 0$ $(x \in \mathbb{R})$ *und zu jedem* $k \in \mathbb{N}$ *gibt es eine reelle Zahl* $y > 0$ *so dass* $y^k = x$. *In Zeichen:*

$$y = x^{\frac{1}{k}}, y = \sqrt[k]{x}$$

Beweis 7. *oBdA* $x > 1$ *(sonst würden wir* $\frac{1}{x}$ *betrachten). wir konstruieren eine Intervallschachtelung* (I_n) *so dass* $\forall n a_n^k \geq x \geq b_n^k$

$I_1 := [1, x] I_{n+1} = \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] & \text{falls } x \leq \left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^k \left[\frac{a_n+b_n}{2}, n\right] \end{cases} |I_n| = \dfrac{1}{2^{n-1}} |I_1|$

Intervallschachtelungsprinzip $\implies \exists y \in \mathbb{R}$ *s.d.* $y \in I_n \forall n \in \mathbb{N}$

Satz 7. $y^k = x$

Beweis 8. *Man definiert* $J_n = [a_n^k, b_n^k$. *Wir wollen zeigen, dass* J_n *eine Intervallschachtelung ist.*

- $J_{n+1} \subset J_n$ *weil* $I_{n+1} \subset I_n$
- $$|J_n| = b_n^k - a_n^k = \underbrace{(b_n - a_n)}_{|I_n|} \underbrace{(b_n^{k-1} + b_n^{k-2} a_n + \cdots + a_n^{k-1})}_{\leq k b_1^{k-1}}$$

$\implies |J_n| \leq |I_n| k k_1^{k-1}$.
Sei ε *gegeben. Man wähle* N *gross genug, so dass*

$$|I_n| \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{k b_1^{k-1}} \implies |J_n| \leq \varepsilon k b_1^{k-1} = \varepsilon$$

Einerseits

$$y \in [a_n, b_n] \implies y^k \in \left[a_n^k, b_n^k\right] = J_n$$

Andererseits

$$x \in J_n \forall n \in \mathbb{N}$$

Intervallschachtelungsprinzip $\implies x = y^k$

1.4 Supremumseigenschaft, Vollständigkeit

Definition 4. $s \in \mathbb{R}$ heisst obere (untere) Schranke der Menge $M \subset \mathbb{R}$ falls $s \geq x$ $(s \leq x)$ $\forall x \in M$.

Definition 5. $s \in \mathbb{R}$ ist das Supremum der Menge $M \subset \mathbb{R}$ falls es die kleinste obere Schranke ist. D.h.

- s ist die obere Schranke
- falls $s' < s$, dass ist s' keine obere Schranke.

Beispiel 4. $M =]0, 1[$. In diesem Fall $s = \sup M \notin M$

Beispiel 5. $M = [0, 1]$. $\sup M = 1 \in M$

Definition 6. $s \in \mathbb{R}$ heisst Infimum einer Menge M $(s = \inf M)$ falls s die grösste obere Schranke ist.

Definition 7. Falls $s = \sup M \in M$, nennt man s das Maximum von M. Kurz: $s = \max M$. Analog Minimum.

Satz 8. *Falls $M \subset \mathbb{R}$ nach oben (unten) beschränkst ist, dann existiert* $\sup M$ *(*$\inf M$*).*

Beweis 9. *Wir konstruieren eine Intervallschachtelung I_n, so dass b_n eine obere Schranke ist, und a_n keine obere Schranke ist.*

- *$I_1 = [a_1, b_1]$, wobei b_1 eine obere Schranke*
- *a_1 ist keine obere Schranke*

Sei I_n gegeben.

$$I_{n+1} = \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] & \text{Falls } \frac{a_n+b_n}{2} \text{ eine obere Schranke ist-} \\ \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] & \text{sonst} \end{cases}$$

Also, $\exists s \in I_n \forall n$

Satz 9. *s ist das Supremum von M*

- *Warum ist s eine obere Schranke?*
  Angenommen $\exists x \in M$ so dass $x > s$. Man wähle $|I_n| < x - s$. Daraus folgt

  $$x - s > b_n - a_n \geq b_n - s \implies x > b_n$$

  Widerspruch.

- *Warum ist s die kleinste obere Schranke?*
  Angenommen $\exists s' < s$. Dann wähle n' so dass $I_{n'} < s - s'$.

  $$s - s' > b_{n'} - a_{n'} \geq s - a_{n'} \implies a_{n'} > s'$$

  Widerspruch.

Lemma 1. *Jede nach oben (unten) beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{Z}$ besitzt das grösste (kleinste) Element.*

Beweis 10. *oBdA betrachte nur nach unten beschränkte Mengen $M \subset N$. Angenommen M hat kein kleinstes Element.*

Satz 10.

$$\begin{aligned} \forall n M \cap \{1, \cdots, n\} &= \\ n &= 1 \\ M \cap \{1\} \end{aligned}$$

Angenommen

$$\begin{aligned} M \cap \{1, \cdots, n\} &= \\ M \cap \{1, 2, \cdots, n+1\} = M \cap \{1, \cdots, n\} \cup M \cap \{n+1\} &= \\ \implies M \cap \mathbb{N} &= \end{aligned}$$

Satz 11. *$\mathbb{Q}$ ist dich in $\mathbb{R}$, bzw. für beliebige zwei $x, y \in \mathbb{R}$, $y > x$, gibt es eine rationelle Zahl $q \in \mathbb{Q}$, so dass $x < q < y$.*

Beweis 11. *Man wähle $n \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{n} < y - x$. Betrachte die Menge $A \subseteq \mathbb{Z}$, so dass $M \in A \implies M > nx$. Lemma $\implies \exists m = \min A$.*

$$x < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < x + y - x = y$$

Also setze $q = \frac{m}{n}$

1.5 Abzählbarkeit

Definition 8. Die Mengen A & B sind gleichmächtig, wenn es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt. A hat grässere Mächtigkeit als B, falls B gleichmächtig wie eine Teilmenge von A ist, aber A zu keiner Teilmenge von B gleichmächtig ist.

Beispiel 6.

- $1, 2$ & $3, 4$ sind gleichächtig.
- $1, 2, \cdots, n$ hat kleinere Mächtigkeit als $1, 2, \cdots, m$, wenn $n < m$ ist.

Definition 9. Eine Menge A ist abzählbar, wenn es eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und A gibt. D.h. $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$.

Lemma 2. *$\mathbb{Z}$ ist abzählbar*

Beweis 12. $\begin{array}{c|cccccc} \mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ \mathbb{Z} & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots \end{array}$ *Formal:*

$$f = \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \textit{wenn } n \textit{ gerade} \\ \frac{1-n}{2} & \textit{wenn } n \textit{ ungerade} \end{cases}$$

Satz 12. *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar*

Beweis 13. *Sucht euch die Graphik auf Wikipedia oder sonstwo.*

Satz 13. *$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.*

2 Komplexe Zahlen

Bemerkung 3. $\forall a \in \mathbb{R}$, $a^2 > 0$. Deswegen ist $x^2 = -1$ unlösbar. Die Erfindung von $i^2 = -1$ (die imaginäre Zahl) hat sehr interessante Konsequenzen auch für die üblichen reellen Zahlen.

2.1 Definition

Definition 10. Sei $a, b \in \mathbb{R}$, dann $a + bi \in \mathbb{C}$.

$$(a + bi) + (\alpha + \beta i) = (a + \alpha) + (b + \beta)i(a + bi)(\alpha + \beta i) = (a\alpha - b\beta) + \underbrace{(a\beta + b\alpha)}_{A}$$

Definition 11. Seien A und B zwei Mengen. Dann ist $A \times B$ die Menge der Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Definition 12. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $+$ und $\cdot$, die wir so definieren:

$$(a, b) + (\alpha, \beta) = (a + \alpha, b + \beta)\ (a, b)(\alpha, \beta) = (a\alpha - b\beta, \underbrace{a\beta + b\alpha}_{A})$$

Bemerkung 4.

$$\mathbb{R} \simeq \{(a, 0), a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}(a, 0) + (\alpha, 0) = (a + \alpha, 0)\ (a, 0)(\alpha, 0) = (a\alpha, 0)$$

Bemerkung 5.

$$(0, a)(0, b) = (-ab, 0)$$

Deswegen falls $-1 \in \mathbb{R}$ ist $(-1, 0)$.

$$\underbrace{(0, 1)}_{\text{Wurzel von -1}}\quad (0, 1) = (-1, 0) \qquad \underbrace{(0, -1)}_{\text{auch eine Wurzel von -1}}\quad (0, -1) = (-1, 0)$$

Definition 13. $i = (0, 1)$ und wir schreiben (a, b) für $a + bi$.

Bemerkung 6. $0 = (0,0) = 0 + 0i$. $\xi \in \mathbb{C}$

$$0\xi = 0$$
$$0 + \xi = \xi$$

Satz 14. *Alle Körperaxiome (K1-K4) gelten.*

Beweis 14. *K1 Kommultativität*

K2 Assoziativität

K3 Distributivität

K4 Seien $\xi, \zeta \in \mathbb{C}$.

$$\exists \omega \in \mathbb{C} \xi + \omega = \zeta \tag{1}$$
$$\xi \neq 0 \exists \omega \xi \omega = \zeta \tag{2}$$

Beweis 15.

$$\xi = a + bi \zeta = c + di \omega = x + yi$$

$$\xi + \omega = (a + x) + (b + y)i = \xi = c + di$$

Sei $x := c - a$, $y := d - b$. *Dann* $\xi + \omega = \zeta$.

