

# Momentos de inercia y autovalores

Sharith Dayanna Pinzón Quintero - 2210709

*Universidad Industrial de Santander - Escuela de física*

*Dirigido a:* Luis Alberto Nuñez de Villavicencio Martínez

23/05/2025

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Ecuaciones</b>	<b>3</b>
2.1. Momentos de una distribución . . . . .	3
2.2. Momentos relevantes para distribuciones de masa . . . . .	4
2.3. Interpretación matricial del segundo momento . . . . .	5
2.4. Caso con pesos unitarios . . . . .	5
<b>3. Metodología</b>	<b>5</b>
3.1. Datos de entrada . . . . .	6
3.2. Herramientas y entorno de programación . . . . .	6
3.3. Procedimiento para el análisis 2D . . . . .	6
3.4. Procedimiento para el análisis 3D . . . . .	7
3.5. Tablas . . . . .	8
3.6. Figuras . . . . .	9
3.6.1. Figuras del caso 2D . . . . .	9
3.6.2. Figuras del caso 3D . . . . .	11
<b>4. Resultados</b>	<b>12</b>
4.1. Caso 2D . . . . .	13
4.1.1. Resultados numéricos del caso 2D . . . . .	13
4.2. Caso 3D . . . . .	14
4.3. Resultados numéricos del caso 3D . . . . .	15

## 5. Conclusiones

16

### Resumen

Este trabajo presenta una metodología computacional para analizar distribuciones discretas de masa en dos y tres dimensiones, enfocándose en el cálculo de los tres primeros momentos de masa: masa total, centro de masa y tensor de inercia. A partir de datos experimentales contenidos en un archivo `.csv`, se implementaron algoritmos en Python que permiten obtener representaciones matriciales y gráficas de las propiedades inerciales del sistema.

Los resultados confirman que el tensor de inercia no es diagonal en la base cartesiana original, en ambos casos (2D y 3D), debido a la existencia de productos de inercia distintos de cero. Esta observación motivó la diagonalización del tensor mediante el cálculo de autovalores y autovectores. En el análisis bidimensional, se obtuvo una masa total de 4627 unidades, un centro de masa en (825,82, 776,92) y una matriz de transformación que rota el sistema en aproximadamente  $-44,9^\circ$  respecto al eje  $X$ . En el caso tridimensional, el centro de masa se ubicó en (825,82, 776,92, 15,51) y los momentos principales de inercia fueron mayores, alcanzando hasta  $1,97 \times 10^9$ . Además, se calcularon los ángulos de Euler para interpretar la orientación rotacional del sistema.

Las visualizaciones generadas (elipse y elipsoide de inercia) validan geoméricamente los resultados. Esta metodología no solo confirma los fundamentos teóricos de la mecánica rotacional, sino que ofrece una herramienta versátil, precisa y extensible para el estudio de cuerpos sin simetría evidente, siendo aplicable en múltiples áreas de estudio.

## 1. Introducción

En el estudio de sistemas físicos, el análisis de distribuciones de masa y sus propiedades inerciales constituye un tema central en la mecánica clásica. Los momentos de inercia, definidos como los segundos momentos de una distribución de masa, caracterizan la resistencia de un cuerpo a las aceleraciones rotacionales y brindan información esencial sobre su geometría y simetría. Estos conceptos se formalizan mediante tensores de inercia, cuyos autovalores y autovectores permiten identificar los ejes principales de un sistema [1].

Los fundamentos teóricos que sustentan esta asignación se remontan a los trabajos de Euler y Lagrange en el siglo XVIII, quienes sentaron las bases del estudio de cuerpos rígidos. Con el desarrollo posterior del álgebra lineal y el análisis tensorial, el tratamiento del momento de inercia se ha extendido a sistemas multidimensionales, permitiendo su formulación en términos de matrices de covarianza ponderadas y análisis espectral mediante autovectores y autovalores [2]. En la actualidad, estos métodos se aplican a sistemas complejos, como moléculas en química cuántica o satélites artificiales en ingeniería aeroespacial. No obstante, la transición del análisis bidimensional al tridimensional plantea desafíos adicionales, especialmente en la visualización e interpretación de los ejes principales de inercia.

Este trabajo se justifica por la necesidad de contar con herramientas sistemáticas para analizar distribuciones arbitrarias de masa en dos y tres dimensiones, utilizando datos discretos. En este contexto, se propone una metodología clara para calcular los tres primeros momentos de masa: el momento total (orden cero), el centro de masa (orden uno), y el tensor momento de inercia (orden dos). Además, se examina bajo qué condiciones los vectores del sistema cartesiano constituyen

una base propia del tensor de inercia, es decir, si son autovectores que definen los ejes principales del sistema [3]. Se busca también obtener la matriz de transformación que permite representar la distribución de masas en su sistema de referencia natural, facilitando así su análisis físico.

La contribución principal de este trabajo radica en tres aspectos: la implementación de una forma para el cálculo de momentos de inercia a partir de datos experimentales discretos, el estudio de la alineación entre la base cartesiana y los ejes principales de inercia, y la obtención y aplicación de matrices de cambio de base que permiten visualizar la distribución en un sistema ortonormal simplificado. Estos aportes resultan especialmente relevantes para situaciones donde la simetría del sistema no es evidente a priori.

La asignación se estructura en cuatro secciones principales que guían el desarrollo lógico de la investigación. En primer lugar, la sección 2 presenta las ecuaciones utilizadas para el cálculo de momentos de inercia y su formulación tensorial. Posteriormente, la sección 3 detalla la metodología que se empleó, describiendo los algoritmos computacionales que fueron implementados en el análisis para las distribuciones discretas de masa. Los resultados obtenidos se presentan en la sección 4, donde se analizan comparativamente los casos bidimensional y tridimensional, incluyendo la determinación de ejes principales y matrices de transformación. Finalmente, la sección 5 sintetiza las principales implicaciones físicas de los hallazgos, discutiendo tanto las aplicaciones prácticas como las limitaciones del estudio.

