Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería:

Informe Tarea n° 2

María Constanza Flores V.

1 de octubre de 2015

El propósito de esta tarea es modelar el comportamiento que tiene una partícula que se mueve verticalmente en el eje Y rebotando contra usuelo que oscila sinusoidalmente con amplitudd A y frecuencia ω
El choque contra el suelo es inelástico, y sigue la siguiente regla:

$$v_p'(t^*) = (1+\eta)v_s(t^*) - \eta v_p(t^*) \tag{1}$$

En donde t^* es el tiempo en que ocurre el choque de la partícula con el suelo,v_p y $v_p'(t^*)$ corresponden a la velocidades de la partícula justo antes y justo despues del bote, v_s es la velocidad del suelo en ese mismo instante y η es un coeficiente de restitución.

1. Pregunta 1

1.1. Introducción

En esta sección de la tarea, se pretende escribir un código que permita calcular los valores y_{n+1} y v_{n+1}, es decir, la posición y la velocidad de la partícula luego del choque n+1, dados los valores de y_n y v_n.
Para ello, se tienen como parámetros del problema: A, ω, η, m, y g. Y para simplificarlo, se adimensionaliza dándole valores de A=1, m=1 y g=1. También se da como condición inicial que la partícula parte pegada al suelo (y_0=0).

1.2. Procedimiento

Para poder encontrar los parámetros antes mencionados, en primera instancia debe buscarse el tiempo en el cual ocurre el bote. Para lograr esto se definen las siguientes funciones:

- `y_suelo` y `v_suelo`: funciones que entregan la ecuación de posición en función del tiempo del suelo, y la ecuación de velocidad en función del tiempo del mismo, es decir, retorna lo siguiente:

$$y_s(t) = A \cdot sin(\omega t) \tag{2}$$

$$v_s(t) = A \cdot \omega \cdot cos(\omega t) \tag{3}$$

- `y_pelota` y `v_pelota`: funciones que entregan la ecuaciones de posición y velocidad en función del tiempo de la partícula, es decir:

$$y_p(t) = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{4}$$

$$v_p(t) = v_0 - gt^2 \tag{5}$$

- `resta`: función que retorna la diferencia entre la posición de la particula y la posición suelo. Esta función es importante pues muestra la distancia que hay entre el suelo y la partícula, y cuando dicha distancia es cero es cuando se produce el choque, por lo que para encontrar el tiempo t^* se buscan los ceros de esta función.

- `v_despreb`: la cual retorna la velocidad después del rebote de la partícula dada por la condición en la ecuación (1).

Luego de esto se procede a escribir la rutina que permite encontrar lo pedido. A esta rutina se le denomina `nmasuno`.
En primer lugar, en `nmasuno` se busca calcular el tiempo en que ocurre el choque n+1, dado el tiempo en que ocurrió el choque n. Para ello se utiliza el método de Brent para buscar ceros de funciones. Debido a que el método de Brent requiere de dos tiempos (uno en el cual la funcion sea positiva y el otro en que sea negativa) es necesario encontrar dichos tiempos también, para lo cual se recorre con un paso pequeño desde el tiempo del choque anterior hasta que la funcion `resta` se vuelva negativa (cuando la pelota atraviesa el suelo), con lo que se tiene uno

de los tiempos, y el otro se define devolviéndose en el recorrido recién mencionado. También se impone la condición de que si el primer tiempo encontrado es negativo, y el segundo (que debe ser menor al primero) también lo es, es debido a que la pelota no ha vuelto a rebotar, por lo que se le entrega una velocidad nula y la posición del suelo.
Finalmente, luego de encontrar el tiempo de choque con la funcion `scipy.optimize.brentq` se definen y_{n+1} y v_{n+1} evaluando `y_pelota` y `v_despreb` en dicho tiempo.

1.3. Conclusiones

Debido a errores varios durante la escritura del código, es importante recalcar que el tiempo utilizado para calcular la posición de la pelota es distinto al tiempo de la posición del suelo, ya que $y_p(t)$ es una función de una parábola (es decir, un solo bote), por lo que el tiempo de la partícula debe ser reiniciado luego de cada bote.