Beweis 16. *Mit derselben Methode.* $i\,[= 1 + 0i\,[= (1,0)]]$ *ist das neutrale Element.*

$$(a + bi)(1 + 0i) = \underbrace{(a1 - b0)}_{a} + \underbrace{(b1 + a0)}_{b} = (a + bi)$$

Sei $\xi \neq 0$ *und suchen wir* α *so dass* $\xi\alpha = 1$. *Dann ist* $\omega = \alpha\xi$ *eine Lösung von (2) (eigentlich DIE Lösung). Falls* $\xi = a + bi$

$$\alpha = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \xi\alpha = \overbrace{\left(\frac{aa}{a^2 + b^2} - \frac{b(-b)}{a^2 + b^2}\right)}\left(\frac{a(-b)}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2}\right) i = 1$$

Definition 14. Sei $\xi = (x + yi) \in \mathbb{C}$. Dann:

- x ist der reelle Teil von ξ ($\operatorname{Re} \xi = x$)
- y ist der imaginäre Teil von ξ ($\operatorname{Im} \xi = y$)
- $x + yi$ ist die konjugierte Zahl $\left(\overline{\xi} = (= x - yi)\right)$

Beweis 17.

$$\sqrt{\overline{\xi}\xi} = \sqrt{(\operatorname{Re} \xi)^2 + (\operatorname{Im} \xi)^2} =: |\xi|$$

Definition 15. $|\xi|$ ist der Betrag von ξ.

Satz 15. *Es gilt:* $(\forall a, b \in \mathbb{C})$*:*

- –
  $$\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$$
  –
  $$\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$$
- –
  $$\operatorname{Re} a = \frac{a + \overline{a}}{2}$$
  –
  $$(\operatorname{Im} a)i = \frac{a - \overline{a}}{2}$$
- $a = \overline{a}$ *genau dann wenn* $a \in \mathbb{R}$.

- $$a\overline{a} = |a|^2 = \sqrt{(\operatorname{Re} a)^2 + (\mathrm{j}a)^2} \geq 0$$

  (die Gleicheit gilt genau dann wenn $a = 0$)

Bemerkung 7. Sei ω so dass $\xi\omega = 1$ ($\xi \neq 0$). Man schreibt $\omega\frac{1}{\xi}$ und $\omega = \frac{\overline{\xi}}{|\xi|^2}$

Satz 16. $\forall a, b \in \mathbb{C}$

- $|a| > 0$ *für* $a \neq 0$ *(trivial)*
- $|\overline{a}| = |a|$ *(trivial)*
- $|\operatorname{Re} a| \leq |a|$, $|\operatorname{Im} a| \leq |a|$ *(trivial)*
- $|ab| = |a||b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$

Beweis 18.

$$|ab|^2 = (ab)\overline{(ab)} = ab\overline{a}\overline{b} = a\overline{a}\overline{b} = |a|^2|b|^2 \implies |ab| = |a||b|$$

$$\begin{aligned} \iff |a+b|^2 &\leq (|a| + |b|)^2 \\ \underbrace{(a+b)\overline{(a+b)}}_{|a+b|^2 \in \mathbb{R}} &= \\ (a+b)(\overline{a} + \overline{b}) = a\overline{a} + b\overline{b} + a\overline{b} + b\overline{a} &= \\ \underbrace{|a|^2 + |b|^2}_{\in \mathbb{R}} + \left(a\overline{b} + b\overline{a}\right) & \\ \iff \underbrace{a\overline{b} + b\overline{a}} &\leq 2|a||b| \end{aligned}$$

Nebenbemerkung:

$$b = (\alpha + \beta i)\overline{b} = (\alpha - \beta i)\overline{\overline{b}} = (\alpha - (-\beta)i) = \alpha + \beta i = b$$

$$a\overline{b} + \overline{a}\overline{(\overline{b})}a\overline{b} + \overline{(a\overline{b})} = 2\operatorname{Re}(a + \overline{b}) = \operatorname{Re}(2(a\overline{b})) \leq |2a\overline{b}| = 2|a||\overline{b}| = 2|a||b|$$

3 Funktionen

3.1 Definition

Definition 16. Seien A und B zwei Mengen. Eine Funktion $f : A \to B$ ist eine Vorschrift die jedem Element $a \in A$ ein eindeutiges Element $f(a) \in B$ zuordnet.

Beispiel 7. $A \subset \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$$f(x) = x^2$$

Definition 17. A ist der Definitionsbereich.

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

ist der Wertbereich

Bemerkung 8. Wertbereich von x^2

$$\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$$

Definition 18. Der Graph einer Funktion $f : A \to B$ ist

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\}$$

Beispiel 8. Verboten: zwei Werte für die Stelle x.

Beispiel 9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = |x|$

3.2 Algebraische Operationen

Wenn $B = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Seien f, g zwei Funktionen mit gleichem Definitionsbereich.

- $f + g$ ist die Funktion h so dass $h : A \to B$
$$h(x) = f(x) + g(x)$$
- Die Funktion fg $k : A \to B$
$$k(x) = f(x)g(x)$$
- $\frac{f}{g}$ falls der Wertebereich von g in $B \setminus \{0\}$ enthalten ist.
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Falls $B = \mathbb{C}$, kann man auch $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $\overline{f}$.

Definition 19. Sei $f : A \to B$, $f : B \to C$. Die Komposition $g \circ f : A \to C$.
$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Bemerkung 9. $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$
$$\Xi : A \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$\Xi(a) = (f(a), g(a))$$
$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\Phi(x, y) = xy$$
$$\Phi \circ \Xi(a) = \Phi(\Xi(a)) = \Phi\left((f(a)), g(a)\right) = f(a)g(a)$$

Also: die “algebraischen Operationen” sind “Kompositionen”.

Definition 20.
- Wenn $f : A \to B$ und $f(A) = B$ dann ist f surjektiv.
- Wenn $f : A \to B$ und die folgende Eigenschaft hat:
$$f(x) \neq f(y) \forall x \neq y \in A$$
dann ist f injektiv.
- Falls f surjektiv und injektiv ist, dann sagen wir, dass f bijektiv ist.

Bemerkung 10. Die bijektiven Funktionen sind umkehrbar. Sei $f : A \to B$ bijektiv. $\forall b \exists a : f(a) = b$ (surjektiv), a ist eindeutig (injektiv). $\exists! a : f(a) = b$. Dann $g(b) = a$ ist eine “wohldefinierte Funktion”, $g : B \to A$.

Definition 21. g wird Umkehrfunktion genannt. $f : A \to B$, $g : B \to A$, $f \circ g : B \to B$, $g \circ f : A \to A$, $f \circ g(b) = b$, $g \circ f(a) = a$

Definition 22. Die “dumme Funktion” $h : A \to A$ mit $h(a) = a \forall a \in A$ heisst Identitätsfunktion (Id $f \circ g = 1$).

3.3 Zoo

3.3.1 Exponentialfunktion

Wertebereich: $a \in \mathbb{R}, a > 0$
$$\operatorname{Exp}_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$
$$\operatorname{Exp}_a(n) = a^n (= 1 \text{ falls } n = 0$$
$$\operatorname{Exp}_a(-n) = \frac{1}{a^n}$$
$$\operatorname{Exp}_a\left(\frac{m}{n})\right) = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Exp_a ist die einzige Funktion $\Phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $\Phi(1) = a$
- $\Phi(q + r) = \Phi(q)\Phi(r)$ $\forall q, r \in \mathbb{Q}$

Bemerkung 11. Später werden wir Exp_a auf $\mathbb{R}$ fortsetzen.

3.3.2 Polynome

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}(\mathbb{R})$$

Produkt von Polynomen $x \mapsto f(x)g(x)$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) = (a_n x^n + \cdots + a_0)(b_m x^m + \cdots + b_0) = \\ b_m a_n x^{n+m} + b_n a_{n-1} x^{n-1+m} + \cdots = \\ b_m a_n x^{n+m} + (b_m a_{n-1} + b_{m-1} a_n) x^{n+m-1} + \cdots + a_0 b_0 = \\ c_{m+n} x^{m+n} + \cdots + c_0 \end{aligned}$$

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Definition 23. Der Grad von $a_n x^n + \cdots + a_0$ ist n wenn $a_n \neq 0$

Satz 17. *Sei $g \neq 0$ ein Polynom. Dann gibt es zu jedem Polynom f zwei Polynome q und r so dass*

$$g = qf + r$$
$$\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} f$$

Beweis 19. *http://de.wikipedia.org/wiki/Polynomdivision*

Bemerkung 12. Sei $g = x - x_0$. Sei f mit Grad ≥ 1, Satz 2 $\implies f = gq + r = gq + c_0$ und Grad von $r < 1$. r ist eine Konstante $r = c_0$.

$$f(x) = q(x)(x - x_0) + c_0$$
$$f(x_0) = q(x_0)0 + c_0$$

Korollar 1. *Falls f ein Polynom ist und $f(x_0) = 0$, dann $\exists q$ Polynom so dass $f = q(x - x_0)$*

Korollar 2. *Ein Polynom hat höchstens* grad f *Nullstellen falls $f \neq 0$.*

Korollar 3. *Falls $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, dann ist f das Trivialpolynom.*

Korollar 4. *Falls f, g Polynome sind und $f(x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ dann sind die Koeffizienten von f und g gleich.*

Beweis 20. *$f - g$ ist ein Polynom mit $(fg)(x) = 0\ \forall x$. Das ist ein Trivialpolynom.*

Definition 24. Seien f, g Polynome. Dann ist $\frac{f}{g}$ eine rationale Funktion.

4 Folgen

Definition 25. Eine Folge komplexer (reeller) Zahlen ist eine Abbildung: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$. Das heisst:

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}), a_n := f(n)$$

$\mathbb{N}$ ist auch eine Folge! $a_n = f(n) = n$.

Definition 26. Eine Folge (a_n) heisst konvergent, falls $\exists a \in \mathbb{C}$ so dass:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon\ \ \forall n \geq N$$

Beispiel 10. $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine konvergente Folge. Sei $a = 0$. Wählen wir $\varepsilon > 0$. Sei dann $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n \geq N$:

$$|a_n| = \left(\frac{1}{n} - 0\right) = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$$

Bemerkung 13. Die Zahl a im Konvergenzkriterium ist eindeutig. Sie heisst der Limes der Folge (a_n).