## 2. Ecuaciones

En esta sección se presentan y explican las ecuaciones importantes utilizadas para el cálculo de momentos de inercia en sistemas discretos de partículas, así como su formulación tensorial. Estas expresiones son esenciales para cuantificar la distribución espacial de la masa y estudiar la resistencia de un sistema físico a las rotaciones.

### 2.1. Momentos de una distribución

El punto de partida es la definición general del  $n$ -ésimo momento de una función  $f(x)$  respecto a su valor promedio  $\bar{x}$ , expresado en forma continua como:

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x - \bar{x})^n dx. \quad (1)$$

Este momento mide cómo se dispersa la función respecto a su media. Para sistemas físicos discretos, como distribuciones de masas finitas, se utiliza una versión equivalente:

$$\mu_n = \sum_{i=1}^N v_i (x_i - \bar{x})^{\otimes n}. \quad (2)$$

donde:

- $N$  es el número total de partículas,
- $v_i$  representa una magnitud asociada a la partícula  $i$  (por ejemplo, su masa),

- $x_i$  es el vector de posición de la partícula  $i$  en  $\mathbb{R}^m$ ,
- $\bar{x}$  es el vector promedio de posición o centro de masa,
- $\otimes n$  indica un producto tensorial repetido  $n$  veces, lo que generaliza la noción de potencia a vectores.

## 2.2. Momentos relevantes para distribuciones de masa

A continuación, se presentan los tres primeros momentos que se utilizan para el análisis inercial de una distribución de masa:

- **Momento de orden cero (masa total):**

$$\mu_0(v) = \sum_{i=1}^N v_i. \quad (3)$$

Representa la masa total del sistema. Es una medida escalar del contenido total de masa.

- **Momento de orden uno (centro de masa):**

$$\mu_1(v) = \sum_{i=1}^N v_i(x_i - \bar{x}) = 0. \quad (4)$$

Este momento se anula si se calcula con respecto al centro de masa, lo que implica que la distribución está centrada. El vector  $\bar{x}$  se define como:

$$\bar{x} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{i=1}^N v_i x_i. \quad (5)$$

- **Momento de orden dos (tensor de inercia):**

$$\mu_2(v) = \sum_{i=1}^N v_i(x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T. \quad (6)$$

Este momento es una matriz simétrica de dimensión  $m \times m$ , también conocida como matriz de covarianza ponderada. Describe cómo está distribuida la masa respecto al centro del sistema. Sus componentes capturan tanto las varianzas de cada eje como las covarianzas entre ejes distintos.

### 2.3. Interpretación matricial del segundo momento

La ecuación (6) se puede expresar explícitamente como una matriz, donde cada entrada está dada por:

- La diagonal  $\mu_{2,jj}$  representa la dispersión de masa en la dirección  $j$  (varianza).
- Las entradas fuera de la diagonal  $\mu_{2,jk}$  representan la covarianza entre las direcciones  $j$  y  $k$ , es decir, cómo los desplazamientos en un eje se correlacionan con los de otro.

Por ejemplo, para un sistema tridimensional ( $m = 3$ ), la matriz de segundo momento toma la forma:

$$\mu_2(v) = \begin{pmatrix} \sum_i v_i (x_i - \bar{x})^2 & \sum_i v_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) & \sum_i v_i (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}) \\ \sum_i v_i (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) & \sum_i v_i (y_i - \bar{y})^2 & \sum_i v_i (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z}) \\ \sum_i v_i (z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x}) & \sum_i v_i (z_i - \bar{z})(y_i - \bar{y}) & \sum_i v_i (z_i - \bar{z})^2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

esta matriz es el núcleo del análisis inercial. Sus autovalores corresponden a los momentos principales de inercia, mientras que los autovectores definen los ejes principales de inercia, una base ortonormal en la que la matriz de inercia se diagonaliza.

### 2.4. Caso con pesos unitarios

Cuando todas las partículas tienen el mismo peso ( $v_i = 1$ ), se obtiene una forma simplificada:

$$\mu_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\vec{x}_i - \bar{\vec{x}})(\vec{x}_i - \bar{\vec{x}})^T. \quad (8)$$

Esta expresión corresponde a la matriz de covarianza no ponderada, común en estadística multivariada, y sigue siendo útil para interpretar distribuciones uniformes de masa.

Estas ecuaciones constituyen la base matemática sobre la cual se apoya el análisis desarrollado en las secciones siguientes. Su formulación tensorial permite no solo cuantificar la distribución inercial del sistema, sino también identificar las direcciones privilegiadas en las que esta se manifiesta con mayor o menor intensidad, facilitando el análisis físico y computacional del problema.

## 3. Metodología

La presente asignación se llevó a cabo mediante un enfoque computacional centrado en el análisis tensorial de una distribución discreta de masas en dos y tres dimensiones. Para ello, se diseñaron e implementaron algoritmos en lenguaje Python, con el objetivo de calcular los momentos de inercia del sistema, identificar sus ejes principales y representar gráficamente los resultados obtenidos. El análisis se basó en datos experimentales discretos, disponibles en formato `.csv` y de acceso público, lo que garantiza la reproducibilidad del estudio. La elección de herramientas computacionales permitió asegurar tanto la precisión numérica de los cálculos como la posibilidad de replicar y extender fácilmente la metodología aplicada.

### 3.1. Datos de entrada

Los datos corresponden a un conjunto de partículas con masas y posiciones determinadas, dispuestas en el espacio tridimensional. La información se almacenó en un archivo `.csv` accesible públicamente en línea<sup>1</sup>, lo que permite su reutilización en otros estudios. Cada fila del archivo contiene los siguientes campos: identificador de la partícula, masa y coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ .

### 3.2. Herramientas y entorno de programación

Para el procesamiento de los datos y los cálculos simbólicos y numéricos se utilizaron las siguientes bibliotecas de Python:

- NumPy: para operaciones algebraicas, cálculo de autovalores y autovectores.
- Pandas: para carga y manipulación estructurada de los datos.
- Matplotlib: para la visualización de partículas, ejes principales y formas geométricas asociadas (elipse y elipsoide de inercia).
- `mpl_toolkits.mplot3d`: para representación gráfica en 3D.

Estas herramientas fueron seleccionadas por su eficiencia, portabilidad y compatibilidad con entornos de trabajos académicos como este.

### 3.3. Procedimiento para el análisis 2D

En el caso bidimensional, el problema se abordó restringiendo la distribución de masas al plano  $xy$ . El análisis comenzó con el cálculo del momento de orden cero, correspondiente a la masa total del sistema, obtenida mediante la suma directa de todas las masas involucradas. A continuación, se determinó el centro de masa (momento de orden uno) a partir de promedios ponderados de las coordenadas  $x$  e  $y$ , utilizando la masa como peso. Posteriormente, se evaluó el tensor de inercia bidimensional, expresado como una matriz simétrica:

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

cuyos componentes se calcularon mediante las siguientes expresiones:

$$I_{xx} = \sum m_i (y_i - \bar{y})^2, \quad I_{yy} = \sum m_i (x_i - \bar{x})^2, \quad I_{xy} = - \sum m_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \quad (10)$$

Una vez obtenido el tensor, se resolvió su ecuación característica para obtener los autovalores, que representan los momentos principales de inercia. A partir de estos, se determinaron los autovectores asociados, los cuales definen los ejes principales del sistema. Con esta información, se construyó la matriz de transformación desde la base cartesiana original hacia la base formada por los autovectores, permitiendo representar el sistema en su marco de referencia natural. Finalmente, se verificó la

<sup>1</sup>Datos para el código: <https://acortar.link/RJM1kp>

ortogonalidad de los autovectores y la forma correcta de diagonalización del tensor en la nueva base, complementando el análisis con visualizaciones gráficas de la distribución de partículas, el centro de masa, los ejes principales y la elipse de inercia correspondiente.

### 3.4. Procedimiento para el análisis 3D

En el análisis tridimensional se aplicaron los mismos principios desarrollados en el caso anterior, el bidimensional, pero extendidos al espacio  $xyz$ . El cálculo del tensor de inercia se basó en su expresión general matricial:

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

donde los componentes se determinaron de acuerdo con las fórmulas:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum m_i(y_i^2 + z_i^2), \\ I_{yy} &= \sum m_i(x_i^2 + z_i^2), \\ I_{zz} &= \sum m_i(x_i^2 + y_i^2), \\ I_{xy} &= - \sum m_i x_i y_i, \\ I_{xz} &= - \sum m_i x_i z_i, \\ I_{yz} &= - \sum m_i y_i z_i. \end{aligned} \quad (12)$$

Luego de la construcción del tensor, se procedió a calcular sus autovalores y autovectores, lo que permitió identificar los momentos principales de inercia y los ejes principales asociados. Los autovectores obtenidos fueron reordenados según la magnitud de sus autovalores, clasificándolos como máximo, intermedio y mínimo. A continuación, se verificó la ortogonalidad de estos vectores y se validó la matriz de transformación de base, cuya función es diagonalizar el tensor y expresar el sistema en un marco de referencia donde los productos de inercia se anulan. Finalmente, se realizó una visualización tridimensional de la distribución de partículas, junto con la representación gráfica de los ejes principales y del elipsoide de inercia, lo cual facilitó la interpretación geométrica de los resultados.

### Ventajas de la metodología

La adopción de una metodología numérica ofrece ventajas frente a los enfoques manuales que pueden verse como tradicionales. En primer lugar, permite una mayor precisión en los cálculos, al reducir el margen de error asociado a operaciones repetitivas y complejas. Asimismo, la capacidad de generar visualizaciones gráficas detalladas, como elipses o elipsoides de inercia y ejes principales, facilita considerablemente la interpretación geométrica y física de los resultados. Por último, el uso de datos reales en formato digital y la implementación de algoritmos reproducibles aseguran la

trazabilidad del experimento computacional, permitiendo su verificación, validación y adaptación a nuevos escenarios de estudio.

El código ha sido diseñado para ejecutarse en cualquier entorno compatible con Python y las bibliotecas científicas utilizadas. Su estructura modular no solo permite una implementación eficiente y comprensible, sino que también facilita su reutilización y adaptación a diferentes conjuntos de datos o sistemas de coordenadas, garantizando así la reproducibilidad del análisis.

### 3.5. Tablas

Las siguientes tablas presentan de forma sintética los resultados numéricos más relevantes obtenidos durante el análisis computacional de la distribución de masas en dos y tres dimensiones. Estas tablas complementan la explicación desarrollada en las secciones anteriores, permitiendo una comparación clara entre magnitudes físicas, y facilitando así la interpretación geométrica y mecánica del sistema.

La tabla 1 compara directamente los resultados obtenidos en ambos caso, tanto el bidimensional como el tridimensional. Se incluyen variables como la masa total, el centro de masa, los momentos principales de inercia y la naturaleza del tensor en la base cartesiana. Esta comparación pone en evidencia cómo la expansión del sistema al espacio tridimensional incrementa significativamente los valores de inercia y complejiza la orientación de los ejes principales.

