Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería:

Informe Tarea n° 1

María Constanza Flores V.

24 de septiembre de 2015

1. Pregunta 1

1.1. Introducción

Se tienen los datos correspondientes a longitudes de ondas asociadas a una cierta intensidad (en unidades de potencia por unidad de área por unidad de longitud de onda), y a partir de dichos datos se busca graficar el espectro solar.
Es importante destacar que para realizar dicho gráfico, las unidades de los datos deben respetar la convención astronómica, es decir, usar unidades de cgs para el flujo y de Angstrom [$\mathring{A}$] para la longitud de onda.

1.2. Procedimiento

Para poder realizar el gráfico antes mencionado, en primera instancia deben cargarse los datos del archivo `sun_AM0.dat`, lo que es realizado a través de la rutinas `numpy.loadtxt('sun_AM0.dat', usecols=[0])` para obtener las longitudes de onda, y `numpy.loadtxt('sun_AM0.dat', usecols=[1])` para obtener las intensidades. Sus unidades son [nm] y [$\frac{W}{m^2 nm}$] respectivamente.
Luego de esto, se procede a hacer un cambio de unidades, para lo cual se hacen las siguientes consideraciones:

- 1 [nm] = $10[\mathring{A}]$
- 1 [W] = $10^7[\frac{ergs}{s}]$
- 1 [m^2] = [10^4] cm

Es por ello que la longitud de onda debe multiplicarse por 10, y la intensidad debe ser multiplicda por 100.

Finalmente se grafica mediante el módulo `matplotlib`.

1.3. Resultados

A continuación la Figura 1 presenta el gráfico obtenido:

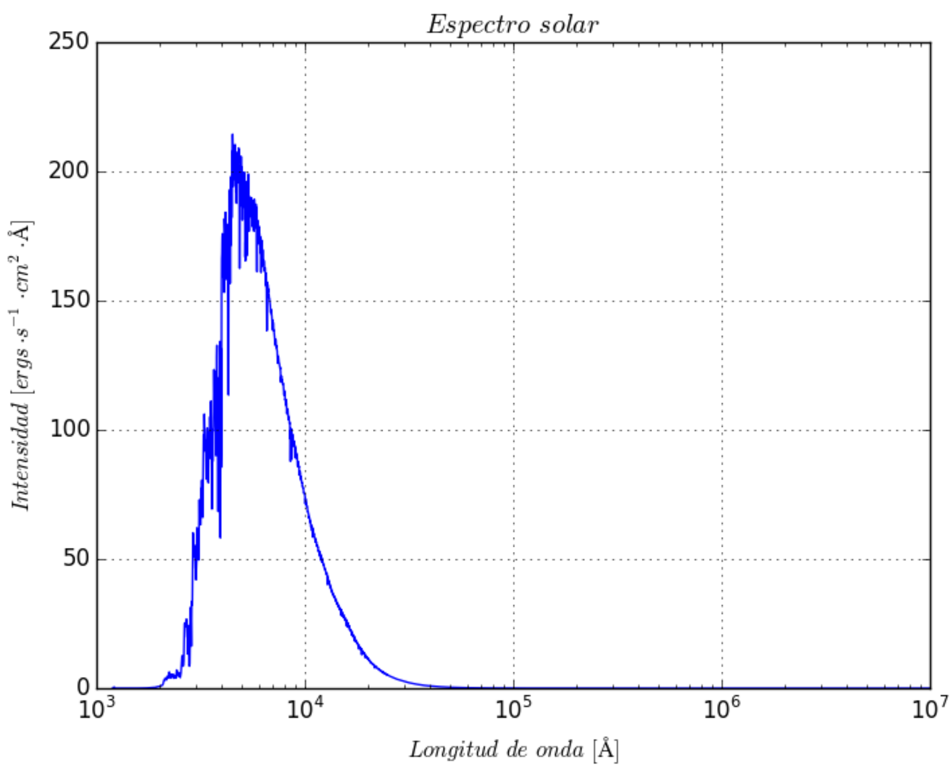

Figura 1: Espectro Solar

1.4. Conclusiones

Se concluye que el espectro solar tiene un máximo.

2. Pregunta 2

2.1. Introducción

En esta sección de la tarea, se busca obtener la luminosidad del sol a través de los datos antes mencionados del espectro solar.
Para ello es necesario integrar el espectro solar (es decir, calcular el área bajo la curva del gráfico de la Figura 1), para así obtener la constante solar. Luego, es posible obtener la luminosidad mediante la siguiente fórmula:

$$L_s = k \cdot S = 4\pi k a_u^2 \tag{1}$$

Con a_u la unidad astronómica, L_s la luminosidad solar y k la constante solar.

2.2. Procedimiento

Para el cálculo de la integral se utiliza un método de integración numérico denominado la Regla del Trapecio, la cual está dada por la siguiente aproximación:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2}$$

La cual corresponde a la Regla de trapecio simple (es decir, para sólo dos puntos). En particular, para éste problema se procedió a hacer el siguiente análisis, el cual fue llevado a un código en Python posteriormente:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \tag{3}$$

Por lo que se utiliza n-1 veces la aproximación (2):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n-1} (x_{i-1} - x_i)\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} \tag{4}$$

Ese razonamiento es llevado al código `p2.py`, en el cual es definido como la función `trapecio`, que tiene como parámetros dos arreglos (que corresponderían a los $x_i y f(x_i)$), y el numero de particiones; y retorna el valor de la sumatoria de (4).

2.3. Resultados

Al evaluar la funcion trapecio en los datos del espectro solar, se obtiene que la constante solar es igual a

$$k = 1366{,}09079684 \left[\frac{W}{m^2}\right] \tag{5}$$

.