Beweis 21. *Seien $a \neq a'$ zwei relle Zahlen, die das Konvergenzkriterium erfüllen.* $\varepsilon := \frac{|a-a'|}{2}$

$$\exists N : |a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n \geq N$$

$$\exists N : |a_n - a'| < \varepsilon \;\; \forall n \geq N'$$

Für $n \geq \max\{N, N'\}$

$$|a' - a| \leq |a' - a_n| + |a - a_n| < 2\varepsilon = |a' - a|$$

$$|a' - a| < |a' - a|$$

$\implies$ *Widerspruch*

Bemerkung 14. $a = \lim_{n\to+\infty}(a_n)$

Bemerkung 15. $\exists M$ so dass $M > \frac{1}{\varepsilon}$, M hat N Ziffern: $10^{N+1} > M > \frac{1}{\varepsilon}$

Definition 27. Sei (a_n) eine Folge und $A(n)$ eine "Folge von Aussagen über a_n". Wir sagen dass $A(n)$ wahr für "fast alle" a_n ist, wenn $\exists N$ so dass $A(n)$ stimmt $\forall n \geq N$. Ein alternatives Konvergenzkriterium ist also:

$$|a_n - a| < \varepsilon \;\text{ für fast alle }\; a_n$$

Beispiel 11. Sei $s \in \mathbb{Q}$ $s > 0$. Sei $a_n = \frac{1}{n^s}$. Dann

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^s}\right) = 0$$

Sei $n > \varepsilon^{\frac{1}{s}}$.

$$|0 - a_n| = \frac{1}{n^s} < \varepsilon$$

falls $n \geq N$. $\frac{1}{s}$ ist wohldefiniert $(s \neq 0)$.

$$\frac{1}{n^s} < \varepsilon \iff n^s > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{s}}} \;\text{ falls }\; s > 0$$

Beispiel 12. $a > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$a > 1$ zu beweisen:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \;\; \forall n \geq N \in \mathbb{N}$$

Sei $x_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$

$$a = (1+x)^n = 1 + nx_1 + \binom{n}{2}x_2^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots + x^n$$

$$a \geq +nx_n \;\; x_n \leq \frac{a-1}{n} \;\text{ für }\; n \geq N$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \geq \frac{a-1}{\varepsilon}$

$$\implies \sqrt[n]{a} - 1 = x_n \leq \frac{a-1}{n} \leq \frac{a-1}{N} < \frac{a-1}{\frac{a-1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

$0 < a < 1$

$$\frac{1}{a} > 1 \;\; \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \;\text{ ist fast 1}$$

Beispiel 13. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$

$$x_n = \sqrt[n]{n} - 1$$

$$n = (1+x_n)^n = 1 + nx_n + \binom{n}{2} x_2^2 + \cdots + x_n^n$$

$a_n = \sqrt[n]{n}$

$$n \geq 1$$

$a_0 = \text{Pietro}$

$$n \geq 1 + nx_n$$

$$0 \leq x_n \leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$n \geq 1 + \binom{n}{2} x_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

$$x_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \implies x_n \leq \sqrt[2]{\frac{2}{n-1}}$$

Sei $\varepsilon > 0$, wähle N so dass

$$\sqrt{\frac{N-1}{2}} > \varepsilon^{-1} \iff N > \left(2\varepsilon^{-2} + 1\right)$$

$$0 \geq \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{2}{N-1}} < \sqrt{\frac{2}{\frac{2}{\varepsilon^2}}} = \varepsilon$$

$$\implies |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$$

Übung 2. $\sqrt[n]{n^2}$, $\sqrt[n]{n^k}$ für k konstant. Antwort $\lim = 1$

Beispiel 14. Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

$$|q^n - 0| = |q^n| - |0| \leq |q|^n \implies \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N : |q^n| < \varepsilon \;\; \forall n \geq N$$

4.1 Rechenregeln

Satz 18. *Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen, mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$, dann:*

- $a_n b_n \to ab$
- $a_n + b_n \to a + b$
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ *falls* $b \neq 0$

Beweis 22.

$$|(a_n + b_n) - (a - b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

$\varepsilon > 0$*:*

$$existsN : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \forall n \geq N$$

$$existsN' : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \forall n \geq N'$$

Definition 28. Eine Folge heisst beschränkt, falls

$$\exists M > 0 : |a_n| \leq M$$

Lemma 3. *Eine konvergente Reihe ist immer beschränkt.*

Beweis 23.

$$
\begin{aligned}
&= |a_n b_n - ab| \\
&= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\
&= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\
&\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\
&\leq M|b_n - b| + |b||a_n - a| \\
&< M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) + |b|\left(\frac{\varepsilon}{2|b|}\right)
\end{aligned}
$$

Beweis 24. *Folgt aus dem oberen* $+\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ *falls* $b \neq 0$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \\
&= |\frac{b - b_n}{b_n b}| \\
&\leq \frac{1}{|b|}\frac{|b - b_n|}{|b_n|} \\
&\leq \frac{2}{|b|^2}|b_n - b| \\
&< \cdots
\end{aligned}
$$

Sei $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ *dann*

$$\exists N : |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \ \ \forall n \geq N$$

$$|b_n| \geq |b| - |b - b_n| \geq \frac{|b|}{2} > 0$$

Satz 19. *Sei* $a_n \to a$ *(*$a_n \in \mathbb{C}$*), dann:*

- $|a_n| \to |a|$
- $\bar{a_n} \to \bar{a}$
- $\operatorname{Re} a_n \to \operatorname{Re} a$
- $\operatorname{Im} a_n \to \operatorname{Im} a$

Beweis 25.
- $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$
- $|\bar{a_n} - \bar{a}| = |a_n - a|$
- $|\operatorname{Im} a_n - \operatorname{Im} a| \leq |a_n - a|$
- $|\operatorname{Re} a_n - \operatorname{Re} a| \leq |a_n - a|$

Satz 20. *Seien* $a_n \to a$, $b_n \to b$ *mit* $a_n \leq b_n$. *Dann* $a \geq b$.

Korollar 5. *Seien* $a_n \to a$, $b_n \to a$. *Sei* a_n *mit* $a_n \geq c_n \geq b_n$. *Dann ist* c_n *eine konvergente Folge mit* $c_n \to a$

Satz 21. *Seien* $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$ *reelle Folgen. Falls* $a_n \leq b_n$, *dann* $a \leq b$.

Beweis 26. *Sei* $\varepsilon > 0$. *Dann:*

- $$\exists N : |a_n - a| < \varepsilon \ \ \forall n \geq N$$
- $$\exists N : |b_n - b| < \varepsilon \ \ \forall n \geq N'$$

Sei $n \geq \max\{N', N\}$.

$$b - a = b_n + (b - b_n) - a_n + (a_n - a) \geq (b - b_n) + (a_n - a)$$
$$\geq -|a_n - a| - |b_n - b| \geq -2\varepsilon$$
$$b - a \geq -2\varepsilon \overset{\forall \varepsilon > 0}{\Longrightarrow} b - a \geq 0$$

(wäre $b - a < 0$*: Sei*

$$Sei \varepsilon = \frac{|b-a|}{3} = \frac{-(b-a)}{3}$$

Widerspruch!)

Satz 22. *(Einschliessungsregel). Sei* c_n *eine Folge reeller Zahlen. Seien* $a_n \to a$ *und* $b_n \to a$ *so dass* $a_n \leq c_n \leq b_n$*. Dann* $c_n \to a$*.*

Beweis 27. *Sei* $\varepsilon > 0$*.*

- $$\exists N : |a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n \geq N$$
- $$\exists N : |b_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n \geq N'$$

Sei $n \geq \max\{N, N'\}$*.*

$$a\varepsilon \leq a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$$
$$\Longrightarrow |c_n - a| < \varepsilon$$

Beispiel 15.

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1 \;\; k \in \mathbb{N}$$
$$\sqrt[n]{n^s} \;\; s \in \mathbb{Q}, s > 0$$
$$\underbrace{1}_{a_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n^s}}_{c_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n^k}}_{b_n}$$

Einschliessungsregel: $\sqrt[n]{n^s} \to 1$.

4.2 Monotone Folgen

Definition 29. Eine Folge a_n reeller Zahlen heisst fallend (bzw. wachsend) falls $a_n \geq a_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ($a_n \geq a_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$). Monoton bedeuted fallend oder wachsend.

Satz 23. *Eine monotone (beschränkte) Folge konvergiert.*

Beweis 28. *oBdA kann ich* (a_n) *wachsend annehmen. (Sei* a_n *fallend, dann* $-a_n$ *wachsend.* a_n *konvergiert (mit Limes* $= L$*),* a_n *konvergiert mit Limes* $-L$*.* $a_n = (-1)(-a_n)$ $a_n \to \lim(-1)\lim(-a_n) = -1$*,* $L = -L$*). Sei*

$$s = \sup \underbrace{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}_{M}$$

Behauptung:

$$s = \lim_{n \to +\infty} a_n$$

$a_n \geq a$*. Zu beweisen:*

$$forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N : a_n > s - \varepsilon \;\; \forall n \geq N$$

Beweis:

$$forall\varepsilon > 0 \;\; \exists a_j \in M : a_j > s - \varepsilon$$

Die Folge wächst $\Longrightarrow$ $a_n \geq a_j > s - \varepsilon \; \forall n \geq j$*.*

Beispiel 16.

$$a_n = (-1)^n$$

4.3 Der Satz von Bolzano-Weierstrass

Definition 30. Sei (a_n) eine Folge. Eine Teilfolge von (a_n) ist eine neue Folge $b_n := a_{n_k}$, $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_k > n_{k-1}$

$$\underbrace{a_0}\quad a_1\quad \underbrace{a_2}\quad a_3\quad a_4\quad a_5\quad \underbrace{a_6}\quad s\cdots$$

