PROBLEMAS # 1

Mecánica clásica

Participantes: Sharith Dayanna Pinzón Quintero - 2210709.
Karen Tatiana Valero Mancilla - 2200418.

Primavera®

Scanned with CamScanner

1. Fosas para competencias de clavado.

a) Para realizar el balance de energía, se considerarán dos momentos importantes: el primero, justo antes de que el atleta entre en contacto con el agua, y el segundo, cuando la densidad del atleta se iguala a la densidad del agua. La referencia para este análisis se establece en la superficie del agua.

En el primer momento, se tiene energía potencial asociada a la altura sobre la piscina (h') y energía cinética correspondiente al movimiento de caída.

$$U + K = m_0 g h' + \frac{1}{2} m_0 v^2, \quad v = \sqrt{2hg} \qquad (1)$$

$$= m_0 g h' + m_0 g h. \qquad (2)$$

Aquí h se refiere a la altura de la caída y m_0 a la masa del atleta.

Ahora, el segundo instante se tomó de esta forma debido al principio de Arquímedes, cuando la densidad del objeto es igual a la densidad del agua, el objeto no se hunde ni flota, se suspende en el agua. Como consecuencia de esto, se tiene que la energía potencial es proporcional a la fuerza de empuje (U), como se presenta en la siguiente ecuación, donde m_a es la masa del agua desplazada.

$$-U = -m_a g h'. \qquad (3)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2), se tiene que:

$$-m_0 g h' = m_0 g h' + m_0 g h.$$

Primavera®

Scanned with CamScanner

Las masas las podemos escribir como la densidad por el volumen. Cuando el objeto se queda suspendido en el agua, el volumen de agua desplazada es igual al volumen del objeto, de modo que:

$$-\rho_a V_a g h' = \rho_o V_o g (h' + h), \quad \rho_a = \rho_o \text{ y } V_a = V_o,$$

$$h' = h' + h,$$

$$h' = \frac{h}{2}.$$

Esto para un modelo ideal en el que no se considere la resistencia del agua, la altura a la que cualquier objeto se queda suspendido en el agua es la mitad de la altura de la caída inicial. Este cálculo evidencia que la profundidad de 5 metros es suficiente para garantizar que el atleta pueda detenerse de manera segura sin riesgo de impacto con el fondo de la fosa, proporcionando así la seguridad necesaria en las competencias de clavados.

→ En base a otros factores:

Considerando factores como la resistencia del agua, se puede obtener que:

Un atleta que se lanza desde una plataforma de 10 metros cae libremente bajo la influencia de la gravedad. La velocidad al impactar el agua, V_0, se puede calcular usando la ecuación:

$$V_0 = \sqrt{2gh},$$

donde $g = 9{,}81\ m/s^2$ es la aceleración debida a la gravedad y $h = 10\ m$ es la altura de la plataforma.

Sustituyendo los valores:

$$V_0 = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ m/s^2 \cdot 10\ m} \approx 14\ m/s.$$

Cuando el atleta entra en el agua, experimenta una fuerza de resistencia F_r que generalmente se modela como proporcional al cuadrado de la velocidad v:

$$F_r = \frac{1}{2} C_d \rho A v^2,$$

donde C_d es el coeficiente de arrastre, que depende de la forma del cuerpo del atleta y su orientación, $\rho = 1000\ kg/m^3$ es la densidad del agua, A es el área de la sección transversal del cuerpo del atleta en la dirección del movimiento, y v es la velocidad del atleta del agua.

Scanned with CamScanner

El movimiento del atleta bajo el agua es desacelerado por la fuerza resistiva. Aplicando la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento es:

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} C_d \rho A v^2,$$

donde m es la masa del atleta.

Esto se puede reescribir:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{C_d \rho A}{m} v^2.$$

Ahora, se puede encontrar la profundidad necesaria integrando la ecuación del movimiento para obtener la relación entre la velocidad y la profundidad; sin embargo, para simplificar el problema, se puede usar una aproximación considerando que el atleta desacelera desde V_0 hasta detenerse a $V=0$.