Y a partir de dicho valor, se obtiene que la luminosidad solar es:

$$L_s = k \cdot 4 \cdot \pi \cdot a_u^2 = 3{,}84184866671 \cdot 10^{26}[W] \tag{6}$$

2.4. Conclusiones

Los resultados obtenidos son bastantes cercanos a los teóricos, siendo éstos: k=1366 y $L_s = 3{,}65 \cdot 10^{26}$. Los errores están asociados al método de integración, y tambien a errores en la medición

3. Pregunta 3

3.1. Introducción

Utilizando el metodo de integración numérica denominado la Regla de Simpson, se pretende calcular la integral de la función de PLanck:

$$B_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2/\lambda^5}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \tag{7}$$

donde h es la constante de Planck, c la velocidad de la luz en el vacío, k_B es la constante de Bolzmann, T es la temperatura del cuerpo negro y λ es la longitud de onda. Al integrarla a lo largo de todas las longitudes de onda ($\lambda : 0 \to \infty$) y evaluarla en la temperatura del sol (5778 K), se puede estimar la energia total por unidad de area.
Con dicha información, más la luminosidad solar calculada en la Pregunta 2, es posible estimar el radio del sol, puesto que:

$$L_s = 4\pi R_s^2 \sigma T_s^4 \tag{8}$$

Despejando el radio del sol, se obtiene:

$$R_s = \sqrt{\frac{L_s}{4\pi\sigma T_s^4}} \tag{9}$$

en donde σT_s^4 corresponde a la energía total por unidad de área.

3.2. Procedimiento

Para el cálculo de la integral, se utilizan dos métodos numéricos: la regla de Simpson y la regla del punto medio. // La regla de Simpson compuesta está dada por la siguiente aproximación:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6,\ldots}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)\right] \tag{10}$$

Y la para regla del punto medio se utiliza la siguiente aproximación:

$$\int_a^b f(x)dx \sim (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{11}$$

Lo que se busca integrar es la función de Planck dada en (7) a lo largo de todos los valores posibles de longitud de onda:

$$\int_0^\infty \frac{2\pi hc^2/\lambda^5}{e^{hc/\lambda k_B T}-1} d\lambda \tag{12}$$

Para ello se realiza el cambio de variable $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$ $d\lambda = \frac{-hcdx}{x^2 k_B T}$, con lo que, luego de simplificar los y reagrupar los términos, queda la siguiente integral:

$$P = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \tag{13}$$

La cual es una integral impropia, por lo que se le realiza el cambio de variable $x = tan(y)$ para dejar en valores reales sus límites de integración.

$$P = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tan^3(y)sec^2(y)}{e^{tan(y)} - 1} dy \tag{14}$$

La función de la integral se indefine en los puntos $y = 0$ e $y = \frac{\pi}{2}$, por lo que en dichos puntos no se puede usar la Regla de Simpson, la cual utiliza explícitamente los puntos de los extremos, como puede verse en (10).Es por esto que al iterar, la primera y última iteración son asiladas para utilizar con ellas y los puntos de los extremos el método del punto medio.

Con el razonamiento anterior se define la función `simpson_puntomedio`, la cual tiene como parámetros los límites de la integral, el numero de particiones deseado y la función a integrar.
Se sabe que la integral de (13) corresponde a $\frac{\pi^4}{15}$, por lo que al restar el valor obtenido numériccamente de ésta con $\frac{\pi^4}{15}$, y pedirle a dicho valor que no supere el valor de 0.0001, se puede encontrar un valor adecuado de particiones.

3.3. Resultados

El numero de particiones obtenido para la condición antes mencionada corresponde a 70.
Al multiplicar el valor de la integral calculada para 70 particiones por las constantes, y se obtiene que la energía total por unidad de area emitida por un cuerpo negro con T=5778 [K] es igual a 63200689.7528 $\frac{J}{m^2 s}$.
Del valor obtenido para la luminosidad del sol en la pregunta 2, y la ecuación (9), se obtiene que el radio solar calculado es 695511452 [m]

3.4. Conclusiones

Se concluye que el valor obtenido es bastante cercado al valor real, que corresponde a

4. Pregunta 4

4.1. Introducción

En esta parte de la tarea se busca realizar las mismas integrales que en la pregunta 2 y en la pregunta 3, mediante los métodos `scipy.integrate.trapz` y `scipy.integrate.quad` respectivamente, para luego compararlas, y comparar la diferencia de tiempo que tardan las funciones en realizar dicho cálculo (tanto de las preguntas 2, 3 y 4)

4.2. Procedimiento

Se utilizan directamente los métodos `scipy.integrate.trapz` y `scipy.integrate.quad` . El primero se utiliza con los arreglos obtenidos en la pregunta 2, y el segundo con la función definida en la pregunta 3, y los límites de integración 0.0001 (para que no se indefina) y $\frac{\pi}{2}$
Para medir el tiempo tardado, se utiliza el comando %`timeit` directamente en la consola de ipython.

4.3. Resultados

El equivalente a la integral de la pregunta 2, pero calculado con `scipy.integrate.trapz`, da un valor de 1366.09079684. Y el tiempo que demora en calcularlo son 195 por loop (el mejor de tres)

Por otro lado el equivalente a la integral de la pregunta 3, pero calculado con `scipy.integrate.quad`, da un valor de 6.49393940227. Y el tiempo que demora en calcularlo son 9.7[ms]por loop (el mejor de tres).

De la pregunta 2 y 3, el tiempo que demora en calcular las funciones corresponde a 10.2[ms] y 3.01 [ms] respectivamente

4.4. Conclusiones

Las diferencias de tiempo son debidas a que las funciones de python están más optimizadas