Satz 24. *Jede berschränkte Folge (a_n) $(\subset \mathbb{R}, \mathbb{C})$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis 29. *Schritt 1: Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Sei I und $M \in \mathbb{R}$ so dass $I \leq a_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

$$\overbrace{[I, M]}^{J_0} = [I, A_0] \cup [A_0, M] \quad A_0 = \frac{M - I}{2} + I = \frac{M + I}{2}$$

mindestens ein Intervall enthält unendlich viele (a_n). Nennen wir dieses Intervall J_1. Intervallschachtelung:

- $J_{k+1} \subset J_k$
- l_k = *Länge von* J_k. $l_0 = M - I$, $l_k = (M - I)2^{-k}$, $l_k \downarrow 0$

$$\exists a \in J_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\exists n_0 : a_{n_0} \in J_0$$

J_1 *enthält unendlich viele* $a_n \implies \exists n_1 > n_0$ *mit* $a_{n_1} \in J$. *Rekursiv:* (a_{a_k}) *Teilfolge mit* $a_{n_k} \in J_k$

$$|a_{n_k} - a| \leq l_k = (M - I)2^{-k} \implies a_{n_k} - a \to 0$$

$$\overbrace{a_{n_k}}^{\to a + a = a} = \underbrace{a_{n_k}}_{\to 0} + \underbrace{a}_{\to a}$$

$$a_k = \xi_k + i\Xi_k$$

(ξ_k) *ist eine beschränkte Folge reeller Zahlen.* $\exists (\xi_{k_j})$ *Teilfolge die konvergiert.*

$$a_{k_j} = \xi_{k_j} + i\Xi_{k_j}$$

(Ξ_{k_j}) *ist eine beschränkte Folge reeller Zahlen und* (Ξ_{k_j}) *eine konvergente Teilfolge.*

$$a_{k_{j_l}} = \Xi_{k_{j_l}} + i\Xi_{k_{j_l}}$$

ist eine konvergente Teilfolge!

Definition 31. Falls (a_k) eine Folge ist und a der Limes einer Teilfolge, dann heisst a Häufungswert.

Lemma 4. *Sei (a_k) eine Folge. a Häufungswert $\iff$ $\forall$ Invervall mit $a \in I$ $\exists$ unendlich viele $a_k \in I$.*

Definition 32. Wenn die Menge der Häufungswerte von (a_n) (relle Folge) ein Supremum (bzw. ein Infimum) besitzen, heisst dieses Supremum "Limes Superior" (bzw. "Limes Inferior").

Lemma 5. *Der Limes Superior (bzw. Inferior) ist das Maximum (bzw. Minimum) der der Häufungswerte.*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n = \textit{Limes Superior}$$

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n = \textit{Limes Inferior}$$

4.4 Konvergenzkriterium von Cauchy

Satz 25. *Eine Folge komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn:*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : |a_n - a_m| < \varepsilon \;\; \forall n, m \geq N$$

Beweis 30. *Konvergenz* $\implies$ *Cauchy:* $a_n \to a$. *Sei* $\varepsilon > 0$

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall n, m \geq N$$

Dann

$$\exists N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall n \geq N$$

Bemerkung 16. Falls a ein Häufungswert ist, dann konvergiert die Ganze Folge $\to$ fertig! Weil: $a_{n_k} \to a$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K : k > K : |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N : \forall m, n \geq N \;\; |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Cauchy $\implies$ *Konvergenz Sei* $n \geq N$. *Sicher:* $\exists n_k > N \implies$

$$\begin{aligned} |a - a_n| &= |a - a_{n_k} + a_{n_k} - a_n| \\ &\leq |a - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Wähle $\varepsilon = 1$.

$$\exists \bar{N} : |a_n - a_m| < 1 \;\; \forall n, m \geq \bar{N}$$

$$|a_n| \leq |a_n - a_{\bar{N}}| + |a_{\bar{N}}| < |a_{\bar{N}}| + 1 \;\; \forall n \geq \bar{N}$$

Sei nun

$$M := \max\left(\left\{|a_k| : k < \bar{N}\right\} \cup \left\{|a_{\bar{N}} + 1|\right\}\right)$$

$$|a_n| \leq M \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \overset{B\text{-}W}{\implies} \exists \;\; \textit{ein Häufungswert}$$

Definition 33. Sei a_n eine Folge von reellen Zahlen. Dann sagen wir:

- $a_n \to +\infty$ (oder $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$) falls $\forall M \in \mathbb{R} \; \exists N \in \mathbb{R} : a_n \geq M$ $\forall n \geq N$ (oder $a_n \geq$ für fast alle $n \in \mathbb{R}$)
- $a_n \to -\infty$ ($\lim_{n\to-\infty} a_n = -\infty$) falls $\forall M \in \mathbb{R}$, $a_n \leq M$ für fast alle n.

Wenn die Folge a_n keine obere Schranke besitzt: $\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = +\infty$. Dasselbe gilt equivalent auch für untere Schranken.

Übung 3. $\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = +\infty \iff \exists$ Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\to} +\infty$

Bemerkung 17. Sei a_n eine wachsende (bzw. fallende) Folge. Dann:

- entweder konvergiert a_n
- oder $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (bzw. $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$)

5 Reihen

5.1 Konvergenz der Reihen

Definition 34. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wir setzen:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$s_k := \sum_{i=0}^{k} a_i$$

Definition 35. Die $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist die Folge der Partialsummen. Die Reihe ist die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ falls der Limes von s_k existiert, dann ist $\lim_{n\to+\infty} s_n$ ist der Wert der Reihe. Und wir sagen dass (s_k) eine konvergente Reihe ist.

Notation 1. Die Notation der Reihe ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ bezeichnet die Reihe und den Wert der Reihe.

Beispiel 17. Sei z eine komplexe Zahl. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ die geometrische Reihe.

- $|z| < 1$ dann konvergiert $\implies$ die geometrische Reihe.

Falls $z = 0$ ist der Wert der Reihe 1.

$$\begin{aligned} 0 \neq z, |z| &< 1 \\ (1-z)(1+z+\cdots z^n) &= 1 - z^{n+1} \\ s_n &= \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1-z^n}{1-z} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1-z}\right) - \frac{1}{1-z}\underbrace{\left(\lim_{n\to+\infty} z^n\right)}_{=0 \text{ weil } |z|<1} &= \frac{1}{1-z} \end{aligned}$$

Für $|z| > 1$ ist $s_n = \frac{(1-z)^{n+1}}{1-z}$ falls $\lim_{n\to+\infty} s_n$ existiert, dann konvergiert die Folge $z^{n+1} \implies$ die Folge $\underbrace{|z|^n + 1}_{\text{falsch weil } |z^n| \text{ divergiert}}$ konvergiert. Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$

$$a^n = (1 + (a-1))^n = 1 + n(a-1)$$

- $z = 1$ $s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1 \implies (s_n)$ konvergiert nicht!
- $s \neq 1$ s_n konvergiert nicht weil z^{n+1} nicht konvergiert!
- $|z| = 1 \implies$

  $$z = \cos\theta + i\sin\theta \implies z^{n+1} = \cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)$$

  (Übung 4, Blatt 3)

Bemerkung 18. Falls $z \in \mathbb{R}$, $z \geq 1$. Dann ist s_n eine Folge reeller Zahlen, $s_n \geq 0$, s_n ist monoton wachsend ($s_{n+1} = s_n + z^{n+1} \geq s_n$). $\implies$ in diesem Fall $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = +\infty$
$z \in \mathbb{R}$, $z = -1$

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{für gerade } n \\ 0 & \text{für ungerade } n \end{cases}$$

$\implies$ s_n ist beschränkt und s_n konvergiert nicht (Häufungspunkte $0, 1$.
$z \in \mathbb{R}$, $z < -1$.

$$s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1+z}$$

$\implies$ (s_n) ist nicht beschränkt

Bemerkung 19. Wenn die Partialsumme eine Folge reeller Zahlen ist und $s_n \to +\infty$ (bzw. $-\infty$), dann $\sum a_n = +\infty$ (bzw. $-\infty$).

Beispiel 18. Harmonische Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $s_{n+1} \geq s_n \implies$ entweder $\lim_{n\to+\infty} s_n$ existiert oder $\lim n \to +\infty = +\infty$

$$s_{2^n-1} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} + \underbrace{\cdots}_{2^{k-1} \leq j \leq 2^k-1} + \cdots + \underbrace{\cdots}_{2^{n-1} \leq j \leq 2^n-1}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}} + \cdots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{n-1}{2}\sigma_n = s_{2^n-1} \geq +1\frac{n-1}{2} \implies \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty$$

$\implies$ die ursprüngliche Folge (s_n) konvergiert nicht!

$$\implies \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty \implies +\infty \implies \sum \frac{1}{n} = +\infty$$

5.2 Konvergenzkriterien für reelle Reihen

Bemerkung 20. (gilt auch für komplexe Reihen!)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{konvergiert} \implies a_n \to 0$$

Übung 4. ganz schnell: die geometrische Reihe konvergiert nicht falls $|z| \geq 1$

Bemerkung 21. $a_{\to}0 \not\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert! Bsp: $a_n = \frac{1}{n}$

Satz 26. *Sei $\sum a_n$ eine Reihe mit reellen Zahlen $a_n \geq 0$. Dann:*

- *entweder ist die Folge (s_n) beschränkt (und die Reihe konvergiert deswegen)*
- *oder $\sum_{n=0}^{\infty} s_n = +\infty$*

Satz 27. *(Konvergenzkriterium Leibnitz). Sei (a_n) eine fallende Nullfolge. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ (eine alternierende Reihe).*

Beweis 31. *Betrachten wir*

$$s_k - s_{k-2} = (-1)^{k-1}a_{k-1} + (-1)^k a_k)(-1)^k \overbrace{(a_k - a_{k-1})}^{\leq 0}$$

- $s_k - s_{k-2} \geq 0$ *falls k ungerade ist*
- $s_k - s_{k-2} \leq 0$ *falls k gerade ist*

Für k ungerade:

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots$$

$$\underbrace{s_k}_{gerade} = \underbrace{s_{k+1}}_{ungerade} + \underbrace{(-1)^{k+1}}_{\geq 0} \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \leq s_{k+1} \leq s_n$$

Für k gerade:

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots$$

(Beweis gleich wie für ungerade)
$\implies$ *die Folge $s_0, s_2, s_4, \cdots$ ist monoton fallend und von unten beschränkt* $\implies$ $\lim_{k\to+\infty} 2k = S_g \in \mathbb{R}$

$$S_u - S_g = \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to+\infty} s_{2n} = \lim_{n\to+\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$$

$$\implies S_u = S_g \implies \lim_{n\to+\infty} s_n = S_u(= S_g)$$

Korollar 6.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

konvergiert

5.3 Konvergenzkriterien für allgemeine (komplexe) Reihen

Bemerkung 22. $\sum a_n$ konvergiert $\iff$ (s_n) konvergiert $\iff$ (s_n) ist eine Cauchyfolge. $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : |s_n - s_m| < \varepsilon\ \forall n \geq m \geq N$. $\varepsilon > |s_n - s_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n|$.