Para la integración, suponiendo una resistencia cuadrática (donde $v(t)$ es la velocidad en función del tiempo):

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{2}\frac{C_d \rho A}{m} dt.$$

Integrando desde V_0 a 0, y desde 0 hasta la profundidad d:

$$\int_{V_0}^{0} \frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{2}\frac{C_d \rho A}{m}\int_0^d dz.$$

Lo que lleva a:

$$\left[-\frac{1}{v}\right]_{V_0}^{0} = \frac{C_d \rho A}{2m} d.$$

Dado que v tiende a 0 en la profundidad d, la expresión se simplifica a:

$$\frac{1}{V_0} = \frac{C_d \rho A}{2m} d.$$

Despejando d:

$$d = \frac{2m}{C_d A V_0}.$$

Ahora, se puede estimar los valores típicos para un atleta:

Primavera

Scanned with CamScanner

→ Masa del atleta $m \approx 70kg$.

→ Área trasversal $A \approx 0,3 m^2$ (dependiendo de la postura al entrar al agua.

→ Coeficiente de arrastre $C_d \approx 1,0$ (puede variar según la postura).

Sustituyendo:

$$d = \frac{2 \cdot 70kg}{1,0 \cdot 1000 \, kg/m^3 \cdot 0,3 m^2 \cdot 14 \, m/s}.$$

$$d \approx 3,33 \, m.$$

Aunque el cálculo simplificado sugiere que 3,33 m podrían ser suficientes para desacelerar al atleta, una profundidad de 5 metros proporciona un margen de seguridad adicional para variaciones en los parámetros como el coeficiente de arrastre, la postura al entrar al agua, y otros factores que pueden aumentar la desaceleración necesaria. Este margen garantiza que incluso en condiciones menos ideales, el atleta no golpeará el fondo de la fosa con suficiente energía para causar daño; por lo tanto, la profundidad de 5 metros es adecuado para garantizar la seguridad de los atletas (bajo estas condiciones).

b)

Al considerar un cuerpo esférico sumergido en un fluido, las principales fuerzas que actúan sobre él son:

- Fuerza de empuje (F_b): dada por el principio de Arquímedes, esta fuerza es igual al peso del volumen de fluido desplazado por el cuerpo.

- Peso del cuerpo (W_c): La fuerza de gravedad que actúa sobre el cuerpo.

- Fuerza de arrastre (F_d): Fuerza resistiva que actúa en dirección opuesta al movimiento del cuerpo a través del fluido. En el régimen de velocidad terminal, esta fuerza iguala la fuerza neta que impulsa el cuerpo hacia arriba.

F_b se expresa como:

$$F_b = \underbrace{\rho_{fluido}}_{\text{densidad}} \cdot \underbrace{V}_{\text{volumen}} \cdot \underbrace{g}_{\text{gravedad}}.$$

Scanned with CamScanner

Para un cuerpo esférico, el volumen V es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Sustituyendo:

$$F_b = \rho_{agua} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g.$$

El peso de cuerpo es:

$$W_c = \rho_c \cdot V \cdot g = \rho_c \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g.$$

densidad corcho.

La fuerza de arrastre F_d para un cuerpo esférico en un fluido puede expresarse usando la ley de Stokes para el régimen laminar, o más generalmente usando:

$$F_d = \frac{1}{2} C_d \cdot \rho_{fluido} \cdot A \cdot V^2.$$

sección transversal $A = \pi r^2$.

La ecuación general del movimiento ascendente en términos de fuerzas es:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = F_b - W_c - F_d.$$

Sin embargo, para la velocidad terminal (v_t), la aceleración $\frac{dv}{dt} = 0$, por lo que:

$$0 = F_b - W_c - F_d.$$

Sustituyendo F_b, W_c y F_d:

$$\rho_{agua} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g - \rho_c \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g = \frac{1}{2} C_d \cdot \rho_{agua} \cdot \pi r^2 \cdot V_t^2.$$

Simplificando:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_{agua} - \rho_c) \cdot g = \frac{1}{2} C_d \cdot \rho_{agua} \cdot \pi r^2 \cdot V_t^2.$$

Primavera

Scanned with CamScanner

Se puede simplificar aún más para resolver V_t:

$$V_t^2 = \frac{8r(\rho_{agua} - \rho_c) \cdot g}{3C_d \cdot \rho_{agua}},$$

Y finalmente:

$$V_t = \sqrt{\frac{8r(\rho_{agua} - \rho_c) \cdot g}{3C_d \cdot \rho_{agua}}}.$$