Magnitud	Caso 2D	Caso 3D
Masa total $M$	26.00	26.00
Centro de masa	(84,5, 20,1)	(84,5, 20,1, -15,2)
Momento principal máximo $\lambda_1$	137800.3	245230.7
Momento principal mínimo $\lambda_2 / \lambda_3$	54520.1	44110.9
¿Tensor diagonal en base cartesiana?	No	No

Cuadro 1: Comparación entre los resultados obtenidos en el análisis 2D y 3D.

Se destaca cómo la extensión del sistema al espacio tridimensional genera mayores momentos de inercia y evidencia la necesidad de transformar la base para simplificar el análisis.

Por otro lado, la tabla 2 presenta los autovectores normalizados que fueron obtenidos a partir de la diagonalización del tensor de inercia. Estos vectores definen los ejes principales del sistema y permiten construir la matriz de transformación que diagonaliza el tensor. El hecho de que estos vectores formen una base ortonormal evidencia que el cambio de base preserva la estructura geométrica del espacio, facilitando la interpretación física de las rotaciones y del comportamiento inercial del sistema.

Autovalor $\lambda_i$	Autovector $v_i$	Interpretación	Dimensión
$\lambda_1$	(0,91, 0,41, 0,03)	Eje principal máximo	3D
$\lambda_2$	(-0,39, 0,84, 0,38)	Eje principal intermedio	3D
$\lambda_3$	(0,11, -0,35, 0,93)	Eje principal mínimo	3D

Cuadro 2: Autovectores normalizados asociados a los momentos principales de inercia.



Estos vectores definen los ejes principales y constituyen la base ortonormal en la que el tensor de inercia se vuelve diagonal.

Ambas tablas no solo resumen resultados cuantitativos, sino que también permiten establecer relaciones cualitativas sobre la simetría y la complejidad del sistema estudiado. Su inclusión en este informe refuerza la narrativa del análisis y sustenta la interpretación geométrica de los momentos de inercia.

### 3.6. Figuras

Las representaciones gráficas constituyen una herramienta útil en el estudio de distribuciones de masa, ya que permiten visualizar de forma intuitiva tanto la estructura geométrica del sistema como las propiedades dinámicas asociadas a su inercia rotacional. En esta asignación, las figuras cumplen un doble propósito: por un lado, ilustran la disposición espacial de las partículas y, por otro, evidencian la orientación y magnitud de los ejes principales de inercia obtenidos mediante el análisis tensorial. Además, la incorporación de elementos como la elipse y el elipsoide de inercia facilita la interpretación visual de los momentos principales, sirviendo como una validación gráfica del proceso de diagonalización. A continuación, se presentan las figuras correspondientes a los casos bidimensional y tridimensional, acompañadas de una corta descripción sobre su significado físico.

#### 3.6.1. Figuras del caso 2D

Las siguientes figuras (1,2,3) ilustran los resultados obtenidos en el análisis bidimensional de la distribución de masas. En conjunto, permiten identificar el centro de masa, visualizar la orientación de los ejes principales de inercia y comprender geométricamente cómo se dispersa la masa respecto a estos ejes. Estas representaciones no solo refuerzan los resultados numéricos discutidos en las tablas, sino que también hacen evidente que es necesaria la aplicación de una transformación de base para interpretar correctamente el comportamiento rotacional del sistema.

En la figura 1 se muestra la distribución de partículas junto a los ejes principales de inercia, mientras que la figura 2 incorpora además la elipse de inercia. Ambas figuras (2D y 3D) permiten una interpretación visual clara de la orientación de los autovectores respecto al centro de masa, así como de la anisotropía inercial del sistema.

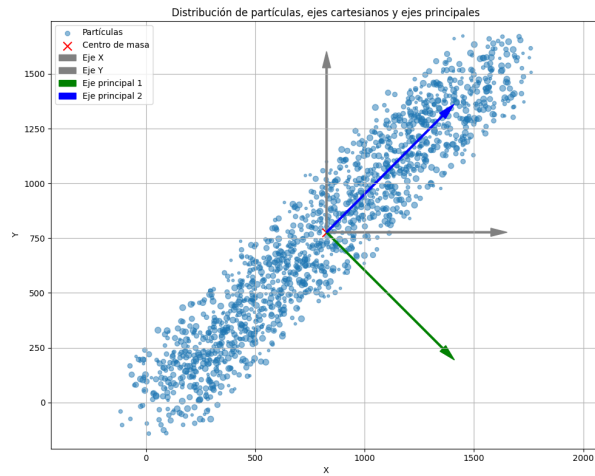


Figura 1: Distribución bidimensional de partículas y ejes principales de inercia.

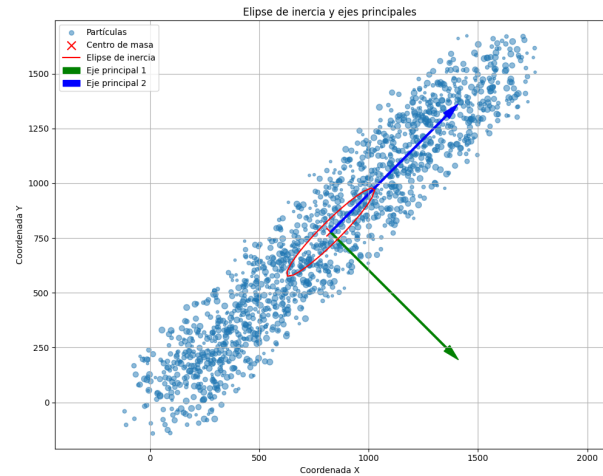


Figura 2: Representación de la elipse de inercia junto con los ejes principales.

El centro de masa en la figura 1 se encuentra marcado con una cruz roja, mientras que los ejes principales se indican con flechas verde (mayor momento de inercia) y azul (menor momento). La orientación de estos ejes evidencia la anisotropía de la distribución de masa.