2. Preguntas 2 y 3

2.1. Introducción

En estas secciones de la tarea, se busca estimar N_{relax}, el número de botes necesarios para relajar el sistema. Para ello, se utiliza $\eta = 0{,}15$ y distintos valores para la frecuencia entre $\omega = 1{,}66$ y $\omega = 1{,}70$

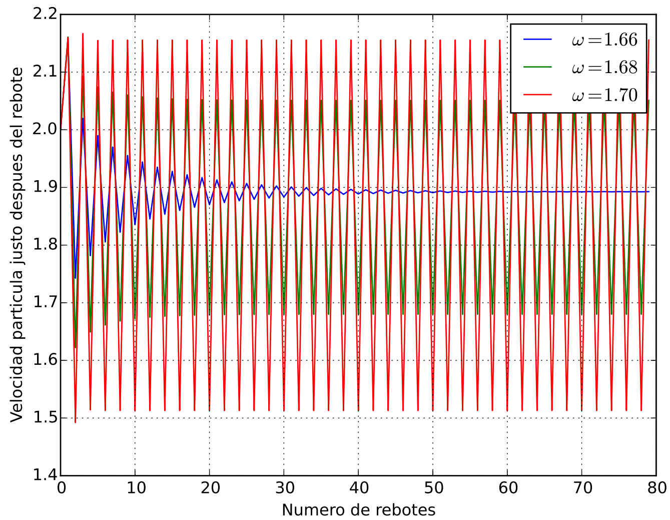
2.2. Procedimiento

Como se pide una estimación del valor de N_{relax}, se procede a graficar los valores de las velocidades después de cada choque i, versus el número i de choque, y con ello se llega a un numero aproximado de botes realizados hasta que dicha velocidad se estabiliza.

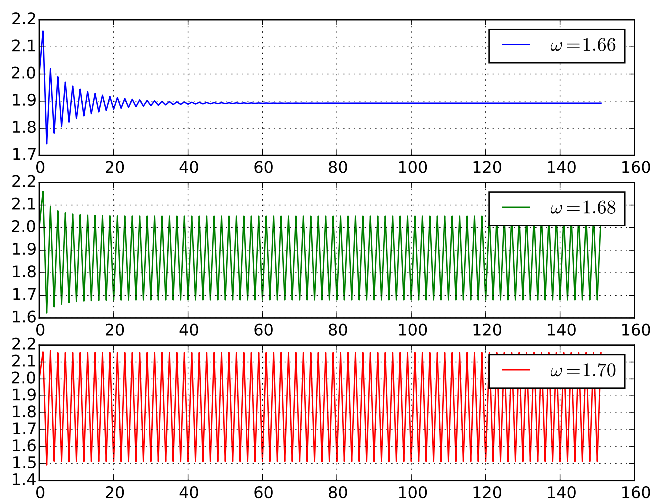
Ese razonamiento es llevado a la función `Nrelax`, la que retorna los valores de la velocidad y un arreglo con el número de choque asociado a cada una de ellas, lo que posteriormente se grafica.

2.3. Resultados

Al graficar lo anteriormente dicho para η = 0,15 y ω = 1,66, ω = 1,68, ω = 1,70, y una velocidad inicial v_0=2, se obtiene la Figura 1:



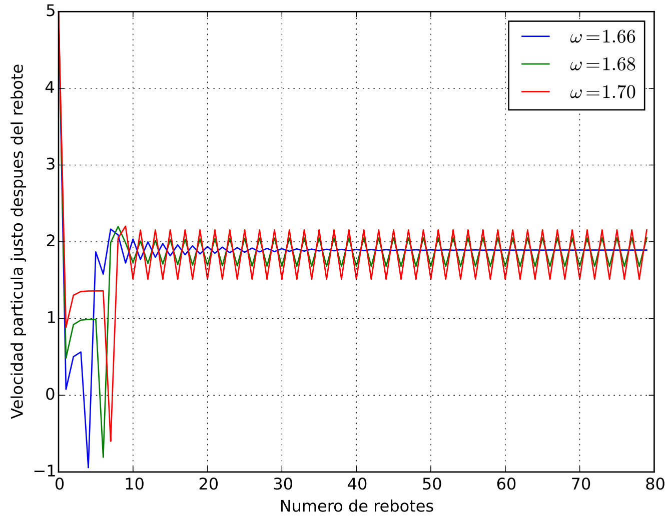
(a) Superposición de los gráficos



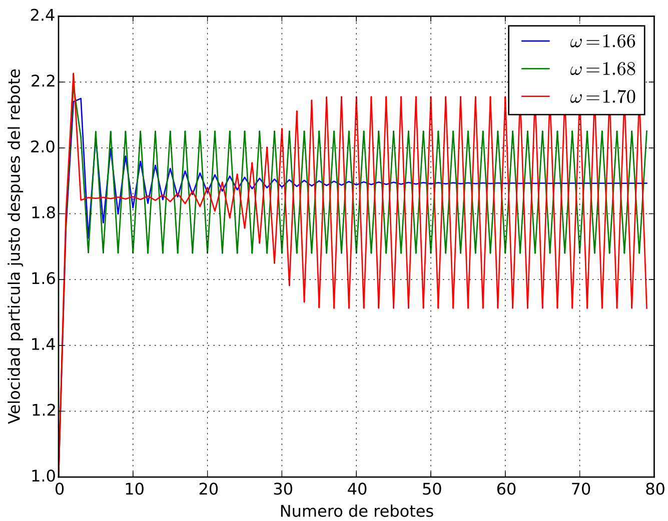
(b) División de los plots

Figura 1: Gráficos obtenidos para estimar N_{relax} ,

Al graficar con otros valores de velocidad, se obtienen los plots mostrados en la Figura 2, en donde se utiliza una velocidad inicial mucho mayor y una menor a la frecuencia.



(a) Para v_0=20



(b) Para v_0=1

Figura 2: Gráficos obtenidos para estimar N_{relax}, para distintas $v_0$de la partícula

2.4. Conclusiones

Se decidieron utilizar los valores de velocidad inicial antes mencionados debido a que dependiendo de su cercanía o lejanía del valor de ω variaría su comportamiento. Por ejemplo, para valores muy lejanos a ω, como es el caso de v_0=20 (o mayor), el número de botes necesario para relajar el sistema era bajo, aproximadamente 10 botes, y relativamente parecido para los distintos valores de ω utilizados.

En cambio, para un valor menor de v_0 con respecto a ω, se tiene que la estimación de N_{relax} varía notablemente si se cambia la frecuencia ω utilizada, por lo que la estimación de N_{relax} va desde los 5 botes hasta los 50 aproximadamente.

Por último para el valor de v_0 se tiene que para una frecuencia omega pequeña ($\omega = 1{,}66$), el número de botes necesario para relajar el sistema es cercano a los 40 botes, y por otro lado, al aumentar omega a 1.68 o 1.70, N_{relax} es cercano a los 5 botes o menos.

La amplia diferencia obtenida para la estimación de N_{relax} es debido a lo caótica que pueden ser las soluciones de este sistema, y a que hay muchas variables involucradas en él (de las cuales algunas fueron simplificadas igualándolas a 1).

3. Pregunta 4

3.1. Introducción

Continuando con el valor de $\eta = 0{,}15$, en esta pregunta se pide graficar las velocidades de la particula justo despues del choque n, n+1, n+2,...n+49, con n=2 $\cdot$ N_{relax} (es decir, n un choque bastante posterior a la relajación del sistema), versus distintos valores de ω entre 1.66 y 1.70.

3.2. Procedimiento

Para realizar el gráfico pedido, se procede a hacer una iteracion en la que se fuese variando el valor de omega, pudiendo tomar los 5 valores que hay entre 1.66 y 1.70, y en la cual se utiliza la funcion `Nrelax` antes mencionada, se guardan los valores de la velocidad para un número muy mayor con respecto al N_{relax} obtenido para cualquier velocidad inicial, y se hace un arreglo en donde se guarde el valor de ω utilizado. Ambos arreglos utilizados, se grafican mediante la funcion matplotlib.pyplot.scatter.