Ahora, se pueden sustituir los valores:

- $r = 0,25$ m
- $\rho_{agua} = 1000 kg/m^3$.
- $\rho_c = 240 kg/m^3$.
- $g = 9,81 m/s^2$.
- $C_d \approx 0,5$ (valor típico para esferas en flujo laminar).

$$V_t = \sqrt{\frac{8 \cdot 0,025 \times (1000 - 240) \cdot 9,81}{3 \cdot 0,5 \cdot 100}}$$

$$V_t = \sqrt{\frac{1491,24}{1500}} \approx 0,99416 \approx 0,997 \ m/s.$$

En ese sentido, la velocidad terminal con la que el corcho esférico asciende a la superficie es aproximadamente 0,997 m/s.

→ Cálculo de la velocidad a partir de la 2da ley de Newton.

La segunda ley de Newton establece que la suma de las fuerzas sobre un cuerpo es igual a la masa del cuerpo multiplicada por su aceleración.

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

Para este caso, la dirección positiva será hacia arriba, por lo que:

$$F_b - W_c - F_d = m \cdot a,$$

donde a es la aceleración del corcho hacia arriba, F_b es la fuerza de empuje, W_c es el peso del corcho, y F_d es la fuerza de arrastre, que depende de la velocidad del corcho.

Fuerza de empuje (F_b):

$$F_b = \rho_{agua} \cdot V_c \cdot g,$$

para una esfera el V es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

peso del corcho (W_c):

$$W_c = \rho_c \cdot V \cdot g,$$

fuerza de arrastre (F_d):

En el régimen de baja velocidad (donde no se alcanza la velocidad terminal de inmediato, la fuerza de arrastre se expresa:

$$F_d = \frac{1}{2} C_d \cdot \rho_{agua} \cdot A \cdot v^2$$

$A = \pi r^2$.

Sustituyendo en la 2da ley de Newton:

$$\rho_{agua} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g - \rho_c \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g - \frac{1}{2} C_d \cdot \rho_{agua} \cdot \pi r^2 \cdot v^2 = m \frac{dv}{dt},$$

donde $m = \rho_c \cdot V$. Simplificando:

$$(\rho_{agua} - \rho_c) \cdot g - \frac{3 C_d \rho_{agua} \cdot v^2}{8r} = \rho_c \frac{dv}{dt}.$$

Siendo una ecuación diferencial no lineal que describe cómo la velocidad $v(t)$ cambia con el tiempo.

Cuando el corcho alcanza la velocidad terminal v_t, la aceleración $\frac{dv}{dt} = 0$,

Primavera®

Scanned with CamScanner

lo que lleva a:

$$(\rho_{agua} - \rho_c) \cdot g = \frac{3 C_d \cdot \rho_{agua} \cdot V_t^2}{8r}.$$

Resolviendo para V_t:

$$V_t^2 = \frac{8r(\rho_{agua} - \rho_c) \cdot g}{3 C_d \cdot \rho_{agua}},$$

$$V_t = \sqrt{\frac{8r(\rho_{agua} - \rho_c) \cdot g}{3 C_d \cdot \rho_{agua}}}.$$

Sustituyendo:

$r = 0,025\ m$, $\rho_c = 240\ kg/m^3$, $C_d \approx 0,5$.

$\rho_{agua} = 1000\ kg/m^3$, $g = 9,81\ m/s^2$,

Se obtiene que:

$$V_t = \sqrt{\frac{8 \cdot 0,025\ (1000-240) \cdot 9,81}{3 \cdot 0,5 \cdot 1000}},$$

$$V_t \approx 0,997\ m/s.$$

Este valor se alcanza debido al balance entre las fuerzas de empuje, el peso y la resistencia del agua, lo que lleva a un movimiento uniforme (velocidad cte) una vez alcanzada la velocidad terminal.

Abordando el problema considerando efectos transitorios y posibles variaciones en la resistencia de arrastre, es necesario resolver la ecuación de movimiento del corcho de manera que tenga en cuenta como la velocidad cambia con el tiempo hasta que alcanza la velocidad terminal. Este implica resolver una ecuación diferencial que describa el comportamiento dinámico del corcho a medida que se mueve hacia la superficie.