Korollar 7. *Majorantenkriterium: Sei $\sum a_n$ eine Reihe komplexer Zahlen und $\sum b_n$ eine konvergente Reihe nichtnegativer reeller Zahlen. Falls $|a_n| \leq b_n$ (d.h. $\sum b_n$ majorisiert $\sum a_n$, dann ist $\sum a_n$ konvergent.*

Beweis 32. *$\sum b_n$ konvergiert $\iff$ $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} b_n$ ist eine Cauchyfolge.*

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \underbrace{|\sigma_n - \sigma_m|}_{<} \varepsilon \forall n \geq m \geq N$$

$$b_n + \dots + b_{m+1} \geq |a_n| + \dots + |a_{m+1}| \geq |a_n + \dots + a_{m+1}| = |s_n - s_m|$$

Wobei $\sum s_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$.

$$\iff \forall \varepsilon > 0 |s_n - s_m| \leq |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon \forall n \geq m \geq N$$

$\iff$ *(s_n) ist eine Cauchyfolge* $\iff$ *$\sum a_n$ konvergiert*

5.4 Wurzel- und Quotientenkriterium

Definition 36. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heisst absolut konvergent, falls $\sum_{a=0}^{\infty} |a_n|$ eine konvergente Reihe ist.

Bemerkung 23. Majorantenkriterium $\iff$ die absolute Konvergent impliziert die Konvergent.

Satz 28. *(Quotientenkriterium) Sei $\sum a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für fast alle n und s.d. $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q$ existiert. Falls*

- *$q < 1$ konvergiert die Reihe absolut.*
- *$q > 1$ divergiert die Reihe.*
- *$q = 1$ unentschieden.*

Beweis 33.
- *$q > 1 \implies \exists N$ so dass $|a_{n+1}| \geq \tilde{q}|a_n|$ falls $n \geq N$. $1 < \tilde{q} = \frac{1}{2} + \frac{q}{2} < q$.*

$$|a_n| \geq \tilde{q}|a_{n-1}| \geq \tilde{q}^2 |a_{n-2}| \cdots > \tilde{q}^{n-N} |a_N|$$

  oBdA $|a_N| \neq 0$

$$\implies \lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty \implies \sum a_n \text{ divergiert}$$

- *$q < 1$ $1 < \tilde{q} = \frac{1}{2} + \frac{q}{2} < q$ $\exists N$ so dass $|a_n| \leq \tilde{q}^{n-N}|a_N|$ (das gleiche Argument wie vorher).*

$$b_n = \tilde{q}^{n-N}|a_N| = C\tilde{q}^n$$

$$b_n = |a_n|$$

  $\sum b_n$ majorisiert $\sum a_n$

$$\sum b_n \text{ konv} \overset{Maj.}{\implies} \sum |a_n| \text{ konvergiert}$$

Satz 29. *(Wurzelkriterium) Sei $\sum a_n$ eine Reihe und $L := \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ("$L = +\infty$" falls $|a_n|$ unbeschränkt ist!) Dann:*

- *$L < 1$ konvergiert die Reihe absolut*
- *$L > 1$ divergiert die Reihe*

- $L = 1$ *unentschieden*

Beweis 34.
- $L < 1$

$$L < \tilde{L} = \frac{L}{2} + \frac{1}{2} < 1 \implies \exists N : \sqrt[n]{|a_n|} \leq \tilde{L} \implies |a_n| \leq \tilde{L}^n$$

für $n \geq N$ haben wir wie oben die absolute Konvergenz.

- $L > 1$

$$\exists k_n : \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} \to L$$
$$1 < \tilde{L} = \frac{L}{2} + \frac{1}{2} < L$$
$$\exists N : k_n \geq N : \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} \geq \tilde{L}$$
$$\implies |a_{k_n}| \geq \tilde{L}^{k_n} \to +\infty \text{ für } n \to +\infty$$
$$\implies a_n \not\to 0 \implies \sum a_n \text{ divergiert}$$

Beispiel 19. Sei $s \geq 1$ $\sum \frac{1}{n^s}$

- $s = 1$ harmonische Reihe divergiert
- $s > 1$ konvergiert! $\sum \frac{1}{n^2}$ Bernoulli?? $= \frac{\pi^2}{6}$

$$\sum \frac{1}{n^{2k}} \sim \underbrace{c_k}_{\in \mathbb{Q}} \pi^{2k}$$

- $a_n = \frac{1}{n^s}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \forall s \geq 1$$
$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \forall s \geq 1$$

$s = 1 \implies$ Divergenz, $s > 1 \implies$ Konvergenz.

$$\implies \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots + \frac{1}{7^s} + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

$b_n \geq 0$

$$s_n = b_0 + \cdots + b_n$$

$\{s_n\}$ ist beschränkt. Wir setzen

$$s_{2k-1} = \frac{1}{1^s} + \frac{2}{2^s} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^{(k-1)s}} = \frac{1}{1^{s-1}} + \frac{1}{2^{s-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{(s-1)(k-1)}}$$

$$= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^1} + \cdots + \frac{1}{a^{k-1}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^s} < +\infty$$

$$\alpha := 2^{s-1} > 2^0 = 1$$

$$\overset{\text{Majo.}}{\implies} \sum \frac{1}{n^s} \text{ konvergiert}$$

5.5 Das Cauchyprodukt

Definition 37. $\sum a_n$ und $\sum b_n$. Das CP ist die Reihe $\sum c_n$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = \sum_{j+k=n} a_j b_k$$

Satz 30. *Falls $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergieren, dann konvergiert das CP absolut.*

$$\sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$$

Beweis 35.

$$s - k = \sum_{j=0}^{k} a_j, \sigma_k = \sum_{i=0}^{k} b_i$$

$$s_k \sigma_k = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} b_i a_j$$

$$c_n = \sum_{j+i=n} a_i b_j, \beta_k = \sum_{n=0}^{k} c_k$$

$$\sum_{n=0}^{k} \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i+j \leq n} a_i b_j$$

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0 \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ c_1 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \end{aligned}$$

$$\beta_k - \sigma_k s_k$$

Absolute Konvergenz:

- $\sum |c_k| < +\infty$
- $B_n = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$

(B_n) *ist eine beschränkte Folge*

$$B_n = \sum_{k=0}^{N} |sum_{i+j \geq k} a_i b_j| \leq \sum_{k=0}^{N} \sum_{i+j=k} |a_i||b_j|$$

$$= \sum_{i+j \leq N} |a_i||b_j| \leq \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} |a_i||b_j|$$

$$= \left(\sum_{i00}^{N} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{N} |b_j|\right) \leq \left(\sum |a_i|\right)\left(\sum |b_j|\right)$$
$$= LM$$

Wobei $L = \sum |a_i|$ und $M = \sum |b_j|$. $\implies$ (B_n) konvergiert $\implies$ $\sum c_n$ konvergiert absolut.

$$|\sum_{i=0}^{N} a_i \sum_{j=0}^{N} b_j - \sum_{k=0}^{N}|$$

$$= |\sum_{i=0,j=0}^{N} a_i b_j - \sum_{i+j \leq N} a_i b_j|$$

$$
\begin{aligned}
&= |\sum_{i+j>N, i\leq, j\leq N} a_i b_j| \leq \sum_{i+j>N, i\leq, j\leq N} |a_i||b_j| \\
&\leq \sum_{i\leq N, j\leq N, i\geq \frac{N}{2}, j\geq \frac{N}{2}} |a_i||b_j| = \sum_{i,j\leq N} |a_i||b_j| = \sum_{i,j<\frac{N}{2}} |a_i||b_j| \\
&= \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{N} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{N} |b_j|\right) - \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{1}{N} 2} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{1}{N} 2} |b_j|\right)}_{\Gamma_N}
\end{aligned}
$$

$$0 \leq |\sum_{i=0}^{N} a_i \sum_{j=0}^{N} b_j - \sum_{k=0}^{N} c_k| \leq \Gamma_N$$

$$\lim_{N\to+\infty} \Gamma_N = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| - \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \sum_{j=0}^{\infty} |b_j|$$

$$\implies \sum c_k = \sum a_i \sum b_j$$

5.6 Potenzreihen

Definition 38. Die Potenzreihen: $\sum a_n z^n,\ z \in \mathbb{C}$

Lemma 6. *Falls $a_n z_0^n$ eine konvergente Reihe ist, dann $\forall z$ mit $|z| < |z_0|$ konvergiert $\sum a_n z^n$ absolut.*