3.3. Resultados

Los gáficos obtenidos para $v_0 = 1$, $v_0 = 2$ y $v_0 = 20$, se muestran el la Figura 3, Figura 4 y Figura 5 respectivamente

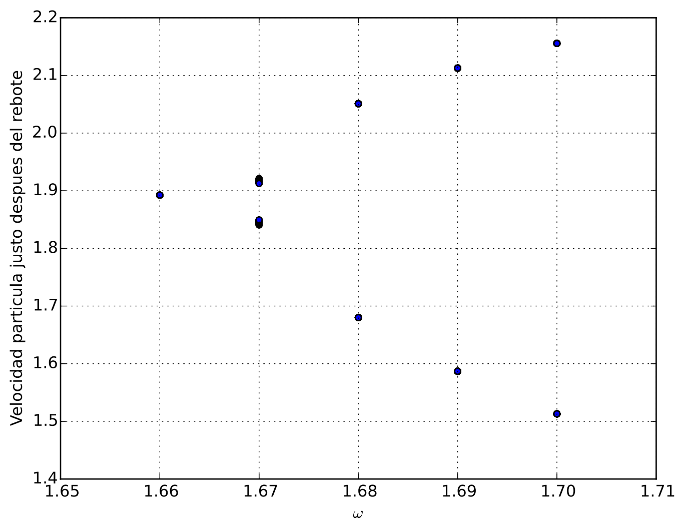


Figura 3: Frecuencia versus velocidad de la partícula después del bote, con $v_0 = 1$

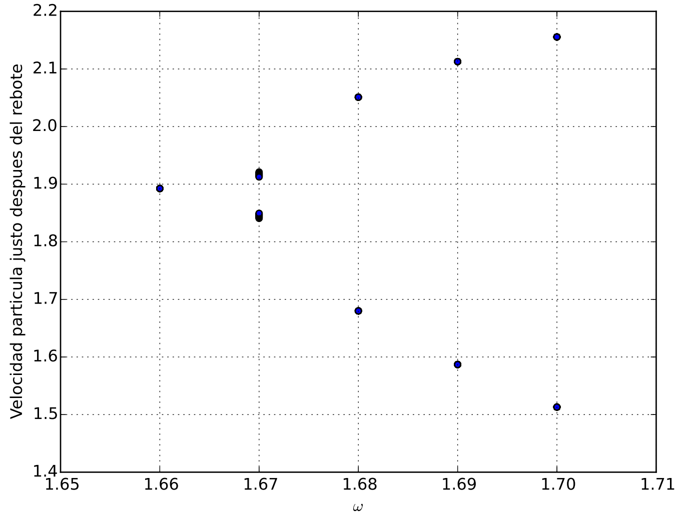


Figura 4: Frecuencia versus velocidad de la partícula después del bote, con $v_0 = 2$

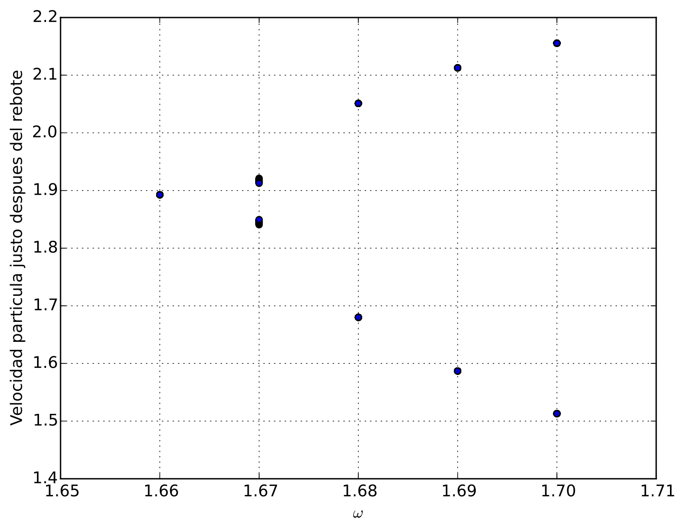


Figura 5: Frecuencia versus velocidad de la partícula después del bote, con $v_0 = 20$

3.4. Conclusiones

Se puede ver que los tres gráficos mostrados tienen una conducta igual, independiente de la condición inicial de velocidad entregada. Debido a esto, se concluye que para un numero muy grande de botes, todas las soluciones convergen al mismo valor de velocidad.

Otro comportamiento destacado en dichos gráficos es que independiente de que se hayan graficado 50 puntos para cada valor de ω, sólo se ve un punto, por lo que se concluye que esos 50 puntos tienen una diferencia tan mínima entre si que a simple vista se ven todos concentrados Esto es debido a que se está trabajando con velocidades posteriores a la estabilización del sistema, por lo que tiene sentido que sean muy parecidas entre si.