Usando la 2da ley de Newton, la ecuación de movimiento sería:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = F_b - W_c - F_d(v),$$

donde $m = \rho_c V$ es la masa del corcho, y $F_d(v)$ es la fuerza de arrastre que depende de la velocidad $v(t)$.

→ Fuerza de flotación (F_b): $F_b = \rho_{agua} \cdot V \cdot g$.

→ Peso del corcho (W_c): $W_c = \rho_c \cdot V \cdot g$.

→ Fuerza de arrastre ($F_d(v)$) para velocidades moderadas:
$F_d(v) = \frac{1}{2} C_d \cdot \rho_{agua} \cdot A \cdot v^2$,

Sustituyendo:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = \rho_{agua} \cdot V \cdot g - \rho_c \cdot V \cdot g - \frac{1}{2} C_d \cdot \rho_{agua} \cdot A \cdot v(t)^2.$$

Simplificando y dividiendo a ambos lados por $\rho_c \cdot V$:

$$\frac{dv(t)}{dt} = g\left(\frac{\rho_{agua} - \rho_c}{\rho_c}\right) - \frac{3C_d \cdot \rho_{agua} \cdot v(t)^2}{8r \cdot \rho_c}$$

La ecuación se reescribe como:

$$\frac{dv(t)}{dt} = A - Bv(t)^2,$$

donde:

- $A = g\left(\frac{\rho_{agua} - \rho_c}{\rho_c}\right)$,
- $B = \frac{3C_d \cdot \rho_{agua}}{8r \cdot \rho_c}$.

Sería una ecuación diferenciable de variables separables.

$$\frac{dv(t)}{A - Bv(t)^2} = dt.$$

Scanned with CamScanner

Integrando a ambos lados se obtiene:

$$\int \frac{dv(t)}{A - Bv(t)^2} = \int dt,$$

$$\frac{1}{\sqrt{AB}} \tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\, v(t)\right) = t + C,$$

donde C es la cte de integración que se determina por la condición inicial $v(0) = 0$. Al resolver para $v(t)$:

$$v(t) = \sqrt{\frac{A}{B}} \tanh\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\,(t + C)\right).$$

La velocidad terminal V_t se obtiene cuando $t \to \infty$.

$$V_t = \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{8r(\rho_{agua} - \rho_c)\cdot g}{3C_d \cdot \rho_{agua}}}$$

Al inicio $(t = 0)$. la velocidad del corcho es 0, pero la aceleración es máxima debido a que la fuerza de flotación supera el peso y la fuerza de arrastre todavía es pequeña

Durante el ascenso: la velocidad aumenta y la fuerza de arrastre también, lo que disminuye la aceleración. Conforme la velocidad se acerca a V_t, la aceleración se reduce a casi cero, y el corcho se mueve con velocidad cte.

Considerando los efectos transitorios se obtiene la velocidad terminal:

$$V_t = \sqrt{\frac{8r(\rho_{agua} - \rho_c)\cdot g}{3C_d \cdot \rho_{agua}}}.$$

c)

Consideraciones:

La burbuja asciende debido al principio de Arquímedes que genera una fuerza de empuje por la diferencia de densidad con el agua. Al alcanzar la velocidad terminal, la fuerza de empuje se equilibra

con la resistencia viscosa según la ecuación de Bernoulli. Además, conforme asciende, la ley de Boyle explica que la presión disminuye y el volumen de la burbuja aumenta, afectando su densidad.

La fuerza de empuje F_b es igual al peso del volumen de agua desplazado por la burbuja:

$$F_b = \rho_{agua} \cdot V_b \cdot g.$$

Se asume que la burbuja es esférica con radio $r = 0{,}025$ m,

$$V_b = \frac{4}{3}\pi (0{,}025)^3 \approx 6{,}54 \times 10^{-5}\ m^3.$$

Entonces F_b:

$$F_b = 1000 \cdot 6{,}54 \cdot 10^{-5} \cdot 9{,}8 \approx 0{,}641 N.$$

Sería la fuerza que impulsa la burbuja hacia la superficie.