Beweis 36. *$a_n z_0^n$ ist eine Nullfolge.*

$$\implies \exists C : |a_n z_0^n| \leq C \forall n$$

$$|a_n z^n| \leq |a_n z_0^n| \underbrace{\frac{|z|^n}{|z_0|^n}}_{\alpha} \leq C\alpha^n$$

$$|z| < |z_0| \implies \alpha < 1$$

$\implies \sum C\alpha^n$ *eine konvergente Majorante.*

Satz 31. *Sei (a_n) eine Folge von Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$. Sei $K := \{z \in \mathbb{C} : \sum a_n z^n$ konvergiert$\}$ $K \ni z \to f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Wenn*

$$f(z) = \sum a_n z^n, g(z) = \sum b_n z^n$$

$$\implies f(z) + g(z) = \sum (a_n + b_n) z^n$$

$$\implies f(z)g(z) = \underbrace{\sum c_n z^n}_{\text{falls } z \text{ absolute Konvergenz garantiert}}$$

Beweis 37. *Sei $\sum \gamma_n$ das CP von $\sum a_n z^n$ und $b_n z^n$.*

$$
\begin{aligned}
\sum \gamma_n &= \sum a_n z^n \sum b_n z^n \\
&= \sum \sum_{i+j=n} \left(a_i z^i\right)\left(b_j z^j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} a_i b_j z^{i+j} \\
&= \sum n = 0 z^n \underbrace{\sum_{i+j=n} a_i b_j}_{=c_n}
\end{aligned}
$$

Satz 32. *(Cauchy-Hadamard) $\sum a_n z^n$. Sei $L := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann (Wurzelkriterium)*

- $|z| < \frac{1}{L} \implies \sum a_n z^n$ *konvergiert absolut*
- $|z| > \frac{1}{L} \implies \sum a_n z^n$ *divergiert*
- $|z| = 1$ *unentschieden*

6 Stetige Funktionen und Grenzwerte

6.1 Stetigkeit

In $D \subset \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{C}$.

Definition 39. Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Sei $x_0 \in D$. f heisst stetig in x_0 falls $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta, x \in D \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(Bedingung S). Gegenüber:

$$\forall \delta > 0 \exists x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\text{ mit } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Beispiel 20. Die Polynome sind stetige Funktionen.

Beispiel 21. (Später), Summe und Produkte stetiger Funktionen sind auch stetig.

Bemerkung 24.

- Die Bedingung (S) ist trivial für die Funktion $f = const$
- Die Bedingung (S) ist trivial für die Funktion $f(x) = x$

$$|x - x_0| < \delta = \varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$$

Definition 40. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ heisst Lipschitz(-stetig) falls $\exists L \geq 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in D$$

(L) $\implies$ (S): wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$

Korollar 8. $g(x) := |x|$ *ist stetig.*

$$|g(x) - g(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

d.h. (L) mit $L = 1$

Beispiel 22. (Später): $\frac{f}{g}$ ist stetig falls f,g stetig und $g(x) \neq 0$ $\forall x \in D$. $\implies$ Rationale Funktionen $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sind stetig auf $d = \mathbb{C} \setminus \{x : Q(x) = 0\}$

Beispiel 23. $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$ ist ein Polynom $\implies$ f ist stetig. Sei $g(x) := x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ($g(x)$ ist die einzige relle Zahl $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$ und $y^k = x$). $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

$$|\underbrace{\sqrt[k]{x}}_{y} - \underbrace{\sqrt[k]{x_0}}_{y_0}| \leq \sqrt[k]{absx - x_0}$$

$$\iff |y - y_0|^k \leq |y^k - y_0^k|$$

oBdA $y \geq y_0$

$$\underbrace{(y - y_0)^k}_{a} \leq \underbrace{y^k}_{c} - \underbrace{y_0^k}_{b}$$

$$\iff a^k + b^k \leq c^k = (a + b)^k$$

$$a^k + b^k \leq (a + b)^k = a^k + \overbrace{\binom{k}{1} a^{k-1} b + \cdots}^{\geq 0} + b^k$$

Deswegen: $\delta = \varepsilon^k$. $|x - x_0| < \delta$ $x > x_0$, $x < x_0 + \delta$

$$|\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0}| = \left(\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0}\right) < \left(\sqrt[k]{x_0 + \delta} + \sqrt[k]{x_0}\right)$$

$$= |\sqrt[k]{x_0 + \delta} - \sqrt[k]{x_0}| \leq \sqrt[k]{\delta} = \sqrt[k]{\varepsilon^k} = \varepsilon$$

Oder wähle $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^k$

$$|x - x_0| < \delta \implies |\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0}| \leq \sqrt[k]{|x - x_0|} \leq \sqrt[k]{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^k} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Beispiel 24. Sei $a > 0$ und $f(x) = a^x \ \forall x \in \mathbb{Q}$ $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ist stetig!

Satz 33. *Sei $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Sei $x_0 \in D$. Diese zwei Aussagen sind equivalent:*

- *f ist stetig an der Stelle x_0.*
- *$\forall (x_n) \subset D$ mit $x_n \to x_0$ haben wir $f(x_n) \to f(x_0)$*

Beweis 38. *Sei $\varepsilon > 0$. f stetig in $x_0 \implies \exists \delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ falls $|x - x_0| < \delta$. $x_n \to x_0 \implies \exists N$:*

$$|x_n - x_0| < \delta \forall n \geq N \implies |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Andere Richtung: Nehmen wir an dass f stetig falsch ist.

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x : |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

$foralln \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ich setze $\delta = \frac{1}{n} \implies \exists x_n$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon \implies x_n \to x_0$ und $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

Satz 34. *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ zwei stetige Funktionen. Dann:*

- *$f + g$, fg sind stetig*
- *$\frac{f}{g}$ ist stetig auf $D \setminus \{x : g(x) = 0\}$*

Beweis 39. *Sei $x_0 \in D$, $(x_n) \subset D$ $x_n \to x_0$ (für $\frac{f}{g}$ $g(x_n) \neq 0, q(x_0) \neq 0$ weil $(x_n), x_0 \subset D \setminus \{x : g/x(= 0\})$*

$$\begin{aligned} f(x_n) + g(x_n) \to & \qquad f(x_0) + g(x_0) \\ f(x_n)g(x_n) \to & \qquad f(x_0)g(x_0) \\ \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to & \qquad \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \end{aligned}$$

Satz 35. *$f : D \to A$, $g : A \to B$ stetig $\implies g \circ f : D \to B$ stetig.*

Beweis 40. $x_0, (x_n) \subset D$ *mit* $x_n \to x_0 \implies \underbrace{f(x_n)}_{y_n} \to f(x_0)_{y_0}$ $(y_n), y_0 \in A$

$\implies$

- $g(y_n) \to g(y_0)$
- $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$

$\implies g \circ f(x_n) \to g \circ f(x_0) \implies$ *Stetigkeit von $g \circ f$*

Satz 36. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ injektiv. Sei*

$$B := f([a, b]) (= \{z : \exists x \in [a, b] \ \text{ mit } f(x) = z\})$$

Bemerkung 25. $f : [a, b] \to B$ ist bijektiv und deswegen umkehrbar.

Sei $f^{-1} : B \to [a, b]$ die Umkehrfunktion. Dann ist $f^{-1}B \to [a, b]$ stetig, falls f stetig ist.

Beweis 41. *Sei $x_0 \in B$, (x_n) mit $(x_n) \subset B$ und $x_n \to x_0$. Die Folge*

$$\underbrace{f^{-1}(x_n)}_{=y_n} \overset{?}{\to} \underbrace{f^{-1}(x_0)}_{=y_0}$$

$(y_n) \subset [a, b]$, $y_0 \in [a, b]$. Falls $y_n \not\to y_0$, dann:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \exists \underbrace{n}_{n_k} \geq \underbrace{N}_{k} : |y_n - y_0| \geq \varepsilon$$

$$n_k \geq n_{k-1} \implies \textit{Teilfolge } (y_{n_k}) : |y_{n_k} - y_0| \geq \varepsilon \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\textit{Bolzano-Weiterstrass} \implies \exists y_{n_k} \to \bar{y} \implies \bar{y} \neq y_0$$

$$f(y_{n_{k_j}}) = x_{n_{k_j}}$$

Stetigkeit von f*:*$f(y_{n_{k_j}}) \to f(\bar{y})$ *Und da* $x_{n_{k_j}} \to x_0$ *sowie* $x_{n_{k_j}} = f(y_{n_{k_j}}$, *heisst dass das* $f(\bar{y}) = x_0$, *aber* $f(y_0) = x_0 \implies f(\bar{y}) = f(y_0)$, *mit* $\bar{y} \neq y_0$. *Widerspruch mit der Injektivität von* f. *Deswegen* $f^{-1}(x_n) = y_n \to y_0 = f^{-1}(x_0)$ $\implies f^{-1}$ *ist stetig.*

Bemerkung 26. Aus diesem Satz schliessen Sie die Stetigkeit von $x \mapsto x^{\frac{1}{k}}$ von der Stetigkeit $x \mapsto x^k$.

Definition 41. Wenn eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}(D)$ stetig ist für $x \in D$, dann ist f stetig auf D.

Bemerkung 27. Für Satz 1 genügt die Stetigkeit der beiden Funktionen ander der Stelle x_0. Für Satz 2 ähnlich. Für Satz 3 ist die Stetigkeit auf dem ganzen D wichtig.

6.2 Zwischenwertsatz

Satz 37. *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig, mit* $f(b) \geq f(a)$ *(bzw.* $f(b) \leq f(a)$*). Dann* $\forall y \in [f(a), f(b)]$ *(bzw.* $\forall y \in [f(b), f(a)]$*) existsx* $\in [a, b]$ *mit* $f(x) = y$.

