Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería:

Informe Tarea n° 3

María Constanza Flores V.

Rut: 19.077.795-2

8 de octubre de 2015

1. Pregunta 1

1.1. Introducción

La siguiente ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu(x^2 - a^2)\frac{dx}{dt} \tag{1}$$

Corresponde al oscilador de van der Pool, propuesto para describir la dinámica de algunos circuitos eléctricos.

En ella, k corresponde a la constante elástica, μ es el coeficiente de roce.

Se busca realizar un cambio de variable a dicha ecuación diferencial, tal que quede en función de un único parámetro, y posteriormente integrar numericamente esta nueva ecuacion, utilizando el método de Runge-Kutta de orden 3.

1.2. Procedimiento

En primera instancia para poder resolver numéricamente la ecuación diferencial mostrada en (1), se procede a hacer el siguiente cambio de variable: $y(s) = \frac{x(t)}{a}$y $s = t \cdot \sqrt{k}$, con lo que se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
&1)\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d(ay)}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ady}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{ds}\cdot a\sqrt{k}\right) = ak\frac{d^2y}{ds^2}\\
&2)kx = kya\\
&3)\mu(x^2-a^2)\frac{dx}{dt} = -\mu((ay)^2-a^2)\frac{d(ay)}{dt} = a^3\mu(y^2-1)\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = a^3\mu\sqrt{k}(y^2-1)\frac{dy}{ds}
\end{aligned}
$$

Reemplazando lo obtenido en los tres puntos anteriores en la ecuación (1), se obtiene:

$$ak\frac{d^2y}{ds^2} = -kya - a^3\mu\sqrt{k}(y^2-1)\frac{dy}{ds}$$

Lo que finalmente se traduce a la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -y - \mu^*(y^2-1)\frac{dy}{ds} \tag{2}$$

en donde $\mu^* = \frac{a^2\mu}{\sqrt{k}}$

Para esta tarea se especificó que $\mu^* == 1.RRR$, donde RRR son los 3 últimos dígitos del RUT de cada alumno antes del guión. Debido a eso, se toma el valor de $\mu^* == 1{,}795$

Se puede dividir la ecuación 2 en un sistema de ecuaciones como se muestra a continuación:

$$\frac{dy}{ds} = v$$

$$\frac{dv}{ds} = -\mu^*(y^2-1) - y$$

Teniendo este sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, es posible utilizar el método de Runge Kutta para poder integrarlos numéricamente.
El método de Runge Kutta de orden 3 esta dado por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \tag{3}$$

En donde

$$
\begin{aligned}
&K_1 = hf(x_n, y_n)\\
&K_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}K_1)\\
&K_3 = hf(x_n + h, y_n - K_1 - 2K_2)
\end{aligned}
$$

Finalmente, todo el desarrollo teórico anterior se lleva a un código de python (`p1.py`). Debido a que se está resolviendo el sistema en forma matricial, como muestra la ecuación (bla), se define en el código la función
`f`, la cual retorna dos valores.

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} y \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dy}{ds} \\ -y - \mu^*(y^2-1)\frac{dy}{ds} \end{pmatrix} \tag{4}$$

También se definen funciones para obtener los valores de K_1, K_2 y K_3, necesarios para utilizar el método de Runge-Kutta; y por último se define `rk3_step`, con la que se obtiene el valor de y_{n+1} (ver ec (3)).

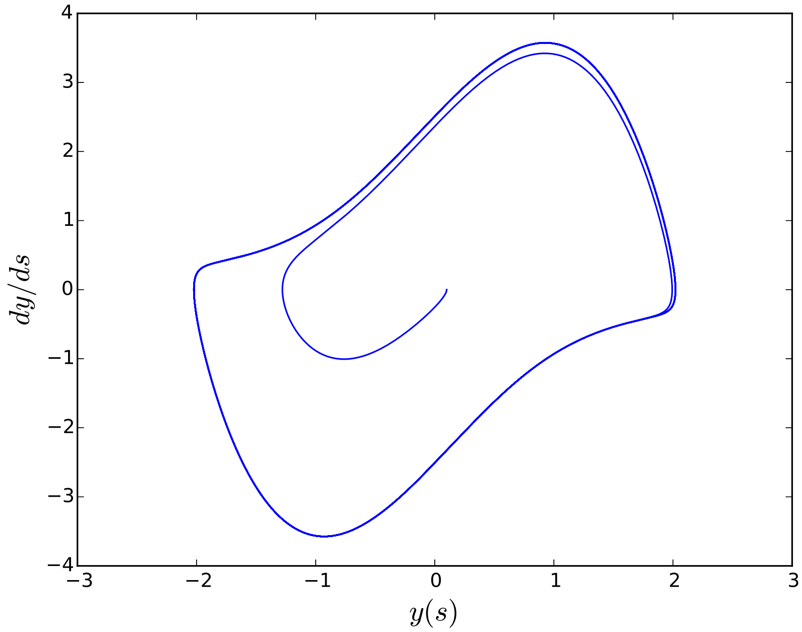
Luego de eso, se definen dos conjuntos de condiciones iniciales:

$$\frac{dx}{ds} = \sigma(y-x)$$
$$\frac{dy}{ds} = x(\rho-z)-y$$
$$\frac{dz}{ds} = xy-\beta z$$

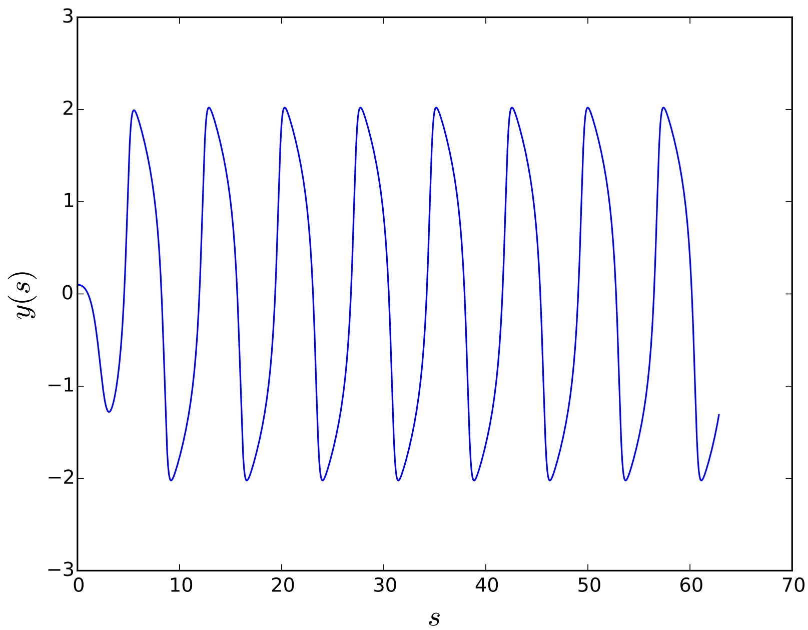
por lo que se itera dos veces, para obtener dos conjunto de soluciones distintas. Los valores obtenidos son graficados.