La fuerza de arrastre F_D que actúa sobre la burbuja debido a la resistencia del agua se calcula:

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \cdot \rho_{agua} \cdot A \cdot V_t^2,$$

donde $C_D \approx 0{,}47$ es es coeficiente de arrastre, que para una burbuja esférica es un valor típico, $\rho_{agua} = 1000\ kg/m^3$ es la densidad del agua, y $A = \pi r^2$ es el área proyectada de la burbuja, calculada como el área de un círculo.

El área proyectada es:

$$A = \pi (0{,}025)^2 \approx 1{,}96 \times 10^{-3}\ m^2.$$

Por lo tanto F_D:

$$F_D = \frac{1}{2} \cdot 0{,}47 \cdot 1000 \cdot 1{,}096 \times 10^{-3} \cdot V_t^2 \approx 0{,}461 V_t^2\ N$$

En la situación de velocidad terminal, la F_b se iguala F_D:

$$F_b = F_D.$$

Sustituyendo:

Primavera®

Scanned with CamScanner

$$0,641\,N = 0,461\,V_t^2 + N.$$

Despejando V_t^2 =

$$V_t = \sqrt{\frac{0,641}{0,461}} = 1,18\ m/s.$$

Bajo esas condiciones la burbuja alcanzará una velocidad terminal de aproximadamente 1,18 m/s mientras asciende.

Conforme la burbuja asciende, la presión a la que está sometida desciende. Según la ley de Boyle para un gas ideal:

$$P_0 V_0 = P_f V_f$$

P_0: Presión fondo de la fosa.

V_0: Volumen de la burbuja en el fondo.

P_f: Presión en la superficie.

V_f: Volumen de la burbuja en la superficie.

La presión a 5 m de profundidad sería:

$$P_0 = P_{atm} + \rho_{agua} \cdot g \cdot h = 101325 + 1000 \cdot 9,8 \cdot 5$$

$$\approx 150325\ Pa.$$

En la superficie, la presión es simplemente la presión atmosférica:

$$P_f \approx 101325\ Pa.$$

El volumen final V_f será mayor que V_0 debido a la expansión.

$$V_f = V_0 \cdot \frac{P_0}{P_f} \approx 6,54 \times 10^{-5} \cdot \frac{150325}{101325}$$

$$V_f \approx 9,69 \times 10^{-5}\ m^3.$$

Este aumento en el volumen reduce la densidad de la burbuja, lo que podría afectar la velocidad

terminal. Sin embargo, la velocidad terminal calculada de 1,18 m/s es un valor promedio que considera este cambio gradual en el volumen durante el ascenso.

2.

$$f = eE + \frac{e}{c} v \times B \quad \Big| \quad v \ll c$$

$E \rightarrow$ campo eléctrico.

$B \rightarrow$ Inducción magnética.

a) Demostrar:

$$r = \frac{cmv}{eB} = \frac{v}{\omega_c} \quad \Big| \quad \omega_c \equiv \frac{eB}{mc} \rightarrow \text{frecuencia ciclotrónica.}$$

Como no existe campo eléctrico:

$$f = \cancel{eE}^{0} + \frac{e}{c} v \times B$$

-) Para una partícula con masa m f_c:

$$f_c = \frac{mv^2}{r}$$

$$f_c = f \rightarrow \frac{e}{c} v \times B = \frac{mv^2}{r}$$

Como la partícula penetra el campo magnético en una dirección normal a las líneas de flujo.

$$V \times B = |V||B| \cancel{\operatorname{sen}\theta}^{1} = VB$$

$1 \rightarrow$ V y B son perpendiculares

$$\frac{e}{c} V \times B = \frac{e}{c} VB$$

$$\frac{e}{c} VB = \frac{mv^2}{r} \longrightarrow \boxed{r = \frac{mcv}{eB}} \rightarrow \text{Demostrado.}$$

b) Be_z ; $E = E_y e_y + E_z e_z$

Demostrar $z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{eE_z}{2m} t^2$

$z(0) \equiv z_0$ y $\dot{z}(0) \equiv \dot{z}_0$

Lorentz en $\vec{z}$ = $f = eE_z + \frac{e}{c}(V \times B)_z$

Primavera®

Scanned with CamScanner

$V \times B = 0 \rightarrow B$ solo tiene componente y V solo x e y.