6.3 Zwischenwertsatz

Satz 38. *Eine stetige Abbildung* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *nimmt jeden Wert* γ *zwischen* $f(a)$ *und* $f(b)$ *an.*

Beweis 42. *oBdA* $f(a) \leq f(b)$ *und* $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$

$$I_0 = [a, b] = [a_0, b_0]$$

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \gamma \implies I_1 = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] = [a_1, b_1]$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \gamma \implies I_1 = \left[\frac{a+b}{2}, b\right] = [a_1, b_1]$$

Rekursiv $I_k = [a_k, b_k]$ *mit* $f(a_k) \leq \gamma \leq f(b_k)$, $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$

$$I_{k+1} = \begin{cases} \left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right] & f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) \geq \gamma \\ \left[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k\right] & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$|I_k| = 2^{-k}(b-a) \overset{k\to+\infty}{\to} 0$$

Intervallschachtelung $\implies \exists! x_0$ *mit* $x_0 \in I_k \ \forall k$.

$$b_k \downarrow x_0 \implies f(x_0) = \lim_{k\to+\infty} f(b_k) \geq \gamma$$

$$b_k \downarrow x_0 \implies f(x_0) = \lim_{k\to+\infty} f(a_k) \geq \gamma$$

$$\implies f(x_0) = \gamma$$

Korollar 9. *Fixpunktsatz: Sei* $f : [a, b] \to [a, b]$ *eine stetige Abbildung. Dann besitzt* f *einen Fixpunkt, d.h.*

$$\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = x_0$$

Beweis 43. $g(x) := f(x) - x$

$$g(a) = f(a) - a \geq 0$$

$$g(b) = f(b) - b \geq 0$$

Mithilfe des oberen Satzes $\implies \exists x_0$ *mit*

$$g(x_0) = 0 \iff f(x_0) - x_0 = 0 \iff f(x_0) = x_0$$

6.4 Maxima und Minima

Satz 39. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann $\exists x_M, x_m \in [a, b]$ mit*

$$f(x_m) \geq f(x) \geq f(x_M) \ \ \forall x \in [a, b]$$

Beweis 44. *oBdA suche ich die Maximumstelle*

$$S = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

$$(= +\infty \ \textit{falls} \ \ \{f(x) : x \in [a, b]\} \ \ \textit{keine obere Schranke}$$

$S \in \mathbb{R}$, *sei* $S_n = S - \frac{1}{n} \implies \exists x_n$ *mit* $f(x_n) \geq S - \frac{1}{n}$

$$(x_n) \subset [a, b] \implies \exists\, (x_{n_k}) \ \ \textit{mit} \ \ x_{n_k} \to \bar{x}$$

$$\overset{S\in\mathbb{R}}{\implies} f(\bar{x}) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = S \overset{!}{=} \max_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{[a,b]} f$$

$$\overset{S=+\infty}{\implies} f(\bar{x}) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = +\infty \implies \textit{Widerspruch}$$

Bemerkung 28. Sei $E \subset \mathbb{R}$ eine Menge mit der Eigenschaft $\forall (x_n) \subset E$ $\exists$eine Teilfolge (x_{n_k}) $x \in E$ mit

$$x_{n_k} \to x$$

Ist E immer ein abgeschlossenes Intervall? Nein

$$E := [0, 1] \cup [2, 3]$$

Sei $(x_n) \subset [0, 1] \cup [2, 3]$. Dann $\exists\, (x_{n_k})$ die entweder in $[0, 1]$ oder in $[2, 3]$ enthalten ist $\implies \exists$ eine konvergente Teilfolge.

Definition 42. Die Mengen $E(\subset \mathbb{R}, \subset \mathbb{C})$ mit der Eigenschaft in der Bemerkung oben heissen kompakte Mengen.

Satz 40. *Eine reellwertige stetige Funktion auf einem kompakten Definitionbereich besitzt mindestens eine Maximumstelle (und eine Minimumstelle).*

Definition 43. Stetigkeit an einer Stelle x:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \text{mit} \ \ \underbrace{|x - y| < \delta \ \ \text{und} \ \ y \in D} \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Stetigkeit auf D bedeutet Stetigkeit an jeder Stelle $x \in D$.

Definition 44. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ heisst gleichmässig stetig falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \text{mit} \ \ |x - y| < \delta \ \ \text{mit} \ \ x, y \in D \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Beispiel 25. f Lipschitz

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \ \ \forall x, y \in D$$

Dann ist f gleichmässig stetig $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$

$$|x - y| < \frac{\varepsilon}{L} \implies |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta = L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

Satz 41. *Falls D eine kompakte Menge ist, ist jede stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ gleichmässig stetig!*

Beweis 45. *(Widerspruchsbeweis) f stetig aber nicht gleichmässig. Dann $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta$ die ich wählen kann*

$$\exists x, y \in D \ \ \textit{mit} \ \ |x - y| < \delta \ \ \textit{und} \ \ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

$$\delta = \frac{1}{n} > 0 \implies \exists x_n, y_n \ \ \textit{mit} \ \ |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \ \ \textit{und} \ \ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

$$\textit{Kompaktheit} \implies \exists x_{n_k} \ \ \textit{Teilfolge mit} \ \ x_{n_k} \to x \in D$$

$$\implies y_{n_k} \to x \in D$$

$$\implies \overset{f(x_{n_k})\to f(x)}{f(y_{n_k})} \to f(x) \implies |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$$

6.5 Stetige Fortsetzung, Grenzwerte

Definition 45. Sei $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ stetig. Sei $E > D$. Eine stetige Fortsetzung von f ist eine $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ stetig mit $f(x) = \tilde{f}(x) \;\; \forall x \in D$

Definition 46. $g : E \to A$, $D \subset E$,

$$g\|_D \to A \;\text{ mit }\; g\|_D(x) = g(x) \;\; \forall x \in D$$

Bemerkung 29. Sei $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ stetig. Sei $x_0 \notin D$. Die Fragen:

- gibt es eine stetige Fortsetzung von f auf $D \cup \{x_0\}$
- ist diese Fortsetzung eindeutig?

Definition 47. x_0 ist ein Häufungspunkt von einer Menge E wenn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ unendlich viele Punkte $x \in E$ mit

$$|x - x_0| < \varepsilon$$

Bemerkung 30. x_0 ist ein Häufungspunkt von $E \iff \exists (x_n) \subset \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$

Bemerkung 31. In Bem 10, 1. Frage: Falls x_0 kein Häufungspunkt von D ist: $\exists$ stetige Fortsetzungen, $\exists$ unendlich viele!

Bemerkung 32. Wenn x_0 ein Häufungspunkt von D ist, die Antwort zur 2. Frage ist ja. Die Antwort zur 1. ist undefiniert.

Definition 48. x_0 Häufungspunkt von D, $x_0 \notin D$, falls $\exists$ stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ von f auf $D \cup \{x_0\}$ existiert. Dann $\tilde{f}(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

6.6 Grenzwerte

Definition 49. Sei $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $D \subset \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Der Grenzwert von f (falls er existiert) an der Stelle x_0 ist die einzige Zahl $a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ so dass

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \setminus \{x_0\} \\ a & x = x_0 \end{cases}$$

stetig in x_0 ist. ($f(x_0) \neq a$) falls $x_0 \in D$

Bemerkung 33. $f(x_0) = a$ und $x_0 \in D \implies f$ ist stetig an der Stelle x_0

Satz 42. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$
- $\forall \{x_n\} \subset D \setminus \{x_0\}$ *mit* $x_n \to x_0$ *gilt* $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = 0$
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ *so dass* $|x - x_0| < \delta$ *und* $x \in D \setminus \{x_0\} \implies |f(x) - a| < 0$

Satz 43. *(Rechenregeln)* $f, g : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, x_0 *Häufungspunkt von* D

$$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) + \left(\lim_{x \to x_0} g(x_0) \right)$$

falls die Grenzwerte existieren!

$$\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) \left(\lim_{x \to x_0} g(x_0) \right)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) \;\; \textit{falls} \;\; \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$$

Satz 44. *Seien* $f : D \to E$, $g : E \to \mathbb{R}\mathbb{C}$ *mit*

- x_0 *Häufungspunkt von* D *und* $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$

- *$y_0 \in E$ und g ist stetig and der Stelle y_0*

Dann:

$$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = g(y_0) = g(\lim_{x \to x_0} f(x))$$

Beweis 46. *Wenden Sie die entsprechenden Rechenregeln für Folgen $x_{\to} x_0$ $(\{x_n\} \subset D \setminus \{x_0\})$*

Beispiel 26. Teil 1 von Satz 3. A $\implies$ B: für $f, g \implies \forall \{x_n\} \subset D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) \wedge \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{x\to x_0} g(x_0)$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} (f+g) = \overbrace{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}^{\lim_{x\to x_0} f(x)} + \overbrace{\lim_{n\to\infty} g(x_n)}^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

$$\overset{\text{Satz 2}}{\implies} \lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Definition 50. Falls $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D ist, dann:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty(-\infty)$ falls $\forall \{x_n\} \subset D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$ (bzw. $-\infty$)

Ähnlich $f : D \to \mathbb{C}$ und:

- D ist nicht nach oben beschränkt. Wir schreiben $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ genau dann, wenn $\forall \{x_n\} \subset D$ mit $x_n \to \infty$ gilt $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = a$

gleich wenn D nicht nach unten beschränkt ist. $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$$

Definition 51. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Falls x_0 ein Häufungspunkt von $]-\infty, x_0[\cap D$ ist, dann $\lim x \uparrow x_0 f(x) = a$ falls $\forall \{x_n\} \subset D\cap]-\infty, x_0[$ mit $x_n \in D$ $x_n < x_n$ $\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x)\right)$ gilt $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = a$. Falls x_0 ein Häufingspunkt von $D \cap]x_0 + \infty[$ ist

$$\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = a \wedge (\lim_{\to x_0^+} f(x))$$

falls $\forall \{x_n\} \subset D\cap]x_0, +\infty[$ mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to a$. Ähnlich $\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$.

Beispiel 27. Stetigkeit:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ wenn die Funktion f in x_0 nicht stetig ist
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ wenn die Funktion f in x_0 eine Asymptote hat.