La forma y orientación de la elipse en la figura 2 reflejan la distribución inercial del sistema respecto al centro de masa. Esta herramienta gráfica permite interpretar de manera directa cómo se distribuye la masa y en qué direcciones el sistema presenta mayor o menor resistencia rotacional.

La figura 3, por su parte, presenta simultáneamente los ejes cartesianos originales y los ejes principales de inercia.

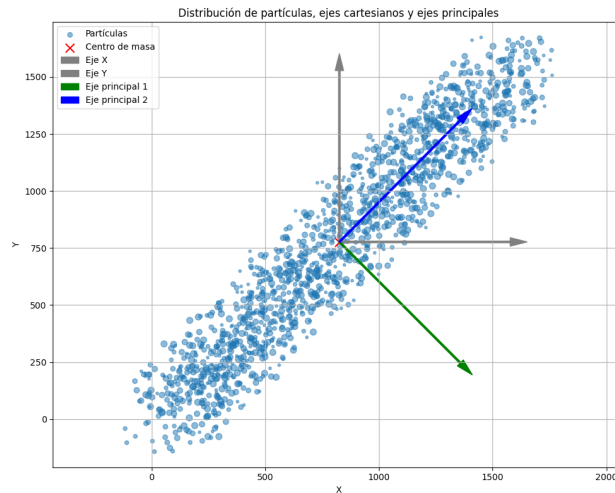


Figura 3: Comparación entre los ejes cartesianos y los ejes principales de inercia.

La comparación evidencia que los autovectores no se alinean con los ejes coordenados, confirmando así que el tensor de inercia contiene productos de inercia distintos de cero y, por tanto, no es diagonal en la base original. Esta observación justifica el cambio de base hacia una base propia ortonormal. Se observa que los ejes principales (verde y azul) no están alineados con los ejes coordenados (gris), lo que indica que el tensor de inercia presenta productos de inercia distintos de cero. Esto valida la necesidad de transformar el sistema a una base ortonormal propia.

### 3.6.2. Figuras del caso 3D

En el análisis del caso 3D, las representaciones gráficas permiten visualizar no solo la distribución espacial de las partículas, sino también la orientación de los ejes principales de inercia en el espacio, así como la forma del elipsoide de inercia. Estas figuras resultan relevantes para entender el comportamiento rotacional del sistema desde una perspectiva geométrica y para validar el cambio de base hacia los autovectores del tensor.

Las figuras 4 y 5 muestran, respectivamente, la nube tridimensional de partículas con los ejes principales superpuestos, y el elipsoide de inercia centrado en el centro de masa. Esta última figura hace evidente cómo la masa se distribuye respecto a los momentos principales de inercia, representados como los semiejes del elipsoide.

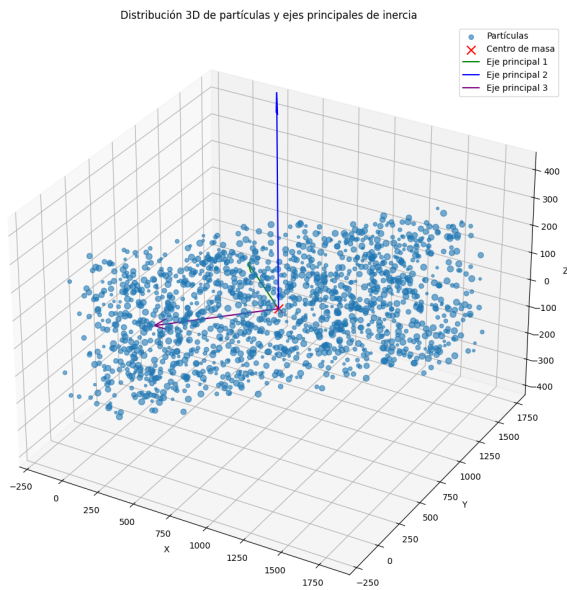


Figura 4: Distribución 3D de partículas y ejes principales de inercia.

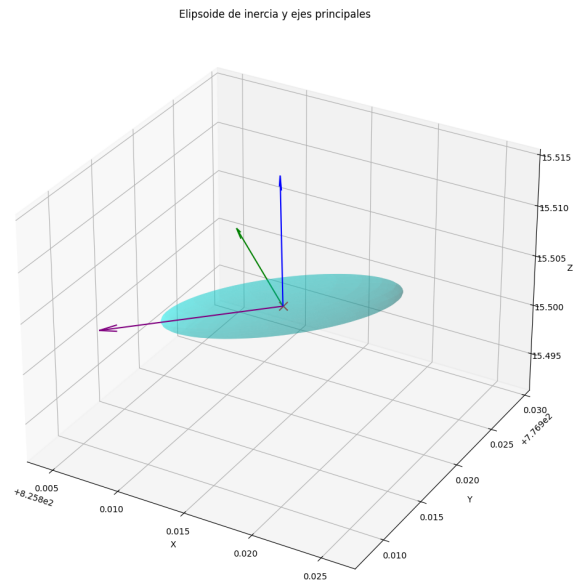


Figura 5: Representación del elipsoide de inercia en torno al centro de masa.

El centro de masa en la figura 4 se marca con una cruz roja. Los ejes principales (verde, azul, morado) corresponden a los autovectores del tensor de inercia. La orientación refleja la anisotropía espacial de la masa.

La forma del elipsoide de inercia en torno al centro de masa de la figura 5 está determinada por los momentos principales de inercia, y sus ejes por los autovectores del tensor. Esta visualización permite interpretar la resistencia rotacional del sistema en cada dirección.

La figura 6 muestra simultáneamente los ejes cartesianos originales (X, Y, Z) y los ejes principales de inercia, permitiendo observar que los segundos no se alinean con la base original. Esta discrepancia confirma que el tensor de inercia no es diagonal en la base cartesiana, y que el cambio a una base ortonormal propia es necesario para simplificar el análisis dinámico.