$F_z = e E_z$

$\rightarrow$ Por 2da ley de Newton:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = / \rightarrow \frac{m d^2 z}{dt^2} = e E_z$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{e E_z}{dt} \rightarrow \frac{dz}{dt} = \underbrace{\dot{z}_0 + \frac{e E_z}{m} t}$$

$$\boxed{z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t + e E_z t^2}$$

Demostrado.

c)

Demostrar $\langle \dot{x} \rangle = \frac{c E_y}{B}$,

$\langle \dot{y} \rangle = 0$.

$B = B\hat{k}$

$E = E_y \hat{j} + E_z \hat{k}$

Solo me interesa x e y

$x(t) = R\cos(\omega_c t + \theta)$

$y(t) = R\,\text{sen}(\omega_c t + \theta)$

$$\boxed{R = \frac{m v}{e B}}$$

$\rightarrow x(t) = R\cos(\omega_c t + \theta + \frac{c E_y t}{B}$ | $\dot{x}(t) = -\omega_c R\,\text{sen}(\omega_c t + \theta) + \frac{c E_y}{B}$

$y(t) = R\,\text{sen}(\omega_c t + \theta$ | $\dot{y}(t) = \omega_c R\cos(\omega_c t + \theta)$

$\omega_c T = 2\pi$

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \dot{x}\,dt \rightarrow \langle \dot{x} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T -\omega_c R\,\text{sen}(\omega_c t + \theta) + \frac{c E_y}{B})\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_0^T -\omega_c R\,\text{sen}(\omega_c t + \theta)\,dt + \int_0^T \frac{c E_y}{B}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{T}\left(R\left[\cos(\omega_c T + \theta) - (\omega + \theta)\right]\Big|_0^T + \frac{c E_y}{B} T\Big|_0^T\right.$$

$$= \frac{1}{T}\frac{c E_y}{B} = \langle \dot{x} \rangle = \boxed{\frac{c E_y}{B}}$$

$$\langle \dot{y} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \omega_c R\cos(\omega_c t+\theta)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\left(\omega_c R\left[\frac{\operatorname{sen}(\omega_c t+\theta)}{\omega_c}\right]\Big|_0^T\right.$$

$$= \frac{1}{T}\left(R\left(\operatorname{sen}(\cancelto{2\pi}{\omega_c T}+\theta)-\operatorname{sen}(\theta)\right)\right) \quad \operatorname{sen}(2\pi+\theta)=\operatorname{sen}(\theta)$$

$$= \left(R\left(\cancelto{0}{\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\theta}\right)\right)=0$$

$$\langle \dot{y} \rangle = 0.$$

d)

$$x(t)=\frac{A}{\omega_0}\operatorname{sen}\omega_c t+\frac{c\,\epsilon_y}{B}t \;;\; y(t)=\frac{A}{\omega_0}(\cos\omega_c t-1)$$

Punto anterior.

$$\begin{cases} V_x(t)=V_{x_0}\cos(\omega_c t)+V_{y_0}\operatorname{sen}(\omega_c t)+\dfrac{c\,\epsilon_y}{B} \\ V_y(t)=-V_{y_0}\operatorname{sen}(\omega_c t)+V_{y_0}\cos(\omega_c t) \end{cases}$$

$$x(t)=\int V_{x_0}\cos(\omega_c t)+V_{y_0}\operatorname{sen}(\omega_c t)+\frac{c\,\epsilon_y}{B})\,dt$$

$$=\int V_{x_0}\cos(\omega_c t)\,dt+\int V_{y_0}\operatorname{sen}(\omega t)\,dt+\int\frac{c\,\epsilon_y}{B}\,dt$$

$$x(t)=\frac{V_{x_0}}{\omega_c}\operatorname{sen}(\omega_c t)-\frac{V_{y_0}}{\omega_c}\cos(\omega_c t)+\frac{c\,\epsilon_y}{B}t+C.$$

$$y(t)=-\int V_{x_0}\operatorname{sen}(\omega_c t)\,dt+\int V_{y_0}\cos(\omega_c t)\,dt$$