7 Exponentialfunktion

$a \in \mathbb{R}a > 0$ $a^a = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{m}$, $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

7.1 Existenz und Eindeutigkeit

Satz 45. $\exists!\,\mathrm{Exp}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

- *Additionstheorem* $\mathrm{Exp}(z+w)=\mathrm{Exp}(z)\,\mathrm{Exp}(w)$
- $\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{Exp}(z)-1}{z}=1$

Für Exp *wissen wir:*

- $\mathrm{Exp}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\ \forall z\in\mathbb{C}$
- $\mathrm{Exp}(z)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\ \forall z\in\mathbb{C}$
- Exp *ist stetig und falls* $e=\mathrm{Exp}(1)$ *dann* $e^q=\mathrm{Exp}(1)\ forall q\in\mathbb{R}$

Bemerkung 34.

$$e=\sum\frac{1}{n!}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Bemerkung 35. Kernidee:

$$\mathrm{Exp}(z)=f(z)$$

$$f(z)=f(\frac{nz}{n})=f(\frac{z}{n}+\frac{z}{n}+\cdots+\frac{z}{n})\overset{\mathrm{Add}}{=}f(z)^n$$

$$f\left(\frac{z}{n}\right)=1+\frac{z_n}{n}=\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n$$

$$z_n=n\left(f\left(\frac{z}{n}\right)-1\right)=\left(\frac{f\left(\frac{z}{n}\right)-1}{\frac{z}{n}}\right)z$$

$n\to+\infty$ $\frac{z}{n}\to 0$

$$\lim_{n\to+\infty}z_n=z\lim_{n}\to n\to+\infty\frac{f\left(\frac{z}{n}\right)-1}{\frac{z}{n}}=z$$

$$f(z)=\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\implies f(z)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\{overbrace z_n{}^z}{n}\right)^n\overset{?}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

Bemerkung 36. Zusammenfassung: Falls f die Bedingungen Additionstheorem und Wachstum erfüllt, dann:

$$f(z)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

wobei $\lim_{n\to+\infty}z_n=z$

Lemma 7. *Fundamentallemma:* $\forall\{z_n\}\subset\mathbb{C}$ *mit* $z_n\to z$ *gilt:*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\sum\frac{z^n}{n!}$$

Bemerkung 37. (1)+(2) liefern Eindeutigkeit und zwei Darstellungen: Die Darstellungen definieren eine stetige Funktion mit den ganzen Eigenschaften des Theorems.

Bemerkung 38. $\sum\frac{z^n}{n!}$ konvergiert auf $\mathbb{C}$ (und konvergiert deswegen absolut)

Beweis 47. *Das Kriterium von Hadamand:*

$$R:=\frac{1}{\limsup_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{n!}}}=+\infty$$

Das bedeutet:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=0$$

$$\begin{cases} n \; gerade & n! \geq \underbrace{n(n-1)\cdots}_{\frac{n}{2}} \\ n \; ungerade & n! \geq \underbrace{n(n-1)\cdots}_{\frac{n-1}{2}} \end{cases}$$

$$n! \geq \frac{n}{2}^{\frac{n}{2}}$$

n gerade: n ungerade

Beweis 48. *Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *konvergiert absolut* $\forall z \in \mathbb{C}$

Behauptung 1.

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty}(sup)|\left(1-\frac{z_n}{n}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}|}_{A_n} = 0$$

Bemerkung 39.

$$\left(1-\frac{z_n}{n}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = |\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}|$$

Sei $M \in \mathbb{N}$ und $M \leq n$

$$\leq \underbrace{|\sum_{k=0}^{M}\left(\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k} - \frac{z^k}{k!}\right)|}_{B_n} + \underbrace{\sum_{k\geq M+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{|z_n|^k}{n^k}}_{C_n} + \underbrace{\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}}_{D}$$

$$\underbrace{\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k}}_{z_n^k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{z_n^k}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{\underbrace{nn\cdots n}_{k \text{ mal}}}\frac{z_n^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k = \lim_{n\to+\infty} 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{z_n^k}{k!} = \frac{z^k}{k!} \tag{3}$$

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n \leq \underbrace{\limsup_{n\to+\infty} B_n}_{=0, aus 3} + \limsup_{n\to+\infty} C_n + D$$

Abschätzung für C_n:

$$C_n = \sum_{k=M+1}^{n}\frac{|z_n|^k}{k!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$|z_n|$ konvergiert nach $|z| \implies \exists R \geq 0$ mit $|z_n| \leq R$

$$\leq \sum_{k=M+1}^{n}\frac{|z_n|^k}{k!} \leq \sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{R^k}{k!}$$

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n \leq \sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{R^k}{k!} + \sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!} \tag{4}$$

$$\limsup_{n\to+\infty}\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{R^k}{k!} = 0 \tag{5}$$

$$(\text{weil} \quad \limsup_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{M}\frac{R^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{R^k}{k!} \implies \lim_{M\to+\infty}\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{R^k}{k!}$$

$$\lim_{M\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R^k}{k!} - \sum_{k=0}^{M}\frac{R^k}{k!}\right) = 0)$$

$$45 \implies \limsup_{n\to+\infty} A_n = 0$$

Bemerkung 40. Lemma + Bemerkung $\implies$ Falls eine Funktion mit der Eigenschaft (AT) und (WT) existiert, dann gilt:

$$\operatorname{Exp}(z) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

Beweis 49. *(Eindeutigkeit haben wir schon ↑.) Wir definieren*

$$\operatorname{Exp}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k=0}\left(=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)$$

(AT) gilt:

$$\operatorname{Exp}(z)\operatorname{Exp}(w) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{w}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{w}{n}\right)\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z+w}{n}+\frac{zw}{n^2}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\overbrace{\left(z+w+\frac{zw}{n}\right)}^{\alpha_n}}{n}\right) \overset{\mathit{Fundamentallemma}}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z+w}{n}\right)^n$$

$$= \operatorname{Exp}(z+w) \quad da\alpha \to (z+w)$$

Sei

$$e = \operatorname{Exp}(1)\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\right)$$

$$\operatorname{Exp}(q+s) = \operatorname{Exp}(q)\operatorname{Exp}(s) \quad \forall q,s\in\mathbb{Q}$$

(Zur Erinnerung: Falls $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ erfüllt $f(1)=a>0$ und $f(q+s)=f(q)(s)$. Dann $f(q)=a^q\ \forall q\in\mathbb{Q}$.) Setze

$$f:\operatorname{Exp} \implies \operatorname{Exp} q = e^q \quad \forall q\in\mathbb{Q}$$

(Später: $\operatorname{Exp}(z)=e^z$*)*

Lemma 8. *Sei $\sum a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R>$ ($R=+\infty$ falls die Reihe überall konvergiert). Dann ist $f(z)=\sum a_n z^n$ eine stetige Funktion auf $\{|z|<R\}$ ($\mathbb{C}$ falls $R=+\infty$).*

Bemerkung 41. Lemma $\implies$ Stetigkeit von Exp. Ausserdem:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Exp} z - 1}{z} = 1$$

$$\frac{\operatorname{Exp}(z)-1}{z} = \frac{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}-1}{z} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{k!} = G(z)$$

Die Reihe, die G definiert hatKonvergenzradius $+\infty$. Deswegen ist G stetig.

$$\implies \lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Exp}(z)-1}{z} = \lim_{z\to 0} G(z) - G(0) = 1$$

Beweis 50. *Zu beweisen: Sei z_0 mit $|z_0|<R$*

$$\mathit{Stetigkeit\ in}\ x_0 \iff \lim z\to z_0 f(z) = f(z_0)$$

$$\lim_{z\to z_0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum^{+}\infty_{n=0} a_n z_0^n$$

Finden sie $a_{k,n} \in \mathbb{R}\ \forall k \lim\limits_{n\to+\infty} a_{k,n} = a_n (k,n \in \mathbb{N})$ *aber* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{k,n} \neq \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Sei $z_k \to z_0$.

$$\limsup_{k\to+\infty} \overbrace{|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_k^n - \sum_{n=0}^{\infty} z_0^n|}^{A_k}$$

$$\leq \limsup_{k\to+\infty} |\sum_{n=0}^{M} a_n z_k^n - \sum_{n=0}^{M} a_n z_0^n| + \limsup_{k\to+\infty} \sum_{n=M}^{\infty} |a_n||z_k^n| + \sum_{n=M}^{\infty} |a_n||z_0|^n$$

Sei ρ *mit* $|z_0| < \rho < R$. *Da* $z_k \to z_0$: $|z_k| < \rho$, *falls* k *gross genug ist.*

$$\limsup_{k\to+\infty} A_k \leq 0 + 2 \sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n|\rho^n$$

$$\implies \limsup_{k\to+\infty} A_k \leq 2 \limsup_{M\to+\infty} \underbrace{\sum \infty_{n=M+1} |a_n|\rho^n}_{konvergiert} = 0$$

$$\implies \lim_{k\to+\infty} (z_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_k^n a_n\right) = f(z_0) \left(= \sum_{n=0}^{\infty} z_0^n a_n\right) \implies \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Bemerkung 42.

$$|\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n - \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n|$$

$$= |\lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \xi_n - \zeta_n\right)|$$

$$\leq \lim_{N\to+\infty} \left\{ |\sum_{n=0}^{M} (\xi_n - \zeta_n)| + |\sum_{n=M+1}^{N} (\xi_n - \zeta_n)| \right\}$$

$$= |\sum_{n=0}^{M} (\xi_n - \zeta_n)| + \lim_{N\to+\infty} |\sum_{n=M+1}^{\infty} (\xi_n - \zeta_n)|$$

$$\leq |\sum_{n=0}^{M} (\xi_n - \zeta_n)| + \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=M+1}^{\infty} (|\xi_n| - |\zeta_n|)$$

$$= |\sum_{n=0}^{M} (\xi_n - \zeta_n)| + \sum_{n=M+1}^{\infty} |\xi_n| - \sum_{n=M+1}^{\infty} |\zeta_n|$$