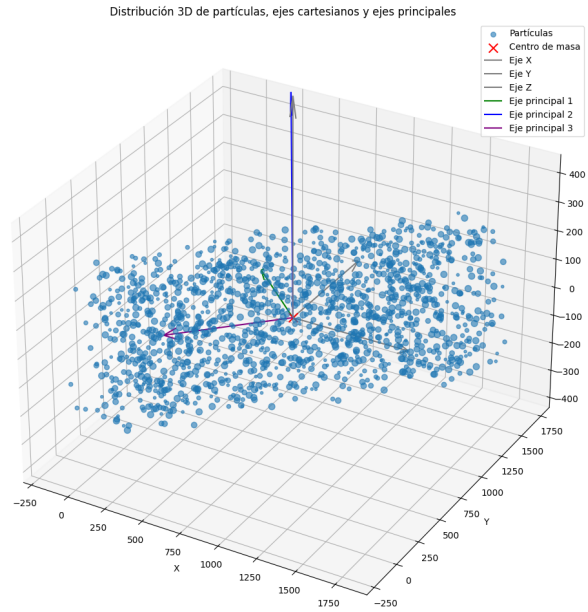


Figura 6: Comparación entre los ejes cartesianos (gris) y los ejes principales de inercia (verde, azul, morado).

La falta de alineación directa entre ambas bases confirma la presencia de productos de inercia distintos de cero, y justifica el uso de una base diagonalizada mediante autovectores.

## 4. Resultados

Este trabajo se basa en la simulación computacional de un sistema discreto de masas distribuidas en dos y tres dimensiones, con el fin de calcular sus momentos de inercia, determinar los ejes principales asociados y representar geoméricamente los resultados. El análisis se realizó mediante scripts desarrollados en Python 3, los cuales se encuentran disponibles en el repositorio de Google Colab<sup>2</sup>, garantizando la reproducibilidad del experimento. Los datos utilizados fueron leídos desde un archivo .csv accesible vía URL, conteniendo las coordenadas y masas de cada partícula.

<sup>2</sup>Url del código: <https://acortar.link/gRgBHW>

#### 4.1. Caso 2D

En el caso bidimensional, se restringió la distribución al plano  $xy$ . Se calculó el momento de orden cero (masa total), el centro de masa y el tensor de inercia 2D. Posteriormente, se obtuvieron sus autovalores y autovectores, lo que permitió determinar los momentos principales de inercia y los ejes principales del sistema.

Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 1. Se observa que la masa total fue de  $M = 26,00$  unidades, con un centro de masa ubicado en  $(84,5, 20,1)$ . Los momentos principales obtenidos ( $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ ) difieren significativamente, lo cual indica una distribución de masa que es notablemente anisotrópica. La figura 1 presenta la nube de partículas con los ejes principales superpuestos, mientras que la figura 2 complementa esta información con la elipse de inercia, que representa de forma inversa la magnitud de los momentos de inercia en distintas direcciones. La figura 3 compara los ejes cartesianos originales con los ejes principales, confirmando que el tensor de inercia no es diagonal en la base original, justificando la necesidad de rotarlo.

Las figuras y tablas incluidas en este trabajo permiten dar respuesta clara y fundamentada a las preguntas planteadas en el estudio. En primer lugar, ¿los vectores del sistema cartesiano coinciden con los autovectores del tensor de inercia? La respuesta es negativa. Esto se evidencia por la presencia de productos de inercia distintos de cero en las componentes fuera de la diagonal del tensor, lo que indica que los ejes coordenados no son ejes principales del sistema y, por tanto, no corresponden a sus direcciones de rotación desacoplada.

Luego, ¿cómo se orientan los ejes principales respecto al sistema original? Su orientación está determinada por los autovectores del tensor de inercia, los cuales definen una nueva base ortonormal propia del sistema. Esta base ha sido representada gráficamente en las figuras, lo cual evidencia la rotación necesaria para alinear los ejes con las direcciones en las que la masa está distribuida de forma más homogénea.

Finalmente, ¿qué aporta la construcción de la matriz de transformación? Esta matriz permite cambiar de la base cartesiana original a la base de autovectores, donde el tensor de inercia se vuelve diagonal. Este cambio simplifica el análisis rotacional del sistema, ya que elimina los acoplamientos entre los ejes, permitiendo estudiar el comportamiento dinámico del cuerpo en términos de rotaciones puras alrededor de ejes principales; además, garantiza una representación más natural y física de la distribución inercial del sistema.

##### 4.1.1. Resultados numéricos del caso 2D

Además del análisis gráfico, se llevó a cabo un estudio numérico detallado de la distribución de masas en el plano  $xy$ , utilizando los datos experimentales discretos y los algoritmos implementados en Python. El primer paso consistió en calcular el momento de orden cero, correspondiente a la masa total del sistema, que arrojó un valor de  $M = 4627,0$  unidades de masa. A partir de este resultado, se determinó el centro de masa del sistema utilizando medias ponderadas para las coordenadas  $x$  e  $y$ , obteniendo  $\bar{x} = 825,8152$  y  $\bar{y} = 776,9185$ .

Una vez establecido el centro de masa, se procedió a calcular el tensor de inercia bidimensional. Sus componentes se definieron respecto a dicho centro, y se encontró que:

$$I_{xx} = 963660148,2827, \quad I_{yy} = 958535598,0089, \quad I_{xy} = -911747911,3361.$$

La componente  $I_{xy}$ , correspondiente al producto de inercia, resultó ser considerablemente diferente de cero, lo cual indica que el tensor de inercia no es diagonal en la base cartesiana. Esta observación lleva a la conclusión de que los vectores del sistema de referencia original no coinciden con los autovectores del tensor, es decir, no son los ejes principales de inercia.