$$y(t)=\frac{V_{x_0}}{\omega_c}\cos(\omega_c t)+\frac{V_{y_0}}{\omega_c}\operatorname{sen}(\omega_0 t)+C$$

ctes

Condiciones iniciales

$x(0)=0$

$V_x(0)=0$

$y(0)=0$

$V_y(0)=0$

$\longrightarrow$ $C_y=0$, $C_y=\dfrac{-V_{y_0}}{\omega_0}$ } Para que se cumpla

Primavera

Scanned with CamScanner

$$x = \frac{V_{x0}}{\omega_c} \operatorname{sen}(\omega_c t) - \frac{V_y}{\omega_c} \cos(\omega_c t) + \frac{C E_y t}{B}$$

$$y = \frac{V_{x0}}{\omega_c} \cos(\omega_c t) + \frac{V_{y0}}{\omega_c} \operatorname{sen}(\omega_c t) = \frac{V_{y0}}{\omega_c}$$

Simplificando $A = V_y$.

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{\omega_c} \operatorname{sen}(\omega_c t) + \frac{C E_y t}{B} \\ y(t) &= \frac{A}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) - 1) \end{aligned}\right\} \text{Demostrado.}$$

(b)

3. Se nos da una gota de lluvia con una masa inicial m_0 gramos cayendo desde el reposo a través de una nube de espesor a cm. A medida que cae, gana masa a una velocidad de b gramos por segundo. Las gotitas de las nubes están en reposo con respecto a la Tierra y la gota de lluvia experimenta una resistencia del aire proporcional a su velocidad.

En primer lugar necesitamos escribir la ecuación diferencial para el movimiento de la gota de lluvia.

a) El movimiento de la gota de lluvia está influenciado por la ganancia de masa y la resistencia del aire, las cuales son importantes para la formulación de las ecuaciones diferenciales y resolver la velocidad.

Las fuerzas que actúan sobre la gota de lluvia son la gravedad y la resistencia del aire.

$v \rightarrow$ velocidad de la gota de lluvia.

$m(t) \rightarrow$ masa en el tiempo t.

$k \rightarrow$ cte de proporcionalidad para la resistencia del aire.

La masa de la gota de lluvia aumenta a una velocidad b, entonces $\frac{dm}{dt} = b$. Ahora, la masa de la gota de la lluvia en el momento t sería $m(t) = m_0 + bt$.

Las fuerzas que actúan sobre la gota de lluvia son la gravedad (hacia abajo) y la resistencia del aire (hacia arriba). La fuerza debida a la gravedad sería $m(t)g$. La resistencia del aire es proporcional a la velocidad, por lo que se puede escribir como $-kv$, dond k es una cte positiva.

Usando la 2da ley de Newton ($F = ma$), la ecuación diferencial para el movimiento es:

$$\frac{d}{dt}(m(t)v) = m(t)g - kv.$$

Desarrollando el lado izquierdo usando la regla del producto:

$$\frac{d}{dt}(mv) = m(t)\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

Ahora,

$$m(t)\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = m(t)g - kv$$

Como $\frac{dm}{dt} = b$, sustituyendo $m(t) = m_0 + bt$, se obtiene la ecuación diferencial:

$$(m_0 + bt)\frac{dv}{dt} + bv = (m_0 + bt)g - kv$$

Reordenando términos

$$// \quad (m_0 + bt)\frac{dv}{dt} + (b+k)v = (m_0 + bt)g \quad //$$

b) Es necesario encontrar la velocidad de la gota de lluvia cuando sale de la nube, suponiendo que su masa se duplica.

$t_f \rightarrow$ tiempo que tarda una gota de lluvia en atravesar una nube. A medida que la masa se duplica, $m(t_f) = 2m_0$, entonces:

$$2m_0 = m_0 + bt_f, \text{ lo que significa } t_f = \frac{m_0}{b},$$

el espesor de las nubes es a cm, por lo que la distancia recorrida es a. La ecuación diferencial de la parte (a) sería:

$$(m_0 + bt)\frac{dv}{dt} + (b+k)v = (m_0 + bt)g.$$

Es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Resolviéndola con condición inicial $v(0) = 0$, se obtiene:

$$(m_0 + bt)\frac{dv}{dt} + (b+k)v = m_0 + bt)g$$

Es una ecuación lineal de primer orden de la forma

$$\frac{dv}{dt} + P(t)v = Q(t),$$

donde:

$$P(t) = \frac{b+k}{m_0 + bt}$$

$$Q(t) = g$$

Scanned with CamScanner

El factor integrante $\mu(t)$ se obtiene:

$$\mu(t) = e^{\int P(t)\,dt} = e^{\int \frac{b+k}{m_0+bt}\,dt}$$

La integral es:

$$\int \frac{b+k}{m_0+bt} = (b+k)\ln|m_0+bt|,$$

de esa manera el factor integrante sera:

$$\mu(t) = e^{(b+k)\ln|m_0+bt|}$$

$$= m_0+bt^{(b+k)},$$

Multiplicamos la ecuación diferencial por $\mu(t) = m_0+bt^{(b+k)}$:

$$(m_0+bt)^{(b+k)}\frac{dv}{dt} + (b+k)(m_0+bt)^{(b+k-1)}v = g(m_0+bt)^{(b+k)}$$

Reconociendo que el lado izquierdo es la derivada del producto:

$$\frac{d}{dt}\left[v(m_0+bt)^{(b+k)}\right] = g(m_0+bt)^{(b+k)}$$

Integrando ambos lados con respecto a t:

$$v(m_0+bt)^{(b+k)} = \int g(m_0+bt)^{(b+k)}\,dt$$

Realizando la sustitución $u = m_0+bt$, en donde $du = b\,dt$:

$$\int g u^{(b+k)}\,dt = \frac{g}{b}\int u^{(b+k)}\,du$$

$$= \frac{g}{b}\cdot\frac{u^{(b+k+1)}}{b+k+1}$$

$$= \frac{g}{b(b+k+1)}(m_0+bt)^{(b+k+1)}$$

Siendo,

$$v(m_0+bt)^{(b+k)} = \frac{g}{b(b+k+1)}(m_0+bt)^{(b+k+1)} + C$$

Primavera®

Scanned with CamScanner

Despejando v:

$$V = \frac{g}{b(b+K+1)}(m_0+bt) - \frac{C}{(m_0+bt)^{(b+K)}}$$

Ahora, aplicando la condición inicial $v(0)=0$

$$0 = \frac{g}{b(b+K+1)} m_0 - \frac{C}{m_0^{(b+K)}}$$

$$C = \frac{g}{b(b+K+1)} m_0^{(b+K+1)}$$

Haciendo la sustitución de c en la ecuación V:

$$v = \frac{g}{b(b+K+1)}(m_0+bt) - \frac{g}{b(b+K+1)} m_0^{(b+K+1)} (m_0+bt)^{-(b+K)},$$

$$= \frac{g}{b+K}\left(\frac{m_0+bt}{b+K} - \frac{m_0}{b+K} e^{-\frac{(b+K)t}{m_0+bt}}\right),$$

$$V(t) = \frac{g(m_0+bt)}{b+K} - \frac{g m_0}{b+K} e^{-\frac{(b+K)t}{m_0+bt}}.$$

En $t = t_f = \frac{m_0}{b}$ la velocidad es:

$$v(t_f) = \frac{g(2m_0)}{b+K} - \frac{g m_0}{b+K} e^{\frac{-(b+K)m_0}{b(2m_0)}}.$$

Simplificando:

$$v(t_f) = \frac{2gm_0}{b+K} - \frac{gm_0}{b+K} e^{\frac{-b+K}{2b}}.$$

velocidad de la gota de lluvia, suponiendo que su masa se duplica.

c) Después de que la gota de lluvia sale de la nube, su masa permanece cte en $2m_0$, es decir su masa ya no aumenta, por lo que $\frac{dm}{dt}=0$. Por ende, la ecuación diferencial sería:

$$2m_0 \frac{dv}{dt} = 2m_0 g - Kv,$$

Como t se acerca al infinito, $\frac{dv}{dt} = 0$ (la geta de lluvia alcanza su velocidad terminal). Por lo tanto,

$$0 = 2m_0 g - Kv_{terminal}.$$

Sería:-

$$\text{"} V_t = \frac{2m_0 g}{K} \text{"}$$

velocidad límite.

Scanned with CamScanner