
Travail pratique | **Classification des états d'une chaîne de Markov**

Chaîne de Markov à temps discret

On considère un système dynamique à temps discret dont l'ensemble, fini, des états possibles est noté $S = \{0, \ldots, n-1\}$ alors que son état à l'étape k est noté X_k, $k \geq 0$.

La suite $(X_k, k \geq 0)$ définit une chaîne de Markov à temps discret, homogène dans le temps, si l'évolution future du système dépend uniquement de son état actuel. Pour chaque couple (i, j) d'états d'un tel processus on peut alors définir une **probabilité de transition (en une étape)** $\boldsymbol{p_{ij}}$ égale à la probabilité que le système se retrouve dans l'état j à l'étape qui vient sachant qu'il est actuellement dans l'état i :

$$p_{ij} = \mathrm{P}\left(X_{k+1} = j \mid X_k = i\right), \quad (i, j) \in S^2, k \geq 0.$$

Le **graphe de transition** de la chaîne est le graphe orienté dont les sommets correspondent aux états du système et où un arc (i, j) de poids $p_{ij} > 0$ relie le sommet i au sommet j pour chaque transition de probabilité non nulle.

Classification des états

Chaque état d'une chaîne de Markov (à temps discret et homogène) est soit **persistant** soit **transitoire**. Un état est persistant (on dit aussi récurrent) si la probabilité d'y revenir est égale à 1, dans le cas contraire l'état est transitoire et l'espérance du nombre d'étapes passées dans cet état est finie.

Le caractère persistant ou transitoire d'un état est une propriété de classe : les états d'une composante fortement connexe du graphe de transition sont soit tous persistants soit tous transitoires. Ainsi, pour classifier les états d'une chaîne de Markov,

- on commence par déterminer les composantes fortement connexes de son graphe représentatif et le graphe réduit associé ;
- les sommets sans successeurs du graphe réduit correspondent à des classes (composantes fortement connexes) persistantes et tous les sommets de ces classes sont persistants ;
- les autres sommets du graphe réduit correspondent à des classes transitoires et tous les sommets de ces classes sont transitoires.

Travail à effectuer

En partant des sources fournies, vous devez programmer l'algorithme de Tarjan pour la recherche des composantes fortement connexes d'un graphe ainsi que la construction du graphe réduit correspondant.

Vous analyserez ensuite les chaînes de Markov proposées et afficherez leur classification. Plus précisément, vous afficherez, pour chaque classe (composante fortement connexe), son statut (persistante ou transitoire), l'ensemble des sommets (états) la formant et, pour les classes transitoires, la liste de ses successeurs dans le graphe réduit.

Format des données

Chaque chaîne est donnée par son graphe de transition qui est stocké dans un fichier texte dont la première ligne contient deux entiers positifs. Le premier correspond au nombre n de sommets du graphe, ces derniers étant numérotés de 0 à $n-1$. Le deuxième correspond au nombre m d'arcs du graphe. Les m lignes suivantes définissent chacune un arc et contiennent deux entiers suivis d'un réel, le premier entier correspondant au numéro de l'extrémité initiale de l'arc et le second au numéro de son extrémité finale. Le réel correspond à la probabilité de transition associée à l'arc. Comme elle n'influence pas la classification de la chaîne, cette valeur n'est ni vérifiée ni stockée par les sources fournies.

Modalités et délais

- ▷ Le travail de programmation est à effectuer par groupe de deux, en Java, version 17.
- ▷ Les sources des deux classes `DirectedGraph` et `DirectedGraphReader` sont disponibles sur le site Cyberlearn du cours.
- ▷ Vous y trouverez également une archive `data.zip` contenant les graphes de transition des chaînes à étudier.
- ▷ Vous devez rendre une archive (au format `zip`) contenant toutes les sources, soigneusement documentées, de votre projet complété.
- ▷ Vous devez rendre votre travail sur Cyberlearn au plus tard le **dimanche 7 avril 2024** (avant minuit).