1.3. Resultados

Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 1 y Figura 2

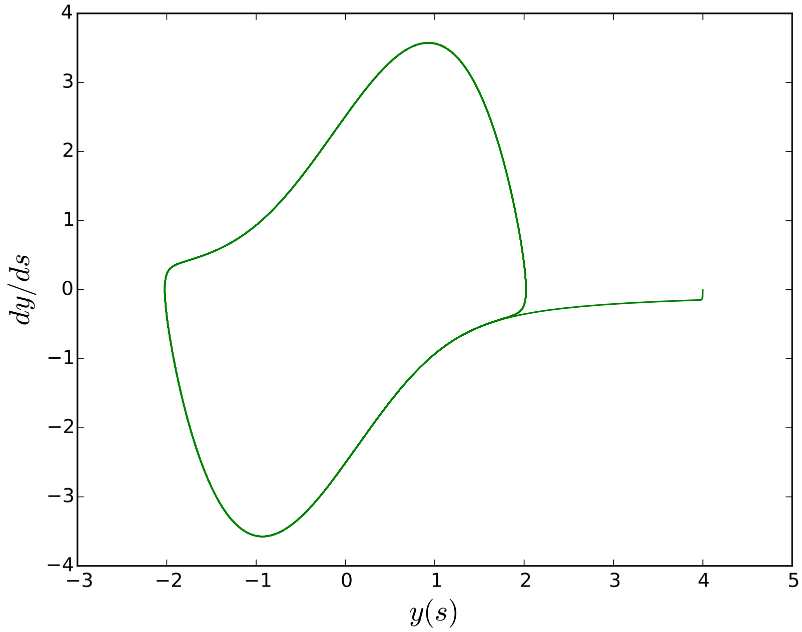


(a) Gráfico de $\frac{dy}{ds}$ en función de s

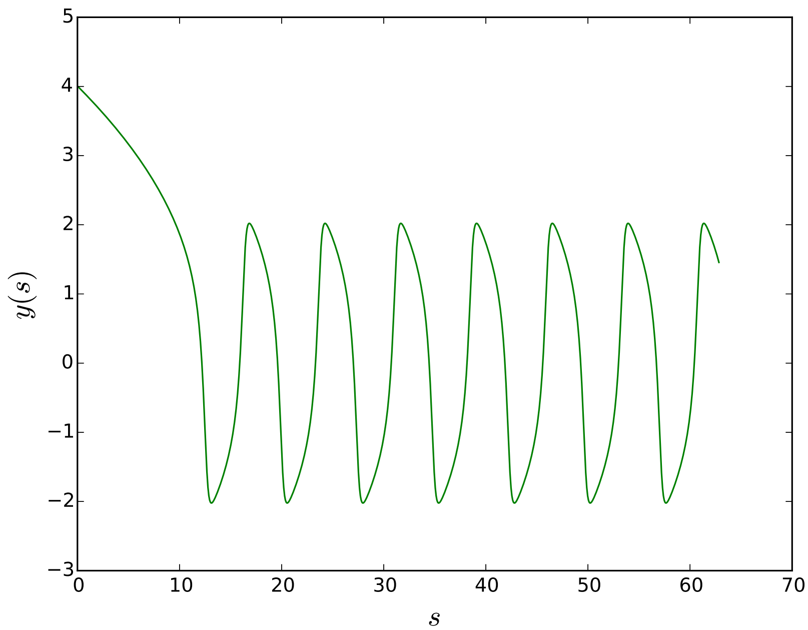


(b) Gráfico de y en función de s

Figura 1: Solución al oscilador de Van der Pool, con condiciones iniciales: $\dfrac{dy}{ds} = 0; y = 0{,}1$



(a) Gráfico de $\frac{dy}{ds}$ en función de s



(b) Gráfico de y en función de s

Figura 2: Solución al oscilador de Van der Pool, con condiciones iniciales: $\dfrac{dy}{ds} = 0; y = 4$

1.4. Conclusiones

Como se puede ver en el gráfico (a) de la Figura 1, éste comienza en un punto cercano al 0 (consistente con su condición inicial $y(s) = 0$), y luego, cercano al punto $y(s) = 2$ converge a un ciclo. Y si se ve el gráfico (b) de la misma figura, cuando $y(s) = 2$ el gráfico entra a un estado estacionario.

El mismo comportamiento se puede ver en la Figura 2, en donde únicamente cambian las condiciones iniciales, pero converge al mismo estado.

2. Pregunta 2

2.1. Introducción

En esta pregunta se busca encontrar la solución del Sistema de Lorenz, utilizando alguno de los algoritmos disponibles en `scipy.integrate`, con el método numérico de Runge Kutta de orden 4. El sistema de Lorenz está dado por:

$$\frac{dx}{ds} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{ds} = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{dz}{ds} = xy - \beta z$$

Y los parámetros a utilizar son $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ y $\rho = 38$.

2.2. Procedimiento

Se utiliza el método de *dopri5*, de la librería `scipy.integrate`. En él se utiliza la función

$$f = (\sigma(y - x), x(\rho - z) - y, xy - \beta z)$$

Y las condiciones iniciales utilizadas fueron: $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ y $z_0 = 1$

Luego de utilizar el método numérico para resolver las ecuaciones diferenciales, se graficó el valor de x,y,z en 3D.

2.3. Resultados

El gráfico obtenido se muestra en la Figura 3

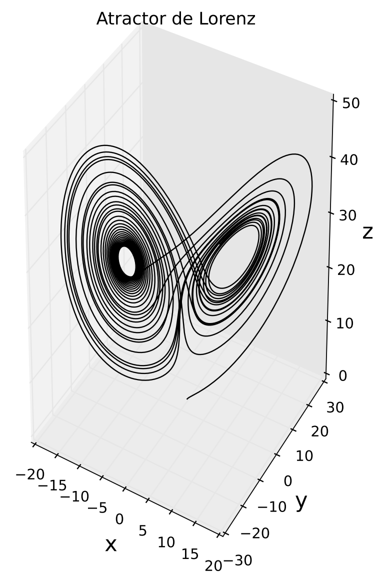


Figura 3: Atractor de Lorenz

2.4. Conclusiones

Se obtiene el gráfico esperado de Lorenz, es decir, con forma caótica (y asociado a una mariposa). Además es posible, debido a lo anterior, afirmar que el método utilizdo funciona de manera correcta.