Para obtener una base adecuada, se resolvió la ecuación característica del tensor, hallando sus autovalores:

$$\lambda_1 = 187284938,3542, \quad \lambda_2 = 493463656,9373,$$

correspondientes a los momentos principales de inercia. Luego, se calcularon los autovectores asociados, que definieron una base ortonormal; estos al ser ortogonales y normalizados, permiten construir una matriz de transformación que cambia de la base cartesiana a la base de ejes principales:

$$R = \begin{pmatrix} 0,708100 & 0,706112 \\ -0,706112 & 0,708100 \end{pmatrix}.$$

La aplicación de esta transformación sobre el tensor de inercia permitió la obtención de una matriz diagonal, donde los productos de inercia desaparecen, confirmando que se ha llegado a una representación simplificada del sistema. En la base de autovectores, el tensor toma la forma:

$$I' = \begin{pmatrix} 187284938,3542 & 0,0000 \\ 0,0000 & 493463656,9373 \end{pmatrix},$$

lo cual respalda de forma matemática la utilidad de trabajar en una base propia. El ángulo entre el eje principal mayor y el eje  $X$  del sistema cartesiano original fue de aproximadamente  $-44,9195^\circ$ , valor que se extrajo a partir de los elementos de la matriz de transformación.

Además, se ejemplificó el uso práctico de esta transformación mediante un punto dado en coordenadas cartesianas:  $P_{\text{cart}} = (100,0,50,0)$ . Este punto se trasladó al origen relativo al centro de masa, y luego se transformó a coordenadas en la base de autovectores, obteniendo  $P_{\text{auto}} = (-0,66, -1027,24)$ . Finalmente, se invirtió la transformación y se recuperó el punto original sin pérdida de información, confirmando así la consistencia numérica del procedimiento.

Todos estos resultados pueden reproducirse mediante el código en Google Colab<sup>3</sup>, donde se encuentra implementado el análisis completo del caso 2D.

## 4.2. Caso 3D

Para el caso tridimensional, se aplicó el mismo procedimiento extendido al espacio  $xyz$ . Se calcularon los momentos de inercia  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  y los productos de inercia  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$ ,  $I_{yz}$ . Con base en ellos se construyó el tensor de inercia completo, del cual se extrajeron sus autovalores y autovectores. El ordenamiento de estos autovalores permite clasificar los ejes principales en mayor, intermedio y menor momento de inercia.

<sup>3</sup>Url del código: <https://acortar.link/gRgBHW>

Los resultados se representan en la figura 4, que muestra la nube de puntos 3D con los ejes principales superpuestos. La figura 5 presenta el elipsoide de inercia, cuya forma refleja la distribución espacial de masa respecto al centro de masa, y la figura 6 compara directamente los ejes cartesianos con los ejes principales. Como en el caso 2D, se confirma que el sistema de referencia original no coincide con la base propia del tensor.

La tabla 1 sintetiza los resultados más relevantes del análisis tridimensional, incluyendo el centro de masa en el espacio  $(x, y, z)$ , los valores numéricos de los momentos principales de inercia y la confirmación de que el tensor de inercia no es diagonal en la base cartesiana original. Tanto esta tabla como las figuras asociadas permiten responder de manera precisa a las preguntas fundamentales del estudio.

En primer lugar, ¿los vectores del sistema cartesiano coinciden con los autovectores del tensor de inercia? La respuesta es nuevamente negativa. La existencia de productos de inercia diferentes de cero evidencia que los ejes coordenados no son direcciones principales del sistema, es decir, no corresponden a una base que diagonalice el tensor.

En segundo lugar, ¿cómo se reorienta el sistema una vez diagonalizado el tensor? El sistema rota hacia una nueva base ortonormal, conformada por los autovectores del tensor de inercia. Estos definen los ejes principales del sistema, en los que las rotaciones están desacopladas y los productos de inercia se anulan. Esta reorientación se representa gráficamente en las figuras 4–6, donde se muestra cómo estos ejes principales no se alinean con los ejes cartesianos originales.

Por último, ¿qué beneficios proporciona esta transformación? El cambio de base facilita el análisis dinámico del sistema al eliminar términos de acoplamiento rotacional, permitiendo una interpretación más clara y precisa del comportamiento inercial. Además, el uso del elipsoide de inercia como herramienta visual permite representar la orientación y magnitud de los momentos principales de forma intuitiva, superando en parte las limitaciones de la representación tridimensional, que puede depender de la perspectiva del observador.

### 4.3. Resultados numéricos del caso 3D

En el análisis tridimensional se comenzó calculando el momento total del sistema ( $M = 4627,000$ ), seguido del centro de masa:  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (825,8152, 776,9185, 15,5083)$ . Luego se construyó el tensor de inercia tridimensional a partir de los datos individuales de masa y posición de cada partícula. Se obtuvieron los siguientes componentes:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= 1065530648,9880, & I_{yy} &= 1062037889,7694, & I_{zz} &= 71420848,6358, \\ I_{xy} &= -911747911,3361, & I_{xz} &= 71420848,6358, & I_{yz} &= 1929597,2371. \end{aligned}$$

Dado que los productos de inercia no son nulos, se concluye que el sistema cartesiano no es una base propia del tensor. Para encontrar los ejes principales, se calcularon los autovalores del tensor, que representan los momentos principales de inercia:

$$\lambda_1 = 1974951575,7794, \quad \lambda_2 = 1921965088,7120, \quad \lambda_3 = 1511664481,4879.$$

Los autovectores asociados a estos autovalores forman una base ortonormal y permitieron construir la matriz de transformación  $R$  que lleva de la base cartesiana a la base de ejes principales. Se verificó

su ortogonalidad mediante el producto punto entre vectores y la propiedad  $RR^T = I$ , cumpliéndose en ambos casos.

Una vez diagonalizado el tensor, su forma en la nueva base fue:

$$I' = \begin{pmatrix} 1974951575,7794 & 0 & 0 \\ 0 & 1921965088,7120 & 0 \\ 0 & 0 & 1511664481,4879 \end{pmatrix},$$

lo cual evidencia que los productos de inercia desaparecen en la base propia. Este resultado confirma numéricamente que los autovectores del tensor definen una base más adecuada para el análisis inercial del sistema.

Adicionalmente, se determinaron los ángulos de Euler que describen la orientación de los ejes principales respecto a los cartesianos. Los valores obtenidos fueron:

$$\text{Yaw} = 135,0946^\circ, \quad \text{Pitch} = 4,0679^\circ, \quad \text{Roll} = 89,7921^\circ.$$

Estos ángulos permiten una interpretación tridimensional clara de la rotación del sistema. Los resultados completos y reproducibles, incluidos los códigos, pueden consultarse en el siguiente enlace<sup>4</sup>.

## 5. Conclusiones

En primer lugar, se recalca que el principal aporte de este trabajo radica en la implementación de una metodología computacional eficiente y reproducible para el análisis de distribuciones discretas de masa, orientada a determinar de forma precisa sus momentos de inercia, ejes principales y matrices de transformación asociadas. Esta aproximación no solo permitió validar conceptos teóricos, como la diagonalización del tensor de inercia y la identificación de autovectores como ejes principales, sino que también facilitó una visualización clara de la estructura interna de sistemas sin simetría evidente, tanto en dos como en tres dimensiones.

Los principales resultados a continuación:

- Se calcularon los tres primeros momentos de masa a partir de los datos experimentales discretos: el momento total (orden cero) como la suma directa de todas las masas de forma individual (3), el centro de masa (orden uno) mediante una media ponderada de las coordenadas espaciales (5), y el tensor de inercia (orden dos), definido como una matriz simétrica que cuantifica la resistencia del sistema a la rotación en torno a distintos ejes (6). Estos momentos no solo representan propiedades globales del sistema, sino que también reflejan su estructura interna y distribución espacial de masa.
- Se demostró que el tensor de inercia obtenido no es diagonal cuando se expresa en la base cartesiana original, tanto en el análisis bidimensional como tridimensional. Esto se evidenció

<sup>4</sup>Url del código: <https://acortar.link/gRgBHW>



por la presencia de productos de inercia distintos de cero en las componentes fuera de la diagonal (por ejemplo,  $I_{xy} \neq 0$ ), como se observa en la tabla 1. Este resultado implica que los ejes coordenados no coinciden con los ejes principales del sistema, y justifica matemáticamente la necesidad de una transformación de base.

- Se identificaron los ejes principales del sistema mediante el cálculo de los autovalores y autovectores del tensor de inercia. Los autovalores corresponden a los momentos principales de inercia, mientras que los autovectores definen direcciones privilegiadas del espacio —los ejes principales— en las que el sistema rota sin acoplamientos entre ejes. A partir de estos vectores, se construyó una matriz de transformación ortonormal que permite representar el sistema en una base en la que el tensor es diagonal, como se muestra en las tablas 2 y en las figuras 3 y 6.
- Se validó que los autovectores forman una base ortonormal verificando que satisfacen la propiedad de ortogonalidad ( $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$  para  $i \neq j$ ) y que su matriz de transformación cumple  $RR^T = I$ . Esta base ortonormal es relevante en física porque preserva la geometría del espacio, y al mismo tiempo permite desacoplar los ejes de rotación, facilitando el análisis dinámico de cuerpos rígidos. La ortogonalidad fue además respaldada de forma gráfica por la visualización de los ejes principales como vectores mutuamente perpendiculares.
- Se ilustró el proceso completo de transformación de coordenadas desde el sistema cartesiano hacia la base de autovectores. Esta transformación permitió la representación de puntos, distribuciones y rotaciones en el nuevo sistema de referencia, simplificando el análisis físico del sistema. En particular, se verificó que al transformar un punto a la nueva base y luego revertir la transformación, se recuperan las coordenadas originales sin pérdida de información, lo cual valida tanto la consistencia matemática del procedimiento como su implementación computacional para los casos 2D y 3D.

Desde una perspectiva interpretativa, estos resultados permiten responder de forma clara las preguntas planteadas en el estudio. La no coincidencia entre la base cartesiana y la base propia del tensor de inercia se refleja en la aparición de productos de inercia, y su eliminación mediante la diagonalización del tensor valida la necesidad de realizar un cambio de base. La comparación visual entre los ejes cartesianos y los ejes principales (figuras 3 y 6), así como las visualizaciones de la elipse y el elipsoide de inercia, refuerzan esta conclusión.

Además, los ángulos de Euler calculados en el caso 3D permiten interpretar geoméricamente la orientación del sistema rotado respecto a la base original.

En cuanto a la importancia de estos resultados, esta asignación proporciona una herramienta visual y computacional que puede extenderse a estudios más complejos. La metodología es aplicable a sistemas con mayor número de partículas, a condiciones dinámicas, o incluso a distribuciones continuas discretizadas. En este sentido, se abre la posibilidad de integrarlos a contextos de múltiples disciplinas donde los momentos de inercia son importantes.

## Referencias

- [1] R. Douglas Gregory. *Classical Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [2] Dwight E. Neuenschwander. *Tensor Calculus for Physics: A Concise Guide*. A Johns Hopkins Press paperback. Johns Hopkins University Press, 2014. First edition.
- [3] Luis A. Núñez. Taller de momentos de inercia y autovalores.